ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА
JOURNAL OF NUCLEAR PHYSICS
т. 35, вып. 2, 1982

КОНИЧЕСКАЯ РЕФРАКЦИЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ $^1/_2$

СТЕПАНОВСКИЙ Ю. П.

ХАРЬКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ АН УССР

(Поступила в редакцию 10 апреля 1981 г.)

Рассматриваются квазиклассические уравнения движения нейтральной частицы со спином $^1/_2$, обладающей аномальным магнитным моментом. Проанализировано движение частицы в постоянном и однородном электромагнитном поле. Показано, что при некоторых условиях происходят явления, аналогичные внутренней и внешней конической рефракции в оптике.

В 1832 г. Гамильтон, анализируя уравнения кристаллооптики Френеля, показал, что при определенных условиях световой луч может расщепиться на множество лучей, распространяющихся по поверхности некоторого конуса [1]. Это явление, названное Гамильтоном конической рефракцией и в том же году обнаруженное на опыте, продолжает интересовать специалистов по физической оптике и в наши дни [2].

В настоящей статье рассматриваются уравнения, описывающие квазиклассическое движение нейтральной частицы с аномальным магнитным моментом [3]. Показывается, что при движении частицы в электромагнитном поле происходит явление, аналогичное конической рефракции в оптике. Статья содержит также несколько нетрадиционное описание конической рефракции в оптике, позволяющее провести сравнение со случаем спина $^1/_2$ и увидеть упомянутую аналогию. Следует отметить, что для экспериментального наблюдения конической рефракции частиц со спином $^1/_2$ необходимы чрезвычайно большие электрические поля, в связи с чем настоящую работу следует рассматривать в плане исследования общих свойств релятивистских волновых уравнений как обращающую внимание на некоторую новую особенность решений уравнения Дирака.

1. Оси Максвелла и оптические оси кристалла. В «Трактате об электричестве и магнетизме» [4] Максвелл ввел новое описание сферических функций. Согласно Максвеллу, любая сферическая функция l-го порядка однозначно характеризуется набором l единичных векторов (осей) и некоторым скаляром, моментом функции [5, 6]. Сферическая функция 2-го порядка

$$Y_2=T_{ik}x_ix_k/\mathbf{x}^2$$

полностью определяется симметричным тензором T_{ik} со следом, равным нулю, который выражается через момент функции и оси Максвелла следующим образом:

$$T_{ik}=M_2(e_i^{(1)}e_k^{(2)}+e_k^{(1)}e_i^{(2)}-{}^2/_3\,\delta_{ik}\mathbf{e}^{(1)}\mathbf{e}^{(2)}), \tag{1}$$

где M_2 — момент функции и $\mathbf{e}^{(1,2)}$ — единичные векторы, указывающие направление осей Максвелла.

Учитывая (1), мы тотчас же приходим к выводу, что симметричный тензор диэлектрической проницаемости кристалла ε_{ik} и обратный ему $(\varepsilon^{-1})_{ik}$ представимы в виде [7]

$$\varepsilon_{ik}=a\delta_{ik}+b(g_i^{(1)}g_k^{(2)}+g_k^{(1)}g_i^{(2)}), \tag{2}$$

$$(\varepsilon^{-1})_{ik}=c\delta_{ik}+d(h_i^{(1)}h_k^{(2)}+h_k^{(1)}h_i^{(2)}) \tag{3}$$

(для определенности будем считать, что $b\geqslant0$ и $d\geqslant0$). Направления, указываемые единичными векторами $\mathbf{g}^{(1)}$ и $\mathbf{g}^{(2)}$, называются оптическими осями первого рода (бирадиалями), направления, указываемые единичными векторами $\mathbf{h}^{(1)}$ и $\mathbf{h}^{(2)}$,— оптическими осями второго рода (бинормалями). Представления (2) и (3) единственны, с точностью до одновременного изменения направлений двух осей на обратные.

2. Внутренняя коническая рефракция в оптике. Дисперсионное уравнение (уравнение Френеля), описывающее распространение плоской волны в кристалле, имеет вид (при скорости света, равной единице) [8]

$$|\omega^2\varepsilon_{ij}+k_ik_j-\mathbf{k}^2\delta_{ij}|=0. \tag{4}$$

Вычисляя определитель (4), найдем, что

$$\omega^4+\omega^2[(\varepsilon^{-1})_{ij}k_ik_j-(\varepsilon^{-1})_{ii}\mathbf{k}^2]+\mathbf{k}^2\varepsilon_{ij}k_ik_j/|\varepsilon|=0. \tag{5}$$

Выражая ε_{ij} в (5) через $(\varepsilon^{-1})_{ij}$, а в качестве $(\varepsilon^{-1})_{ij}$ используя выражение (3), получаем дисперсионное уравнение в виде [7]

$$\omega^2=c\mathbf{k}^2+d([\mathbf{kh}^{(1)}][\mathbf{kh}^{(2)}]\pm|[\mathbf{kh}^{(1)}]||[\mathbf{kh}^{(2)}]|). \tag{6}$$

(Знаки $\pm$ соответствуют различным поляризациям волны.) Мы видим, что при распространении волны вдоль бинормалей $\mathbf{h}^{(1)}$ и $\mathbf{h}^{(2)}$ частота ω, а тем самым и фазовая скорость не зависят от поляризации волны. Вычисляя групповую скорость $\mathbf{v}=\partial\omega/\partial\mathbf{k}$, найдем

$$\mathbf{v}=c\mathbf{w}-\frac{d}{2}\left\{[\mathbf{h}^{(1)}[\mathbf{h}^{(2)}\mathbf{w}]]+[\mathbf{h}^{(2)}[\mathbf{h}^{(1)}\mathbf{w}]]\pm\right.$$

$$\left.\pm\left(|[\mathbf{h}^{(1)}\mathbf{w}]|\frac{[\mathbf{h}^{(2)}[\mathbf{h}^{(2)}\mathbf{w}]]}{|[\mathbf{h}^{(2)}\mathbf{w}]|}+|[\mathbf{h}^{(2)}\mathbf{w}]|\frac{[\mathbf{h}^{(1)}[\mathbf{h}^{(1)}\mathbf{w}]]}{|[\mathbf{h}^{(1)}\mathbf{w}]|}\right)\right\}, \tag{7}$$

где $\mathbf{w}=\mathbf{k}/\omega$. Векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ удовлетворяют соотношению $\mathbf{vw}=1$. Если вектор $\mathbf{w}$ совпадает с какой-либо из бинормалей, то знаменатели и числители одной из дробей, входящих в (7), обращаются в нуль. Считая, что вектор $\mathbf{w}$ направлен не точно по бинормали $\mathbf{h}^{(1)}$, но имеет бесконечно малую перпендикулярную составляющую $\mathbf{w}_\perp$, т. е. полагая $\mathbf{w}=w\mathbf{h}^{(1)}+\mathbf{w}_\perp$, где $|\mathbf{w}_\perp|\ll w$, получаем из (7)

$$\mathbf{v}=c\mathbf{w}-\frac{d}{2}|\sin\varphi|w\left(\frac{\mathbf{h}_\perp^{(2)}}{|\mathbf{h}_\perp^{(2)}|}\mp\frac{\mathbf{w}_\perp}{|\mathbf{w}_\perp|}\right), \tag{8}$$

где φ — угол между бинормалями, $\mathbf{h}_\perp^{(2)}$ — составляющая $\mathbf{h}^{(2)}$, перпендикулярная $\mathbf{h}^{(1)}$. Из (8) видно, что бесконечно малая составляющая $\mathbf{w}_\perp$ оказывает конечное воздействие на групповую скорость $\mathbf{v}$. Луч, входящий в кристалл по бинормали $\mathbf{h}^{(1)}$, расщепляется и распространяется по образующим конуса, величина и положение которого в кристалле определяются формулой (8).

3. Внешняя коническая рефракция в оптике. Согласно принципу взаимности, известному в оптике [8], формула, выражающая вектор $\mathbf{w}$ через вектор $\mathbf{v}$, может быть получена из (7) с помощью замены

$$\mathbf{v}\to\mathbf{w},\ \mathbf{w}\to\mathbf{v},\ c\to a,\ d\to b,\ \mathbf{h}^{(1,2)}\to\mathbf{g}^{(1,2)}.$$

Получающееся при этом выражение полностью аналогично (7) и свидетельствует о том, что луч, идущий в кристалле по одной из бирадиалей, выходя из кристалла, расщепляется и распространяется по образующим конуса.

4. Квазиклассическое движение со спином $^1/_2$ и коническая рефракция. Рассмотрим движение в постоянном и однородном электромагнитном поле $F_{\mu\nu}$ нейтральной частицы со спином $^1/_2$, обладающей аномальным магнитным моментом μ (будем считать, что $\mu=c=\hbar=1$). Дисперсионное уравнение, устанавливающее связь между частотой $\omega=\mathscr{E}$ и волновым вектором $\mathbf{k}=\mathbf{P}$, имеет вид

$$\left|iP_\mu\gamma_\mu-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}+mI\right|=0, \tag{9}$$

где матрицы γ_μ, $\sigma_{\mu\nu}$ и метрика такие, как, например, в [9]. Вычисляя определитель (9), найдем [3]

$$(\mathscr{E}^2-\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2-\mathbf{P}^2-m^2)^2=4([\mathbf{EP}]^2+[\mathbf{HP}]^2+$$
$$+[\mathbf{EH}]^2+m^2\mathbf{H}^2-2\mathscr{E}\mathbf{P}[\mathbf{EH}]). \quad (10)$$

Из (10) получим выражение для групповой скорости:

$$\mathbf{v}=\partial\mathscr{E}/\partial\mathbf{P}=\{(\mathscr{E}^2-\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2-\mathbf{P}^2-m^2)\mathbf{P}-2[\mathbf{E}[\mathbf{EP}]]-$$
$$-2[\mathbf{H}[\mathbf{HP}]]-2\mathscr{E}[\mathbf{EH}]\}\times\{\mathscr{E}(\mathscr{E}^2-\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2-\mathbf{P}^2-m^2)+2\mathbf{P}[\mathbf{EH}]\}^{-1}. \quad (11)$$

Будем считать, что инвариант $\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2\neq 0$. В этом случае всегда можно перейти в систему отсчета, в которой $\mathbf{E}\parallel\mathbf{H}$. В такой системе отсчета формула (11) с учетом (10) принимает вид (знаки $\pm$ соответствуют различным поляризациям частицы)

$$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{P}}{\mathscr{E}}\pm\frac{[\mathbf{E}[\mathbf{EP}]]+[\mathbf{H}[\mathbf{HP}]]}{\mathscr{E}\sqrt{[\mathbf{EP}]^2+[\mathbf{HP}]^2+m^2\mathbf{H}^2}}. \quad (12)$$

Из уравнения (10) легко увидеть, что одновременное обращение в нуль $\mathscr{E}$ и $\mathbf{P}$ невозможно. Можно также убедиться, в том, что при $\mathbf{P}\neq 0$ $\mathscr{E}$ обратиться в нуль не может (причинность в случае спина, равного $1/2$, не нарушается). Таким образом, обращение в нуль знаменателя в формуле (12) возможно только при $\mathbf{H}=0$. В этом случае из (12) получаем

$$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{P}}{\mathscr{E}}\pm\frac{[\mathbf{E}[\mathbf{EP}]]}{\mathscr{E}|[\mathbf{EP}]|}, \quad (13)$$

где $\mathscr{E}=\sqrt{\mathbf{P}^2+m^2+\mathbf{E}^2+2|[\mathbf{EP}]|}$. При $\mathbf{P}\parallel\mathbf{E}$ в (13) возникает неопределенность 0/0. Считая, что вектор $\mathbf{P}$ направлен не точно по $\mathbf{E}$, но имеет бесконечно малую перпендикулярную составляющую $\mathbf{P}_\perp$, получаем из (13)

$$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{P}}{\mathscr{E}}\mp\frac{|\mathbf{E}|}{\mathscr{E}}\frac{\mathbf{P}_\perp}{|\mathbf{P}_\perp|}. \quad (14)$$

Из (14) видно, что бесконечно малая составляющая $\mathbf{P}_\perp$ оказывает конечное воздействие на скорость $\mathbf{v}$. Формула (14) аналогична формуле (8) и описывает внутреннюю коническую рефракцию частиц со спином $1/2$. Соответствующая (13) формула, описывающая внешнюю коническую рефракцию, имеет вид

$$\mathbf{P}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}\mp\frac{[\mathbf{E}[\mathbf{Ev}]]}{|[\mathbf{Ev}]|}. \quad (15)$$

Вводя вектор $\mathbf{w}=\mathbf{P}/\mathscr{E}$ и используя, что $\mathscr{E}=m/\sqrt{1-\mathbf{v}^2}$, можно записать формулы (13) и (15) в симметричной форме:

$$\mathbf{v}=\mathbf{w}\pm\frac{[\mathbf{E}[\mathbf{Ew}]]}{\mathscr{E}|[\mathbf{Ew}]|}, \quad \mathbf{w}=\mathbf{v}\mp\frac{[\mathbf{E}[\mathbf{Ev}]]}{\mathscr{E}|[\mathbf{Ev}]|}. \quad (16)$$

Нами не исследован случай, когда инварианты электромагнитного поля $\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2=0$ и $\mathbf{EH}=0$ и переход в систему отсчета, в которой $\mathbf{E}\parallel\mathbf{H}$, невозможен. Анализ формулы (11) показывает, что в этом случае неопределенность 0/0 не возникает. Таким образом, коническая рефракция частиц со спином $1/2$ может быть только при $\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2>0$ и $\mathbf{EH}=0$.

Введем теперь 4-вектор 4-скорости $\mathbf{u}=\mathbf{v}/\sqrt{1-\mathbf{v}^2}$, $u_0=1/\sqrt{1-\mathbf{v}^2}$, 4-вектор кинетического импульса $p_\mu=mu_\mu$ и 4-векторы

$$a_\mu=\tilde{F}_{\mu\nu}p_\nu, \quad A_\mu=\tilde{F}_{\mu\nu}P_\nu, \quad (17)$$

где $\tilde{F}_{\mu\nu}=\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}/2i$. Тогда формулы (13) и (15) могут быть записаны в ковариантной форме:

$$p_\mu=P_\mu\pm\tilde{F}_{\mu\nu}A_\nu/|\sqrt{A^2}|, \quad (18)$$
$$P_\mu=p_\mu\mp\tilde{F}_{\mu\nu}a_\nu/|\sqrt{a^2}|. \quad (19)$$

Пусть частица движется в электромагнитном поле, инварианты которого $\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2>0$, $\mathbf{EH}=0$. Если векторы **w** и **v** направлены следующим образом:

$$\mathbf{w}=\mathbf{w}_{\|}+[\mathbf{EH}]/\mathbf{E}^2,\ \mathbf{v}=\mathbf{v}_{\|}+[\mathbf{EH}]/\mathbf{E}^2, \tag{20}$$

где $\mathbf{w}_{\|}$ и $\mathbf{v}_{\|}$ — составляющие вдоль электрического поля, то знаменатели в (18) и (19) обращаются в нуль и возникает внутренняя и внешняя коническая рефракция.

Литература

1. *Hamilton W. R.* The Mathematical Papers, Cambridge Univ. Press, 1931.
2. *Илларионов А. И., Строганов В. И., Кидяров Б. И.* Оптика и спектроскопия, 1980, 48, 578.
3. *Хриплович И. Б.* ЯФ, 1972, 16, 823.
4. *Maxwell J. C.* A Treatise on Electricity and Magnetism. V. 1. Oxford: Clarendon Press, 1873.
5. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.: Гостехтеориздат, 1951.
6. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИИЛ, 1952.
7. *Федоров Ф. И.* Оптика анизотропных сред. Изд. АН БССР, 1958.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1959.
9. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969.

CONICAL REFRACTION OF SPIN $^1/_2$ PARTICLES

STEPANOVSKY Yu. P.

Semi-classical equations of motion for a spin $^1/_2$ particle with an anomalous magnetic moment are considered. The particle motion in a constant homogeneous electromagnetic field is investigated. It is shown that under some conditions certain phenomena analogous to the optical internal and external refraction take place.