УДК 517.984.7

Ю. М. АРЛИНСКИЙ, Э. Р. ЦЕКАНОВСКИЙ

КВАЗИСАМОСОПРЯЖЕННЫЕ СЖИМАЮЩИЕ РАСШИРЕНИЯ ЭРМИТОВА СЖАТИЯ

Пусть A — эрмитово сжатие в гильбертовом пространстве H, заданное на подпространстве D_A. Будем называть оператор $T \in [H, H]$ квазисамосопряженным сжимающим *qsc*-расширением A, если $T \supset A$, $T^* \supset A$, $\| T \| \leqslant 1$.

Оператор T, являющийся *qsc*-расширением A, будем относить к классу $C(\alpha)$ $(\alpha \in (0, \pi/2])$, если

$$\| \sin\alpha \cdot T \pm i \cos\alpha \cdot I \| \leqslant 1. \qquad (1)$$

Условие (1), как легко видеть, эквивалентно условию $\| f \|^2 - \| Tf \|^2 \geqslant 2 \operatorname{ctg}\alpha \,|\operatorname{Im}(Tf, f)|$ $(\forall f \in H)$ (2). Поэтому естественно, что $C(0)$ — множество всех самосопряженных сжимающих расширений (*sc*-расширений) оператора A, $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$ — множество всех *qsc*-расширений A.

Настоящая работа является подробным изложением кратких заметок авторов [1—3]. Для нового класса операторов $C(\alpha)$ $\left(\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ дано параметрическое представление и описание всех канонических резольвент. При этом при $\alpha = 0$ получаются результаты из [4]. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ получаются (однако в менее общей форме) результаты работ [5—7].

П.1. Пусть A_μ и A_M $(A_\mu \leqslant A_M)$ — «крайние» *sc*-расширения эрмитова сжатия A.

Теорема 1. *Не существует несамосопряженных qsc-расширений оператора A, реальные части которых совпадают с A_μ и A_M.*

Доказательство. Пусть $L_\mu = \overline{(I + A_\mu) H}$, P_μ — ортопроектор на L_μ в H.

Для любых $f, g \in L_\mu$ положим $(f, g)_\mu = ((I + A_\mu) f, g)$. Легко видеть, что $\| f \|_\mu \leqslant \sqrt{2} \| f \|$, $\| (I + A_\mu) f \| \leqslant \sqrt{2} \| f \|_\mu$.

Пусть T_μ — *qsc*-расширение A и $\operatorname{Re} T_\mu = A_\mu$, т. е. $T_\mu = A_\mu + iB$, где $B = B^*$, $\operatorname{Ker} B \supset / D_A$.

Пусть $f \in H$, тогда $\| T_\mu f \|^2 = \| A_\mu f \|^2 + \| Bf \|^2 - 2\operatorname{Im}(Bf, A_\mu f) = \| A_\mu f \|^2 + \| Bf \|^2 - 2\operatorname{Im}(P_\mu Bf, (I + A_\mu) P_\mu f)$. Так как $\| T_\mu f \| \leqslant \| f \|$, то $\| Bf \|^2 - 2\operatorname{Im}(P_\mu Bf, P_\mu f)_\mu \leqslant (P_\mu (I - A_\mu) f, P_\mu f)_\mu \leqslant 2 \| P_\mu f \|_\mu^2 + \| (I + A_\mu) f \|_\mu \| P_\mu f \|_\mu \leqslant 4 \| P_\mu f \|_\mu^2$. Известно, что линеал $P_\mu D_A$ плотен в L_μ по норме $\| \cdot \|_\mu$, поэтому для вектора $f \in H \ominus D_A$ найдется последовательность $\{f_A^{(n)}\}_{n=1}^\infty \subset D_A$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \| P_\mu f - P_\mu f_A^{(n)} \|_\mu = 0$.

Пусть $h^{(n)} = f - f_A^{(n)}$, тогда с учетом $Bh^{(n)} = Bf$ имеем $\| Bf \|^2 - 2\operatorname{Im}(P_\mu Bf, P_\mu h^{(n)})_\mu \leqslant 4 \| P_\mu h^{(n)} \|_\mu^2$. Переходя к пределу в обоих частях этого неравенства, получим $Bf = 0$. Таким образом, $T_\mu = T_\mu^* = A_\mu$.

Если теперь воспользоваться тем, что $A_M = -(-A)_\mu$, то получим, что qsc-расширение A, реальная часть которого равна A_M, совпадает с A_M. Теорема доказана.

Следствие. *Если $A_\mu = A_M$, то множество qsc-расширений оператора A состоит из одного элемента.*

Пусть $A^* \in [H, D_A]$ — оператор, сопряженный к оператору A, рассматриваемому как элемент $[D_A, H]$. Обозначим $N = H \ominus D_A$, P_A, P_N — ортопроекторы в H на D_A и N соответственно. Из эрмитовости A следует, что $A^*/D_A = P_A A$.

Введем следующие обозначения:

$$L = \overline{(I - AA^*)^{1/2} H}, \ L_A = \overline{(I - AA^*)^{1/2} D_A},$$
$$L_0 = L \ominus L_A. \tag{3}$$

Пусть операторы P_0 и G_A — ортопроекторы в H на L_0 и L_A соответственно.

Определим оператор K_A равенством $K_A (I - AA^*)^{1/2} f_A = P_N A f_A$, $f_A \in D_A$ (4). Оператор K_A корректно определен и непрерывно продолжается на все L_A до сжимающего оператора из $[L_A, N]$. Это продолжение также обозначим K_A.

Пусть $K_A^* \in [N, L_A]$ — сопряженный оператор. Рассмотрим оператор $T_0 = AP_A + (I - AA^*)^{1/2} K_A^* P_N$ (5).

Лемма. 1) *оператор T_0 является qsc-расширением оператора A;*

2) *всякое qsc-расширение имеет вид $T = T_0 + (I - AA^*)^{1/2} \times K_T P_N$ (6), где для оператора $K_T \in [N, L_0]$ выполняются неравенства $\| K_T f \|^2 \leq \| f \|^2 - \| K_A^* f \|^2 \ \forall f \in N$ (7).*

3) *qsc-расширение единственно, если и только если $(I - AA^*)^{1/2} H \cap N = \{0\}$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что оператор T является сжимающим расширением сжатия A в том и только в том случае, когда $T = AP_A + (I - AA^*)^{1/2} X_T P_N$ (8), где X_T — сжатие из N в L.

Если T — qsc-расширение эрмитова сжатия A, то $T^* \supset A$, поэтому $(A^* + X_T^* (I - AA^*)^{1/2}) | D_A = A$. Отсюда $X_T^* (I - AA^*)^{1/2} f_A = P_N A f_A$ $\forall f_A \in D_A$. Следовательно, T, задаваемый (8), qsc-расширение тогда и только тогда, когда $X_T^* | L_A = K_A$.

Значит, X_T^* — сжимающее расширение сжатия K_A, тогда $X_T = K_A^* + K_T$, где $K_T \in [N, L_0]$ и удовлетворяет неравенству (7). Отсюда и из (8) $T = AP_A + (I - AA^*)^{1/2} K_A^* P_N + (I - AA^*)^{1/2} K_T P_N = T_0 + (I - AA^*)^{1/2} K_T P_N$.

Если $K_T = 0$, то (7) выполняется и $T = T_0$ — qsc-расширение A.

Из определения L_0 имеем равенство $L_0 = [(I - AA^*)^{1/2}]^{-1} \{N\}$. Отсюда получаем третье утверждение леммы. Лемма доказана.

Отметим, что если $L_0 = \{0\}$, то $T_0 = T_0^* = A_\mu = A_M$.

Будем считать, что $L_0 \neq \{0\}$.

Пусть K_T, $K_{T^*} \in [N, L_0]$ определяют по формуле (6) взаимно сопряженные qsc-расширения T и T^*, тогда простым вычислением убеждаемся в равенстве $K_T^* P_0 (I - AA^*)^{1/2} = (I - AA^*)^{1/2} K_{T^*} P_N$ (9).

Обозначим $T_0 - T_0^* = M_0$. Ясно, что $R(M_0) \subseteq N$.

Теорема 2. *Справедливы равенства*

$$T_0 = T_0^* = (A_M + A_\mu)/2.$$

Доказательство. Пусть K_μ, $K_M \in [N, L_0]$ определяют согласно (6) sc-расширения A_μ и A_M соответственно

$$A_\mu = T_0 + (I - AA^*)^{1/2} K_\mu P_N, \; A_M = T_0 + (I - AA^*)^{1/2} K_M P_N.$$

При этом K_μ и K_M удовлетворяют (7).
Пусть

$X_\mu = [(I - AA^*)^{1/2} K_\mu + K_\mu^* P_0 (I - AA^*)^{1/2}] P_N/2$; $X_M = [(I - AA^*)^{1/2} \times \times K_M + K_M^* P_0 (I - AA^*)^{1/2}] P_N/2$. Так как $T_0 - M_0/2 = (T_0 + T_0^*)/2$ и A_μ, A_M — sc-расширения, то $A_\mu = T_0 + (X_\mu - M_0/2)$, $A_M = T_0 + (X_M - M_0/2)$. В силу того что $-K_\mu$ и $-K_M$ также удовлетворяют (7), то операторы

$$T_\mu = T_0 - (I - AA^*)^{1/2} K_\mu P_N, \; T_M = T_0 - (I - AA^*)^{1/2} K_M P_N$$

являются qsc-расширениями оператора A, при этом

$$\operatorname{Re} T_\mu = T_0 + (-X_\mu - M_0/2), \; \operatorname{Re} T_M = T_0 + (-X_M - M_0/2).$$

Поскольку операторы $\operatorname{Re} T_\mu$ и $\operatorname{Re} T_M$ являются sc-расширениями оператора A, то по теореме М. Г. Крейна [4] выполнены неравенства $A_M - \operatorname{Re} T_\mu \geqslant 0$ и $A_\mu - \operatorname{Re} T_M \leqslant 0$. А это означает, что $X_M + X_\mu \geqslant 0$ и $X_M + X_\mu \leqslant 0$. Отсюда $X_\mu = -X_M$. Поэтому $\operatorname{Re} T_M = A_\mu$. По теореме 1 отсюда следует, что $T_M = T_M^* = A_\mu$. Используя равенство (9) для оператора K_M, получаем $0 = T_M - T_M^* = 2M_0$. Отсюда, учитывая $X_\mu = -X_M$, получаем $T_0 = (A_M + A_\mu)/2$. Теорема доказана.

Отметим, что теперь соотношение (9) переходит в равенство $K_T^* P_0 (I - AA^*)^{1/2} = (I - AA^*)^{1/2} K_{T^*} P_N$ **(10)**. Заметим также, что из (5) и теоремы 2 следует $T_0 = A^* + K_A G_A (I - AA^*)^{1/2}$ **(11)**. Так как $(I - AA^*)^{1/2} L \subset N$, то линейное многообразие $P_0 (I - AA^*)^{1/2} N$ плотно в L_0.

Так же, как и в случае сжатия в одном пространстве, доказывается справедливость равенств $(I - AA^*)^{1/2} A \,|\, D_A = A (I - A^*A)^{1/2} \,|\, D_A$; $(I - - A^*A)^{1/2} A^* = A^* (I - AA^*)^{1/2}$ **(12)**.

Отсюда $A^* L \subset \overline{(I - A^*A)^{1/2} D_A}$ **(13)**.

Теорема 3. *Равенство* $T = T_0 + (I - AA^*)^{1/2} Z_T P_0 (I - AA^*)^{1/2}$ **(14)** *устанавливает взаимно однозначное соответствие между qsc-расширениями оператора A и сжатиями* Z_T в пространстве L_0.

Доказательство. Пусть T — qsc-расширение оператора A, тогда по лемме $T = T_0 + (I - AA^*)^{1/2} K_T P_N$, где $K_T \in [N, L_0]$ удовлетворяет неравенствам (7). Из (10) следует, что если $P_0 (I - AA^*)^{1/2} \times \times f_N = 0$, то $K_{T^*} f_N = 0$ ($f_N \in N$). Это означает, что оператор $Y_T \times \times P_0 (I - AA^*)^{1/2} f_N = K_{T^*} f_N$ $\forall f_N \in N$ корректно определен и плотно задан в L_0.

Докажем, что Y_T — сжимающий оператор. Из (10) и (11) имеем $T^* = T_0 + K_T^* P_0 (I - AA^*)^{1/2} = A^* + K_A G_A (I - AA^*)^{1/2} + (I - AA^*)^{1/2} \times$

$\times K_T \cdot P_N$. Из определения оператора Y_T получаем $T^* = A^* + (K_A \times$ $\times G_A + (I - AA^*)^{1/2} Y_T P_0)(I - AA^*)^{1/2}$. Так как $\|T^*\| \leqslant 1$, то

$$\|(K_A G_A + (I - AA^*)^{1/2} Y_T P_0)(I - AA^*)^{1/2} f\|^2 \leqslant \|(I - AA^*)^{1/2} f\|^2 \underset{\forall f \in H}{.} \quad (15)$$

Отсюда следует, что оператор $M = K_A G_A + (I - AA^*)^{1/2} Y_T P_0$ является сжимающим из L в N.

Пусть $g = (I - AA^*)^{1/2} f_A + h$, где $f_A \in D_A$, $h \in P_0 (I - AA^*)^{1/2} N$, тогда с учетом (12) имеем

$$Mg = P_N A f_A + (I - AA^*)^{1/2} Y_T h;$$
$$\|Mg\|^2 = 2\mathrm{Re}\,(Af_A,\ (I - AA^*)^{1/2} Y_T P_0 h) + \|P_N A f_A\|^2 +$$
$$+ \|(I - AA^*)^{1/2} Y_T h\|^2 = 2\mathrm{Re}\,((I - A^*A)^{1/2} f_A,\ A^* Y_T h) +$$
$$+ \|P_N A f_A\|^2 + \|Y_T h\|^2 - \|A^* Y_T h\|^2;$$
$$\|g\|^2 = \|f_A\|^2 - \|P_A A f_A\|^2 + \|h\|^2.$$

Поскольку M — сжатие, то $\|h\|^2 - \|Y_T h\|^2 + \|(I - A^*A)^{1/2} f_A - A^* \times$ $\times Y_T h\| \geqslant 0$ **(16)** при любых $f_A \in D_A$ и $h \in P_0 (I - AA^*)^{1/2} N$.

Выберем теперь вследствие (13) последовательность $\{f_A^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset D_A$ так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} (I - A^*A)^{1/2} f_A^{(n)} = A^* Y_T h$, тогда из (16) имеем $\|h\|^2 -$ $- \|Y_T h\|^2 \geqslant 0$ $\forall h \in P_0 (I - AA^*)^{1/2} N$. В силу плотности $P_0 (I -$ $- AA^*)^{1/2} N$ в L_0 получаем, что Y_T — сжатие в L_0.

Поскольку $T^* = T_0 + (I - AA^*)^{1/2} Y_T P_0 (I - AA^*)^{1/2}$, то $T = T_0 +$ $+ (I - AA^*)^{1/2} Z_T P_0 (I - AA^*)^{1/2}$, где $Z_T = Y_T^*$ — сжатие в L_0.

Пусть наоборот Z_T — сжатие в L_0, тогда справедливо неравенство (16), где $Y_T = Z_T^*$. Но (16) эквивалентно тому, что оператор $M =$ $= K_A G_A + (I - AA^*)^{1/2} Y_T P_0$ — сжатие из L в N. Значит, справедливо неравенство (15), которое означает, что $T^* = T_0 + (I - AA^*)^{1/2} \times$ $\times Y_T P_0 (I - AA^*)^{1/2}$ — qsc-расширение A. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Справедливы равенства*

$$(A_M - A_\mu)/2 = (I - AA^*)^{1/2} P_0 (I - AA^*)^{1/2};$$
$$A_M = AP_A + (I - AA^*)^{1/2} [K_A^* P_N + P_0 (I - AA^*)^{1/2}];$$
$$A_\mu = AP_A + (I - AA^*)^{1/2} [K_A^* P_N - P_0 (I - AA^*)^{1/2}]. \quad (17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 2 $T_0 = (A_M + A_\mu)/2$ — sc-расширение. Следовательно, исходя из (14), все sc-расширения описываются формулой $\tilde{A} = (A_M + A_\mu)/2 + (I - AA^*)^{1/2} \tilde{X} P_0 (I - AA^*)^{1/2}$, где $\tilde{X}$ — самосопряженное сжатие в L_0. С другой стороны, по теореме М. Г. Крейна, $\tilde{A} \in [A_\mu, A_M]$. Отсюда, учитывая (5), получаем равенства (17).

Теорема 4. *Для того чтобы qsc-расширение T эрмитова сжатия A принадлежало $C(\alpha)$, где $\alpha \in [0, \pi/2]$, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее ему по форме (14) сжатие Z_T в подпространстве L_0 принадлежало классу $C(\alpha)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T = T_0 + (I - AA^*)^{1/2} Z_T P_0 (I - AA^*)^{1/2}$ — qsc-расширение A, тогда, учитывая (11), имеем $T = A^* + [K_A G_A +$ $+ (I - AA^*) Z_T P_0] (I - AA^*)^{1/2}$. Далее, $\forall f \in H$ имеем $\|f\|^2 - \|Tf\|^2 =$ $= \|(I - AA^*)^{1/2} f\|^2 - \|(K_A G_A + (I - AA^*)^{1/2} Z_T P_0)(I - AA^*)^{1/2} f\|^2$, $\mathrm{Im}\,(Tf, f) = \mathrm{Im}\,(Z_T P_0 (I - AA^*)^{1/2} f, (I - AA^*)^{1/2} f)$. Поэтому, согласно

(2), условие $T \in C(\alpha)$ эквивалентно неравенству $\forall g \in L$: $\|g\|^2 - \|(K_A G_A + (I - AA^*)^{1/2} Z_T P_0) g\|^2 \geqslant 2 \operatorname{ctg}\alpha \,|\operatorname{Im}(Z_T P_0 g, P_0 g)|$, которое после преобразований, аналогичных проделанным при доказательстве теоремы 3, эквивалентно неравенству

$$\|h\|^2 - \|Z_T h\|^2 + \|(I - AA^*)^{1/2} f_A - A^* Z_T h\|^2 \geqslant 2 \operatorname{ctg}\alpha \,|\operatorname{Im}(Z_T h, h)|. \quad \forall f_A \in D_A \quad \forall h \in L_0$$

Выбирая последовательность $\{f_A^{(n)}\} \subset D_A$, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} (I - AA^*)^{1/2} \times f_A^{(n)} = A^* Z_T h$, получим отсюда неравенство $\|h\|^2 - \|Z_T h\|^2 \geqslant 2 \times \operatorname{ctg}\alpha \,|\operatorname{Im}(Z_T h, h)|$, означающее, что $Z_T \in C(\alpha)$. Теорема доказана.

Пусть $N_0 = \overline{(I - AA^*)^{1/2} L_0}$. Из (17) следует $N_0 = \overline{(A_M - A_\mu) H}$.

Теорема 5. *Равенство $T = (A_M + A_\mu)/2 + (A_M - A_\mu)^{1/2} X (A_M - A_\mu)^{1/2}/2$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между qsc-расширениями T класса $C(\alpha)$ эрмитова сжатия A и операторами X класса $C(\alpha)$ в подпространстве N_0.*

Доказательство. Вследствие (17) $\|(A_M - A_\mu)^{1/2} f/\sqrt{2}\| = \|P_0 (I - AA^*)^{1/2} f\|$ $\forall f \in H$. Отсюда и из плотности $P_0 (I - AA^*)^{1/2} \times H$ в L_0 следует существование изометрического оператора V_0 из L_0 на N_0, такого, что $(A_M - A_\mu)^{1/2} f/\sqrt{2} = V_0 P_0 (I - AA^*)^{1/2} f$ $\forall f \in H$ (18). Пусть T — qsc-расширение класса $C(\alpha)$. Тогда по формуле (14) и теореме 4 $Z_T \in C(\alpha)$ в L_0. Пусть $X = V_0 Z_T V_0^{-1}$, тогда $X \in C(\alpha)$ в N_0 и $Z_T = V_0^{-1} X V_0$, поэтому $T = (A_M + A_\mu)/2 + (I - AA^*)^{1/2} V_0^{-1} X V_0 \times P_0 (I - AA^*)^{1/2} = (A_M + A_\mu)/2 + (A_M - A_\mu)^{1/2} X (A_M - A_\mu)^{1/2}/2$. Наоборот, если $X \in C(\alpha)$ в N_0, то $Z_T = V_0^{-1} X V_0 \in C(\alpha)$ в L_0, поэтому оператор $T = (A_M + A_\mu)/2 + (A_M - A_\mu)^{1/2} X (A_M - A_\mu)^{1/2}/2 = (A_M + A_\mu)/2 + (I - AA^*)^{1/2} Z_T P_0 (I - AA^*)^{1/2}$ по теореме 4 является qsc-расширением класса $C(\alpha)$ оператора A. Теорема доказана.

П.2. Каждому неотрицательному оператору $F \in [H, H]$ и подпространству $\tilde{H}$ поставим в соответствие оператор М. Г. Крейна $(F)_{\tilde{H}} = F^{1/2} \tilde{P} F^{1/2}$, где $\tilde{P}$ — ортопроектор в H на подпространство $[F^{1/2}]^{-1} \times \{\tilde{H}\}$. Как известно [4], оператор $(F)_{\tilde{H}}$ является наибольшим среди тех самосопряженных операторов $\tilde{F}$, для которых $\tilde{F} \leqslant F$, $\overline{R(\tilde{F})} \subseteq \tilde{H}$.

Обозначим $C = A_M - A_\mu$, C — неотрицательный оператор $\overline{R(C)} = N_0$. Отметим, что из (17) $(I - AA^*)_N = C/2$, а в [4] доказаны равенства $(I + A_\mu)_N = (I - A_M)_N = 0$, $(I - A_\mu)_N = (I + A_M)_N = C$. Докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 6. *Если T — qsc-расширение эрмитова сжатия A, то справедливо равенство $(I - T^* T)_N = C^{1/2} (I - X^* X) C^{1/2}/2$ (19), где X — соответствующее T по теореме 5 сжатие в N_0.*

Доказательство. Пусть $T = (A_M + A_\mu)/2 + C^{1/2} X C^{1/2}/2$. Запишем T в форме (14) с учетом теоремы 2 и определения оператора T_0: $T = AP_A + (I - AA^*)^{1/2} (K_A^* + Z_T P_0 (I - AA^*)^{1/2}) P_N$, где $Z_T = V_0^{-1} \times X V_0 \in [L_0, L_0]$, $V_0 \in [L_0, N_0]$ — изометрический оператор, определенный равенством (18). Далее имеем для $K_T = K_A^* + Z_T P_0 (I - AA^*)^{1/2}$ и $\forall f \in H$ $\|f\|^2 - \|Tf\|^2 = \|P_A f\|^2 - \|AP_A f\|^2 + \|P_N f\|^2 - \|K_T P_N f\|^2 +$

$+\|A^*K_TP_Nf\|^2-2\mathrm{Re}\,((I-A^*A)^{1/2}P_Af,\ A^*K_TP_Nf)=\|(I-A^*A)^{1/2}\times$ $\times P_Af-A^*K_TP_Nf\|^2+\|P_Nf\|^2-\|K_TP_Nf\|^2$. Отсюда $\forall f\in H$, $\forall f_A\in$ $\in D_A\ \|f-f_A\|^2-\|T(f-f_A)\|^2=\|P_Nf\|^2-\|K_TP_Nf\|^2+\|(I-A^*\times$ $\times A)^{1/2}P_A(f-f_A)-A^*K_TP_Nf\|^2$ (20). Пусть $\tilde{P}$ — ортопроектор на $[(I-$ $-T^*T)^{1/2}]^{-1}\{N\}=H\ominus(I-T^*T)^{1/2}D_A$. Тогда из (20) $\|\tilde{P}(I-T^*\times$ $\times T)^{1/2}f\|^2=\|P_Nf\|^2-\|K_TP_Nf\|^2+\inf\limits_{f_A\in D_A}\|(I-A^*A)^{1/2}P_A(f-f_A)-$ $-A^*K_TP_Nf\|^2$ (21). Выберем последовательность $\{f_A^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}\subset D_A$ так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty}(I-A^*A)^{1/2}P_A(f-f_A^{(n)})=A^*K_TP_Nf$. Тогда из (21) получим равенство $\|\tilde{P}(I-T^*T)^{1/2}f\|^2=\|P_Nf\|^2-\|K_TP_Nf\|^2$. Отсюда с учетом определения K_T и ортогональности областей значения операторов K_A^* и $Z_TP_0(I-AA^*)^{1/2}$ получаем $\forall f\in H\ \|\tilde{P}(I-T^*T)^{1/2}f\|^2=\|P_Nf\|^2-$ $-\|K_A^*\ P_Nf\|^2-\|Z_TP_0(I-AA^*)^{1/2}f\|^2$ (22). Из равенства (11) имеем $\|f\|^2-\|T_0f\|^2=\|(I-AA^*)^{1/2}f\|^2-\|K_AG_A(I-AA^*)^{1/2}f\|^2\ \forall f\in H$. Пусть $\tilde{P}_0$ — ортопроектор на $N_{T_0}=[(I-T_0^2)^{1/2}]^{-1}\{N\}$ (напомним, что $T_0=T_0^*=(A_M+A_\mu)/2$), тогда $\|\tilde{P}_0(I-T_0^2)^{1/2}f\|^2=\inf\{\|G_A(I-A\times$ $\times A^*)^{1/2}(f-f_A)\|^2-\|K_AG_A(I-AA^*)^{1/2}(f-f_A)\|^2\}+\|P_0(I-A\times$ $\times A^*)^{1/2}f\|^2$. Так как оператор K_A — сжатие, то, выбирая $\{f_A^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}\subset$ $\subset D_A$ так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty}(I-AA^*)^{1/2}f_A^{(n)}=G_A(I-AA^*)^{1/2}f$, получим $\|\tilde{P}_0(I-T_0^2)^{1/2}f\|^2=\|P_0(I-AA^*)^{1/2}f\|^2=\|C^{1/2}f\|^2/2$ (23). С другой стороны, полагая $Z_T=0$ в (22), получим $\|\tilde{P}_0(I-T_0^2)^{1/2}f\|^2=\|P_N\times$ $\times f\|^2=\|P_Nf\|^2-\|K_A^*P_Nf\|^2$ (24), учитывая (23), имеем $\|P_N\times$ $\times f\|^2-\|K_A^*P_Nf\|^2=\|C^{1/2}f\|^2/2$. Тогда снова из (22) $\|\tilde{P}(I-T^*\times$ $\times T)^{1/2}f\|^2=(\|C^{1/2}f\|^2-\|Z_TV_0^{-1}C^{1/2}f\|^2)/2=(\|C^{1/2}f\|^2-\|XC^{1/2}\times$ $\times f\|^2)/2$. По определению оператора $(I-T^*T)_N$ отсюда получаем (19). Теорема доказана.

Следствие. *Для того чтобы qsc-расширение T эрмитова сжатия A было крайней точкой множества всех qsc-расширений, необходимо и достаточно выполнение одного равенства:* $(I-T^*T)^{1/2}\times$ $\times H\cap N=\{0\}$, $(I-TT^*)^{1/2}H\cap N=\{0\}$.

Доказательство. Из описания *qsc*-расширений следует, что оператор T — крайняя точка множества *qsc*-расширений, если соответствующий оператор $X\in[N_0,\ N_0]$ является изометрией или коизометрией. Но тогда по теореме 6 $(I-T^*T)_N=0$ или $(I-TT^*)_N=0$. А это означает, что либо $(I-T^*T)^{1/2}H\cap N=\{0\}$, либо $(I-TT^*)^{1/2}\times$ $\times H\cap N=\{0\}$. Из теорем 5 и 6 и определения оператора класса $C(\alpha)$ получаем также следующее утверждение: для того чтобы *qsc*-расширение T было оператором класса $C(\alpha)$, необходимо и достаточно выполнение неравенства $-(I-T^*T)_N\leqslant 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{Im}\,T\leqslant(I-T^*T)_N$ или $-(I-TT^*)_N\leqslant 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{Im}\,T\leqslant(I-TT^*)_N$.

Замечание. Поскольку $(I\pm(A_M+A_\mu)/2)_N=C/2$ и, как было доказано, $(I-(A_M+A_\mu)^2/4)_N=C/2$, то справедливы равенства

$$\int_{-1}^{1}\frac{d(E_0(t)f,\ f)}{1\pm t}=\int_{-1}^{1}\frac{d(E_0(t)f,\ f)}{1-t^2}=\begin{cases}\infty,\ f\notin R(C^{1/2}),\ f\in N;\\ 2\|C^{1/2}f\|^2,\ f\in R(C^{1/2}),\end{cases}$$

где $E_0(t)$ — спектральная функция оператора $(A_M + A_\mu)/2$. Кроме того, из (19) $(I - A_M^2)_N = (I - A_\mu^2)_N = 0$. Установим еще равенство $\tilde{P}_0 \times T_0 | N_{T_0} = 0$ (25). Из (23) получаем $(I - T_0^2)^{1/2} \tilde{P}_0 (I - T_0^2)^{1/2} = (I - AA^*)^{1/2} P_0 (I - AA^*)^{1/2}$, $\| T_0 \tilde{P}_0 (I - T_0^2)^{1/2} f \|^2 = \| A^* P_0 (I - A \times A^*)^{1/2} f \|^2$ $\forall f \in H$. Далее, учитывая $T_0 | D_A = A$, имеем $\forall f \in H$, $\forall \times f_A \in D_A$, $\| T_0 \tilde{P}_0 (I - T_0^2)^{1/2} f - (I - T_0^2)^{1/2} f_A \|^2 = \| A^* P_0 (I - AA^*)^{1/2} f - (I - A^*A)^{1/2} f_A \|^2$ (26).

Поскольку

$$\| \tilde{P}_0 T_0 \tilde{P}_0 (I - T_0^2)^{1/2} f \|^2 = \inf_{f_A \in D_A} \| T_0 \tilde{P}_0 (I - T_0^2)^{1/2} f - (I - T_0^2)^{1/2} f_A \|^2,$$

то из (13) и (26)

$$\tilde{P}_0 T_0 \tilde{P}_0 (I - T_0^2)^{1/2} f = 0 \ \forall f \in H.$$

Так как $\tilde{P}_0 (I - T_0^2)^{1/2} H = N_{T_0}$, то доказано (25).

Будем называть *sc*-расширение $\tilde{A}$ экстремальным, если $\tilde{A}$ — крайняя точка множества всех *sc*-расширений. Из теорем 5 и 6 следует, что $\tilde{A}$ — экстремальное *sc*-расширение, если соответствующий оператор X в N_0 является самосопряженным и унитарным. Поэтому экстремальное *sc*-расширение не является реальной частью никакого несамосопряженного *qsc*-расширения. Легко видеть, что для неэкстремального *sc*-расширения можно указать несамосопряженное *qsc*-расширение T, такое, что $(T + T^*)/2 = \tilde{A}$, причем это *qsc*-расширение T может быть выбрано как крайняя точка множества всех *qsc*-расширений.

Из теоремы 6 легко получить следующее утверждение: для того чтобы *sc*-расширение $\tilde{A}$ было экстремальным, необходимо и достаточно, чтобы D_A было плотно в H по норме $\| f \|_{\tilde{A}}^2 = \| f \|^2 - \| \tilde{A} f \|^2$ $f \in H$.
П.3. В этом пункте дадим описание канонических *qsc*-резольвент. Будем полагать, что имеет место вполне неопределенный случай: $N_0 = N$ [4]. Обозначим $R_\lambda^\mu = (A_\mu - \lambda I)^{-1}$, $R_\lambda^M = (A_M - \lambda I)^{-1}$, $R_\lambda^T = (T - \lambda I)^{-1}$. Рассмотрим оператор-функции

$$Q_\mu(\lambda) = (C^{1/2} R_\lambda^\mu C^{1/2} + I)/N,$$
$$Q_M(\lambda) = (C^{1/2} R_\lambda^M C^{1/2} - I)/N.$$

Функции $Q_\mu(\lambda)$ и $Q_M(\lambda)$ введены в [4] и названы Q-функциями эрмитова сжатия A. Отметим равенство: $Q_\mu(\lambda) Q_M(\lambda) = Q_M(\lambda) Q_\mu(\lambda) = -I/N$ $\forall \lambda \in \operatorname{Ext}[-1, 1]$. Обозначим $\Phi(\alpha)$ $(\alpha \in [0, \pi/2])$ класс линейных операторов из $[N, N]$, подчиненных условию $\| Yf \|^2 + \operatorname{ctg} \alpha | \operatorname{Im}(Tf, f) | \leqslant \operatorname{Re}(Yf, f)$ $\forall f \in N$. Легко видеть $Y \in \Phi(\alpha) \leftrightarrow X = 2Y - I \in C(\alpha)$. (Если $\alpha = 0$, то $\Phi(0)$ — класс неотрицательных сжатий в N). Пусть S_α $(\alpha \in (0, \pi/2])$ — множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенствам $| \sin \alpha \lambda \pm i \cos \alpha | \leqslant 1$. При $\alpha = 0$ $S(0) = [-1; 1]$.

Теорема 7. *При* $\lambda \in \operatorname{Ext} S_\alpha$ *равенство* $R_\lambda^T = R_\lambda^\mu - R_\lambda^\mu C^{1/2} Y [I + (Q_\mu \times (\lambda) - I) Y]^{-1} C^{1/2} R_\lambda^\mu$ *устанавливает взаимно однозначное соответ-*

ствие между совокупностью резольвент qsc-расширений класса $C(\alpha)$ эрмитова сжатия A и классом $\Phi(\alpha)$.

Доказательство. Пусть T — qsc-расширение класса $C(\alpha)$, тогда по теореме 5 $T = A_\mu + C^{1/2}(x + I) C^{1/2}/2$, где $X \in C(\alpha)$ в N. Пусть $Y = (X + I)/2$. Тогда $Y \in \Phi(\alpha)$. Если $\lambda \in \operatorname{Ext} S_\alpha$, то резольвенты R_λ^T и R_λ^μ существуют и $T - \lambda I = (A_\mu - \lambda I)(I + R_\lambda^\mu C^{1/2} Y C^{1/2})$. Отсюда следует, что при $\lambda \in \operatorname{Ext} S_\alpha$ оператор $(I + R_\lambda^\mu C^{1/2} Y C^{1/2})^{-1} \in [H, H]$. Тогда это же верно и для оператора $(I + C^{1/2} R_\lambda^\mu C^{1/2} Y)^{-1} = [I + (Q_\mu(\lambda) - I) Y]^{-1}$. Далее доказательство проводится аналогично работе [4]. Для полноты воспроизведем его.

Так как $T - A_\mu = C^{1/2} Y C^{1/2}$, то

$$R_\lambda^\mu - R_\lambda^T = R_\lambda^\mu C^{1/2} Y C^{1/2} R_\lambda^T.$$

Отсюда $C^{1/2} R_\lambda^T = C^{1/2} R_\lambda^\mu - C^{1/2} R_\lambda^\mu C^{1/2} Y C^{1/2} R_\lambda^T$.

Поэтому, по определению Q_μ-функции, $C^{1/2} R_\lambda^T = [I + (Q_\mu(\lambda) - I) Y]^{-1} C^{1/2} R_\lambda^\mu$. Следовательно, $R_\lambda^T = R_\lambda^\mu - R_\lambda^\mu C^{1/2} Y [I + (Q_\mu(\lambda) - I) \times Y]^{-1} C^{1/2} R_\lambda^\mu$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 8. *При $\lambda \in Ext\, S_\alpha$ равенство $R_\lambda^T = R_\lambda^M + R_\lambda^M C^{1/2} Y [I - (Q_M \times (\lambda) + I) Y]^{-1} C^{1/2} R_\lambda^M$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между совокупностью резольвент qsc-расширений класса $C(\alpha)$ и классом операторов $\Phi(\alpha)$.*

Другие описания резольвент, в том числе и обобщенных, были проведены Г. Лангером, В. Текстoриусом и авторами.

Отметим в заключение, что класс $C(\alpha)$ был впервые введен и исследован в [2, 3]. Дальнейшее изучение класса $C(\alpha)$ с помощью другого подхода проводилось в работе [8].

Список литературы: 1. *Арлинский Ю. М., Цекановский Э. Р.* Несамосопряженные сжимающие расширения эрмитова сжатия и теоремы М. Г. Крейна// Успехи мат. наук. — 1982.— Вып. 37, № 1. — С. 131—132. 2. *Арлинский Ю. М., Цекановский Э. Р.* О секториальных расширениях положительных эрмитовых операторов и их резольвентах: Докл. АН АрмССР, 1984, **79**, № 5.— С. 199—202. 3. *Цекановский Э. Р.* Расширения Фридрихса и Крейна положительных операторов и голоморфные полугруппы сжатий // Функцион. анализ.— 1981.— **15**, № 4.— С. 91—92. 4. *Крейн М. Г., Овчаренко И. Е.* О Q-функциях и sc-резольвентах неплотно заданных эрмитовых сжатий // Сиб. мат. журн. — 1977. — 18, № 5.—С. 1032—1056. 5. *Arsene Gr., Gheondea A.* Completing matrix contractions // J. Oper. Theory.— 1982. — **7**, № 1. — P. 179—189. 6. *Davis C. end al.* Norm-preserving dilations and tneir applications to optimal error bounds/ C. Davic, W. Kahan, H. Weinberger // SIAM J. Numer. Anal.— 1982.— **19**, № 13. — P. 445—469. 7. *Шмульян Ю. Л., Яновская Р. Н.* О боках сжимающей операторной матрицы // Изв. вузов. Математика. — 1981. — № 7.—С. 72—75. 8. *Колманович В. Ю., Маламуд М. М.* О расширениях секториальных операторов и дуальных пар сжатий.— Донецк, 1985.— С. 10—30. Деп. в ВИНИТИ 22.03.78, № 4428.

Поступила в редколлегию 05.11.86