УДК 517.53

В. И. БАБИЙ

О ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЯХ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Теория целых функций вполне регулярного роста, созданная Б. Я. Левиным и А. Пфлюгером, распространена Н. В. Говоровым (см. [1, 2]) на функции, голоморфные в полуплоскости $\boldsymbol{C}^+ = \{z \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, и, следовательно, на функции, голоморфные в произвольном угле. При этом обнаружены явления, существенно отличающие случай функций в $\boldsymbol{C}^+$ от случая целых функций. В работе [3] Л. И. Ронкин установил, что функция, голоморфная в верхней полуплоскости и не более чем нормального типа при порядке* $\rho > 1$, будет иметь вполне регулярный рост в $\boldsymbol{C}^+$ тогда и только тогда, когда $\forall \varphi(z) \in C(\overline{B}_1)$, где $B_R = \{z \in \boldsymbol{C}^+ : |z| < R\}$

$$\exists \lim_{t\to\infty} t^{-\rho} \int_{B_1 \setminus B_{1/t}} \ln|f(tz)|\,|z|^{-2}\varphi(z)\sin(\arg z)\,d\sigma_z = \int_{B_1} L_f(z)\,|z|^{-2}\varphi(z)\sin(\arg z)\,d\sigma_z.$$

Здесь $d\sigma_z$ — элемент площади в $\boldsymbol{C}$, а $L_f(z)$ — индикатор функции $f(z)$, т. е.

$$L_f(z) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-\rho} \ln|f(tz)|,\quad z \in \boldsymbol{C}^+.$$

В [4] при изучении оценок индикатора снизу рассматривалась сходимость последовательности функций

$$\{t_j^{-\rho} \ln|f(t_j z)|\} \text{ в } D'(\boldsymbol{C}^+).$$

В данной заметке мы покажем, что вполне регулярность роста функции $f(z)$ в верхней полуплоскости $\boldsymbol{C}^+$ эквивалентна слабой сходимости семейства функций $t^{-\rho}\ln|f(tz)|$, отличной от рассмотренной в [3]. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть $f(z)$ — голоморфная функция в полуплоскости $\boldsymbol{C}^+$ и не более чем нормального типа при порядке $\rho > 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$f(z)$ — функция вполне регулярного роста* в $\boldsymbol{C}^+$;
2) $\exists \lim\limits_{t\to\infty} t^{-\rho} \int\limits_{B_1 \setminus B_{1/t}} \ln|f(tz)|\,|z|^{-2}\varphi(z)\,d\sigma_z$,

   $\forall \varphi(z) \in C(\overline{B}_1)$;

* Определение порядка и нормальности типа функции в полуплоскости см. [2, 5].

3) $\exists \lim\limits_{t\to\infty} t^{-\rho} \int\limits_{B_1} \ln|f(tz)|\,\varphi(z)\,d\sigma_z$,
$\forall \varphi(z) \in D(B_1)$*.

Прежде чем доказывать эту теорему, отметим, что из нее вытекает как следствие теорема Л. И. Ронкина и в случае $0<\rho\leqslant\leqslant 1$, нерассмотренном в [3].

Доказательство. Докажем импликацию $1)\Rightarrow 2)$.

Рассмотрим множества

$$C_1=\left\{z\in \boldsymbol{C}: \frac{\varepsilon}{2}\leqslant|z|\leqslant 1,\ 0\leqslant \arg z\leqslant 2\theta_0\right\};$$

$$C_2=\left\{z\in \boldsymbol{C}: \frac{\varepsilon}{2}\leqslant|z|\leqslant 1,\ \theta_0\leqslant \arg z\leqslant \pi-\theta_0\right\};$$

$$C_3=\left\{z\in \boldsymbol{C}: \frac{\varepsilon}{2}\leqslant|z|\leqslant 1,\ \pi-2\theta_0\leqslant \arg z\leqslant \pi\right\};$$

$$C_4=\{z\in \boldsymbol{C}: 0\leqslant|z|\leqslant\varepsilon,\ 0\leqslant \arg z\leqslant \pi\}.$$

Здесь $0<\theta_0<\frac{\pi}{4}$, $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$.

Объединение этих множеств равно $\overline{B}_1$. Произведем соответствующее «разбиение» единицы, а именно, возьмем функции

$$\Psi_j(z)\in C^\infty(\overline{B}_1),\ j=1,\ldots,4,$$

такие, что

1) $\operatorname{supp}(\Psi_j)\subset C_j$;
2) $0\leqslant\Psi_j(z)\leqslant 1$;
3) $\sum\limits_{j=1}^{4}\Psi_j(z)\equiv 1,\ \forall z\in\overline{B}_1$.

Для любого $t>1$ имеем

$$S(t)\overset{\text{def}}{=}\Big|t^{-\rho}\int\limits_{B_1\setminus B_{1/t}}\ln|f(tz)|\,|z|^{-2}\varphi(z)\,d\sigma_z-$$
$$-\int\limits_{B_1}L_f(z)\,|z|^{-2}\varphi(z)\,d\sigma_z\Big|=$$
$$=\Big|t^{-\rho}\int\limits_{B_1\setminus B_{1/t}}\ln|f(tz)|\,|z|^{-2}\varphi(z)\left(\sum_{j=1}^{4}\Psi_j(z)\right)d\sigma_z-$$
$$-\int\limits_{B_1}L_f(z)\,|z|^{-2}\varphi(z)\left(\sum_{j=1}^{4}\Psi_j(z)\right)d\sigma_z\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\Big|t^{-\rho}\int\limits_{C_1}\ln|f(tz)|\,|z|^{-2}\varphi(z)\,\Psi_1(z)\,d\sigma_z\Big|+$$
$$+\Big|\int\limits_{C_1}L_f(z)\,|z|^{-2}\varphi(z)\,\Psi_1(z)\,d\sigma_z\Big|+$$

---

* Как обычно $D(B_1)$ — пространство функций $\varphi(z)\in C^\infty(B_1)$ с компактным носителем в B_1.

$$+\left|t^{-\rho}\int_{C_2}\ln|f(tz)|\,|z|^{-2}\varphi(z)\Psi_2(z)\,d\sigma_z-\right.$$

$$\left.-\int_{C_2}L_f(z)\,|z|^{-2}\varphi(z)\Psi_2(z)\,d\sigma_z\right|+$$

$$+\left|t^{-\rho}\int_{C_3}\ln|f(tz)|\,|z|^{-2}\varphi(z)\Psi_3(z)\,d\sigma_z\right|+$$

$$+\left|\int_{C_3}L_f(z)\,|z|^{-2}\varphi(z)\Psi_3(z)\,d\sigma_z\right|+$$

$$+\left|t^{-\rho}\int_{C_4\setminus B_{1/t}}\ln|f(tz)|\,|z|^{-2}\varphi(z)\Psi_4(z)\,d\sigma_z\right|+$$

$$+\left|\int_{C_4}L_f(z)\,|z|^{-2}\varphi(z)\Psi_4(z)\,d\sigma_z\right|=$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_7.$$

Оценим I_1, считая, что $|\varphi(z)|\leqslant 1$, что, очевидно, не нарушает общности. Получим

$$I_1\leqslant t^{-\rho}\int_0^{2\theta_0}d\theta\int_1^t|\ln|f(re^{i\theta})||\frac{dr}{r}. \tag{1}$$

В [2] показано, что если $f(z)$ — функция вполне регулярного роста в $\boldsymbol{C}^+$, то

$$\sup_{\substack{t\geqslant 1\\ 0<\theta<\pi}} t^{-\rho}\int_1^t|\ln|f(re^{i\theta})||\frac{dr}{r}=T_f<\infty. \tag{2}$$

Отсюда и из (1) заключаем $I_1\leqslant 2\theta_0 T_f$. Аналогично $I_4\leqslant$ $\leqslant 2\theta_0 T_f$.

Чтобы оценить I_3, воспользуемся тем, что, как следует из леммы 3* работы [6], для любой функции $f(z)$ вполне регулярного роста в $\boldsymbol{C}^+$ и любой непрерывной в C_2 функции $\chi(z)$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\rho}\int_{C_2}\ln|f(tz)|\,\chi(z)\,d\sigma_z=\int_{C_2}L_f(z)\,\chi(z)\,d\sigma_z.$$

Применяя это соотношение с функцией $\chi(z)=|z|^{-2}\varphi(z)\Psi_2(z)$, заключаем, что $I_3=o(1)$ при $t\to\infty$.

Для оценки I_6 вновь используем оценку (2). Имеем

$$I_6\leqslant t^{-\rho}\int_0^{\pi}d\theta\int_1^{\varepsilon t}|\ln|f(re^{i\theta})||\frac{dr}{r}<\pi\varepsilon^{\rho}T_f.$$

Рассмотрим теперь интегралы, содержащие индикатор. Имеем

$$I_2\leqslant\frac{1}{\rho}\int_0^{2\theta_0}|h(\theta)|\,d\theta,\quad I_5\leqslant\frac{1}{\rho}\int_{\pi-2\theta_0}^{\pi}|h(\theta)|\,d\theta,\quad I_7\leqslant\frac{\varepsilon^{\rho}}{\rho}\int_0^{\pi}|h(\theta)|\,d\theta.$$

* Требование голоморфности $f(z)$ в начале координат, фигурирующее в лемме 3, в нашем случае излишне, поскольку множество C_2 отграничено от нуля.

Так как $f(z)$ — функция не более чем нормального типа, а ее индикатор является ρ-тригонометрически выпуклой функцией, то, как нетрудно видеть,

$$\sup_{0<\theta<\pi} |h(\theta)| = C_h < \infty,$$

и, значит,

$$I_2 + I_5 \leqslant \frac{4}{\rho}\theta_0 C_h, \quad I_7 \leqslant \frac{\varepsilon^\rho}{\rho}\pi C_h.$$

Подытоживая проведенные оценки, получаем

$$S(t) \leqslant o(1) + A\theta_0 + B\varepsilon^\rho$$

(A, B — константы), и, значит, для любого наперед заданного $\eta > 0$ можно выбрать ε, θ_0, t_0 так, что при $t > t_0$ будет выполнено неравенство $S(t) \leqslant \eta$.

Следовательно, утверждение 2) имеет место и тем самым доказана импликация 1) $\Rightarrow$ 2). Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна.

Теперь докажем импликацию 3) $\Rightarrow$ 1).

При выполнении условия 3) семейство функций $t^{-\rho}\ln|f(tz)|$ сходится в пространстве $D'(B_1)$ к некоторой функции $\widetilde{L}_f(z)$. Как легко видеть, обобщенная функция $\widetilde{L}_f(z)$ на самом деле является субгармонической, позитивно однородной порядка ρ функцией.

Покажем, что $\widetilde{L}(z) = L_f(z)$.

Так как $f(z)$ имеет не более чем нормальный тип при порядке ρ, то в каждом угле $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$ $(0 < \alpha < \beta < \pi)$ для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого r_ε, выполнено неравенство

$$\ln|f(re^{i\theta})| < (h(\theta) + \varepsilon) r^\rho.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\rho} \int_{B_1} \ln|f(tz)|\varphi(z)\,d\sigma_z \leqslant$$
$$\leqslant \int_{B_1} L_f(z)\varphi(z)\,d\sigma_z, \quad \forall\varphi(z) \in D(B_1),$$
$$\varphi(z) \geqslant 0.$$

Но согласно определению функции $\widetilde{L}(z)$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\rho} \int_{B_1} \ln|f(tz)|\varphi(z)\,d\sigma_z = \int_{B_1} \widetilde{L}(z)\varphi(z)\,d\sigma_z, \quad \forall\varphi(z) \in D(B_1)$$

и, таким образом,

$$\int_{B_1} \widetilde{L}(z)\varphi(z)\,d\sigma_z \leqslant \int_{B_1} L_f(z)\varphi(z)\,d\sigma_z,$$
$$\forall\varphi(z) \in D(B_1), \quad \varphi(z) \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\widetilde{L}(z) \leqslant L_f(z).$$

Предположим, что в какой-то точке $z_0 \in C^+$ выполнено строгое неравенство

$$\widetilde{L}(z_0) < L_f(z_0).$$

Индикатор $L_f(z)$, как известно, является непрерывной, субгармонической, позитивно однородной функцией в $\boldsymbol{C}^+$. Поэтому найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что

$$\widetilde{L}(z) < L_f(z) - \varepsilon |z|^\rho \tag{3}$$

как только $|z - z_0| < \delta$. Аналогично, для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется $\delta_1 > 0$ такое, что

$$\widetilde{L}(z) < L_f(z_0) + \varepsilon_1 \tag{4}$$

как только $|z - z_0| < \delta_1$. Выберем $\varepsilon_1 < \varepsilon |z_0|^\rho$ и положим $\varphi_0(z) = \alpha(|z - z_0|)$, где $\alpha(|t|)$ — какая-нибудь положительная, бесконечно дифференцируемая функция на $\boldsymbol{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$1)\ \int_0^R \alpha(r)\, r\, dr = \frac{1}{2\pi};\quad 2)\ \alpha(|t|) = 0$$

при $|t| > R = \min\{\delta, \delta_1\}$. Обозначим

$$I = t^{-\rho} \int_{B_1} \ln|f(tz)|\, \varphi_0(z)\, d\sigma_z.$$

Оценим интеграл I снизу, воспользовавшись субгармоничностью функции $\ln|f(tz)|$

$$I = 2\pi t^{-\rho} \int_0^R \alpha(r)\, r\, dr\, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|f(t(z_0 + re^{i\theta}))|\, d\theta \geqslant \ln|f(tz_0)|\, t^{-\rho}.$$

Переходя здесь к пределу при $t \to \infty$, получаем

$$\int_{B_1} \widetilde{L}(z)\, \varphi_0(z)\, d\sigma_z \geqslant L_f(z_0). \tag{5}$$

Оценим интеграл из (5) сверху, используя (3), (4) и субгармоничность функции $|z|^\rho$.

Получаем

$$\int_{B_1} \widetilde{L}(z)\, \varphi_0(z)\, d\sigma_z <$$
$$< \int_{|z-z_0|<R} L_f(z)\, \varphi_0(z)\, d\sigma_z - \varepsilon \int_{|z-z_0|<R} |z|^\rho\, \varphi_0(z)\, d\sigma_z <$$
$$< L_f(z_0) \int_{|z-z_0|<R} \varphi_0(z)\, d\sigma_z + \varepsilon_1 \int_{|z-z_0|<R} \varphi_0(z)\, d\sigma_z -$$
$$- \varepsilon \int_{|z-z_0|<R} |z|^\rho\, \varphi_0(z)\, d\sigma_z = L_f(z_0) +$$
$$+ \varepsilon_1 - \varepsilon \int_{|z-z_0|<R} |z|^\rho \alpha(|z - z_0|)\, d\sigma_z \leqslant$$
$$\leqslant L_f(z_0) + \varepsilon_1 - \varepsilon |z_0|^\rho = L_f(z_0) - \eta,\ (\eta > 0).$$

Это противоречит (5), и, следовательно, исходное предположение неверно, а значит,

$$\widetilde{L}(z) = L_f(z),\ \forall z \in \boldsymbol{C}^+.$$

Далее воспользуемся теоремой 4.4.1 работы [7], согласно которой, если последовательность субгармонических функций u_n сходится к функции u в пространстве $D'(B_1)$, то $\forall\alpha > 0$ u_n сходятся к u и по α-мере Карлесона* на каждом компакте $K \subset \subset B_1$. Таким образом, из показанной сходимости в $D'(B_1)$ функций $t^{-\rho} \ln |f(tz)|$ к функции $L_f(z)$ следует, что $\forall\alpha > 0$ семейство функций $t^{-\rho} \ln |f(tz)|$ сходится к $L_f(z)$ по α-мере Карлесона на каждом компакте $K \subset \subset B_1$.

Отсюда, как легко видеть, следует, что в каждом угле

$$\alpha < \arg z < \beta, \quad (0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \pi)$$

функции $r^{-\rho} \ln |f(re^{i\theta})|$ сходятся к $L_f(e^{i\theta})$, когда $z = re^{i\theta} \to \infty$, не принимая значений из некоторого C^0-множества**.

Следовательно, $f(z)$ — функция вполне регулярного роста в $\boldsymbol{C}^+$, и значит доказано 3) $\Rightarrow$ 1). Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956.—632 с. 2. *Говоров Н. В.* О функциях вполне регулярного роста в полуплоскости. — Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. — Ростов-на-Дону, 1966.—205 с. 3. *Ронкин Л. И.* Функции вполне регулярного роста в полуплоскости. — Докл. АН УССР, 1985, № 3, с. 10—13. 4. *Файнберг Е. Д.* Оценки индикаторов специальных классов функций, аналитических в полуплоскости. — Рукопись деп. в ВИНИТИ 7. 08. 81., № 4167.—51 с. 5. *Титчмарш Е.* Теория функций. — М.: Наука, 1980.—463 с. 6. *Агранович П. З., Ронкин Л. И.* О функциях вполне регулярного роста многих переменных. — Препринт 29. 11. 76. ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1976.—22 с. 7. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций. — Мат. сб., 1979, 108 (150), № 2, с. 147—167.

Поступила в редколлегию 25. 04. 85.