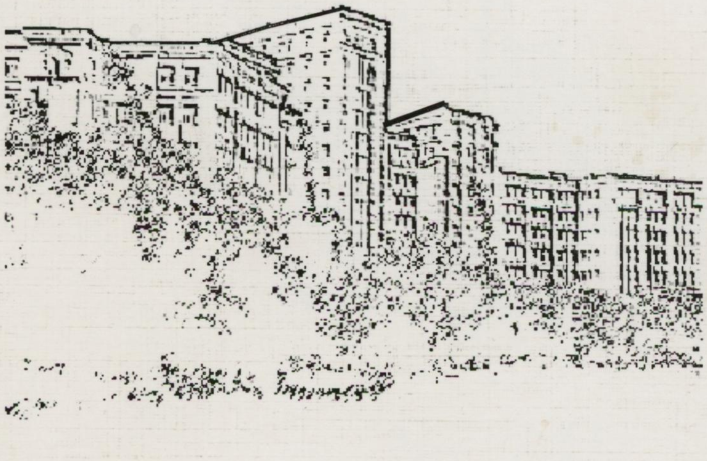
ISSN 0453–8048

ВІСНИК

Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна



№ 749

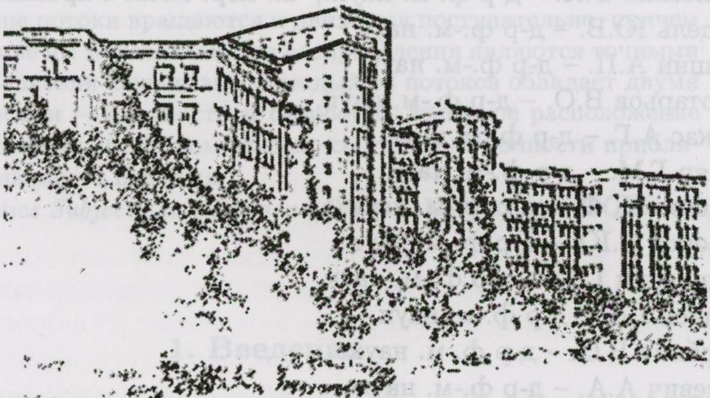
Харків
2006

Міністерство освіти та науки України
ISSN 0453–8048

Заснований у 1965 р.

ВІСНИК

Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна



№ 749

Серія
«Математика, прикладна математика і механіка»

Випуск 56

Харків
2006

УДК 517.9

До Віснику включено статті з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Адреса редакційної колегії: 61077, Харків, м. Свободи, 4,
ХНУ, механіко-математичний факультет, к.7-29.
Тел. 7075518, 7075135, Email: vestnik@univer.kharkov.ua
Интернет:
http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/vestnik/

Друкується за рішенням Вченої Ради Харківського національного університету (протокол № 13 від 29 грудня 2006 р.).

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 4063 від 02.03.2000 р.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 533.72 № 749, 2006, с.3–12

Взаимодействие смерчевых потоков в случае модели твердых сфер

В.Д. Гордевский, Ю.А. Сысоева

Харьковский Национальный Университет имени В. Н. Каразина, Украина
Харьковский национальный экономический университет, Украина

Получено приближенное описание процесса взаимодействия между двумя смерчеобразными потоками в достаточно разреженном газе из твердых сфер. Такие потоки вращаются и движутся поступательно, причем соответствующие им максвелловские распределения являются точными решениями уравнения Больцмана. Каждый из потоков обладает двумя различными осями — плотности и скоростей, взаимное расположение которых определенным образом связано со степенью точности приближенного бимодального решения.
2000 Mathematics Subject Classification 76P05, 45K05, 82C40, 35Q55.

1. Введение

В кинетической теории состояние достаточно разреженного газа описывается с помощью функции распределения частиц $f(t, v, x)$, где $t \in R^1$ — время; $v = (v^1; v^2; v^3) \in R^3$ — скорость молекулы; $x = (x^1; x^2; x^3) \in R^3$ — ее пространственная координата. Функция f должна удовлетворять нелинейному интегро- дифференциальному уравнению Больцмана [1–3]:

$$D(f) = Q(f, f), \tag{1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{2}$$

$$Q(f, f) = \frac{d^2}{2}\int_{R^3} dv_1 \int_\Sigma d\alpha B(v_1, v, \alpha)[f(t, v_1', x)f(t, v', x) - -f(t, v_1, x)f(t, v, x)], \tag{3}$$

где $\frac{\partial f}{\partial x}$ — пространственный градиент распределения f; параметр d при фиксированной длине свободного пробега молекул можно трактовать просто как диаметр каждой молекулы; v, v_1, v', v_1' — скорости двух молекул до и после соударения соответственно; вектор α лежит на единичной сфере Σ в R^3 и направлен вдоль линии центров частиц — партнеров по соударению в момент столкновения между ними.

Выбор той или иной модели столкновений между молекулами приводит к различным формам для величин v', v_1', а также столкновительного члена $B(v_1, v, \alpha)$. В случае, когда частицы предполагаются абсолютно гладкими и жесткими (упругими), а взаимодействие между ними происходит лишь в момент соударения, причем полный импульс и полная энергия сохраняются (модель твердых или упругих сфер), имеем [1–3]:

$$B(v_1, v, \alpha) = |(v - v_1, \alpha)|, \tag{4}$$

$$v_1' = v_1 + \alpha(v - v_1, \alpha); \quad v' = v - \alpha(v - v_1, \alpha), \tag{5}$$

Единственным классом точных решений уравнения Больцмана для твердых сфер, явный вид которых известен к настоящему времени, являются максвелловские распределения (максвеллианы), общий вид которых таков [1–6]:

$$M = \rho\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta(v-\bar{v})^2}, \tag{6}$$

где гидродинамические параметры ρ (плотность газа), $\beta = \frac{1}{2T}$ (его обратная температура) и $\tilde{v}$ (массовая или средняя скорость потока), вообще говоря, зависят от t и x (в этом случае максвеллиан называют локальным; если же ρ, β и $\tilde{v}$ постоянны — глобальным). Возможный характер такой зависимости, обеспечивающий выполнение равенств

$$D(M) = Q(M, M) = 0, \tag{7}$$

был исследован в работах [5,6] (наиболее полное его описание, а также частичный анализ физического смысла указанных решений можно найти, например, в монографиях [1–4]). Более детальный анализ геометрической структуры и физических особенностей локальных максвеллианов был проведен в работе [15]. Там же выделены некоторые основные частные случаи, описывающие несколько типов возможного движения потоков газа из твердых сфер, среди которых наибольший интерес представляют так называемые смерчевые потоки (коротко в дальнейшем — смерчи). Так называются потоки, вращающиеся как целое (наподобие твердого тела) вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью $\omega \in R^3$ и одновременно движущиеся поступательно с постоянной линейной скоростью $\bar{u} \in R^3$ в произвольном направлении, перпендикулярном оси вращения ($\bar{u} \perp \omega$), причем температура газа также постоянна (т. е. $\beta = const$), а плотность ρ одинакова вдоль каждой прямой, параллельной оси вращения. Как показано в [15], в этом случае гидродинамические параметры распределения (6) задаются формулами:

$$\rho = \rho_0 \exp\{\beta\omega^2 r^2\}, \tag{8}$$

$$r^2 = \frac{1}{\omega^2}[\omega \times (x - \tilde{x_0} - \bar{u_0} t)]^2 \qquad (9)$$

$$\tilde{x_0} = \frac{1}{\omega^2}[\omega \times (\bar{v} - \bar{u_0})], \qquad (10)$$

$$\tilde{v} = \bar{v} + [\omega \times (x - \bar{u_0} t)], \qquad (11)$$

где ρ_0 — минимальная плотность газа; "скорость сноса"$\bar{u_0}$ введена для удобства записи и удовлетворяет условиям:

$$\bar{u} = [\omega \times \bar{u_0}], \qquad (12)$$

$$(\bar{u_0}, \omega) = 0, \qquad (13)$$

а $\bar{v} \in R^3$ — некая векторная константа, имеющая физический смысл массовой скорости газа в начале координат ($x = 0$) в момент времени $t = 0$.

Подчеркнем одну нетривиальную особенность этого распределения, выявленную в [15]. Как можно видеть из (8) – (13), смерч (в отличие от покоящегося вихря, т. е. "винта— терминология [11,12]) имеет две различные оси: обе они параллельны вектору ω , но одна из них при $t = 0$ проходит через точку $\tilde{x_0}$ (см. (10)) и соответствует распределению плотности (ось плотности — как раз на ней и достигается значение $\rho = \rho_0$), а другая — через такую точку:

$$x_0 = \frac{1}{\omega^2}[\omega \times \bar{v}], \qquad (14)$$

и отвечает распределению скоростей газа (ось вращения или ось скоростей). Таким образом, величина r^2, задаваемая соотношением (9), есть квадрат расстояния точки x именно до оси плотности в момент t. С течением времени обе оси, будучи на фиксированном расстоянии друг от друга, а вместе с ними и весь смерч в целом, движутся поступательно, причем

$$x_0 - \tilde{x_0} = \frac{1}{\omega^2}[\omega \times \bar{u_0}], \qquad (15)$$

т. е. направление этого движения перпендикулярно плоскости, проходящей через указанные оси. Значит, смерч является "деформированным вихрем", причем его деформация такова, что в некотором направлении от оси вращения плотность быстро возрастает ("зона уплотнения"), а в противоположном – сначала убывает ("зона разрежения"), и лишь затем снова возрастает, но уже с некоторым "отставанием"от зоны уплотнения.

Большой интерес представляет вопрос об описании процесса взаимодействия двух (или более) максвелловских потоков газа [3,8–10]. Это может быть достигнуто при помощи построения бимодальных (соответственно, многомодальных) распределений, т. е. специального вида линейных комбинаций максвеллианов различного типа, минимизирующих ту или иную невязку (какую-либо норму разности между левой и правой частями уравнения Больцмана) [7,11–15].

Данная работа посвящена изучению поведения "чисто интегральной"невязки для бимодальных распределений со смерчевыми модами.

В разделе 2 приведена точная постановка задачи.

Основные результаты и их обсуждение помещены в раздел 3.

2. Постановка задачи

Будем искать приближенное решение уравнения Больцмана (1) – (5) в виде бимодального распределения [11–15]:

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \tag{16}$$

где $\varphi_i = \varphi_i(t,x) \in C^1(R^4)$, $i = 1,2$ — неотрицательные ограниченные коэффициентные функции, а максвелловские моды M_i, $i = 1,2$ таковы:

$$M_i(t,v,x) = \rho_i e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2} \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta_i (v - \bar{v_i})^2}, \quad i = 1,2, \tag{17}$$

$$\bar{v_i} = \bar{v}_i + [\omega_i \times (x - \bar{u_0}_i t)], \quad i = 1,2, \tag{18}$$

$$(\bar{u}_{0i}, \omega_i) = 0, \quad i = 1,2, \tag{19}$$

$$r_i^2 = \frac{1}{\omega_i^2}[\omega_i \times (x - \tilde{x_0}_i - \bar{u_0}_i t)]^2, \quad i = 1,2, \tag{20}$$

$$\tilde{x_0}_i = \frac{1}{\omega_i^2}[\omega_i \times (\bar{v}_i - \bar{u_0}_i)], \quad i = 1,2 \tag{21}$$

(в дальнейшем могут также понадобиться точки x_{0i}, $i = 1,2$, введенные в соответствии с (14), где ω и $\bar{v}$ принимают значения ω_i и $\bar{v_i}$, $i = 1,2$). Здесь все скалярные и векторные константы для каждого из двух смерчевых потоков имеют тот же смысл, который был описан во введении (вместо ρ_0 мы теперь имеем ρ_i, $i = 1,2$).

В качестве величины, характеризующей степень точности этого приближенного решения, выберем следующую невязку [7, 12, 14]:

$$\Delta_1 = \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \int_{R^3} dv \, |D(f) - Q(f,f)|. \tag{22}$$

Требуется найти какие-либо условия, выражаемые в терминах поведения гидродинамических параметров и коэффициентных функций, достаточные для произвольной малости функционала Δ_1 (сходная задача в случае "смешанной"невязки равномерно-интегрального типа рассматривалась в [15]). При этом, разумеется, исключаются тривиальные ситуации наподобие $\rho_i \to 0$, $i = 1,2$, которые приводят к "вырождению"бимодальной функции (16) и т. п..

Ниже найдены некоторые возможные решения указанной задачи.

3. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть выполнены соотношения:*

$$\omega_i = \omega_{0i}\beta_i^{-m_i}, \quad i = 1,2, \tag{23}$$

$$[\omega_{0i} \times (\bar{v_i} - \bar{u_{0i}})] = 0, \quad i = 1,2, \tag{24}$$

где $m_i \geq \frac{1}{2}$ *и* $\omega_{0i} \in R^3$ *произвольны и фиксированы. Пусть функции* φ_i, $i = 1,2$ *в распределении (16) не зависят от* β_i, $i = 1,2$ *и таковы, что произведения выражений*

$$\varphi_i; \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}; \quad \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right|;$$

$$\varphi_i \left|[\omega_{0i} \times (x - \bar{u_{0i}} t)]\right|; \quad \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}[\omega_{0i} \times (x - \bar{u}_{0i} t)]\right|, \quad i = 1,2 \tag{25}$$

на множители $\exp\{\beta_i \omega_i^2 r_i^2\}$ *принадлежат* $L_1(R^4)$ *при всех* $\beta_i > 0$, $i = 1,2$.

Тогда существует такое Δ_1', *что*

$$\Delta_1 \leq \Delta_1', \tag{26}$$

причем:

1). Если

$$m_i = \frac{1}{2}, \quad i = 1,2 \tag{27}$$

то

$$\lim_{\beta_i \to +\infty, i=1,2} \Delta_1' = \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \rho_i \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \left| \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \bar{v_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right)\mu_i(t,x) + \varphi_1\varphi_2\mu_1(t,x)\mu_2(t,x)\pi d^2 \rho_j \left|\bar{v_i} - \bar{v_j}\right| \right|$$
$$+ 2\rho_1\rho_2\pi d^2 \left|\bar{v_1} - \bar{v_2}\right| \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx [\mu_1(t,x)\mu_2(t,x)\varphi_1\varphi_2], \tag{28}$$

где

$$\mu_i(t,x) = \exp\{[\omega_{0i} \times (x - \bar{u_{0i}} t)]^2\}, \quad i = 1,2. \tag{29}$$

2).Если

$$m_i > \frac{1}{2}, \quad i = 1,2 \tag{30}$$

то справедливо (28) при

$$\mu_i(t,x) = 1, \quad i = 1,2. \tag{31}$$

Доказательство. После подстановки (16) – (21) в уравнение (1) – (5), а затем величин $D(f)$ и $Q(f,f)$ в выражение (22), с учетом того, что для смерчей (в отличие от вихрей [14]) выполнено (7), в результате оценок сверху, замен переменных и преобразований, аналогичных проведенным в [14, 15], получим:

$$\Delta_1 \leq \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2} \left[\int_{R^3} \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \bar{v_i} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right\} e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2} \right.$$

$$+\varphi_1\varphi_2 \exp\{\beta_1\omega_1^2 r_1^2 + \beta_2\omega_2^2 r_2^2\} \frac{\rho_j d^2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\cdot \int_{R^3} F_{ij}(u,t,x,w) e^{-w^2} dw \bigg| \rho_j \pi^{-3/2} e^{-u^2} du$$

$$\left. +\varphi_1\varphi_2 \exp\{\beta_1\omega_1^2 r_1^2 + \beta_2\omega_2^2 r_2^2\} \frac{\rho_1\rho_2 d^2}{\pi^2} \int_{R^6} e^{-w^2-u^2} dw du F_{ij}(u,t,x,w) \right], \qquad (32)$$

где

$$F_{ij}(u,t,x,w) = \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \bar{v_i} - \bar{v_j} - \frac{w}{\sqrt{\beta_j}} \right|, \quad i \neq j \qquad (33)$$

(сходимость всех интегралов, очевидно, обеспечивается благодаря (18) и (25)). Далее, экспоненты в (32) с учетом (20), (21), (23), (24) приобретают вид:

$$e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2} = \exp\{[\omega_{0i} \times (x - u_{0i}t)]^2 \beta_i^{1-2m_i}\}, \quad i = 1, 2, \qquad (34)$$

откуда вытекает, что они имеют пределы (29) либо (31) при $\beta_i \to +\infty, i = 1,2$ в соответствии с (27) или (30). Величины (33) стремятся к $|\bar{v_i} - \bar{v_j}|, i \neq j$ в силу (18), (23). После перехода к пределу под знаком интеграла в (32) (возможность такого перехода вытекает из предположения (25) и равномерной относительно $\beta_i, i = 1,2$ сходимости всех имеющихся интегралов на произвольной окрестности бесконечности благодаря присутствию быстро убывающих по переменным u и w экспонент) и последующего интегрирования по u и w, получаем (28) с функциями $\mu_i, i = 1,2$ вида (29) либо (31). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть вновь выполнено (23), и, кроме того,*

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x) e^{-\beta_i \omega_i^2 r_i^2}, \quad i = 1, 2, \qquad (35)$$

где $\psi_i, i = 1,2$ не зависит от $\beta_i, i = 1,2$, причем выражения (25) с подстановкой ψ_i вместо $\varphi_i, i = 1,2$ принадлежат $L_1(R^4)$. Тогда в предположении (30) имеют место утверждения (26), (28) с заменой φ_i на $\psi_i, i = 1,2$ и функциями $\mu_i, i = 1,2$ вида (31), а в случае (27) в правой части (28) появляется дополнительное слагаемое (при этом (31) сохраняется):

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} \rho_i \left|[\omega_{0i} \times (\bar{v_i} - \bar{u_{0i}})]\right| \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \psi_i. \qquad (36)$$

Доказательство вновь опирается на формулы (32), (33), однако затем в (32) следует подставить (35). В результате получим:

$$\Delta_1' = \pi^{-\frac{3}{2}} \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \sum_{i=1}^{2} \rho_i \int_{R^3} \left[\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + A_i(u,t,x) + B_i(u,t,x) \right| \right.$$

$$\left. + A_i(u,t,x) \right] e^{-u^2} du, \tag{37}$$

$$A_i(u,t,x) = \psi_1 \psi_2 \rho_j \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int_{R^3} dw e^{-w^2} F_{ij}(u,t,x,w), \quad i \neq j, \tag{38}$$

$$B_i(u,t,x) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \tilde{v}_i \right)$$

$$+2\psi_i \sqrt{\beta_i} \left\{ (\omega_i, u)(\omega_i, x) - \omega_i^2 (u, x - \bar{u_{0i}} t) + (u, \omega_i, \bar{v_i} - \bar{u_{0i}}) \right\} \tag{39}$$

(здесь при дифференцировании по t и x и последующих преобразованиях учтены равенства (18) – (21), а также использована техника, развитая в [13]). Дальнейший учет (23) в выражениях (37) – (39) и (33) позволяет перейти к пределу при $\beta_i \to +\infty, i = 1, 2$ (обоснование аналогично проведенному при доказательстве предыдущей теоремы и опирается на условия данной теоремы). При этом наличие или отсутствие дополнительного члена (36), как легко видеть, зависит лишь от поведения последнего слагаемого в (39), которое, очевидно, имеет ненулевой предел только в предположении (27). Теорема доказана.

Замечание 1. Сравнение условия (24) с (23) и (21) показывает, что при выполнении этого условия оси плотностей обоих смерчей при $t = 0$ проходят через начало координат, т. е. $\tilde{x_{0i}} = 0, i = 1, 2$ (оси скоростей при этом остаются произвольными). В работе [15] отмечено, что этот факт может трактоваться как "самосогласованность"каждого из двух смерчей. Отсутствие подобного предположения в теореме 2 в известной степени компенсируется наличием условия (35), которое, очевидно, означает, что плотности слагаемых в бимодальном распределении (16) не зависят от $\beta_i, i = 1, 2$, т. е. от температур смерчевых потоков.

Замечание 2. Формально предположение (35) выглядит так же, как аналогичное требование в работах [11–14], однако на самом деле оно здесь уже иное, ибо выражения $r_i^2, i = 1, 2$ в данном случае вычисляются в соответствии с (20), (21), что характерно именно для смерчей, но не для винтов или вихрей.

Следствие 1. *Пусть выполняются требования (24) и (23) при*

$$m_i \geq \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \tag{40}$$

а функции $\varphi_i, i = 1, 2$ имеют вид финитных "плато"[7,14], таких, что

$$V \left[\left(supp \varphi_i \right)_x \right] \to 0, \quad i = 1, 2, \tag{41}$$

$$\bar{v}_i^k V\left[\left(supp\varphi_i\right)_k\right] \to 0, \quad i=1,2, \quad k=1,2,3, \tag{42}$$

где под G_x и $G_k, k=1,2,3$ понимаются проекции множества $G \subset R^4$ на гиперплоскости $t=0$ и $x^k=0, k=1,2,3$ соответственно, а под V – объем указанных проекций. Пусть, кроме того, выполнено хотя бы одно из требований:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2, \tag{43}$$

$$supp\varphi_1 \cap supp\varphi_2 = \emptyset. \tag{44}$$

$$d \to 0. \tag{45}$$

Тогда

$$\lim_{\beta_i \to +\infty, i=1,2} \Delta_1 = 0. \tag{46}$$

Доказательство. Выполнение (24), (23) и (40), в силу теоремы 1 (условие (25) также выполнено ввиду финитности $\varphi_i, i=1,2$), означает, что справедливы соотношения (26) и (28) с функциями $\mu_i, i=1,2$ вида (29) либо (31), причем в обоих случаях все входящие в (28) интегралы сходятся благодаря указанной финитности. Далее, при выполнении (41), (42), как показано в [7], интегралы от выражений

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \tag{47}$$

стремятся к нулю (присутствие множителей $\mu_i, i=1,2$ здесь также существенно не сказывается). Наконец, как легко видеть, любое из условий (43) – (45) приводит к бесконечной малости всех оставшихся в правой части (28) слагаемых, откуда с учетом (26) получаем (46). Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 2, причем функции $\psi_i, i=1,2$ удовлетворяют тем же требованиям, которые налагаются на функции $\varphi_i, i=1,2$ в следствии 1. Тогда, если справедливо (30), либо (27) вместе с (24), то при выполнении хотя бы одного из требований (43) – (45) имеет место равенство (46).*

Доказательство проводится по схеме, аналогичной схеме доказательства следствия 1, с заменой функций φ_i на $\psi_i, i=1,2$, с той лишь разницей, что теперь, как видно из утверждения теоремы 2, в любом случае верно (31), а дополнительное слагаемое вида (36), возникающее в предположении (27), автоматически аннулируется благодаря требованию самосогласованности смерчей (24) (см. Замечание 1).

Замечание 3. Сравнение результатов данной работы и статьи [14] показывает, что для смерчеобразных потоков можно добиться минимизации невязки Δ_1 более естественным образом, чем для вихреобразных, где в некоторых случаях приходилось вводить дополнительные требования вроде коллинеарности векторов ω_i и $\bar{v}_i, i=1,2$, либо увеличивать количество параметров, стремящихся к нулю. С другой стороны, в отличие от работы [15], где использована "смешанная"невязка Δ, здесь удается решить поставленную в разделе 2 задачу за счет совершенно иных факторов. Именно, мы не требуем теперь наличия специальной структуры аргументов коэффициентных функций (φ_i либо $\psi_i, i = 1,2$), что избавляет и от необходимости предполагать определенную связь между скоростями $\bar{v_i}$ и $\bar{u_{0i}}, i = 1,2$, однако вынуждены рассматривать лишь финитные функции, причем имеющие структуру "плато", т. е. сглаженных специальным образом характеристических функций некоторых ограниченных областей в R^4 [7,14].

Замечание 4. Физический смысл полученных результатов в некоторых отношениях аналогичен физическому смыслу вихревых и винтовых распределений работ [12,14]. Так, предположение (45) отвечает околокнудсеновскому газу [3], а (44) означает пространственно-временную стратификацию смерчей. Что касается поведения финитных "плато"(41), (42), то оно описывает объекты (сгустки) газа неполной пространственной размерности, которые подробно классифицированы и проанализированы в [7,12]. В то же время структура смерчей, рассмотренных в данной работе, имеет и существенные отличия от известных ранее распределений. Именно, предположение (43) в сочетании с (24) означает, что оси плотности обоих взаимодействующих смерчей пересекаются при всех t и $\beta_i, i = 1,2$ (см. также Замечание 1), в то время как их оси скоростей, вообще говоря (т. е. для произвольных $\omega_{0i}, i = 1,2$), при $\beta_i \to +\infty, i = 1,2$ удаляются на бесконечное расстояние как друг от друга, так и от соответствующих осей плотности вследствие (23) и (14). Таким образом, оба смерча, оставаясь "когерентными"в смысле выполнения (43) (это означает, что они совпадают при нулевых t и x), все сильнее деформируются в процессе их остывания ($\beta_i \to +\infty, i = 1,2$) и замедления вращения ($\omega_i \to 0, i = 1,2$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. -М.: Изд-во иностр. лит., 1960. –510 с.

2. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. -М.: Наука, 1967. – 440 с.

3. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. -М.: Мир, 1978. – 495 с.

4. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. -М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 118 с.

5. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases // Comm. Pure and Appl. Math. – 1949. – V. 2, 4. – P. 331–407.

6. Фридлендер О.Г. Локально-максвелловские решения уравнения Больцмана // Прикл. мат. и мех. – 1965. – Т. 29, вып.5. – С. 973–977.

7. Gordevsky V.D. Trimodal approximate solutions of the non-linear Boltzmann equation // Math. Meth. Appl. Sci. – 1998. – V. 21. – P. 1479–1494.

8. Тамм И.Е. О ширине ударных волн большой интенсивности // Труды ФИАН. – 1965. – Т. 29. – С. 239–249. (Выполн. в 1947).

9. Mott-Smith H.M. The Solution of the Boltzmann Equation for a Shock Wave // Phys. Rev. – 1951. – V. 82, 6. – P. 885–890.

10. Hosokawa I., Yamamoto K. Nonexistence of Any Exact Bimodal Solution for the Shock Wave Structure at $M = \infty$ // J. Phys Soc. Japan. – 1988. – V. 57, 6. – P. 1865–1867.

11. Гордевский В.Д. Двухпотоковое распределение с винтовыми модами // Теор.и мат. физика. – 2001. – Т. 126, 2. – С. 283–300.

12. Gordevsky V.D. Transitional Regime Between Spiral Equilibrium States of a Gas // Visn. Khark. Univ., Ser. Mat. Prykl. Mat. Mech. – 2001. – V. 514. – P. 17–33.

13. Gordevskyy V.D. Transitional Regime Between Vortical States of a Gas // Nonl. Analysis (NA 3752). – 2003. – V. 53, 3–4. – P. 481–494.

14. Гордевский В.Д. Вихри в газе из твердых сфер // Теор. и мат. физика. – 2003. – Т. 135, 2. – С. 303–314.

15. Gordevskyy V.D. On the non-stationary Maxwellians // Math. Meth. Appl. Sci.(MMA 455). – 2004. – V. 27, N.2. – P. 231–247.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.94 № 749, 2006, с.13–29

Asymptotic properties of global attractors for nonlinear Mindlin-Timoshenko model of thermoelastic plate

T.B. Fastovska
V.N. Karazin Kharkov National University, Ukraine

We consider a Mindlin-Timoshenko thermoelastic plate model with nonlinear feedback forces. We prove the existence of a compact global attractor and study its properties when the shear modulus tends to infinity or zero. *2000 Mathematics Subject Classification* 35B25.

1. Introduction

We consider the nonlinear Mindlin-Timoshenko model of a thermoelastic plate. Assume that the plate has uniform thickness h and when in equilibrium its middle surface lies in the bounded domain $\Omega \subset (x_1, x_2, 0)$ with boundary $\partial\Omega$.

The differential equations for the vector of angles of deflection of the filaments $v(x,t) = (v_1(x,t), v_2(x,t)) \in \mathbb{R}^2$ the transverse displacement of the middle surface $w(x,t) \in \mathbb{R}$, and the temperature variation averaged with respect to the thickness $\theta(x,t) \in \mathbb{R}$, where $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ and $t \geq 0$ are the following

$$\alpha_0 v_{tt} + \beta_0 v_t - \mathcal{A}v + \mu(v + \nabla w) + \beta\nabla\theta + \nabla_v\Phi(v) = 0 \tag{1}$$

$$\alpha_1 w_{tt} + \beta_1 w_t - \mu \mathrm{div}(v + \nabla w) + g(w) = 0 \tag{2}$$

$$\gamma\theta_t - \eta\Delta\theta + \beta \mathrm{div} v_t = 0 \tag{3}$$

Here the vector function $\nabla_v\Phi(v) = (\partial_{v_1}\Phi(v_1, v_2), \partial_{v_2}\Phi(v_1, v_2))$ and the scalar function $g(w)$ represent external forcing terms. The parameters $\alpha_0, \alpha_1, \beta, \beta_0, \beta_1, \eta, \gamma$ are positive constants. The parameter $\mu > 0$ is the shear modulus. Operator $\mathcal{A}$ has the following structure

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1} + \frac{1-\nu}{2}\partial^2_{x_2} & \frac{1+\nu}{2}\partial_{x_1 x_2} \\ \frac{1+\nu}{2}\partial_{x_1 x_2} & \frac{1-\nu}{2}\partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2} \end{pmatrix},$$

where $0 < \nu < 1$ is the Poisson ratio.

We impose initial conditions on the variables of the problem

$$\begin{aligned} v(x,0) &= v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \quad x \in \Omega \\ w(x,0) &= w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad x \in \Omega \end{aligned} \tag{4}$$

and suppose that they are subject to Dirichlet boundary conditions

$$v(x,t)=0, \quad w(x,t)=0, \quad \theta(x,t)=0 \quad x\in\partial\Omega,\ t\geq 0 \tag{5}$$

The Mindlin-Timoshenko model describes dynamics of a plate in view of transverse shear effects (see, e.g., [10, 11] and references therein).

The long-time dynamics of some problems similar to (1)-(5) has been studied in previous works. In the paper [5] the existence of a compact global attractor for the Mindlin-Timoshenko elasticity and its upper semicontinuity in case $\mu\to\infty$ are shown. The existence of a compact global attractor for problem (1)-(5) was proved in [7].

Our goal in the paper is to study the limiting properties of the dynamical system generated by problem (1)-(5) when $\mu\to\infty$ and $\mu\to 0$. From mechanical point of view the limit case $\mu\to\infty$ corresponds to the absence of transverse shear, while the limit situation $\mu\to 0$ conforms to the plane strain [10]. Our first main result lies in the fact that in limit case $\mu\to\infty$ the long-time behavior of system (1)-(5) can be described by the problem

$$\begin{gathered}(\alpha_1-\alpha_0\Delta)w_{tt}+(\beta_1-\beta_0\Delta)w_t+\Delta^2 w+\beta\Delta\theta+\\ \operatorname{div}[\nabla\Phi(-\nabla w)]+g(w)=0,\\ \gamma\theta_t-\eta\Delta\theta-\beta\Delta w_t=0,\\ w(x,t)=0,\quad \nabla w(x,t)=0\quad \theta(x,t)=0\quad x\in\partial\Omega,\quad t>0\\ w(x,0)=w_0(x),\quad w_t(x,0)=u_1(x),\quad \theta(x,0)=\theta_0(x)\quad x\in\Omega.\end{gathered}\tag{6}$$

where $w(x,t)$ is a scalar function on $\Omega\times\mathbb{R}^+$. Problem (6) describes the dynamics of a Kirchhoff thermoelastic plate, i.e. transverse shear effects are neglected (see, e.g., [10]).

The second result consists in the fact that in the limit case $\mu\to 0$ the long-time behavior of problem (1)-(5) is partially described by the problem

$$\begin{gathered}\alpha_0 v_{tt}+\beta_0 v_t-\mathcal{A}v+\beta\nabla\theta+\nabla_v\Phi(v)=0,\\ \gamma\theta_t-\eta\Delta\theta+\beta\operatorname{div}v_t=0,\\ v(x,t)=0\quad \theta(x,t)=0\quad x\in\partial\Omega, t\geq 0\\ v(x,0)=v_0(x),\quad v_t(x,0)=v_1(x),\quad \theta(x,0)=\theta_0(x),\quad x\in\Omega,\end{gathered}\tag{7}$$

which corresponds to the plane oscillation of a thermoelastic thin plate.

The paper is organized as follows. In Section 2 we introduce necessary notations and formulate the assumptions on the nonlinearities. Section 3 is devoted to the existence of compact global attractors for problems (1)-(5), (6), and (7). Finally, in Section 4 and Section 5 we investigate the limit situations $\mu\to\infty$ and $\mu\to 0$ respectively.

2. Notations and preliminaries

Throughout the paper we will keep to the following notational convention. The norm and the inner product in $[L^2(\Omega)]^k$, where $k=1,2$ or 3, will always be indicated by $\|\cdot\|$ and $(\cdot,\cdot)$, while for any other classical Sobolev space X of functions acting on Ω we use the notations $\|\cdot\|_X$ and $(\cdot,\cdot)_X$.

Concerning the functions Φ and g we assume the following:

(A1) $g \in C^1(\mathbb{R}), \Phi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ and there exist $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$ and $\tilde{C} > 0$ such that

$$|g'(z)| \leq \tilde{C}(1+|z|^{q_1});$$
$$|\partial_1^2\Phi(z)| + |\partial_2^2\Phi(z)| + |\partial_1\partial_2\Phi(z)| \leq \tilde{C}(1+|z|^{q_2})$$

(A2) There exist $b_0 \geq 0$ and $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$ such that

$$\Phi(z_1,z_2) \geq -b_1,$$
$$G(z) \equiv \int_0^z g(\zeta)d\zeta \geq -b_2 + b_0|z|^2.$$

(A3) There exist $a_i > 0, i = \overline{1,4}$ such that

$$-a_1\Phi(z) + \nabla_z\Phi(z)\, z \geq -a_2;$$
$$-a_3 G(z) + g(z)\, z \geq -a_4.$$

Problem (1)-(5) can be rewritten as follows

$$\begin{aligned} &Pu_{tt} + Mu_t + A_\mu u + R\theta = F(u) \\ &\gamma\theta_t - \eta\Delta\theta - Qu_t = 0 \\ &u|_{t=0} = u_0 \in \mathcal{D}(A_\mu^{1/2}), \quad u_t|_{t=0} = u_1 \in [L^2(\Omega)]^3 \quad \theta|_{t=0} = \theta_0 \in L^2(\Omega), \end{aligned} \tag{8}$$

where

$$A_\mu = \begin{pmatrix} -\mathcal{A} + \mu I & \mu\nabla \\ -\mu\mathrm{div} & -\mu\Delta \end{pmatrix}$$

with the domain

$$\mathcal{D}(A_\mu) = \{u = (v_1, v_2, w) \in [(H^2 \cap H_0^1)(\Omega)]^3\}.$$

It is clear that A_μ is a positive self-adjoint operator and

$$\mathcal{D}(A_\mu^{1/2}) = [H_0^1(\Omega)]^3.$$

Introduce also the operators

$$\{R : H_0^1(\Omega) \to [L^2(\Omega)]^3, R\theta = \beta(\partial_1\theta, \partial_2\theta, 0)\}$$

and

$$\{Q : [H_0^1(\Omega)]^3 \to L^2(\Omega),\ Q\mathrm{u} = -\beta(\partial_1\mathrm{u}_1 + \partial_2\mathrm{u}_2),\ \ \mathrm{u} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3)\}.$$

It is easy to see that

$$(R\theta, \mathrm{u}) = (\theta, Q\mathrm{u})$$

for any $\theta \in H_0^1(\Omega)$ and $\mathrm{u} \in [H_0^1(\Omega)]^3$. The operators P and M, defined by the formulas

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_0 I & 0 \\ 0 & \alpha_1 I \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \beta_0 I & 0 \\ 0 & \beta_1 I \end{pmatrix},$$

are bounded operators in $[L^2(\Omega)]^3$. The nonlinear term is given by

$$F(u) = \begin{bmatrix} -\partial_{v_1}\Phi(v_1, v_2) \\ -\partial_{v_2}\Phi(v_1, v_2) \\ -g(w) \end{bmatrix}, \quad u = (v_1, v_2, w). \tag{9}$$

Let us introduce the space

$$H_\mu = \mathcal{D}(A_\mu^{1/2}) \times [L^2(\Omega)]^3 \times L^2(\Omega)$$

with the inner product

$$([u_1, \mathrm{u}_1, \theta_1], [u_2, \mathrm{u}_2, \theta_2])_{H_\mu} = (A_\mu^{1/2} u_1, A_\mu^{1/2} u_2) + (P^{1/2}\mathrm{u}_1, P^{1/2}\mathrm{u}_2) + \gamma(\theta_1, \theta_2). \tag{10}$$

Define the operator $\mathbb{A}_\mu : H_\mu \supset \mathcal{D}(\mathbb{A}_\mu) \to H_\mu$ to be

$$\mathbb{A}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -P^{-1}(A_\mu + N) & -P^{-1}M & -P^{-1}R \\ 0 & \frac{1}{\gamma}Q & \frac{\eta}{\gamma}\Delta \end{pmatrix}$$

with the domain

$$\mathcal{D}(\mathbb{A}_\mu) = \mathcal{D}(A_\mu) \times \mathcal{D}(A_\mu^{1/2}) \times H^2 \cap H_0^1(\Omega).$$

Here $Nu = (0, w)$, where $u = (v, w)$.

We set $Z(t) = (u(t), u_t(t), \theta(t))$ and $Z_0 = (u_0, u_1, \theta_0) \in H_\mu$. Then, problem (8) can be rewritten as follows

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt} Z(t) - \mathbb{A}_\mu Z(t) &= f(Z(t)) \\ Z(0) &= Z_0, \end{aligned} \tag{11}$$

where $f(Z) = [0, P^{-1}(F(u) + Nu), 0]$.

We also define the operator $\mathcal{T} : \mathcal{D}(\mathcal{T}) \to L^2(\Omega)$

$$\mathcal{T} = \alpha_1 I - \alpha_0 \Delta$$

with $\mathcal{D}(\mathcal{T}) = H^2 \cap H_0^1(\Omega)$. Due to the $H_0^1(\Omega)$-ellipticity of $\mathcal{T}$ we have by Lax-Milgram theorem that $\mathcal{T}$ is boundedly invertible, i.e. $\mathcal{T}^{-1} \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega))$. The operator $\mathcal{T}$ being strictly positive and self-adjoint, the square root $\mathcal{T}^{1/2}$ is well-defined with $\mathcal{D}(\mathcal{T}^{1/2}) = H_0^1(\Omega)$. We also denote

$$B = \beta_1 I - \beta_0 \Delta$$

with $\mathcal{D}(B) = H^2 \cap H_0^1(\Omega)$. Introduce an operator

$$D^2 w = \{\Delta^2 w : w \in H^4 \cap H_0^2(\Omega)\}$$

with a square root D, $\mathcal{D}(D) = H_0^2(\Omega)$. Note that $D \neq -\Delta$ on $\mathcal{D}(D)$. The problem (6) then becomes

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}w_{tt} + Bw_t + D^2 w + \beta\Delta\theta = \mathcal{F}(w) \\ &\gamma\theta_t - \eta\Delta\theta - \beta\Delta w_t = 0 \\ &w|_{t=0} = w_0 \in \mathcal{D}(D), \quad w_t|_{t=0} = w_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^{1/2}) \quad \theta|_{t=0} = \theta_0 \in L^2(\Omega), \end{aligned} \tag{12}$$

where

$$\mathcal{F}(w) = -\mathrm{div}[\nabla\Phi(-\nabla w)] - g(w). \tag{13}$$

For problem (12) we introduce the space

$$\mathcal{H}_\infty = \mathcal{D}(D) \times \mathcal{D}(\mathcal{T}^{1/2}) \times L^2(\Omega)$$

equipped with the inner product

$$([w_0, w_1, \theta], [\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \tilde{\theta}])_{\mathcal{H}_\infty} = (Dw_0, D\tilde{w}_0) + (\mathcal{T}^{1/2}w_1, \mathcal{T}^{1/2}\tilde{w}_1) + \gamma(\theta, \tilde{\theta})$$

and define the operator

$$\mathbf{A}_\infty = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -\mathcal{T}^{-1}D^2 & -\mathcal{T}^{-1}B & -\beta\mathcal{T}^{-1}\Delta \\ 0 & \frac{\beta}{\gamma}\Delta & \frac{\eta}{\gamma}\Delta\theta \end{pmatrix}$$

with the domain

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}_\infty) = \mathcal{D}(D^2) \times \mathcal{D}(D) \times H^2 \cap H_0^1(\Omega).$$

Now we can give an abstract formulation of problem (12)

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}Y(t) - \mathbf{A}_\infty Y(t) &= \hat{f}(Y(t)) \\ Y(0) &= Y_0. \end{aligned} \tag{14}$$

Here $\hat{f}(Z) = [0, \mathcal{T}^{-1}\mathcal{F}(u), 0]$, $Y(t) = (w(t), w_t(t), \theta(t))$ and $Y_0 = (w_0, w_1, \theta_0) \in \mathcal{H}_\infty$.

Introducing the space

$$\mathcal{H}_0 = [H^2 \cap H_0^1(\Omega)]^2 \times [H_0^1(\Omega)]^2 \times L^2(\Omega)$$

with the inner product

$$([v_0, v_1, \theta], [\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \tilde{\theta}])_{\mathcal{H}_0} = ((-\mathcal{A})^{1/2}v_0, (-\mathcal{A})^{1/2}\tilde{v}_0) + \alpha_0(v_1, v_1) + \gamma(\theta, \tilde{\theta})$$

we also rewrite problem (7) in the abstract form

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}X(t) - \mathbf{A}_0 X(t) &= \hat{\hat{f}}(X(t)) \\ Y(0) &= Y_0, \end{aligned} \tag{15}$$

where

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ \frac{1}{\alpha_0}\mathcal{A} & -\frac{\beta_0}{\alpha_0}I & -\frac{\beta}{\alpha_0}\nabla \\ 0 & \frac{\beta}{\gamma}\mathrm{div} & \frac{\eta}{\gamma}\Delta \end{pmatrix}$$

with the domain

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}_0) = [H^2 \cap H_0^1(\Omega)]^2 \times [H_0^1(\Omega)]^2 \times H^2 \cap H_0^1(\Omega).$$

In (15) we have denoted $\hat{\hat{f}}(X) = [0, -1/\alpha_0 \nabla_v \Phi(v), 0]$, $X(t) = (v(t), v_t(t), \theta(t))$ and $X_0 = (v_0, v_1, \theta_0) \in \mathcal{H}_0$.

3. Global attractors and their properties

In this section we give results on the existence of a compact global attractors of the dynamical systems generated by problems (7), (8), and (12). By definition (see, e.g. [1, 3]) a global attractor of a dynamical system $(S(t), H)$ is a bounded closed subset $\mathfrak{A}$ in the phase space H such that $S(t)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ for all $t \geq 0$ and

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{y\in B} \mathrm{dist}(S(t)y, \mathfrak{A}) = 0$$

for any bounded set $B \subset H$.

We begin with an accurate description of solutions to problems (7), (8), (12) and some preliminary results.

Definition 1 *The function $Z = (u, u_t, \theta) \in L^\infty(0, T; H_\mu)$ is said to be a weak solution on the interval $[0, T]$ to problem (8) with initial conditions $Z(0) = Z_0 = (u_0, u_1, \theta_0) \in H_\mu$ if $\theta \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ and the relations*

$$-\int_0^T (Pu_t, \psi_t)dt + \int_0^T (A_\mu^{1/2}u, A_\mu^{1/2}\psi)dt + \int_0^T (Mu_t + R\theta, \psi)dt$$
$$= \int_0^T (F(u), \psi)dt + (Pu_1, \psi(0)), \tag{16}$$
$$-\int_0^T \gamma(\theta, \tau_t)dt + \eta\int_0^T (\nabla\theta, \nabla\tau)dt - \int_0^T (Qu_t, \tau)dt = \gamma(\theta_0, \tau(0))$$

hold for any function $\Psi = (\psi, \psi_t, \tau) \in L^\infty(0, T; H_\mu)$ such that $\Psi(T) = 0$, $\tau \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ and $\tau_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Definition 2 *The function $Y = (w, w_t, \theta) \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}_\infty)$ is said to be a weak solution on the interval $[0, T]$ to problem (12) with initial conditions $Y(0) = Y_0 = (w_0, w_1, \theta_0) \in \mathcal{H}_\infty$ if $\theta \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ and the relations*

$$-\int_0^T (\mathcal{T}^{1/2}w_t, \mathcal{T}^{1/2}\psi_t)dt + \int_0^T (Dw, D\psi)dt + \int_0^T (Bw_t, \psi)dt$$
$$-\beta\int_0^T (\nabla\theta, \nabla\psi)dt = \int_0^T (\mathcal{F}(w), \psi)dt + (\mathcal{T}^{1/2}w_1, \mathcal{T}^{1/2}\psi(0)), \tag{17}$$
$$-\gamma\int_0^T (\theta, \tau_t)dt + \eta\int_0^T (\nabla\theta, \nabla\tau)dt + \beta\int_0^T (\nabla w_t, \nabla\tau)dt = \gamma(\theta_0, \tau(0))$$

hold for any function $\Psi = (\psi, \psi_t, \tau) \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}_\infty)$ *such that* $\Psi(T) = 0$, $\tau \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ *and* $\tau_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Definition 3 *The function* $X = (v, v_t, \theta) \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}_0)$ *is said to be a weak solution on the interval* $[0, T]$ *to problem (7) with initial conditions* $X(0) = X_0 = (v_0, v_1, \theta_0) \in \mathcal{H}_0$ *if* $\theta \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ *and the relations*

$$-\alpha_0 \int_0^T (v_t, \psi_t)dt - \int_0^T (\mathcal{A}w, \psi)dt + \int_0^T (\beta_0 v_t + \beta\nabla\theta, \psi)dt$$

$$= \int_0^T (-\nabla_v \Phi(v), \psi)dt + \alpha_0(v_1, \psi(0)), \tag{18}$$

$$-\int_0^T \gamma(\theta, \tau_t)dt + \eta\int_0^T (\nabla\theta, \nabla\tau)dt + \beta\int_0^T (divv_t, \tau)dt = \gamma(\theta_0, \tau(0))$$

hold for any function $\Psi = (\psi, \psi_t, \tau) \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}_0)$ *such that* $\Psi(T) = 0$, $\tau \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ *and* $\tau_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Lemma 1 *The operator* $\mathbb{A}_\mu$ *(the operator* $\mathbf{A}_\infty$ *or* $\mathbf{A}_0$*) is the infinitesimal operator of a* C_0*-semigroup of contractions* $U_\mu(t)$ *(*$U_\infty(t)$ *or* $U_0(t)$ *respectively) on* H_μ *(*$\mathcal{H}_\infty$ *or* $\mathcal{H}_0$*). Moreover, there exist independent of* μ *constants* $M_0, M_1, M_2 > 0$ *and* $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ *such that*

$$\begin{aligned} \|U_\mu(t)Z\|_{H_\mu} &\le M_0 e^{-\epsilon_0 t}\|Z\|_{H_\mu}, \quad Z \in H_\mu, \\ \|U_\infty(t)Y\|_{\mathcal{H}_\infty} &\le M_1 e^{-\epsilon_1 t}\|Y\|_{\mathcal{H}_\infty}, \quad Y \in \mathcal{H}_\infty, \\ \|U_0(t)X\|_{\mathcal{H}_0} &\le M_2 e^{-\epsilon_2 t}\|X\|_{\mathcal{H}_0}, \quad X \in \mathcal{H}_0. \end{aligned} \tag{19}$$

Proof. We prove the assertion for the operator $\mathbb{A}_\mu$. The proof for $\mathbf{A}_\infty$ and $\mathbf{A}_0$ is analogous. By the Lumer-Phillips theorem one can prove the existence of the C_0-semigroup of contractions generated by the operator $\mathbb{A}_\mu$ (for details see, for instance, [7]).

To obtain (19) it is sufficient (by the density argument) to prove that

$$\|U_\mu(t)Z_0\|_{H_\mu} \le M_0 e^{-\epsilon_0 t}\|Z_0\|_{H_\mu}$$

for any $Z_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_\mu)$.

Observe that if initial data belong to the domain of the infinitesimal operator $\mathbb{A}_\mu$, then $Z(t) = U_\mu(t)Z_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_\mu)$ and satisfies

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathbb{A}_\mu Z(t). \tag{20}$$

By taking the inner product in (20) with Z in H_μ we get

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|Z\|^2_{H_\mu} \le -\|M^{1/2}u_t\|^2 - \eta\|\nabla\theta\|^2 - \|Nu\|^2. \tag{21}$$

Consider the functional

$$V_\delta(Z) = \frac{1}{2}\|Z\|^2_{H_\mu} + \delta L(Z),$$

where

$$L(Z)=(Pu_t,u)+\frac{1}{2}(Mu,u) \tag{22}$$

and the parameter $\delta>0$ will be chosen later. It is clear that there exists $\delta_0>0$ such that

$$d_1\|Z\|^2_{H_\mu}\le V_\delta(Z)\le d_2\|Z\|^2_{H_\mu} \tag{23}$$

for all $0<\delta\le\delta_0$, where the constants $d_1,d_2>0$ do not depend on δ and μ. Therefore,

$$\frac{dL(Z)}{dt}\le\|P^{1/2}u_t\|^2-\|A_\mu^{1/2}u\|^2+2\beta^2\|\theta\|^2+\frac{1}{8}\|\mathrm{div}v\|^2. \tag{24}$$

It is easy to see that

$$L(Z)\le 1/2\|P^{1/2}u_t\|^2+1/2\|P^{1/2}u\|^2+1/2\|M^{1/2}u\|^2. \tag{25}$$

A simple computation yields

$$\begin{aligned}&\tfrac{3}{4}(\delta-\tfrac{\epsilon_0}{2})\|A_\mu^{1/2}u\|^2-\tfrac{\delta}{8}\|\mathrm{div}v\|^2=\tfrac{3}{4}(\delta-\tfrac{\epsilon_0}{2})\tfrac{1-\nu}{2}\|\nabla v\|^2\\&+(\tfrac{3}{4}(\delta-\tfrac{\epsilon_0}{2})\tfrac{1+\nu}{2}-\tfrac{\delta}{8})\|\mathrm{div}v\|^2+\tfrac{3}{4}\mu(\delta-\tfrac{\epsilon_0}{2})\|v+\nabla w\|^2.\end{aligned} \tag{26}$$

Collecting relations given by (21), (24)-(26) we get that the constants δ and ϵ_0 can be chosen for

$$\frac{d}{dt}V_\delta(Z)+\epsilon_0V_\delta(Z)\le 0 \tag{27}$$

to hold. As a consequence of (27) we deduce

$$V_\delta(Z(t))\le V_\delta(Z_0)e^{-\epsilon_0 t}$$

for $t>0$ and by virtue of (23) obtain the statement of the lemma.

Lemma 2 *Let $q=\max\{q_1,q_2\}$. Provided that $F(u)$ is given by (9), there exists a positive constant $\hat{C}$ such that for any $0<\sigma<1$*

$$\begin{aligned}\|P^{-1}(F(u_1)-F(u_2))\|\le\hat{C}(1+\|u_1\|^q_{[H_0^1(\Omega)]^3}+\|u_2\|^q_{[H_0^1(\Omega)]^3})\\ \|u_1-u_2\|_{[H^\sigma(\Omega)]^3},\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\|T^{-1}(\mathcal{F}(w_1)-\mathcal{F}(w_2))\|_{H_0^1(\Omega)}\le\hat{C}(1+\|w_1\|^q_{H^2\cap H_0^1(\Omega)}+\|w_2\|^q_{H^2\cap H_0^1(\Omega)})\\ \|w_1-w_2\|_{H^{1+\sigma}(\Omega)}.\end{aligned} \tag{29}$$

This implies that $f:H_\mu\to H_\mu$, $\hat{f}:\mathcal{H}_\infty\to\mathcal{H}_\infty$ and $\hat{\hat{f}}:\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}_0$ are locally Lipschitz mappings.

Proof. The proof is rather standard. For details we refer, for instance, to [8].

We have the following results concerning well-posedness of problems (7), (8), and (12).

Theorem 1 • ***Well-posedness*** *Let assumptions (A1) and (A2) hold. Then there exists a unique weak solution to problem (8)* $Z(t) = (u(t), u_t(t), \theta(t)) \in C([0,T], H_\mu)$ *on any interval* $[0,T]$.

• ***Dissipativity*** *Furthermore, problem (8) generates a dynamical system on the phase space* H_μ *with nonlinear evolution operator* S_t^μ. *If, moreover, (A3) holds, then the dynamical system* (H_μ, S_t^μ) *possesses an absorbing ball* $\mathfrak{B}$ *with the radius* $\mathcal{R}$.

The analogous statements hold true also for problems (7) and (12).

• ***Uniform dissipativity*** *The dissipativity radius* $\mathcal{R}$ *of the dynamical system* (S_t^μ, H_μ) *does not depend on* μ *provided that there exists* $\mu_\infty > 0$, *such that* $\mu \geq \mu_\infty$ **or** $b_0 > 0$. *In case* $b_0 > 0$, *there exists a constant* $C > 0$, *independent of* μ, *such that*

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq C. \tag{30}$$

Proof. The proof of the existence of solutions is rather standard (see, e.g. [7]), therefore we will not place it here. To prove the existence of the absorbing ball consider the functional

$$\mathbb{V}_\delta(Z(t)) = E(Z(t)) + \delta L(Z(t)),$$

where

$$E(Z(t)) = 1/2\|Z(t)\|^2_{H_\mu} + \int_\Omega \Phi(v(t))dx + \int_\Omega G(w(t))dx.$$

Applying the same arguments as in Lemma 1 we acquire

$$\|Z(t)\|^2_{H_\mu} \leq e^{-\varepsilon t}\bar{M}\|Z_0\|^{2+q}_{H_\mu} + C_0,$$

where $C_0, \varepsilon, \bar{M} > 0$.

We will denote a ball of radius C in the space H_μ centered at zero by $\mathcal{B}(C)$. If $\|Z_0\|_{H_\mu} \leq R_1$ there exists a positive constant $\mathcal{R} > C_0$ independent of R_1 such that $S_t^\mu Z_0 \subset \mathcal{B}(\mathcal{R})$ for any $t > 1/\varepsilon \ln(\bar{M}R_1^{2+q}/(\mathcal{R}^2 - C_0))$. The proof is complete.

Relying on the Ceron-Lopes method [2] in the form presented in [4, 6] one can infer the following result

Theorem 2 *Under assumptions (A1)-(A3) the dynamical system generated by problem (8) ((7), (12)) possesses a compact global attractor* $\mathfrak{A}_\mu$ ($\mathfrak{A}^K$ *or* $\mathfrak{A}^P$ *respectively) whose fractal dimension is finite.*

For details see also [7, 8].

4. The limit case $\mu \to \infty$

In this section we investigate the properties of the attractors for problem (8) when the parameter μ tends to infinity, i.e. we will assume throughout this section that there exists $\mu_\infty > 0$ such that $\mu \geq \mu_\infty$. In order to prove the upper semicontinuity we need auxiliary results on the uniform boundedness of the family of attractors $\mathfrak{A}_\mu$ in higher-order spaces. From this point on C denotes a positive constant not depending on the parameter μ. First, we note that if $\mu \geq \mu_\infty > 0$, it follows from the estimate

$$\|A_\mu^{1/2} u\| \leq C \tag{31}$$

that there exists $\tilde{C}_1 > 0$ not depending on μ such that

$$\|v\|^2_{[H_0^1(\Omega)]^2} + \|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \tilde{C}_1. \tag{32}$$

By dissipativity and (32) we get that estimates

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \{\|v(t)\|^2_{[H_0^1(\Omega)]^2} + \|w(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|v_t\|^2 + \|w_t\|^2 + \|\theta\|^2\} \leq C \tag{33}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|v + \nabla w\| \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}} C \tag{34}$$

hold true for any full trajectory $Z(t) = \{u(t), u_t(t), \theta(t)\}$ from $\mathfrak{A}_\mu$.

Lemma 3 *Let assumptions (A1) - (A3) hold and there exists $\mu_\infty > 0$ such that $\mu_\infty \leq \mu$, then the estimates*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \{\|v_{tt}\|^2 + \|w_{tt}\|^2 + \|v_t\|^2_{[H_0^1(\Omega)]^2} + \|\theta_t\|^2\} \leq C, \tag{35}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|w_t\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C, \tag{36}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\theta\|_{H^2\cap H_0^1(\Omega)} \leq C, \tag{37}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|w\|_{H^2\cap H_0^1(\Omega)} \leq C, \tag{38}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|v_t + \nabla w_t\| \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}} C \tag{39}$$

hold for any full trajectory $Z(t) = \{u(t), u_t(t), \theta(t)\}$ from $\mathfrak{A}_\mu$, where $u(t) = \{v(t), w(t)\}$ and C does not depend on μ.

Proof. We introduce the function $X^h(t) = (u^h(t), u_t^h(t), \theta^h(t)) = \frac{1}{h}[Z(t+h) - Z(t)]$, where $u^h(t) = (v^h(t), w^h(t))$, which solves the problem

$$\frac{d}{dt} Z^h - \mathbb{A}_\mu Z^h = f^h(Z(t))$$

$$X^h(0) = \frac{1}{h}[Z(h) - Z_0].$$

Here $f^h(Z(t)) = (0, P^{-1}(\frac{1}{h}[F(u(t+h)) - F(u(t))] + Nu^h), 0)$. Since the trajectory belongs to the attractor we have that

$$X^h(t) = \int_{-\infty}^{t} U_\mu(t-\xi) f_h(\xi) d\xi.$$

Then, by Lemma 1

$$\|X^h(t)\|_{H_\mu} \le C \int_{-\infty}^{t} e^{-\varepsilon_0(t-\xi)}(\|\frac{1}{h}[F(u(\xi+h)) - F(u(\xi))]\| + \|w^h\|)d\xi \tag{40}$$

By Lemma 2 and (32) we obtain

$$\|X^h(t)\|_{H_\mu} \le C \int_{-\infty}^{t} e^{-\varepsilon_0(t-\xi)} \|u^h(\xi)\|_{[H^\sigma(\Omega)]^3} d\xi$$

for any $0 < \sigma < 1$. Since there exists $\mu_\infty > 0$ such that $\mu_\infty \le \mu$, we get using the interpolation inequality and (33) that

$$\|X^h(t)\|_{H_\mu} \le C \int_{-\infty}^{t} e^{-\varepsilon_0(t-\xi)} \frac{1}{h} \int_0^h \|u_t(\xi+\zeta)\| d\zeta d\xi + \varepsilon_1 \sup_{r \le t} \|X_h(r)\|_{H_\mu}, \tag{41}$$

where $\varepsilon_1 > 0$ can be chosen arbitrarily small. Selecting an appropriate ε_1 we get

$$\|X^h(t)\|_{H_\mu} \le C. \tag{42}$$

Passing to the limit $h \to 0$ in (42) we obtain (35), (36), and (39). It is easy to infer from (3), (33), and (35) that

$$\|\Delta\theta\|^2 \le C[\|\theta_t\|^2 + \|v_t\|^2_{[H_0^1(\Omega)]^2}] \le C$$

and we obtain estimate (37).

Provided $\mu \ge \mu_\infty > 0$

$$\|\Delta w\|^2 \le C(\|\mathrm{div} v\|^2 + \|g(w)\|^2 + \|w_{tt}\|^2) \le C. \tag{43}$$

This proves the lemma.

Now we can state the main result of the section.

Theorem 3 *Let the assumptions (A1)-(A3) hold. Then for any* $0 < \sigma \le 1$

$$\sup_{y \in \mathfrak{A}_\mu} dist_{\mathcal{H}^\sigma}(y, \mathfrak{A}_\infty) \to 0, \quad \mu \to \infty,$$

where $\mathcal{H}^\sigma = \left([H_0^{1-\sigma}(\Omega)]^2 \times [H^{2-\sigma} \cap H_0^1(\Omega)]\right) \times [H_0^{1-\sigma}(\Omega)]^3 \times H^{2(1-\sigma)}$ *and*

$$\mathfrak{A}_\infty = \left\{y = (-\nabla w_0, w_0, -\nabla w_1, w_1, \theta_0) : (w_0, w_1, \theta_0) \in \mathfrak{A}^K\right\}.$$

Here $\mathfrak{A}^K$ *is the compact global attractor of the dynamical system generated by the problem (12) in the space* $\mathcal{H}_\infty$.

Proof. We base the proof on the idea presented in [9]. Assume that the statement of the theorem is not true. Then there exists a sequence $\{\mu^n\} \to \infty$ such that $\mu^n \geq \mu_\infty$ for any $n \in \mathbb{N}$ and a sequence $Z^n \in \mathfrak{A}_{\mu^n}$ such that

$$dist_{H_\mu}(Z^n, \mathfrak{A}_\infty) \geq \varepsilon, \quad n = 1, 2, \dots \tag{44}$$

for some $\varepsilon > 0$. Let $Z^n(t) = \{u^n(t), u^n_t(t), \theta^n(t)\}$ be a full trajectory in $\mathfrak{A}_{\mu^n}$ passing through Z^n ($Z^n(0) = Z^n$). The functions Z^n satisfy equations (16). It follows from (35)-(38) that the sequence $\{w^n(t), \theta^n(t)\}$ is uniformly with respect to n bounded in the space

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_1 = &\left(C_{bnd}(\mathbb{R}; (H^2 \cap H^1_0)(\Omega)) \cap C^1_{bnd}(\mathbb{R}; H^1_0(\Omega)) \cap C^2_{bnd}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))\right) \times \\ &\left(C_{bnd}(\mathbb{R}; H^2 \cap H^1_0(\Omega)) \cap C^1_{bnd}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))\right).\end{aligned}$$

Hence, by Aubin's compactness theorem [12] $\{w^n(t), \theta^n(t)\}$ is a compact sequence in the space

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_1 = \Big(C([-T,T]; H^{2-\sigma} \cap H^1_0(\Omega)) \cap C^1([-T,T]; H^{1-\sigma}_0(\Omega))\Big)& \\ \times C([-T,T]; H^{2(1-\sigma)})&\end{aligned}$$

for every $T > 0$. Estimates (33) and (35) yield that the sequence $\{v^n\}$ is uniformly with respect to n bounded in the space

$$\mathfrak{C}_2 = \left(C_{bnd}(\mathbb{R}; [H^1_0(\Omega)]^2) \cap C^1_{bnd}(\mathbb{R}; [H^1_0(\Omega)]^2) \cap C^2_{bnd}(\mathbb{R}; [L^2(\Omega)]^2\right).$$

Thus, we deduce that there exists a function $\{\mathbf{w}(t), \Theta(t)\} \in \mathfrak{C}_1$ such that

$$\begin{array}{lll} w^{n_k} \to \mathbf{w} & \text{weak-* in} & L^\infty(\mathbb{R}, [H^2 \cap H^1_0](\Omega)) \\ w^{n_k}_t \to \mathbf{w}_t & \text{weak-* in} & L^\infty(\mathbb{R}, H^1_0(\Omega)) \\ w^{n_k}_{tt} \to \mathbf{w}_{tt} & \text{weak-* in} & L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\Omega)) \\ \theta^{n_k} \to \Theta & \text{weak-* in} & L^\infty(\mathbb{R}, H^2 \cap H^1_0(\Omega)). \end{array} \tag{45}$$

and

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \max_{[-T,T]} \Big\{ \|w^{n_k}(t) - \mathbf{w}(t)\|^2_{H^{2-\sigma}\cap H^1_0(\Omega)} + \|w^{n_k}_t(t) - \mathbf{w}_t(t)\|^2_{H^{1-\sigma}_0(\Omega)}& \\ + \|\theta^{n_k}(t) - \Theta(t)\|^2_{H^{2(1-\sigma)}} = 0&\end{aligned} \tag{46}$$

for any $0 < \sigma \leq 1$. Analogously, the sequence $\{v^n\}$ is compact in the space $C([-T,T]; [H^{1-\sigma}_0(\Omega)]^2) \cap C^1([-T,T]; [H^{1-\sigma}_0(\Omega)]^2)$. Moreover, by (34), (39) we get that

$$\lim_{k\to\infty} \max_{[-T,T]} \{ \|v^{n_k} + \nabla \mathbf{w}\|_{[H^{1-\sigma}_0(\Omega)]^2} + \|v^{n_k}_t + \nabla \mathbf{w}_t\|_{[H^{1-\sigma}_0(\Omega)]^2} \} = 0 \tag{47}$$

for every $T > 0$. By the trace theorem we infer from (47) that

$$\lim_{k\to\infty} \|v^{n_k} + \nabla w\|_{[L^2(\partial\Omega)]^2} = 0,$$

therefore,

$$\nabla w|_{\partial\Omega} = 0.$$

We can choose functions ψ and τ in (16) of the following form: $\psi(t) = (-\partial_{x_1}h, -\partial_{x_2}h, h)\cdot p(t)$ and $\tau(t) = \tau\cdot p(t)$, where $h \in H_0^2(\Omega)$, $\tau \in H_0^1(\Omega)$ and $p(t)$ is a scalar continuously differentiable function such that $p(T) = 0$. By (34) one can deduce (see [4]) that

$$(A_\mu u^{n_k}, \psi) = [-\nu(\mathrm{div} v^{n_k}, \Delta h) - (1-\nu)\int\limits_\Omega [\partial_{x_1} v_1^{n_k}\cdot \partial_{x_1}^2 h + \partial_{x_2} v_2^{n_k}\cdot \partial_{x_2}^2 h + (\partial_{x_1} v_2^{n_k} + \partial_{x_2} v_1^{n_k})\partial_{x_1 x_2} h]dx]p(t). \quad (48)$$

Therefore, passing to the limit $k\to\infty$ we get

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_0^T (A_\mu u^{n_k}, \psi)dt = \int\limits_0^T (\Delta \mathbf{w}, \Delta h)p(t)dt.$$

By (47) and Lemma 2 we pass to the limit in the nonlinear items

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_0^T (\mathrm{div}[\nabla_v \Phi(v^{n_k})], h)p(t)dt = \int\limits_0^T (\mathrm{div}[\nabla_v \Phi(-\nabla \mathbf{w})], h)p(t)dt$$

and

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_0^T (g(v^{n_k}), h)p(t)dt = \int\limits_0^T (g(\mathbf{w}), h)p(t)dt.$$

Observing (45) and (47) we get

$$\begin{aligned} &-\int\limits_0^T (\mathfrak{I}^{1/2}\mathbf{w}_t, \mathfrak{I}^{1/2}h)p'(t)dt + \int\limits_0^T (D\mathbf{w}, Dh)p(t)dt \\ &+\int\limits_0^T (B\mathbf{w}_t + \beta\Delta\theta, h)p(t)dt = \int\limits_0^T (\mathfrak{F}(\mathbf{w}), h)p(t)dt + (\mathfrak{I}^{1/2}w_1, \mathfrak{I}^{1/2}h)p(0), \quad (49) \\ &-\int\limits_0^T \gamma(\theta,\tau)p'(t)dt + \int\limits_0^T (\eta\nabla\theta + \nabla \mathbf{w}_t, \nabla\tau)p(t)dt = \gamma(\theta_0,\tau)p(0). \end{aligned}$$

One can deduce from (49) that $\{\mathbf{w}(t), \Theta(t)\}$ is a weak solution to the problem (12) possessing the properties

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\{\|\mathbf{w}(t)\|^2_{H^2\cap H_0^1(\Omega)} + \|\mathbf{w}_t(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\Theta(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\} \le C$$

and

$$\nabla \mathbf{w}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Consequently, $\{\mathbf{w}(t), \mathbf{w}_t(t), \Theta(t)\}$ is a full trajectory to (6) which belongs to the attractor $\mathfrak{A}^K$. Thus, it follows from (46) and (47) that

$$\lim_{n_k \to 0} \{\|v^{n_k}(0) + \nabla \mathbf{w}(0)\|^2_{[H_0^{1-\sigma}(\Omega)]^2} + \|w^{n_k}(0) - \mathbf{w}(0)\|^2_{H^{2-\sigma}\cap H_0^1(\Omega)}$$
$$+\|v_t^{n_k}(0) + \nabla \mathbf{w}_t(0)\|^2_{[H_0^{1-\sigma}(\Omega)]^2} + \|w_t^{n_k}(0) - \mathbf{w}_t(0)\|^2_{H_0^{1-\sigma}(\Omega)}$$
$$+\|\theta^{n_k}(0) - \Theta(0)\|^2_{H^{2(1-\sigma)}}\} = 0$$

and we obtain a contradiction to (44).

5. The limit case $\mu \to 0$

In this section we investigate the properties of the attractors of problem (8) when the parameter μ tends to zero. Throughout this section we assume that there exists $\mu_0 > 0$ such that $\mu \leq \mu_0$.

Lemma 4 *Let assumptions (A1)-(A3) hold. If $q_1 = 0$, $b_0 > 0$, and there exists $\mu_0 > 0$, such that $\mu \leq \mu_0$, then estimates (35), (37), and*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|v\|_{[H^2\cap H_0^1(\Omega)]^2} \leq C \tag{50}$$

hold true.

We apply the same arguments as in Lemma 3. Then, from (40) we infer

$$\|X^h(t)\|_{H_\mu} \leq C \int_{-\infty}^{t} e^{-\epsilon_0(t-\xi)}(\|v^h(\xi)\|_{[H^\sigma(\Omega)]^2} + \|w^h(\xi)\|)d\xi,$$

which leads to (42). Thus, we obtain estimates (35) and (37). In case $\mu \leq \mu_0$ estimate (50) is obvious.

Theorem 4 *Let $q_1 = 0$, $b_0 > 0$, and assumptions (A1)-(A3) hold. Then for any $0 < \sigma \leq 1$*

$$\sup_{y\in\mathfrak{A}_\mu^{v,\theta}} dist_{\mathcal{H}_0^\sigma}(y, \mathfrak{A}^P) \to 0, \quad \mu \to 0, \tag{51}$$

where $\mathcal{H}_0^\sigma = [H^{2-\sigma} \cap H_0^1(\Omega)]^2 \times [H_0^{1-\sigma}(\Omega)]^2 \times H^{2(1-\sigma)}$ and

$$\mathfrak{A}_\mu^{v,\theta} = \{y = (v_0, v_1, \theta_0) : (v_0, w_0, v_1, w_1, \theta_0) \in \mathfrak{A}_\mu\}.$$

Here $\mathfrak{A}^P$ is the compact global attractor of the dynamical system generated by the problem (7) in the space $\mathcal{H}_0$.

Proof. We assume again that the statement of the theorem is not true. Then there exists a sequence $\{\mu^n\} \to 0$ such that $\mu^n \le \mu_0$ for any $n \in \mathbb{N}$ and a sequence $Z^n \in \mathfrak{A}_{\mu^n}$ such that

$$dist_{\mathcal{H}_0}((v^n, v_t^n, \theta^n), \mathfrak{A}^P) \ge \varepsilon, \quad n = 1, 2, ... \tag{52}$$

for some $\varepsilon > 0$. Let $Z^n(t) = \{u^n(t), u_t^n(t), \theta^n(t)\}$ be a full trajectory in $\mathfrak{A}_{\mu^n}$ passing through Z^n ($Z^n(0) = Z^n$). The functions $Z^n(t)$ satisfy the equation (16). It follows from Lemma 4 that the sequence $\{v^n(t), \theta^n(t)\}$ is uniformly with respect to n bounded in the space

$$\mathfrak{C}_3 = \left(C_{bnd}(\mathbb{R}; [(H^2 \cap H_0^1)(\Omega)]^2) \cap C_{bnd}^1(\mathbb{R}; [H_0^1(\Omega)]^2) \cap C_{bnd}^2(\mathbb{R}; [L^2(\Omega)]^2)\right) \times \left(C_{bnd}(\mathbb{R}; H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \cap C_{bnd}^1(\mathbb{R}; L^2(\Omega))\right).$$

Hence, by Aubin's compactness theorem $\{v^n(t), \theta^n(t)\}$ is a compact sequence in the space

$$\mathfrak{W}_2 = \left(C([-T,T]; [H^{2-\sigma} \cap H_0^1(\Omega)]^2) \cap C^1([-T,T]; [H_0^{1-\sigma}(\Omega)]^2)\right) \times C([-T,T]; H^{2(1-\sigma)})$$

for every $T > 0$. Thus, we deduce that there exists a subsequence $\{v^{n_k}(t), \theta^{n_k}(t)\}$ a function $\{\mathbf{v}(t), \Theta(t)\} \in \mathfrak{C}_3$ such that

$$\begin{array}{lll} v^{n_k} \to \mathbf{v} & \text{weak-* in} & L^\infty(\mathbb{R}, [H^2 \cap H_0^1]^2(\Omega)) \\ v_t^{n_k} \to \mathbf{v}_t & \text{weak-* in} & L^\infty(\mathbb{R}, [H_0^1(\Omega)]^2) \\ v_{tt}^{n_k} \to \mathbf{v}_{tt} & \text{weak-* in} & L^\infty(\mathbb{R}, [L^2(\Omega)]^2) \\ \theta^{n_k} \to \Theta & \text{weak-* in} & L^\infty(\mathbb{R}, H^2 \cap H_0^1(\Omega)). \end{array} \tag{53}$$

and

$$\lim_{k\to\infty} \max_{[-T,T]} \{\|v^{n_k}(t) - \mathbf{v}(t)\|^2_{[H^{2-\sigma}\cap H_0^1(\Omega)]^2} + \|v_t^{n_k}(t) - \mathbf{v}_t(t)\|^2_{[H_0^{1-\sigma}(\Omega)]^2} + \|\theta^{n_k}(t) - \Theta(t)\|^2_{H^{2(1-\sigma)}}\} = 0. \tag{54}$$

for every $T > 0$. Notice also that owing to (34) for any $\phi \in [H_0^1(\Omega)]^2$

$$\mu^n(v^n + \nabla w^n, \phi) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Therefore, choosing in (16) $\psi = (\phi, 0)$ and using the arguments analogous to those given in Theorem 5 we get that $\{\mathbf{v}(t), \Theta(t)\}$ is a weak solution to the problem (7) possessing the property

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\{\|\mathbf{v}(t)\|^2_{[H_0^1(\Omega)]^2} + \|\mathbf{v}_t(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} + \|\Theta(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\} \le C.$$

Consequently, $\{\mathbf{v}(t), \mathbf{v}_t(t), \Theta(t)\}$ is a full trajectory to (7) which belongs to the attractor $\mathfrak{A}^P$. Thus it follows from (54) that

$$\lim_{n_k\to 0} \{\|v^{n_k}(0) - \mathbf{v}(0)\|^2_{[H^{2-\sigma}\cap H_0^1(\Omega)]^2} + \|v_t^{n_k}(0) - \mathbf{v}_t(0)\|^2_{[H_0^{1-\sigma}(\Omega)]^2} + \|\theta^{n_k}(0) - \Theta(0)\|^2_{H^{2(1-\sigma)}} = 0$$

and we obtain a contradiction to (51).

The lack of the uniform regularity for the displacement w with respect to the parameter μ does not allow to trace the asymptotic dynamics of this variable in general case. However, if the $g(w)$ is a linear function the following statement holds true.

Proposition 1 *Let all conditions of Theorem 4 be satisfied. Let, moreover, $g = Kw$, where $K > 0$. Then for any $\sigma > 0$*

$$\sup_{y \in \mathfrak{A}_\mu^w} \|y\|_{[H^{-\sigma}(\Omega)]^2} \to 0, \quad \mu \to 0, \tag{55}$$

where $\mathfrak{A}_\mu^w = \{y = (w_0, w_1) : (v_0, w_0, v_1, w_1, \theta_0) \in \mathfrak{A}_\mu\}$.

Proof. Let there exists a sequence $\{\mu^n\} \to 0$ such that $\mu^n \le \mu_0$ for any $n \in \mathbb{N}$ and a sequence $Z^n \in \mathfrak{A}_{\mu^n}$ such that

$$\|w_t^n\|_{H^{-\sigma}(\Omega)} + \|w^n\|_{H^{-\sigma}(\Omega)} \ge \varepsilon. \tag{56}$$

We infer from (33) that there exists a subsequence w^{n_k} and a function $\mathbf{w}$ such that

$$\begin{aligned} w_t^{n_k} &\to \mathbf{w}_t; \quad \text{weak-* in } L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\Omega)) \\ w^{n_k} &\to \mathbf{w}; \quad \text{weak-* in } L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\Omega)) \end{aligned} \tag{57}$$

and, consequently,

$$\sqrt{\mu^{n_k}} w^{n_k} \to 0; \quad \text{weak-* in } L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\Omega)). \tag{58}$$

Moreover, by the Aubin's compactness theorem

$$\|w^{n_k} - \mathbf{w}\|_{H^{-\sigma}(\Omega)} \to 0, \quad \|w_t^{n_k} - \mathbf{w}_t\|_{H^{-\sigma}(\Omega)} \to 0, \ k \to \infty \tag{59}$$

for any $\sigma > 0$.

Consider a functional

$$W_\delta(w, w_t) = \frac{1}{2}\|w\|_{H^{-1}}^2 + \frac{K}{2}\|w\|_{H^{-1}}^2 + \delta[(w_t, w)_{H^{-1}} + \frac{1}{2}\|w\|_{H^{-1}}^2].$$

It is easy to see that

$$C_1(\|w\|_{H^{-1}}^2 + \|w\|_{H^{-1}}^2) \le W_\delta(w, w_t) \le C_2(\|w\|_{H^{-1}}^2 + \|w\|_{H^{-1}}^2)$$

and where exists $\varepsilon > 0$ such that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W_\delta(w^{n_k}, w_t^{n_k}) + \varepsilon W_\delta(w^{n_k}, w_t^{n_k}) \le \mu^{n_k} \|v^{n_k} + \nabla w^{n_k}\| \\ (\|w_t^{n_k}\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|w^{n_k}\|_{H^{-1}(\Omega)}) \le \sqrt{\mu^{n_k}} C \end{aligned}$$

Passing to the limit $k \to \infty$ and denoting $\mathbf{u} = (\mathbf{w}, \mathbf{w}_t)$ we obtain

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{[H^{-1}(\Omega)]^2} \le e^{-\beta_1(t-s)} \|\mathbf{u}(s)\|_{[H^{-1}(\Omega)]^2}.$$

Letting $s \to -\infty$, we get $\mathbf{u}(t) = 0$. Therefore, by (59) we obtain a contradiction to (56). This proves the proposition.

REFERENCES

1. Babin A. V. and Vishik M. I. Attractors of evolution equations.- North-Holland, 1992.- 294 p.

2. Ceron S. and Lopes O. α-contractions and attractors for dissipative semilinear hyperbolic equations and systems.// Ann. Mat. Pura Appl.-1991.- Ser. 4, **160**.-P. 193–206.

3. Chueshov I.D. Introduction to the theory of infinite-dimensional dissipative systems.- Acta: Kharkov, 1999.-433 p., see also http://www.emis.de/monographs/Chueshov.

4. Chueshov I. and Lasiecka I., Attractors for second-order evolution equations with a nonlinear damping // J. Dyn. Diff. Eqns.-2004.- V. 16, **2**.- P.469–512.

5. Chueshov I. and Lasiecka I. Global attractors for Mindlin-Timoshenko plates and for their Kirchhoff limits // Milan J. Math., in press.

6. Chueshov I. and Lasiecka I. Long-time behavior of the second order evolution equations with nonlinear damping.- Memoirs AMS, in press.

7. Fastovska T. Global attractor for nonlinear Mindlin-type plates thermoelasticity // Matem. Fizika, Analiz, Geometriya, - 2005.- V. 12, 2.-P. 203–217.

8. Fastovska T. Upper semicontinuous attractor for for 2D Mindlin-Timoshenko thermoelastic model with memory // Commun. Pure Appl. Anal., in press.

9. Hale J. K. and Raugel G. Upper semicontinuity of the attractor for a singulary perturbed hyperbolic equation // J. Diff. Equations-1988. -V.73.-P. 197–214.

10. Lagnese J. Boundary stabilization of thing plates.- Philadelphia: SIAM, 1989.- 176 p.

11. Schiavone P. and Tait R. J. Thermal effects in Mindlin-type plates// Q. Jl. Mech. appl. Math.-1993.-V.46, pt. 1.- P. 27–39.

12. Simon J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$// Ann. Mat. Pura Appl.-1987.- Ser.4, **148**.- P. 65–96.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.948 № 749, 2006, с.30–49

Функциональная модель Павлова ограниченного несамосопряженного оператора

В.А. Золотарев, О.В. Розуменко

Харьковский Национальный Университет имени В. Н. Каразина, Украина

Построена функциональная модель для произвольного оганиченного несамосопряженного оператора, действующего в гильбертовом пространстве H. Диссипативность оператора не предполагается. Эта модель являющется обобщением функциональной модели Б. С. Павлова и реализуется оператором умножения на независимую переменную в весовом пространстве Харди в полосе.

2000 Mathematics Subject Classification 47A45.

Как известно [1], спектральным разложением диссипативного ограниченного оператора A принято считать его функциональную модель. Построение функциональной модели основано на изучении унитарной дилатации U_t [7] для полугруппы сжатий $Z_t = \exp\{itA\}$, при этом $Z_t = P_H U_t|_H$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Функциональная модель, которая реализуется оператором умножения на независимую переменную в специальном пространстве функций, базируется на исследовании известной схемы рассеяния П. Лакса и Р. Филлипса [5]. Различные функциональные реализации такой модели были получены Б. С. Павловым [12], Б. Секефальви-Надем и Ч. Фояшем [3] и Л. де Бранжем – Дж. Ровняком [11] и изоморфны друг другу.

Попытки построения функциональных моделей для произвольных равномерно непрерывных полугрупп Z_t (порождаемых ограниченным несамосопряженным оператором A) наталкивались на существенные трудности, одна из которых состоит в том, что дилатация U_t является теперь J-унитарным оператором, $U_t^* J U_t = U_t J U_t^* = J$ (J – инволюция), а для таких U_t спектральные разложения, вообще говоря, отсутствуют. В данной работе, основываясь на результатах [1], получена функциональная модель для любой равномерно непрерывной полугруппы Z_t (сжимаемость которой не предполагается), обобщающая функциональную модель Б. С. Павлова.

Интересно отметить, что в этом случае вместо традиционного пространства L^2 возникает модельное пространство, которое представляет собой класс Харди H^2 в полосе с операторным весом.

I. Напомним, что через $[H,G]$ принято обозначать множество ограниченных линейных операторов, действующих из гильбертова пространства H в гильбертово пространство G.

Совокупность гильбертовых пространств H, E, и операторов $A \in [H,H]$, $\varphi \in [H,E]$, $J \in [E,E]$, где J — инволюция, $J = J^* = J^{-1}$, называется [1] локальным узлом
$$\Delta = (A, H, \varphi, E, J), \tag{1}$$
если выполняется условие
$$A - A^* = i\varphi^* J\varphi. \tag{2}$$
Как известно [1], любой оператор $A \in [H,H]$ может быть включен в узел Δ (1), (2).

Рассмотрим линейное многообразие вектор-функций $f(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве G при $t \in [0,T]$. Обозначим через $L^2_{(0,T)}(G)$ гильбертово пространство, полученное в результате замыкания данного многообразия вектор-функций по норме
$$\|f\|^2 = \int_0^T \|f(t)\|_G^2 dt < \infty.$$
Открытая система $F_\Delta = \{R_\Delta, S_\Delta\}$ называется [1] ассоциированной открытой системой узлом Δ (1), если R_Δ и S_Δ задаются формулами
$$F_\Delta : \begin{cases} R_\Delta\,(h_0, u(t)) = h(t); \\ S_\Delta\,(h_0, u(t)) = (h_T, v(t))\,; \end{cases} \qquad t \in [0,T]. \tag{3}$$
При этом $h(t)$ является решением задачи Коши
$$R_\Delta : \begin{cases} i\dfrac{d}{dt}h(t) + Ah(t) = \varphi^* Ju(t); \\ h(0) = h_0 \end{cases} \qquad (0 \le t \le T), \tag{4}$$
а отображение S_Δ задается формулами
$$S_\Delta : \begin{cases} v(t) = u(t) - i\varphi h(t); \\ h_T = h(T), \end{cases} \tag{5}$$
где $h(t)$ — решение задачи (4).

Теорема 1. *Предположим, что $h^k(t)$ и $\left(h^k_T, v^k(t)\right)$ — образы отображений R_Δ (4) и S_Δ (5), ассоциированной с узлом Δ (1) открытой системы F_Δ, когда входами являются $\left(h^k_0, u^k(t)\right)$, $k = 1,2$. Тогда справедливо равенство*
$$\langle h^1_0, h^2_0\rangle_H + \int_0^T \langle Ju^1(t), u^2(t)\rangle_E dt = \langle h^1_T, h^2_T\rangle_H + \int_0^T \langle Jv^1(t), v^2(t)\rangle_E dt. \tag{6}$$

Доказательство этой теоремы приведено в [1].

В том случае, когда $h_0 = h_0^1 = h_0^2$ и $u(t) = u^1(t) = u^2(t)$, мы получим следующий важный закон сохранения энергетического баланса

$$\|h_0\|^2 + \int\limits_0^T \langle Ju(t), u(t)\rangle\, dt = \|h_T\|^2 + \int\limits_0^T \langle Jv(t), v(t)\rangle\, dt. \tag{6$'$}$$

Локальный узел

$$\Delta^+ = (-A^*, H, \varphi, E, J)$$

назовем [1] двойственным локальным узлом по отношению к Δ (1). Ассоциируем с Δ^+ открытую систему $F_\Delta^+ = \{R_\Delta^+, S_\Delta^+\}$, которую мы назовем двойственной открытой системой по отношению к $F_\Delta = \{R_\Delta, S_\Delta\}$, (3);

$$F_\Delta^+ : \begin{cases} R_\Delta^+(h_T, v(t)) = h(t); \\ S_\Delta^+(h_T, v(t)) = (h_0, u(t)); \end{cases} \tag{7}$$

при этом

$$R_\Delta^+ : \begin{cases} i\dfrac{d}{dt}h(t) + A^*h(t) = \varphi^* Jv(t); \\ h(T) = h_T, \end{cases} \quad (0 \le t \le T);$$
$$S_\Delta^+ : \begin{cases} u(t) = v(t) + i\varphi h(t); \\ h_0 = h(0). \end{cases} \tag{8}$$

Для открытой системы (7) также справедливы формулы (6), (6′).

Если $H_\varphi = \operatorname{span}\{A^n \varphi^* f; f \in E, n \in \mathbb{Z}_+\}$ совпадает с H, $H = H_\varphi$, то узел Δ мы будем называть простым узлом [8].

II. Оператор-функция $Z_t \in [H, H]$ аргумента $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \ge 0\}$ называется полугруппой [2], если

$$Z_0 = I, \quad Z_{t+s} = Z_t \cdot Z_s.$$

Если Z_t непрерывна в равномерной топологии H, то $Z_t = \exp(itA)$, где $A \in [H, H]$ — инфинитезимальный оператор полугруппы Z_t [2] задается формулой

$$iA = s - \lim_{t \to 0} \frac{Z_t - I}{t}.$$

Полугруппа U_t, действующая в пространстве $\mathcal{H}$, называется дилатацией полугруппы Z_t в H [3], если

$$\mathcal{H} \supseteq H; \quad Z_t = P_H U_t|_H \quad (t \ge 0), \tag{9}$$

где P_H — ортопроектор на H. Дилатация U_t называется унитарной [3], если U_t унитарна при каждом $t \in \mathbb{R}_+$. Дилатация U_t в $\mathcal{H}$ полугруппы Z_t в H называется минимальной [3], если

$$\mathcal{H} = \operatorname{span}\{U_t h : h \in H, t \in \mathbb{R}\}.$$

Обозначим через $\mathcal{M}$ линейную оболочку вектор-функций вида

$$f(\xi) = (u_+(\xi), h, u_-(\xi)), \tag{10}$$

где $u_\pm(\xi)$ — вектор-функции из E такие, что $\operatorname{supp} u_\pm(\xi) \in \mathbb{R}_\mp$, а $h \in H$. Зададим на $\mathcal{M}$ норму

$$\|f\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{0} \|u_+(\xi)\|_E^2 d\xi + \|h\|^2 + \int\limits_{0}^{\infty} \|u_-(\xi)\|_E^2 d\xi < \infty. \tag{11}$$

Замыкание многообразия $\mathcal{M}$ в этой метрике и образует гильбертово пространство, которое мы обозначим через $\mathcal{H}$. Через P_M обозначим [1] оператор сужения на множество M, а именно:

$$(P_M f)(\xi) = f(\xi)\chi_M(\xi),$$

где $\chi_M(\xi)$ — характеристическая функция множества M ($M \subset \mathbb{R}$) ($\chi_M(\xi) = 1$ при $\xi \in M$, и $\chi_M(\xi) = 0$ при $\xi \notin M$). Определим в $\mathcal{H}$ J–метрику, $\langle J.,.\rangle$, где

$$Jf(\xi) = (Ju_+(\xi), h, Ju_-(\xi)). \tag{12}$$

Зададим [1] в пространстве $\mathcal{H}$ полугруппу U_t, —

$$(U_t f)(\xi) = f_t(\xi) = (u_+(t,\xi), h_t, u_-(t,\xi)), \quad (t \geq 0). \tag{13}$$

Вектор-функция $u_-(t,\xi)$ имеет вид:

$$u_-(t,\xi) = P_{\mathbb{R}_+} u_-(\xi + t). \tag{14}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{d\xi} y_t(\xi) + Ay_t(\xi) = \varphi^* J P_{(-t,0)} u_-(\xi + t); & \xi \in (-t, 0); \\ y_t(-t) = h; & \end{cases} \tag{15}$$

и положим $h_t = y_t(0)$. Наконец,

$$u_+(t,\xi) = u_+(\xi + t) + P_{(-t,0)}\{u_-(\xi + t) - i\varphi y_t(\xi)\}, \tag{16}$$

где $y_t(\xi)$ — решение задачи Коши (15). Введем метрику

$$\langle f(\xi)\rangle_J^2 = \int\limits_{\mathbb{R}_-} \langle Ju_+(\xi), u_+(\xi)\rangle_E \, d\xi + \|h\|^2 + \int\limits_{\mathbb{R}_+} \langle Ju_-(\xi), u_-(\xi)\rangle_E \, d\xi. \tag{17}$$

Проверим изометричность U_t в этой метрике:

$$\langle U_t f\rangle^2 = \langle f_t(\xi)\rangle^2 = \int\limits_{-\infty}^{0} \langle Ju_+(t,\xi), u_+(t,\xi)\rangle \, d\xi + \|h_t\|^2 +$$

$$+\int_0^\infty \langle Ju_-(t,\xi),u_-(t,\xi)\rangle\, d\xi=\int_{-\infty}^{-t}\langle Ju_+(\xi+t),u_+(\xi+t)\rangle\, d\xi+$$

$$+\int_{-t}^{0}\langle J[u_-(\xi+t)-i\varphi y_t(\xi)],u_-(\xi+t)-i\varphi y_t(\xi)\rangle\, d\xi+\|h_t\|^2+$$

$$+\int_0^\infty \langle Ju_-(\xi+t),u_-(\xi+t)\rangle\, d\xi=\int_{-\infty}^{0}\langle Ju_+\xi),u_+(\xi)\rangle\, d\xi+$$

$$+\int_t^\infty \langle Ju_-(\xi),u_-(\xi)\rangle\, d\xi+\int_0^t \langle Ju_-(\xi),u_-(\xi)\rangle\, d\xi+\|h\|^2=\langle f(\xi)\rangle_J^2.$$

При этом мы воспользовались законом сохранения (6) для открытой системы (15), (16)

$$\int_{-t}^{0}\langle J[u_-(\xi+t)-i\varphi y_t(\xi)],u_-(\xi+t)-i\varphi y_t(\xi)\rangle\, d\xi+\|h_t\|^2=$$

$$=\int_0^t \langle Ju_-(\xi),u_-(\xi)\rangle\, d\xi+\|h\|^2,$$

которая ассоциирована с узлом

$$\Delta=(A,H,\varphi,E,J).$$

Полугруппа U_t называется J-унитарной [1], если U_t унитарна в J-метрике (17), то есть

$$U_t^*JU_t=J,\quad U_tJU_t^*=J. \tag{18}$$

Докажем, что U_t (13) является J-унитарной дилатацией полугруппы $Z_t=\exp(itA)$. То, что U_t является полугруппой при $t\geq 0$, — очевидно. Кроме того, что U_t является дилатацией Z_t, так как следует из того, что

$$P_HU_t(0,h,0)=(0,h_t,0)=Z_th,$$

потому что $h_t=\exp(itA)h$, в силу задачи Коши (15). Осталось доказать J-унитарность U_t (13). Для этого вычислим U_t^* и проверим изометричность U_t^* в метрике (17).

$$\left\langle (U_tf)(\xi),\tilde f(\xi)\right\rangle_J=\left\langle f_t(\xi),\tilde f(\xi)\right\rangle_J=$$

$$=\int_0^\infty \langle Ju_-(\xi+t),\tilde u_-(\xi)\rangle\, d\xi+\left\langle h_t,\tilde h\right\rangle+\int_{-\infty}^{0}\langle Ju_+(t,\xi),\tilde u_+(\xi)\rangle\, d\xi=$$

$$= \int\limits_t^{\infty} \langle Ju_-(\xi), \tilde{u}_-(\xi - t)\rangle\, d\xi + \left\langle h_t, \tilde{h}\right\rangle + \int\limits_{-\infty}^{0} \langle Ju_+(\xi), \tilde{u}_+(\xi - t)\rangle\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_t^{0} \langle J[u_-(\xi + t) - i\varphi y_t(\xi)], \tilde{u}_+(\xi)\rangle\, d\xi.$$

Легко видеть, что $y_t(\xi)$, решение задачи Коши (15), имеет вид

$$y_t(\xi) = \exp[i(\xi + t)A]h - i\int\limits_{-t}^{\xi} \exp[iA(\xi - \theta)]\varphi^* Ju_-(\theta + t)d\theta,$$

$\xi \in (-t, 0)$. С учетом этого упростим следующее выражение:

$$\left\langle h_t, \tilde{h}\right\rangle + \int\limits_{-t}^{0} \langle J\left[u_-(\xi + t) - i\varphi y_t(\xi)\right], \tilde{u}_+(\xi)\rangle\, d\xi =$$

$$= \left\langle \left[\exp(itA)h - i\int\limits_{-t}^{0} \exp(-iA\theta)\varphi^* Ju_-(\theta + t)d\theta \right], \tilde{h} \right\rangle +$$

$$+ \int\limits_0^t \langle Ju_-(\xi), \tilde{u}_+(\xi - t)\rangle d\xi - i\int\limits_0^t \langle Jy_t(\xi - t), \varphi^* \tilde{u}_+(\xi - t)\rangle d\xi =$$

$$= \left\langle h, Z_t^* \tilde{h}\right\rangle + \int\limits_0^t \left\langle Ju_-(\xi), \{\tilde{u}_+(\xi - t) + i\varphi Z^*_{(t-\xi)}\tilde{h}\}\right\rangle d\xi -$$

$$-i\int\limits_0^t \left\langle J\left\{ Z_\xi h - i\int\limits_0^{\xi} Z_{\xi-\theta}\varphi^* Ju_-(\theta)d\theta \right\}, \varphi^* \tilde{u}_+(\xi - t)\right\rangle d\xi =$$

а после замены порядков интегрирования получим, что

$$= \left\langle h, \tilde{h}_t\right\rangle + \int\limits_0^t \langle Ju_-(\xi), [\tilde{u}_+(\xi - t) + i\varphi \tilde{y}_t(\xi)]\rangle\, d\xi.$$

При этом $\tilde{h}_t = \tilde{y}_t(0)$, а вектор-функция $\tilde{y}_t(\xi)$ имеет вид

$$\tilde{y}_t(\xi) = \exp\left[iA^*(\xi - t)\right]\tilde{h} + i\int\limits_{\xi}^{t} Z^*_{(\theta-\xi)}\varphi^* Ju_+(\theta - t)d\theta, \qquad (19)$$

где $\xi \in (0, t)$. Таким образом,

$$\left\langle (U_t f)(\xi), \tilde{f}(\xi) \right\rangle_J = \int\limits_{-\infty}^{0} \langle Ju_+(\xi), \tilde{u}_+(\xi - t)\rangle \, d\xi + \left\langle h, \tilde{h}_t \right\rangle +$$

$$+ \int\limits_0^{\infty} \left\langle Ju_-(\xi), \left[\tilde{u}_-(\xi - t) + P_{(0,t)} \left\{\tilde{u}_+(\xi - t) + i\varphi \tilde{y}_t(\xi)\right\}\right]\right\rangle d\xi.$$

Следовательно, U_t^* определяется в $\mathcal{H}$ следующим образом:

$$(U_t^* \tilde{f})(\xi) = \tilde{f}_t(\xi) = \left(\tilde{u}_+(t, \xi), \tilde{h}_t, \tilde{u}_-(t, \xi)\right), \tag{20}$$

где

$$\tilde{u}_+(t, \xi) = P_{\mathbb{R}_-} \tilde{u}_+(\xi - t),$$

а $\tilde{h}_t = \tilde{y}_t(0)$, функция же $\tilde{y}_t(\xi)$ (19) является решением задачи Коши

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{d\xi}\tilde{y}_t(\xi) + A^* \tilde{y}_t(\xi) = \varphi^* J P_{(0,t)} u_+(\xi - t); \\ \tilde{y}_t(t) = \tilde{h}; \end{cases} \quad \xi \in (0, t);$$

и наконец

$$\tilde{u}_-(t, \xi) = \tilde{u}_-(\xi - t) + P_{(0,t)} \left[\tilde{u}_-(\xi - t) + i\varphi \tilde{y}_t(\xi)\right].$$

Отметим, что конструкция U_t^* основана на отображениях двойственной открытой системы F_Δ^+ (7),(8), а для нее имеет место закон сохранения (6′), который и обеспечивает J-изометричность U_t^* (20). Таким образом, доказана теорема.

Теорема 2. *Полугруппа $Z_t = \exp(itA)$ в H, где A — ограниченный оператор в H, обладает J-унитарной дилатацией U_t (13) в $\mathcal{H}$ (12).*

III. Подпространства D_+ и D_- в $\mathcal{H}$ называются [5] уходящим и приходящим подпространствами группы U_t в $\mathcal{H}$ в смысле П. Лакса и Р. Филлипса, если $D_- \perp D_+$ и

$$\begin{array}{ll} U_t D_+ \subset D_+ & (\forall t \in \mathbb{R}_+); \\ U_{-t} D_- \subset D_- & (\forall t \in \mathbb{R}_+). \end{array} \tag{21}$$

Отметим, что подпространства

$$D_+ = \{f(\xi) = (u_+(\xi), 0, 0) \in \mathcal{H}\}; \quad D_- = \{f(\xi) = (0, 0, u_-(\xi)) \in \mathcal{H}\}$$

являются уходящим и приходящим подпространствами для U_t, кроме того имеет место

$$\mathcal{H} = D_+ \oplus H \oplus D_-. \tag{22}$$

Зададим в гильбертовом пространстве

$$L^2_{\mathbb{R}}(E) = \left\{ g(\xi) \in E : \xi \in \mathbb{R} : \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|g(\xi)\|^2_E d\xi < \infty \right\} \tag{23}$$

свободную [7] унитарную группу сдвигов

$$(V_t g)(\xi) = g(\xi + t). \tag{24}$$

Естественное отождествление позволяет считать, что $D_\pm = L^2_{\mathbb{R}_\mp}(E) \subset L^2_{\mathbb{R}}(E)$. Определим [7] волновые операторы $W_\mp$,

$$W_\mp = s - \lim_{t \to \pm\infty} U_t P_{D_\mp} V_{-t}. \tag{25}$$

Нетрудно видеть [1], что имеют место следующие важные соотношения:

$$W_\pm P_{D_\pm} = P_{D_\pm}, \quad U_t W_\pm = W_\pm V_t \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{26}$$

Докажем существование W_- (для W_+ рассуждения носят аналогичный характер). Рассмотрим допредельное выражение $W_-(t) = U_t P_{D_-} V_{-t}$ $(t \geq 0)$. Доказательство существования W_- основано на том, что последовательность функций

$$f(t, \xi) = W_-(t) g(\xi) = U_t P_{D_-} V_{-t} g(\xi) \tag{27}$$

является фундаментальной в $\mathcal{H}$ при $t \to \infty$. Рассмотрим

$$\|\Delta f\|^2 = \|f_{t+\Delta} - f_t\|^2 = \left\| \left(U_{t+\Delta} P_{D_-} V_{-t-\Delta} - U_t P_{D_-} V_{-t}\right) g(\xi) \right\|^2 =$$

$$= \left\| U_t \left(U_\Delta P_{D_-} V_{-\Delta} - P_{D_-}\right) V_{-t} g(\xi) \right\|^2 = \left\| U_t \left(U_\Delta P_{D_-} V_{-\Delta} - P_{D_-}\right) g(\xi - t) \right\|^2.$$

Теорема 3. *Предположим, что $J = I$. Тогда волновые операторы $W_\pm$ (25) существуют и являются изометриями из $L^2_{\mathbb{R}}(E)$ в $\mathcal{H}$. при этом имеют место соотношения (26).*

Доказательство. Покажем, что последовательность $f(t, \xi)$ (27) является фундаментальной в пространстве $\mathcal{H}$. Действительно, в силу унитарности U_t заключаем, что

$$\|\Delta f\| \leq \left\| \left(U_\Delta P_{D_-} V_{-\Delta} - P_{D_-}\right) g(\xi - t) \right\|^2.$$

Нетрудно видеть, что

$$\left(U_\Delta P_{D_-} V_{-\Delta} - P_{D_-}\right) g(\xi - t) = \left(v(\Delta, \xi), h_\Delta, 0\right),$$

где

$$v_\Delta(\xi) = P_{(-\Delta, 0)} \left\{ g(\xi - t) - i\varphi h_t(\xi) \right\}, \tag{28}$$

$h_\Delta = h_t(0)$, а $h_t(\xi)$ — решение задачи Коши

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{dt}h_t(\xi) + Ah_t(\xi) = \varphi^* P_{(-\Delta,0)}g(\xi - t); \\ h_t(-\Delta) = 0; \end{cases} \quad \xi \in (-\Delta, 0). \tag{29}$$

Следовательно,

$$\left\| \left(U_\Delta P_{D_-} V_{-\Delta} - P_{D_-} \right) g(\xi - t) \right\|^2 = \left[\int_{-\Delta}^{0} \|v_\Delta(\xi)\|^2 \, d\xi + \|h_\Delta\|^2 \right].$$

Воспользуемся законом сохранения для открытой системы (28), (29),

$$\int_{-\Delta}^{0} \|v_\Delta(\xi)\|^2 \, d\xi + \|h_\Delta\|^2 = \int_{-\Delta}^{0} \|g(\xi - t)\| d\xi,$$

получим

$$\|\Delta f\|^2 \le \int_{-\Delta}^{0} \|g(\xi - t)\|^2 d\xi = \int_{-\Delta-t}^{-\Delta} \|g(\xi)\|^2 d\xi,$$

Последнее выражение стремится к 0 при t, $\Delta \to \infty$, так как $g(\xi) \in L^2_{\mathbb{R}}(E)$, поэтому последовательность $f(t,\xi)$ (27) является фундаментальной. Изометричность W_- вытекает из соотношения

$$\|W_-(t)g(\xi)\|^2 = \|U_t P_{D_-} V_{-t} g(\xi)\|^2 = \|P_{D_-} V_{-t} g(\xi)\|^2 = \int_{0}^{\infty} \|g(\xi - t)\|^2_E d\xi =$$

$$= \int_{-t}^{\infty} \|g(\xi)\|^2_E d\xi$$

в результате перехода к пределу, когда $t \to \infty$. Теорема доказана.

Пусть $J \ne I$. Изучим вопрос существования волновых операторов в этом случае. Как известно [6], для U_t имеет место оценка $\|U_t\| \le e^{\beta t}$, где $\beta \ge 0$, и значит

$$\|\Delta f\|^2 \le e^{2\beta t} \left\| \left(U_\Delta P_{D_-} V_{-\Delta} - P_{D_-} \right) g(\xi - t) \right\|^2.$$

Нетрудно видеть, что

$$\left(U_\Delta P_{D_-} V_{-\Delta} - P_{D_-} \right) g(\xi - t) = (v(\Delta, \xi), h_\Delta, 0),$$

где

$$v_\Delta(\xi) = P_{(-\Delta,0)} \left\{ g(\xi - t) - i\varphi h_t(\xi) \right\}, \tag{30}$$

$h_\Delta = h_t(0)$, а $h_t(\xi)$ — решение задачи Коши

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{dt}h_t(\xi) + Ah_t(\xi) = \varphi^* JP_{(-\Delta,0)}g(\xi - t); & \xi \in (-\Delta, 0). \\ h_t(-\Delta) = 0; \end{cases} \tag{31}$$

Следовательно,

$$e^{2\beta t}\left\|\left(U_\Delta P_{D_-}V_{-\Delta} - P_{D_-}\right)g(\xi - t)\right\|^2 = e^{2\beta t}\left[\int\limits_{-\Delta}^{0}\|v_\Delta(\xi)\|^2 d\xi + \|h_\Delta\|^2\right] =$$

Очевидно, что

$$\|v_\Delta(\xi)\|^2 = \langle v_\Delta(\xi), v_\Delta(\xi)\rangle = \langle Jv_\Delta(\xi), v_\Delta(\xi)\rangle + \langle (I - J)v_\Delta(\xi), v_\Delta(\xi)\rangle =$$

$$= \langle Jv_\Delta, v_\Delta\rangle + 2\langle Q_- v_\Delta, v_\Delta\rangle;$$

где $2Q_\pm = I \pm J$ — ортопроекторы в E, тогда

$$= e^{2\beta t}\left[\int\limits_{-\Delta}^{0}\langle Jv_\Delta, v_\Delta\rangle d\xi + 2\int\limits_{-\Delta}^{0}\langle Q_- v_\Delta, v_\Delta\rangle d\xi + \|h_\Delta\|^2\right] =$$

$$= e^{2\beta t}\left[\int\limits_{-\Delta}^{0}\langle Jg(\xi - t), g(\xi - t)\rangle d\xi + 2\int\limits_{-\Delta}^{0}\langle Q_- v_\Delta, v_\Delta\rangle d\xi\right]$$

(здесь мы воспользовались законом сохранения для открытой системы (30) – (31) $\int\limits_{-\Delta}^{0}\langle Jv_\Delta, v_\Delta\rangle d\xi + \|h_\Delta\|^2 = \int\limits_{-\Delta}^{0}\langle Jg, g\rangle d\xi$). Так как $|\langle Jg, g\rangle| \le \|g\|^2$, и $v_\Delta(\xi) = P_{D_+}U_\Delta\left(0, 0, P_{(-\Delta,0)}g(\xi)\right)$, то $\|v_\Delta(\xi)\| \le e^{\Delta\beta}\left\|P_{(-\Delta,0)}g(\xi)\right\|$, и $|\langle Q_- v, v\rangle| \le \|v\|^2 \le e^{2\beta\Delta}\|g\|^2$. Поэтому

$$\|\Delta f\|^2 \le e^{2\beta t}\left[\int\limits_{-\Delta}^{0}\|g(\xi - t)\|^2 d\xi + 2e^{2\beta\Delta}\int\limits_{-\Delta}^{0}\|g(\xi - t)\|^2 d\xi\right] =$$

$$= e^{2\beta t}\left(1 + 2e^{2\beta\Delta}\right)\int\limits_{-\Delta}^{0}\|g(\xi - t)\|^2 d\xi = \int\limits_{-\Delta - t}^{-t}\|g(\xi)\|^2 d\xi\left(e^{2\beta t} + 2e^{2\beta(t+\Delta)}\right) =$$

$$= 3e^{2\beta(t+\delta)}\int\limits_{-\Delta - t}^{-t}\|g\|^2 d\xi,$$

так как

$$\frac{1}{3}e^{2\beta t} + \frac{2}{3}e^{2\beta(t+\Delta)} = e^{2\beta(t+\delta)},$$

где δ — некоторое число, такое что $0 \le \delta \le \Delta$.

По теореме о среднем,

$$\int\limits_{-\Delta-t}^{-t} \|g\|^2 e^{-2\alpha\xi} d\xi = e^{2\alpha(t+\gamma)} \int\limits_{-\Delta-t}^{-t} \|g\|^2 d\xi,$$

где $0 \le \gamma \le \Delta$. Выберем $\alpha > \beta$, тогда

$$\lim_{t\to\infty} \left[3e^{2\beta(t+\delta)} \int\limits_{-t-\delta}^{-t} \|g\|^2 d\xi \right] < \lim_{t\to\infty} \left[3e^{2\alpha(t+\gamma)} \int\limits_{-t-\Delta}^{-t} \|g\|^2 d\xi \right] \quad (0 \le \gamma, \delta \le \Delta),$$

и следовательно

$$\lim_{t\to\infty} \|f_{t+\Delta} - f_t\| = 0,$$

если

$$\lim_{t\to\infty} \left[3 \cdot \int\limits_{-\Delta-t}^{-t} \|g\|^2 e^{-2\alpha\xi} d\xi \right] = 0. \tag{32}$$

Определим гильбертово пространство

$$L^2_{\mathbb{R}}\left(E, \alpha^-\right) = \left\{ g(\xi) \in E : \xi \in \mathbb{R};\ \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-2\alpha^- \xi} \|g(\xi)\|^2_E \, d\xi + \int\limits_{0}^{\infty} \|g(\xi)\|^2_E d\xi < \infty \right\}, \tag{33_-}$$

где $\alpha^- > \beta$. Очевидно, что из $g \in L^2_{\mathbb{R}_-}(E, \alpha)$ следует (30). Таким образом, если $\alpha^- > \beta > 0$, то для функций $g(\xi)$ из $L^2_{\mathbb{R}}(E, \alpha^-)$ предел $W_- g(\xi)$ (25) существует.

Применяя аналогичные соображения, относящиеся к существованию оператора W_+ (25), мы получим, что предел $W_+ g(\xi)$ существует, если $g(\xi) \in L^2_{\mathbb{R}}(E, \alpha^+)$, где

$$L^2_{\mathbb{R}}\left(E, \alpha^+\right) = \left\{ g(\xi) \in E : \xi \in \mathbb{R};\ \int\limits_{0}^{\infty} e^{-2\alpha^+ \xi} \|g(\xi)\|^2_E \, d\xi + \int\limits_{-\infty}^{0} \|g(\xi)\|^2_E d\xi < \infty \right\}; \tag{33_+}$$

где $\alpha^+ > \beta' > 0$, причем $\|U_{-t}\| \le e^{\beta' t}$.

Из свойств J-унитарности (19) дилатации U для последовательности $f(t, \xi)$ (27) получим, что

$$\langle Jf(t,\xi), f(t,\xi)\rangle = \langle JP_{D_-} V_{-t} g(\xi), V_{-t} g(\xi)\rangle = \int\limits_{-t}^{\infty} \langle Jg(\xi), g(\xi)\rangle \, d\xi.$$

Следовательно, имеют место

$$\begin{aligned} \langle JW_+ v, W_+ v'\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle Jv, v'\rangle_{L^2(E)}; \\ \langle JW_- u, W_- u'\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle Ju, u'\rangle_{L^2(E)} \end{aligned} \tag{34}$$

для любых $u, u' \in L^2_{\mathbb{R}}(E, \alpha^-)$ (33_+) и $v, v' \in L^2_{\mathbb{R}}(E, \alpha^+)$ (33_-).

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. *Пусть для дилатации U_t имеют место оценки $\|U_t\| \leq e^{\beta t}$, $\|U_{-t}\| \leq e^{\beta' t}$, где $\beta, \beta' > 0$. Тогда существуют волновые операторы W_- и W_+ (25), действующие соответственно из $L^2_{\mathbb{R}}(E, \alpha^+)$ (33_+) и из $L^2_{\mathbb{R}}(E, \alpha^-)$ (33_-) (где $\alpha^- > \beta$, $\alpha^+ > \beta'$) в пространство $\mathcal{H}$, $W_\pm$ обладают J-изометричностью (34), при этом имеют место соотношения (26).*

Оператор рассеяния S определим [5, 7] следующим образом:

$$S = W_+^* W_- \quad (L^2_{\mathbb{R}}(E, \alpha^-) \to L^2_{\mathbb{R}}(E, \alpha^+)). \tag{35}$$

Для оператора рассеяния S выполняется [1] соотношение

$$SV_t = V_t S. \tag{36}$$

IV. Важным свойством операторов $W_\pm$ (25) является условие полноты [1].

Лемма 1. *Если узел Δ (1) прост, то волновые операторы $W_\pm$ (25) обладают свойством полноты*

$$\mathcal{H} = \operatorname{span}\{W_- L^2_{\mathbb{R}}(E, \alpha^-) + W_+ L^2_{\mathbb{R}}(E, \alpha^+)\}. \tag{37}$$

Доказательство леммы при $J = I$ приведено в [1], а для $J \neq I$ носит аналогичный характер.

Рассмотрим отображение B_p из $L^2_{\mathbb{R}}(E, \alpha^-) + L^2_{\mathbb{R}}(E, \alpha^+)$ в пространство $\mathcal{H}$, задаваемые формулой

$$B_p f = B_p \begin{pmatrix} f_- \\ f_+ \end{pmatrix} = W_- f_- + W_+ f_+, \tag{38}$$

где $f_+ \in L^2_{\mathbb{R}}(E, \alpha^+)$, $f_- \in L^2_{\mathbb{R}}(E, \alpha^-)$. Из леммы 1 следует, что для простых узлов Δ образ оператора B_p плотен в $\mathcal{H}$. Кроме того, прообразы подпространств D_- и D_+ (21) при отображении B_p (38) имеют вид

$$\widehat{D}_-(E) = \begin{pmatrix} L^2_{\mathbb{R}_+}(E) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{D}_+(E) = \begin{pmatrix} 0 \\ L^2_{\mathbb{R}_-}(E) \end{pmatrix}, \tag{39}$$

в силу (25). Очевидно, что

$$\|B_p f\|^2_{\mathcal{H}} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \begin{bmatrix} W_-^* W_- & W_-^* W_+ \\ W_+^* W_- & W_+^* W_+ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_-(\xi) \\ f_+(\xi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_-(\xi) \\ f_+(\xi) \end{pmatrix} \right\rangle_{E \oplus E} d\xi, \tag{40}$$

поэтому естественно определить гильбертово пространство

$$L^2_\alpha(W)=\left\{f(\xi)=\begin{pmatrix} f_-(\xi)\\ f_+(\xi)\end{pmatrix}: f_-(\xi)\in L^2_{\mathbb{R}}(E,\alpha^-),\right.$$
$$\left. f_+(\xi)\in L^2_{\mathbb{R}}(E,\alpha^+);\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle Wf(\xi),f(\xi)\rangle_{E\oplus E}d\xi<\infty\right\}, \tag{41}$$

где W, в силу (40), имеет вид

$$W=\begin{bmatrix} W_-^*W_- & W_-^*W_+\\ W_+^*W_- & W_+^*W_+\end{bmatrix}. \tag{42}$$

Вычислим блоки оператора W (42), воспользовавшись (34) и (35), а также тем обстоятельством, что инволюции J, J_E представляют собой разности соответствующих ортопроекторов Q^+-Q^- $(Q^+Q^-=0)$, где $Q^\pm=\dfrac{1}{2}(I\pm J)$. Очевидно, что

$$W^*W_-=W^*JW+W_-^*(I-J)W_-=J_E+2W_-^*Q^-W_-=$$
$$=I+2(W_-^*Q^-W_--Q_E^-).$$

Аналогичным образом,

$$W_+^*W_-=W_+^*JW_-+2W_+^*Q^-W_-=J_ES+2W_+^*Q^-W_-=$$
$$=S+2(W_+^*Q^-W_--Q_E^-S).$$

Поэтому оператор W (42) можно записать в виде

$$W=\begin{bmatrix} I & S^*\\ S & I\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} W_-^*Q^-W_--Q_E^- & W_-^*Q^-W_+-S^*Q_E^-\\ W_+^*Q^-W_--Q_E^-S & W_+^*Q^-W_+-Q_E^-\end{bmatrix}, \tag{43}$$

который в случае сжатия Z_t $(Q^-=Q_E^-=0)$ имеет традиционный [1] вид

$$W=\begin{bmatrix} I & S^*\\ S & I\end{bmatrix}.$$

Из соотношений $U_tW_\pm=W_\pm V_t$ (26) следует, что дилатация U_t в пространстве $L^2_\alpha(W)$ (41) действует трансляционным образом—

$$\widehat{U}_tf(\xi)=f(\xi+t). \tag{44}$$

Очевидно, что в силу структуры пространства дилатации $\mathcal{H}$ (11) и вида $\widehat{D}_-(E)$, $\widehat{D}_+(E)$ (38) в пространстве $L^2_\alpha(W)$ (41) исходное пространство H изоморфно

$$\widehat{H}_p=L^2_\alpha(W)\ominus\begin{pmatrix} L^2_{\mathbb{R}_+}(E)\\ L^2_{\mathbb{R}_-}(E)\end{pmatrix}, \tag{45}$$

а действие полугруппы Z_t преобразуется в полугруппу сдвигов

$$\widehat{Z}_t f(\xi) = P_{\widehat{H}_p} f(\xi + t), \tag{44}$$

где $f(\xi) \in \widehat{H}_p$ (45).

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 5. *Минимальная J-унитарная дилатация U_t (13) в $\mathcal{H}$ (11) полугруппы $Z_t = \exp\{itA\}$ в H, где A — вполне-несамосопряжённый оператор, унитарно эквивалентна группе трансляций $\widehat{U}_t$ (44) в пространстве $L^2_\alpha(W)$ (41), а полугруппа Z_t эквивалентна, соответственно, полугруппе сдвигов $\widehat{Z}_t$ (46) в пространстве $\widehat{H}_p$ (45).*

Отметим, что в случае сжатия Z_t ($\|Z_t h\| \leq \|h\|$) мы приходим к известной модельной реализации Б. С. Павлова [10].

V. Рассмотрим преобразование Фурье

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f(\xi) d\xi \tag{46}$$

Из теоремы Винера – Пэли [9] следует, что

$$\widetilde{L^2_{\mathbb{R}_+}}(E) = H^2_-(E), \quad \widetilde{L^2_{\mathbb{R}_-}}(E) = H^2_+(E),$$

где $H^2_\pm(E)$ — пространства Харди [1, 9] E-значных вектор-функций $f(\lambda)$ таких, что

$$\sup_{\pm y \geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|f(x+iy)\|^2_E dx < \infty.$$

Обратимся теперь к гильбертову пространству $L^2_{\mathbb{R}}(E, \alpha^-)$ (33_-) и разложим каждую функцию $u(k)$ из этого пространства на две ортогональные компоненты, $g(\xi) = g_-(\xi) + g_+(\xi)$, при этом $\operatorname{supp} g_\pm \subseteq \mathbb{R}_\pm$. Легко видеть, что $\tilde{g}_-(\lambda)$ — Фурье-образ $g_-(\xi)$ голоморфно продолжаем в области $\{z = x + iy : y < \alpha^-\}$, что же касается $\tilde{g}_+(\lambda)$, то очевидно, что $\tilde{g}_+(\lambda) \in H^2_+(E)$. Таким образом, функции $\tilde{g}_+(\lambda)$ и $\tilde{g}_-(\lambda)$ имеют общую область голоморфности – полосу $\{z = x + iy : 0 \leq y \leq \alpha^-\}$.

Обозначим [9] через $H^2_{(\alpha,\beta)}(E)$ — пространство E-значных функций $f(\lambda)$ таких, что

$$\sup_{\alpha<y<\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \|f(x+iy)\|^2_E < \infty.$$

Таким образом,

$$\widetilde{L^2_{\mathbb{R}}}(E, \alpha^-) = H^2_{(0,\infty)}(E) \oplus H^2_{(-\infty,\alpha^-)}(E) = H^2_{(0,\alpha^-)}(E). \tag{47_-}$$

Аналогичным образом, получаем

$$\widetilde{L^2_{\mathbb{R}}}(E,\alpha^+) = H^2_{(-\infty,0)}(E) \oplus H^2_{(-\alpha^+,\infty)}(E) = H^2_{(-\alpha^+,0)}(E). \qquad (47_+)$$

Чтобы получить функциональную модель полугруппы Z_t, необходимо осуществить преобразование Фурье (46) над трансляционной моделью, полученной в п. IV. Для этого вначале следует выяснить, во что переходит после преобразования Фурье S-оператор. Прежде всего, найдем явный вид оператора рассеяния $S = W_+^* W_-$ (35) в $L^2_{\mathbb{R}}(E,\alpha^-)$. Из определения волновых операторов $W_\pm$ (25) следует, что

$$S = s - \lim_{t\to\infty} V_{-t} P_{D_+} U_{2t} P_{D_-} V_{-t}. \qquad (48)$$

Пусть $g(\xi) \in L^2_{\mathbb{R}}(E,\alpha^-)$, тогда

$$\begin{aligned} V_{-t} P_{D_+} U_{2t} P_{D_-} V_{-t} g(\xi) &= V_{-t} P_{D_+} U_{2t}(0,0,P_{\mathbb{R}_+} g(\xi - t)) = \\ &= V_{-t} P_{D_+}(v_t(\xi), h_t, P_{\mathbb{R}_+} g(\xi + t)) = v_t(\xi - t), \end{aligned}$$

где $v_t(\xi) = P_{(-2t,0)}\{g(\xi+t) - i\varphi y_t(\xi)\}$; $y_t(\xi)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{d\xi} y_t(\xi) + A y_t(\xi) = \varphi^* J g(\xi + t); \\ y_t(-2t) = 0; \end{cases} \quad \xi \in (-2t, 0);$$

а $P_{(-2t,0)}$ — оператор умножения на характеристическую функцию интервала $(-2t,0)$. Очевидно, что

$$y_t(\xi) = -i \int\limits_{-2t}^{\xi} e^{iA(\xi-\eta)} \varphi^* J g(\eta + t) d\eta,$$

поэтому

$$v_t(\xi - t) = P_{(-t,t)} \left\{ g(\xi) - \int\limits_{-t}^{\xi} \varphi e^{iA(\xi - x)} \varphi^* J g(x) dx \right\}.$$

Таким образом, после предельного перехода $t \to \infty$ (48) окончательно получим

$$Sg(\xi) = g(\xi) - \int\limits_{-\infty}^{\xi} \varphi e^{iA(\xi - x)} \varphi^* J g(x) dx. \qquad (49)$$

Данная формула показывает, что S является интегральным оператором с ядром, зависящим от разности, что полностью согласуется с трансляционной инвариантностью $V_t S = S V_t$ (36). Вычислим теперь преобразование Фурье (46) от Sg —

$$\widetilde{Sg} = \tilde{g}(\lambda) - \varphi \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\xi} e^{iA(\xi - x)} \varphi^* J g(x) dx =$$

$$= \tilde{g}(\lambda) - \varphi \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} d\xi \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-iAy} \varphi^* J g(y+\xi) dy = \tilde{g}(\lambda) - \varphi \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-iAy} e^{i\lambda y} dy \varphi^* J \tilde{g}(\lambda).$$

Осталось вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-iAy} e^{i\lambda y} dy.$$

Если $\lambda \in \mathbb{C}_-$ ($\operatorname{Im}\lambda < 0$), то очевидно, что

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-iAy} e^{i\lambda y} dy = i(A - \lambda I)^{-1}.$$

Используя лемму Фату [3], после предельного перехода при $\operatorname{Im}\lambda \to 0$ получим окончательно, что

$$\widetilde{Sg} = S_\Delta(\lambda)\tilde{g}(\lambda), \tag{50}$$

где $S_\Delta(\lambda) = I - i\varphi(A - \lambda I)^{-1}\varphi^* J$ — характеристическая функция [8] узла Δ.

Обратимся теперь к нахождению Фурье-образов блоков ядра W (43). Вычислим $W_{1,1} = W_-^* Q^- W_- - Q_E^-$, для этого, используя допредельное выражение $U_t P_{D_-} V_{-t}$ для W_-, получим, что

$$Q^- f_t(\xi) = \left(Q_E^- u_+(t,\xi), 0, Q_E^- u_-(t,\xi)\right),$$

где $f_t(\xi)$ задана формулой (27), $u_-(t,\xi) = P_{D-} g(\xi)$; $u_+(t,\xi) = P_{(-t,0)}\{g(\xi) - i\varphi y_t(\xi)\}$, а $y_t(\xi)$ — решение задачи Коши

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{dt} y_t(\xi) + A y_t(\xi) = \varphi^* J P_{(-t,0)} g(\xi); \\ y_t(-t) = 0; \end{cases} \quad \xi \in (-t, 0), \tag{51}$$

причем $g(\xi) \in L^2_{\mathbb{R}}(E, \alpha^-)$. Нетрудно видеть, что решение задачи Коши (51) имеет вид

$$y_t(\xi) = -i \int\limits_{-t}^{\xi} Z_{\xi-\theta} \varphi^* J g(\theta) d\theta.$$

Тогда

$$u_+(t,\xi) = P_{(-t,0)} \left\{ g(\xi) - i\varphi \left(i \int\limits_{-t}^{\xi} Z_{\xi-\theta}\varphi^* J g(\theta) d\theta \right) \right\},$$

и значит

$$\widetilde{Q_E^- u_+}(t,\xi) = Q_E^- \int\limits_{-t}^{0} u_+(t,\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi =$$

$$= Q_E^- \left[\int_{-t}^{0} e^{-i\lambda\xi} g(\xi) d\xi - \varphi \int_{-t}^{0} e^{-i\lambda\xi} \int_{-t}^{\xi} e^{i(\xi-\theta)A} \varphi^* J g(\theta) d\theta d\xi \right].$$

После предельного перехода при $t \to \infty$ получим, что

$$\widetilde{Q_E^- u_+} = Q_E^- \left[\tilde{g}_+(\lambda) - \varphi \int_{-\infty}^{0} e^{-i\lambda\xi} d\xi \int_{-\infty}^{0} e^{-iAy} \varphi^* J g(y+\xi) d\xi \right] =$$

$$= Q_E^- \left[\tilde{g}_+(\lambda) - \varphi \int_{-\infty}^{0} e^{-iAy} e^{i\lambda y} dy \varphi^* J \tilde{g}_+(\lambda) \right] = Q_E^- P_+ S_\Delta(\lambda) \tilde{g}_+(\lambda).$$

В дальнейшем, чтобы не загромождать индексацию, через P_+ и P_- будем обозначать ортопроекторы в пространствах $H^2_{(0,\alpha^-)}(E)$ и $H^2_{(-\alpha^+,0)}(E)$ на подпространства Харди функций, аналитически продолжаемых в верхнюю и нижнюю полуплоскость соответственно. Таким образом, получаем, что

$$\widetilde{W_{1,1} g(\xi)} = S^*_\Delta(\lambda) Q_E^- P_+ S_\Delta(\lambda) \tilde{g}_+(\lambda) \oplus Q_E^- \tilde{g}_-(\lambda) - Q_E^- \tilde{g}(\lambda) =$$

$$= \left\{ S^*_\Delta(\lambda) Q_E^- P_+ S_\Delta(\lambda) - Q_E^- \right\} \tilde{g}_+(\lambda),$$

и значит в результате преобразования Фурье (46) блок $W_{1,1}$ переходит в оператор умножения на оператор-функцию

$$\widetilde{W_{1,1} g(\xi)} = \left\{ S^*_\Delta(\lambda) Q_E^- P_+ S_\Delta(\lambda) - Q_E^- \right\} P_+ \tilde{g}(\lambda). \tag{52}$$

Аналогичные рассуждения для блока $W_{2,2} = W^*_+ Q_E^- W_+ - Q_E^-$ оператора W (43) показывают, что

$$\widetilde{W_{2,2} g(\xi)} = \left\{ J_E S_\Delta(\lambda) Q_E^- P_- S^*_\Delta(\lambda) J_E - Q_E^- \right\} P_- \tilde{g}(\lambda). \tag{53}$$

Вычислим, наконец, Фурье-образ для блока $W_{2,1} = W^*_+ Q_E^- W_- - Q_E^- S$. Действительно, так как

$$\widetilde{Q^- W_- g(\xi)} = Q_E^- \tilde{g}_-(\lambda) \oplus Q_E^- P_+ S_\Delta(\lambda) \tilde{g}_+(\lambda)$$

и, соответственно,

$$\widetilde{Q^- W_+ g(\xi)} = Q_E^- P_- J_E S^*_\Delta(\lambda) J_E \tilde{g}_-(\lambda) \oplus Q_E^- \tilde{g}_+(\lambda),$$

то мы будем иметь

$$\widetilde{W_{2,1} g(\xi)} = J_E S_\Delta(\lambda) J_E Q_E^- \tilde{g}_-(\lambda) \oplus Q_E^- P_+ S_\Delta(\lambda) \tilde{g}_+(\lambda) - Q_E^- S_\Delta(\lambda) \tilde{g}(\lambda) =$$

$$= \left\{ -J_E S_\Delta(\lambda) Q_E^- P_- + Q_E^- P_+ S_\Delta(\lambda) P_+ - Q_E^- S_\Delta(\lambda) \right\} \tilde{g}(\lambda).$$

А если учесть (36), то после несложных преобразований мы получим, что

$$\widetilde{W_{2,1}g(\xi)} = J_E \left\{Q_E^- P_- S_\Delta(\lambda) - S_\Delta(\lambda) P_- Q_E^-\right\} \tilde{g}(\lambda). \tag{54}$$

Суммируя полученные формулы (52) – (54), приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. *Преобразование Фурье (46) действие оператора W (43) переводит в оператор умножения на оператор-функцию $\widetilde{W}(\lambda)$:*

$$\widetilde{Wg(\xi)} = \widetilde{W}(\lambda)\tilde{g}(\lambda), \tag{55}$$

где $g(\xi) \in L^2_\alpha(W)$, $\tilde{g}(\lambda) \in H^2_{(0,\alpha^-)}(E) + H^2_{(-\alpha^+,0)}(E)$. Оператор-функция $\widetilde{W}(\lambda)$ при этом имеет вид

$$\widetilde{W}(\lambda) = \begin{bmatrix} I & S^*_\Delta(\lambda) \\ S_\Delta(\lambda) & I \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \widetilde{W}_{11} & \widetilde{W}_{12} \\ \widetilde{W}_{21} & \widetilde{W}_{22} \end{bmatrix}, \tag{56}$$

где

$$\widetilde{W}_{11} = \left\{S^*_\Delta(\lambda) Q_E^- P_+ S_\Delta(\lambda) - Q_E^-\right\} P_+;$$

$$\widetilde{W}_{12} = \left\{S^*_\Delta(\lambda) P_- Q_E^- - Q_E^- P_- S^*_\Delta(\lambda)\right\} J_E;$$

$$\widetilde{W}_{21} = J_E \left\{Q_E^- P_- S_\Delta(\lambda) - S_\Delta(\lambda) P_- Q_E^-\right\};$$

$$\widetilde{W}_{22} = J_E \left\{S_\Delta(\lambda) Q_E^- P_- S^*_\Delta(\lambda) - Q_E^-\right\} J_E P_-;$$

$S_\Delta(\lambda)$ — характеристическая функция узла Δ, P_+ и P_- — ортопроекторы на подпространства Харди, отвечающие верхней и нижней полуплоскости относительно соответствующей полосы, и, наконец, $Q_E^- = \dfrac{1}{2}(I - J_E)$ — ортопроектор.

Очевидно, что преобразование Фурье (46) отображает гильбертово пространство $L^2_\alpha(W)$ (41) в пространство

$$H^2_\alpha(W) = \left\{ f(\lambda) = \begin{pmatrix} f_-(\lambda) \\ f_+(\lambda) \end{pmatrix} : f_-(\lambda) \in H^2_{(0,\alpha^-)}(E), \right.$$
$$\left. f_+(\lambda) \in H^2_{(-\alpha^+,0)}(E); \int_0^{2\pi} (\widetilde{W}(\lambda) f(\lambda), f(\lambda)) d\lambda < \infty \right\}, \tag{57}$$

где $\widetilde{W}(\lambda)$ имеет вид (56). Далее, очевидно, что дилатация U_t в пространстве $H^2_\alpha(W)$ (57) будет иметь вид

$$\widetilde{U}_t f(\lambda) = e^{i\lambda t} f(\lambda). \tag{58}$$

Пространство $\widehat{H}_p$ (45) в этом случае будет иметь вид

$$\widetilde{H}_p = H^2_\alpha(W) \ominus \begin{bmatrix} H^2_-(E) \\ H^2_+(E) \end{bmatrix}, \tag{59}$$

Наконец, полугруппа Z_t и оператор A в модельном пространстве $\widetilde{H}_p$ (59) будут задаваться формулами

$$\widetilde{Z}_t f(\lambda) = P_{\widetilde{H}_p} e^{i\lambda t} f(\lambda); \quad \widetilde{A} f(\lambda) = P_{\widetilde{H}_p} \lambda f(\lambda). \tag{60}$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 7. *Минимальная J-унитарная дилатация U_t полугруппы $Z_t = \exp(itA)$, где A вполне-несамосопряжен, унитарно эквивалентна функциональной модели $\widetilde{U}_t$ (58) в пространстве $H^2_\alpha(W)$, а Z_t эквивалентна $\widetilde{Z}_t$ (60) в пространстве $\widetilde{H}_p$ (59) и, наконец, A эквивалентен $\widetilde{A}$ (60), соответственно, в $\widetilde{H}_p$ (59), где $S_\Delta(\lambda) = I - i\varphi(A - \lambda I)^{-1}\varphi^* J$ — характеристическая функция узла Δ.*

В случае сжатия Z_t ($Q_E^- = 0$) отсутствует второе слагаемое у $\widetilde{W}(\lambda)$ (56), что и приводит к хорошо известной функциональной модели Б. С. Павлова [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Золотарев В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. -Харьков: Изд. ХНУ, 2003. — 342 с.
2. Рисс Ф., Надь Б. С. Лекции по функциональному анализу. -М.: Мир, 1979. — 587 с.
3. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. -М: Мир, 1970. — 431 с.
4. Лившиц М. С. Операторы, колебания, волны. Открытые системы. -М.: Наука, 1966. — 298 с.
5. Лакс П. Д., Филлипс Р. С. Теория рассеяния. -М: Мир, 1971. — 312 с.
6. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. -М.: Наука, 1967. — 464 с.
7. Адамян В. М., Аров Д. З. Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов. // Кишинев: Математические исследования, — 1966. — Т. 1, вып. 2. — С. 3 – 64.
8. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. -Харьков: Изд. ХГУ, 1971. — 160 с.
9. Ахиезер Н. И. Лекции об интегральных преобразованиях. -Харьков: Изд. ХГУ, 1984. — 120 с.

10. Павлов Б. С. Теория дилатаций и спектральный анализ несамосопряженных дифференциальных операторов. // М.: Мат. программирование и смежные вопросы. Теория операторов в линейных пространствах. (Седьмая Зимняя школа) Дрогобыч, /1974/, — 1976. — С. 3–69.

11. De Branges L., Rovnyak J. Canonical models in quantum scattering theory. // New-York, Wiley: Perturb. Theory and Appl. in Quant. Mech., — 1966. — P. 295–392.

12. Павлов Б. С. Спектральный анализ диссипативного оператора Шредингера в терминах функциональной модели. // Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. фундам. направления, ВИНИТИ, — 1991. — Т. 65. — С. 95–163.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9:535.4 № 749, 2006, с.50–56

Интегральное уравнение задачи электростатики для сферического сегмента и диэлектрического закругления конуса

В.А. Резуненко

Харьковский Национальный Университет имени В. Н. Каразина, Украина

Методом регуляризации выделена и обращена главная часть оператора задачи электростатики для сферического сегмента, погружённого в диэлектрическое закругление конуса. Этот метод базируется на использовании техники контурного интегрирования и интегрального преобразования типа Абеля. В результате получено эффективно разрешимое интегральное уравнение Фредгольма II рода с компактным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(0,\gamma)$. Рассмотрены частные случаи постановки задачи.

2000 Mathematics Subject Classification 65N12, 35A25,78A45.

1. Введение. В литературе по математической физике, электродинамике, по теории дифракции известно немного работ, посвященных решению задач электростатики для сферического сегмента в присутствии бесконечного конуса [1] - [4] . Вместе с тем, актуальность таких задач следует, в частности, из того, что сферический сегмент является хорошей моделью многих устройств: антенн, резонаторов, узлов волноводов. Диэлектрическое закругление конуса может быть моделью кожуха электроприборов. Заземленный конус можно рассматривать как подстилающую поверхность с острым выступом. Многочисленные применения сферических и конических поверхностей стимулируют развитие методов решения прямых и обратных задач математической физики, электродинамики и теории дифракции [5] - [10] на рассматриваемых поверхностях.

При анализе задач электростатики выбирают модели со сравнительно небольшим числом параметров. При этом выбранные параметры должны описывать основные характеристики моделируемых объектов и характеристики материальных сред, окружающих объекты.

Целью данной работы является приминение метода регуляризации задачи электростатики для сферического сегмента, погруженного в диэлектрическое сферическое закругление конуса. В результате регуляризации задача отыскания распределения электростатического потенциала в трехмерном пространстве сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма II рода для вспомогательной функции. Оператор интегрального уравнения является компактным в пространстве $L_2(0,\gamma), 0 < \gamma < \pi$. В работе показана, в частности, эффективная разрешимость полученного интегрального уравнения, а также рассмотрены некоторые случаи постановки задачи.

В данной работе применен метод [1]-[5] и развито его обобщение на более сложную задачу электростатики с неоднородными диэлектрическими средами, окружающими сферический сегмент и конус.

2. Постановка задачи. Пусть центр сферического сегмента, сферического закругления конуса и вершина бесконечного конуса помещены в начало декартовой и сферической систем координат. Полагаем a_1 - радиус сферического сегмента, θ_0 - полярный угол, измеряющий сегмент (на сегменте $0 \le \theta < \theta_0$), a- радиус сферического закругления конуса ($a_1 < a$), γ - угол раскрыва конуса ($\theta_0 < \gamma$). Полагаем, что потенциал V сферического сегмента задан и $V \neq 0$, что потенциал конуса V_0 равен нулю (конус заземлён). Пусть диэлектрическая проницаемость среды (материала), из которой изготовлено сферическое закругления конуса есть $\varepsilon \neq 1$. Пусть вне закругления и вне конуса диэлектрическая проницаемость среды равна ε_0 и $\varepsilon_0 \neq 1$. Пусть сферический сегмент является идеально проводящим (его проводимость $\sigma = \infty$). Полагаем материальную среду вне сегмента непроводящей ($\sigma = 0$). Пусть в пространстве R^3 выделены три области: $0 \le r < a$, $a < r < a_1$, $r > a_1$; для всех трёх областей $\theta \in [0,\gamma]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Вторичные потенциалы в этих областях представим рядами Фурье:

$$u_1 = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\nu_n} P_{\nu_n}(\cos\theta), \quad 0 \le r < a_1, \tag{1}$$

$$u_2 = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{-\nu_n-1} P_{\nu_n}(\cos\theta), \quad a_1 < r < a, \tag{2}$$

$$u_3 = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\nu_n} P_{\nu_n}(\cos\theta), \quad a_1 < r < a, \tag{3}$$

$$u_4 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty} D_n r^{-\nu_n-1} P_{\nu_n}(\cos\theta), \quad r > a, \tag{4}$$

Полные потенциалы должны удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, граничным условиям, в частности,

$$P_{\nu_n}(\cos\theta) = 0, \quad \theta = \gamma, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad 0 \le r < \infty. \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{\partial[u_2 + u_3]}{\partial r}, \quad r = a_1, \quad \theta_0 < \theta \le \gamma. \tag{6}$$

$$u_2 + u_3 = u_4, \quad r = a, \quad 0 < \theta \le \gamma. \tag{7}$$

Полные потенциалы должны исчезать на бесконечности как $O(1/r)$, $r \to \infty$, и удовлетворять условию конечности интеграла энергии в любой ограниченной области пространства R^3. Требуется найти полные потенциалы вне конуса в трех рассматриваемых областях. В такой постановке задача электростатики имеет единственное решение [11].

3. Функциональные уравнения. Для решения задачи построим парные сумматорные функциональные уравнения относительно неизвестных коэффициентов $B_n, n \geqslant 1$ потенциала u_2 (2). Для этого сначала используем граничные условия(5)-(7). В результате получим вспомогательные уравнения

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} B_n a_1^{-\nu_n-1} P_{\nu_n}(\cos\theta) = \nu - \frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} C_n a^{\nu_n} P_{\nu_n}(\cos\theta), \quad 0 \leqslant \theta < \theta_0. \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-\nu_n - 1)B_n a_1^{-\nu_n-2} - \nu_n a_1^{\nu_n-1}(A_n - C_n)\right] P_{\nu_n}(\cos\theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \gamma. \tag{9}$$

Исключим из уравнений (8),(9) коэффициенты A_n, C_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (1)-(4). Для этого из граничных условий получаем систему 3-х уравнений с тремя неизвестными A_n, C_n, D_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$.Систему будем решать по правилу Крамера

$$A_n = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_n = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad D_n = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{10}$$

для которого (10) определители Δ, Δ_i, $i = 1, 2, 3$ вычислим ниже, в (11)-(14):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^{\nu_n} & -a_1^{\nu_n} & 0 \\ 0 & \nu_n a^{\nu_n-1} & (\nu_n+1)a^{-\nu_n-2} \\ 0 & -a^{\nu_n}\varepsilon^{-1} & a^{-\nu_n-1}\varepsilon_0^{-1} \end{vmatrix} = a_1^{\nu_n} a^{-2}[\varepsilon_0^{-1}\nu_n + \varepsilon^{-1}(\nu_n+1)]. \tag{11}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} B_n a_1^{-\nu_n-1} & -a_1^{\nu_n} & 0 \\ B_n(\nu_n+1)a^{-\nu_n-2} & \nu_n a^{\nu_n-1} & (\nu_n+1)a^{-\nu_n-2} \\ B_n a^{-\nu_n-1} & -a^{\nu_n} & \varepsilon a^{-\nu_n-1} \end{vmatrix}$$

$$= B_n\left\{a_1^{-\nu_n-1}a^{-2}[\varepsilon\nu_n + (\nu_n+1)] + a_1^{\nu_n}a^{-2\nu_n-3}(\nu_n+1)(\varepsilon-1)\right\}. \tag{12}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1^{\nu_n} & B_n a_1^{-\nu_n-1} & 0 \\ 0 & B_n(\nu_n+1)a^{-\nu_n-2} & (\nu_n+1)a^{-\nu_n-2} \\ 0 & B_n a^{-\nu_n-1} & \varepsilon a^{-\nu_n-1} \end{vmatrix}$$

$$= B_n a_1^{\nu_n}(\nu_n+1)a^{-2\nu_n-3}[\varepsilon-1]. \tag{13}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1^{\nu_n} & -a_1^{\nu_n} & B_n a_1^{-\nu_n-1} \\ 0 & \nu_n a^{\nu_n-1} & B_n(\nu_n+1)a^{-\nu_n-2} \\ 0 & -a^{\nu_n} & B_n a^{-\nu_n-1} \end{vmatrix} = B_n(2\nu_n+1)a_1^{\nu_n}a^{-2}. \tag{14}$$

Подставим коэффициенты A_n, C_n (10)-(14) в уравнения (8),(9). В полученных уравнениях введем обозначения

$$X_n = \frac{B_n}{\varepsilon a_1^{\nu_n+1}}, \quad \varepsilon_n^{(1)} = \frac{(\nu_n+1)(\varepsilon_0-\varepsilon)}{\varepsilon\nu_n+\varepsilon_0(\nu_n+1)}\left(\frac{a_1}{a}\right)^{\nu_n+1}. \tag{15}$$

В итоге устанавливаем требуемые парные сумматорные функциональные уравнения относительно неизвестных коэффициентов X_n (15):

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n\left[1+\varepsilon_n^{(1)}\right]P_{\nu_n}(\cos\theta) = V, \quad 0 \le \theta < \theta_0. \tag{16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2\nu_n+1)X_n P_{\nu_n}(\cos\theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \le \gamma. \tag{17}$$

4. Интегральное уравнение II рода. Система функциональных уравнений (16),(17) является системой I рода по функциям Лежандра с дробным индексом ν_n, $n \geqslant 1$. Прямые численные методы решения таких систем неэффективны. До сих пор общего метода решения таких уравнений нет. Сведем задачу отыскания коэффициентов X_n, $n \geqslant 1$ (15) к решению интегрального уравнения II рода для вспомогательной функции. Для этого в (18),(19) сначала выполним подстановку

$$X_n = \beta_n \int_0^{\theta_0} \psi(t)\cos\left(\nu_n+\frac{1}{2}\right)t\,dt \tag{18}$$

$$\beta_n = -2\left\{\sin^2\gamma\left(\frac{\partial}{\partial\theta}P_{\nu_n}(\cos\theta)\right)|_{\theta=\gamma}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\nu}P_\nu(\cos\gamma)\right)|_{\nu=\nu_n}\right\}^{-1}, \quad n=1,2\ldots \tag{19}$$

Полагаем, что $\psi(t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией на $[0,\gamma]$. В результате подстановки (18),(19) в уравнение (17) убеждаемся, что (17) выполяется тождественно. Чтобы убедится в этом, сначала следует в (17) поменять порядки интегрирования и суммирования, так как последовательность X_n, $n \geqslant 1$ принадлежит l^2. После этого выполним интегрирование по частям и воспользуемся суммами разрывных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{int}P_n(\cos\gamma) = e^{-i\frac{t}{2}}\sqrt{2(\cos t-\cos\theta)}, \quad 0 < t, \theta < \pi. \tag{20}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\cos\left(\nu_n+\frac{1}{2}\right)t\,P_{\nu_n}(\cos\theta) = I(\theta,t)+(2(\cos t-\cos\theta))^{-\frac{1}{2}}, 0<\theta<t<\gamma, \tag{21}$$

где

$$I(\theta,t)=-\int_0^\infty \frac{P_{-\frac{1}{2}+ir}(-\cos\gamma)}{P_{-\frac{1}{2}+ir}(\cos\gamma)}\cdot P_{-\frac{1}{2}+ir}(\cos\theta)\cdot\frac{\cosh(tr)}{\cosh(\pi r)}\,dr.$$

Правые части равенств (20),(21) являются производящими функциями для рядов в левых частях. Для получения, в частности, равенства (23) необходимо рассмотреть функцию комплексного переменного z

$$N(z;t,\theta,\gamma)=e^{i(z+\frac{1}{2})t}P_z(\cos\theta)\left[\frac{2Q_z(\cos\theta)}{P_z(\cos\gamma)}-\pi\coth(z\pi)\right] \tag{22}$$

и параметров t,θ из $(0,\pi)$ [1-4], где $P_z(\cos\theta), Q_z(\cos\theta)$ функции Лежандра соответственно первого и второго рода комплексного индекса z. Затем необходимо выполнить контурное интегрирование функции $N(z;t,\theta,\gamma)$ (22) и воспользоваться теоремой о вычетах в полюсах $z=\nu_n$ и $z=n, n=1,2,3...$, за счет обращения в нуль соответственно функций $P_z(\cos\gamma)$ и $\coth(z\pi)$, а также воспользоваться леммой Жордана [12] .

Преобразование функционального уравнения (16) начнем с подстановки вместо функций Лежандра $P_{\nu_n}(cos\theta)$ их интегрального представления Мелера-Дирихле

$$P_{\nu_n}(\cos\theta)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta\frac{\cos(\nu_n+\frac{1}{2})y}{\sqrt{\cos y-\cos\theta}}\,dy. \tag{23}$$

Воспользовавших равномерной сходимостью ряда в (16) поменяем порядки интегрирования и суммирования. Этим уравнение (16) преобразовывется в интегральное уравнение типа Абеля со слабой особеностью в ядре. Решив это уравнение, в результате получаем искомое интегральное уравнение II рода относительно функции $\psi(y)$ (18):

$$\psi(y)-\int_0^{\theta_0}K(y,t)\,\psi(t)\,dt=\frac{2V}{\pi}\cos\frac{y}{2},\qquad 0\le y<\theta_0, \tag{24}$$

$$K(y,t)=K_1(y,t)-K_2(y,t), \tag{25}$$

$$K_1(y,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^{(1)}\beta_n\cos\left(\nu_n+\frac{1}{2}\right)y\cdot\cos\left(\nu_n+\frac{1}{2}\right)t, \tag{26}$$

$$K_2(y,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{P_{-\frac{1}{2}+ir}(-\cos\gamma)\cdot\cosh(yr)\cdot\cosh(tr)}{P_{-\frac{1}{2}+ir}(\cos\gamma)\cdot\cosh(\pi r)}\,dr. \tag{27}$$

Здесь введены $\varepsilon_n^{(1)}$ в (15), а β_n в (19).

5. Выводы. Интегральное уравнение (24) имеет единственное решение в $L_2(0,\gamma)$. Действительно, ядро (25) уравнения (24) является непрерывной функцией аргументов y,t, так как ряд (26) и интеграл (27) сходятся равномерно по y,t на сегмента $[0,\gamma]$; правая часть уравнения также непрерывна на

$[0, \gamma]$. Для уравнения (24) справедлива альтернатива Фредгольма. Однородное уравнение, соответствуюшее (24), имеет единственное тривиальное решение.

Уравнение (24) разрешимо как аналитически, так и численно[13-15]. Действительно, правая часть (24) и функция $K_1(y,t)$ (26) являются бесконечно дифференцируемыми функциями по y,t из $[0, \gamma]$, а подынтегральная фнкция в $K_2(y,t)$ (27) при фиксированных y, t из $[0, \gamma]$ убывает к нулю быстрее экспоненты при $\tau \to \infty$.

6. Частные случаи постановки задачи. Обобщения.

A). Пусть параметр среды ε для диэлектрического закругления конуса и параметр ε_0 среды для пространства вне этого закругления равны друг другу: $\varepsilon = \varepsilon_0$, В этом спучае интегральное уравнение (24) существенно упрощается, так как в ядре $K(y,t)$ (25) функция $K_1(y,t)$ (26) обращается в нуль в связи с обращением в нуль величин $\varepsilon_n^{(1)}$ (15).

B). Рассмотрим такой случай постановки задачи, для которого диэлектрическое закругление конуса выбрано двухслойным, ограниченным по радиусу, а сферический сегмент (с заданным потенциалом V, неравным нулю) размещен на границе слоёв. Такая задача требует модификации применяемого метода, так как в новой системе функциональных уравнений вида (16),(17) новый параметр "малости"(аналог величин $\varepsilon_n^{(1)}$ (15)) будет убывать недостаточно быстро, как $O(1/n)$, при $n \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Конторович М.И., Лебедев Н.Н. Об одном методе решения некоторых задач дифракции и родственных ей проблем. // Журн. Тех. Физ. - 1938. - Т.8, **10-11**. - С. 1193-1206.

2. Уфлянд Я.С. О решении одного класса задач электростатики методом парных рядов.//Письма в Журн. Тех. Физ . - 1976. - Т.2, **17**. - С. 794-798.

3. Варяница Л.А., Резуненко В.А. Регуляризация задачи электростатики на бесконечном конусе и двух сферических сегментах.// Вісник Харківського національного університету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". - 2002. - Т. 542. - С. 59-68.

4. Резуненко В.А., Степуренко О.В. Решение одной осесимметричной задачи электростатики для сферы с круговым отверстием и конуса с шаровым закруглением. // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління". - 2003. - Т. 605. - С. 118-125.

5. Радин А.М., Резуненко В.А., Шестопалов В.П. Излучение волн сферы с отверстием. // ЖВМ и МФ. – 1977. – Т 17,**2**. – С. 394-406.

6. Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопалов В.П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. // Журн. техн. физ . - 1962. - Т. 32,4. - С. 381-394.

7. Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. - Харьков: Изд. ХГУ, 1973. - 288 с.

8. Шестопалов В.П., Тучкин Ю.А., Поединчук А.Е., Сиренко Ю.К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. - Харьков: Основа, 1997. - 284 с.

9. Свищев Ю.В., Тучкин Ю.А. Векторная задача дифракции электромагнитных волн на двух сферических сегментах. ДАН УССР, сер. А. - 1987. - Т. 12. - С. 56-60.

10. Куриляк Д.Б., Назарчук З.Т. Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на конічних і клиноподібних поверхнях. –Київ: Наукова Думка, 2006. –275 с.

11. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. - М.: Мир, 1987. - 312 с.

12. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. -М.: Наука, 1973. - 736 с.

13. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. -Киев: Наукова Думка, 1977. - 362 с.

14. Садовничий В.А. Теория операторов.- М.: Высшая школа, 1999. - 368 с.

15. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. - Киев: Наукова Думка, 1986. - 543 с.