УДК 517.98

М. М. ПОПОВ

ИЗОМОРФНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ $L_p(\mu)$ ПРИ $0<p<1$

Исследуются некоторые свойства подпространств и фактор-пространств $L_p(\mu)$ при $0<p<\infty$ для конечных положительных безатомных мер μ. В частности, доказано, что если X — собственное (замкнутое) подпространство $L_p = L_p\{-1, 1\}^M$, $0<p<1$, M — бесконечное множество, то $\dim L_p/X$ (наименьшая мощность подмножеств с плотной линейной оболочкой) факторпространства L_p/X равна мощности $\overline{\overline{M}}$ множества M. На основе этого доказано, что для безатомных измеримых пространств $<\Omega_i, \sigma_i, \mu_i>$, $i=1, 2$ и $0<p<1$ пространства $L_p(\mu_1)$ и $L_p(\mu_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда разложения Магарам исходных измеримых пространств совпадают.

Рассуждения проводятся для действительного и для комплексного поля скаляров.

Каноническим представителем измеримого пространства с $\dim L_p(\mu) = \tau$ при $0<p<\infty$ является тройка

$$D^M = <\{-1, 1\}^M, \sigma_M, \mu_M>,$$

где M — произвольное множество мощности τ; σ_M определяется как борелевская σ-алгебра подмножеств декартовой степени $\{-1, 1\}^M$, наделенной тихоновской топологией степени двухэлементного дискретного топологического пространства $\{-1, 1\}$; μ_M — соответствующая степень меры μ_0 на подмножествах $\{-1, 1\}$:

$$\mu_0\{-1\} = \mu_0\{1\} = 1/2.$$

По-другому, μ_M — есть мера Хаара на компактной абелевой группе $\{-1, 1\}^M$ с поточечным произведением.

Приведем одно следствие теоремы Д. Магарам [1, 2, с. 127].

Теорема 0. *Всякое пространство $L_p(\mu)$ при $0<p\leqslant\infty$ изометрично конечной или счетной p-сумме*

$$\Big(\sum_n L_p\{-1, 1\}^{M_n}\Big)_p,$$

где $\{M_n\}_n$ — некоторые бесконечные множества, причем набор мощностей $\{\overline{\overline{M}}_n\}_n$ определяется исходным измеримым пространством (не зависимо от p) и называется разложением Магарам измеримого пространства (очевидно, можно считать, что среди $\{M_n\}_n$ нет двух равномощных множеств).

Известна следующая изоморфная классификация пространств $L_p(\mu)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Теорема (*И. Линденштраус* [2, *с. 130*]). *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $p \neq 2$; N_1 *и* N_2 — *конечные или счетные подмножества натурального ряда;* $\{M_n^{(i)}\}_{n \in N_i}$, $i = 1, 2$ — *бесконечные множества. Пространства*

$$\left(\sum_{n \in N_i} L_p \{-1, 1\}^{M_n^{(i)}}\right)_p, \quad i = 1, 2$$

изоморфны тогда и только тогда, когда

$$\sup \{\overline{\overline{M}}_n^{(1)} : n \in N_1\} = \sup \{\overline{\overline{M}}_n^{(2)} : n \in N_2\},$$

и либо оба множества $\{\overline{\overline{M}}_n^{(i)} : n \in N_i\}$, $i = 1, 2$ *содержат максимальный элемент, либо оба не содержат.*

Таким образом, если τ — несчетноконфинальная мощность (т. е. не равна счетной сумме меньших мощностей) и

$$\dim L_p(\mu_i) = \tau, \quad i = 1, 2,$$

то $L_p(\mu_1)$ изоморфно $L_p(\mu_2)$ при $1 \leqslant p < \infty$. Если же $\tau = \sum_n \tau_n$, где $\tau_n < \tau$, то при $p \neq 2$ существует ровно два неизоморфных $L_p(\mu_i)$, $i = 1, 2$ с $\dim L_p(\mu_i) = \tau$, $i = 1, 2$, именно

$$L_p \{-1, 1\}^M \text{ и } \left(\sum_{n=1}^{\infty} L_p \{-1,1\}^{M_n}\right)_p,$$

где $\overline{\overline{M}} = \tau$ и $\overline{\overline{M}}_n = \tau_n$.

Теорема (*Х. П. Розенталь* [3]). $L_\infty(\mu_1)$ *изоморфно* $L_\infty(\mu_2)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\dim L_1(\mu_1) = \dim L_1(\mu_2).$$

Основным приемом нашего подхода является рассмотрение следующего понятия.

Определение. *Пусть* $<\Omega, \sigma, \mu>$ — *измеримое пространство,* $0 < p < \infty$. *Подпространство* $X \subset L_p(\mu)$ *назовем богатым, если для любого* $A \in \sigma$ и *любого* $\varepsilon > 0$ *существуют*

$$x \in X \text{ и } y \in L_p(\mu)$$

такие, что $y^2 = \chi_A$ (χ_A — *характеристическая функция множества* A), $\| x - y \|_p < \varepsilon$ *и*

$$\mu \{t : y(t) = -1\} = \mu \{t : y(t) = 1\}.$$

При $0 < p < 1$ обозначаем

$$\| x \|_p = \int_\Omega | x(t) |^p \, d\mu(t),$$

так что $\| x + y \|_p \leqslant \| x \|_p + \| y \|_p$ и при $0 < p < 1$.

Для удобства всюду в дальнейшем будем считать $L_p\{-1, 1\}^{M_n}$ подпространством $\left(\sum_n L_p\{-1, 1\}^{M_n}\right)_p$.

Следующее предложение хорошо известно; его можно вывести из теоремы Магарам, однако мы приведем элементарное доказательство.

Лемма 1. *Пусть* $A\subset\{-1, 1\}^M$ — *измеримое подмножество,* $\mu(A)>0$. *Существует система функций* $\{r_m\}_{m\in M}\subset L_\infty\{-1, 1\}^M$ *со свойствами:*

(I) $r_m^2=\chi_A$;

(II) $\int r_m d\mu=0$;

(III) $\mu\left\{t: \frac{r_{m_1}-r_{m_2}}{2}=1\right\}=\mu\left\{t: \frac{r_{m_1}-r_{m_2}}{2}=-1\right\}=\frac{\mu(A)}{4}$

и

$$\mu\left\{t: \frac{r_{m_1}-r_{m_2}}{2}=0\right\}=\frac{\mu(A)}{2}$$

для любых $m, m_1, m_2\in M$; $m_1\neq m_2$.

Доказательство. В случае, когда M счетно, лемму легко доказать с помощью последовательного деления множества A на подмножества равной меры и построении функций, аналогичных системе Радемахера. Говорят, что измеримая функция $x\in L_0\{-1, 1\}^M$ зависит от координаты $m_1\in M$, если сужения

$$x(\{t_m\}_{m\in m})\big|_{t_{m_1}=1}\neq x(\{t_m\}_{m\in M})\big|_{t_{m_1}=-1}$$

на множестве положительной меры как элементы $L_0\{-1, 1\}^{M\setminus\{m_1\}}$. Хорошо известно (и легко видеть), что измеримая функция зависит от не более чем счетного множества координат.

Пусть M несчетно и пусть M_0 — множество всех координат, от которых зависит χ_A. Тогда $M_1=M\setminus M_0$ равномощно M. Пусть $f: M\to M_1$ — биекция. Для каждого $m_1\in M_1$ обозначим через $r_{m_1}^{(1)}$ функцию Радемахера на $\{-1, 1\}^M$:

$$r_{m_1}^{(1)}(\{t_m\}_{m\in M})=t_{m_1}.$$

Наконец, положим $r_m=\chi_A r_{m_1}^{(1)}$, где $m_1=f(m)$. Проверка свойств (I) — (III) проста и использует тот факт, что χ_A не зависит от m_1 при $m_1\in M_1$.

Теорема 2. *Пусть* X — *подпространство*

$$L_p=\left(\sum_{n\in N_0} L_p\{-1, 1\}^{M_n}\right)_p,\ 0<p<\infty,$$

N_0 — *конечное или бесконечное подмножество натурального ряда* N; M_n *бесконечны. Пусть* $n\in N_0$ *таково, что* $\operatorname{codim} X<\overline{\overline{M}}_n$ *(через* $\operatorname{codim} X$ *будем обозначать* $\dim L_p/X$*). Тогда для каждого измеримого подмножества* $A\subset\{-1, 1\}^{M_n}$ и $\varepsilon>0$ *существуют* $x\in X$ и $y\in L_p\{-1, 1\}^{M_n}$ *такие, что* $y^2=\chi_A$, $\|x-y\|<\varepsilon$ *и*

$$\mu\{t\in\{-1, 1\}^{M_n}: y(t)=1\}=\mu\{t\in\{-1, 1\}^{M_n}: y(t)=-1\}.$$

Доказательство. В случае $\mu(A)=0$ полагаем $x=y=0$. Пусть $\mu(A)>0$ Согласно лемме 1, существует система функций $\{r_m^{(1)}\}_{m\in M_n}$, удовлетворяющая (I) — (III). Далее, существуют такие $m_1^{(1)}$, $m_2^{(1)}\in M_n$ и $x_1\in X$, что для $y=\left(r_{m_1^{(1)}}^{(1)}-r_{m_2^{(1)}}^{(1)}\right)/2$ верно $\|x_1-y_1\|<\varepsilon/2$, поскольку в противном случае система $\{Tr_m^{(1)}\}_{m\in M_n}$ (T — факторотображение L_p на L_p/X) образовывала бы в L_p/X изолированное множество точек, удаленных друг от друга на расстояние, не меньшее $\varepsilon/2$, что противоречит предположению $\operatorname{codim} X<\overline{\overline{M}}_n$ (в случае конечного $\operatorname{codim} X$ последнее противоречит компактности единичного шара в L_p/X). Обозначим $B_1=\operatorname{supp} y_1$ и $A_1=A\setminus B_1$. Тогда

$$y_1^2=\chi_{B_1} \text{ и } \mu(A_1)=\mu(A)/2.$$

Аналогично поступаем с множеством A_1, выбрав

$$x_2\in X \text{ и } y_2\in L_p\{-1,\ 1\}^{M_n}$$

так, чтобы $\|x_2-y_2\|<\varepsilon/4$ и для $B_2=\operatorname{supp} y_2$ было выполнено $y_2^2=\chi_{B_2}$ и

$$\mu(B_2)=\mu(A_1\setminus B_2)=\mu(B_1)/2=\mu(A)/4.$$

Продолжая процесс построения x_n и y_n очевидным образом, получим

$$y^2=\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n\right)^2=\chi_A \text{ и } \left\|\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)\right\|<\varepsilon.$$

Условие

$$\mu\{t:y(t)=1\}=\mu\{t:y(t)=-1\}$$

следует из построения.

Следствие 3. *Пусть X — подпространство*

$$L_p=\left(\sum_{n\in N_0} L_p\{-1,\ 1\}^{M_n}\right)_p,\quad 0<p<\infty,\ N_0\subset N \text{ и } M_n$$

бесконечны. Если $\operatorname{codim} X<\min\{\overline{\overline{M}}_n: n\in N_0\}$, *то X — богатое подпространство. В частности, подпространство $X\subset L_p\{-1,\ 1\}^M$ является богатым, если* $\operatorname{codim} X<\overline{\overline{M}}$.

Теорема 4. *Пусть $0<p<1$ и X — подпространство*

$$L_p=\left(\sum_{n\in N_0} L_p\{-1,\ 1\}^{M_n}\right)_p.$$

Если $n\in N_0$ таково, что для любого измеримого подмножества $A\subset\{-1,\ 1\}^{M_n}$ и любого $\varepsilon>0$ существуют $x\in X$ и $y\in L_p\{-1,\ 1\}^{M_n}$ такие, что $y^2=\chi_A$, $\|x-y\|<\varepsilon$ и

$$\mu\{t\in\{-1,\ 1\}^{M_n}: y(t)=1\}=\mu\{t\in\{-1,\ 1\}^{M_n}: y(t)=-1\},$$

то $L_p\{-1,\ 1\}^{M_n}\subset X$.

Доказательство. Докажем, что $\chi_A \in X$ для любого измеримого подмножества $A \subset \{-1, 1\}^{M_n}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $x_1 \in X$ и $y_1 \in L_p\{-1, 1\}^{M_n}$ так, чтобы $y_1^2 = \chi_A$, $\|x_1 - y_1\| < \varepsilon/4$ и

$$\mu\left(y_1^{-1}\{1\}\right) = \mu\{t \in \{-1, 1\}^{M_n} : y_1(t) = 1\} = \frac{1}{2}\mu(A)$$

и положим $A_1 = y_1^{-1}\{-1\}$. По индукции выбираем $y_{n+1} \in L_p\{-1, 1\}^{M_n}$ и $x_{n+1} \in X$ так, чтобы

$$y_{n+1}^2 = \chi_{A_n};\ \|x_{n+1} - y_{n+1}\| < 2^{-(n+2)-np}\cdot\varepsilon \text{ и } \mu\left(y_{n+1}^{-1}\{1\}\right) = \mu(A_n)/2$$

и положим $A_{n+1} = y_{n+1}^{-1}\{-1\}$. Индукцией по n легко доказать, что

$$\chi_A - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} y_k = 2^n\cdot\chi_{A_n} \text{ и } \mu(A_n) = 2^{-n}\cdot\mu(A)$$

для любого n. Поэтому

$$\left\|\chi_A - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\cdot x_k\right\| \leqslant \|2^n\cdot\chi_{A_n}\| + \left\|\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}(x_k - y_k)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{np}\mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2} = (2^{p-1})^n\cdot\mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

для достаточно большого n. В силу произвольности ε и замкнутости X, $\chi_A \in X$. ■

Следствие 5. *Пусть $0 < p < 1$ и X — подпространство*

$$L_p = \left(\sum_{n\in N_0} L_p\{-1, 1\}^{M_n}\right)_p.$$

Пусть $n \in N_0$ таково, что $\operatorname{codim} X < \overline{\overline{M}}$. *Тогда*

$$L_p\{-1, 1\}^{M_n} \subset X.$$

Для доказательства следует воспользоваться теоремами 2 и 4.

Следствие 6. *Пусть $0 < p < 1$. Если X — богатое подпространство $L_p(\mu)$, то $X = L_p(\mu)$.*

Следующее предложение усиливает основной результат [4].

Следствие 7. *Пусть $0 < p < 1$. Если X — собственное подпространство*

$$L_p = \left(\sum_{n\in N_0} L_p\{-1, 1\}^{M_n}\right)_p \ (\text{т. е. } X \neq L_p),$$

то $\operatorname{codim} X \geqslant \min\{\overline{\overline{M}}_n : n \in N_0\}$. *В частности, если X — собственное подпространство $L_p\{-1, 1\}^M$, то* $\operatorname{codim} X = \overline{\overline{M}}$.

Теорема 8. *Пусть X — собственное подпространство*

$$L_p = \left(\sum_{n\in N_0} L_p\{-1, 1\}^{M_n}\right)_p,\ 0 < p < 1.$$

Обозначим через Λ множество всех мощностей, являющихся не *более, чем счетными суммами мощностей вида* $\overline{\overline{M}}_n$, $n \in N_0$ *(в частности,* $\overline{\overline{M}}_n \in \Lambda$ *при* $n \in N_0$*). Тогда* $\operatorname{codim} X \in \Lambda$. *Обратно, если* $\lambda \in \Lambda$, *то существует подпространство* $X \subset L_p$ *такое, что* $\operatorname{codim} X = \lambda$.

Доказательство. Согласно следствию 5, если

$$\operatorname{codim} X < \overline{\overline{M}}_n, \text{ то } L_p\{-1, 1\}^{M_n} \subset X.$$

Положим

$$N_1 = \{n \in N_0 : \operatorname{codim} X < \overline{\overline{M}}_n\}.$$

Тогда

$$Y = \Bigl(\sum_{n \in N_1} L_p\{-1, 1\}^{M_n}\Bigr)_p \subset X.$$

Следовательно,

$$\operatorname{codim} X \leqslant \operatorname{codim} Y = \sum_{n \in N_0 \setminus N_1} \overline{\overline{M}}_n.$$

С другой стороны, $\overline{\overline{M}}_n \leqslant \operatorname{codim} X$ при $n \in N_0 \setminus N_1$, следовательно, $\sum_{n \in N_0 \setminus N_1} \overline{\overline{M}}_n \leqslant \operatorname{codim} X$. Итак,

$$\operatorname{codim} X = \sum_{n \in N_0 \setminus N_1} \overline{\overline{M}}_n \in \Lambda.$$

Пусть $\lambda \in \Lambda$, $\lambda = \sum_{n \in N_1} \overline{\overline{M}}_n$ для некоторого $N_1 \subset N_0$. Тогда

$$\operatorname{codim} \Bigl(\sum_{n \in N_0 \setminus N_1} L_p\{-1, 1\}^{M_n}\Bigr)_p = \lambda. \blacksquare$$

Теорема 9. *Пусть* $0 < p < 1$,

$L_p(\mu) = \Bigl(\sum_{n \in N_0} L_p\{-1, 1)^{M_n}\Bigr)_p$, $n_0 \in N_0$ и $N_1 = \{n \in N_0 : \overline{\overline{M}}_n \geqslant \overline{\overline{M}}_{n_0}\}$.

Если $U : L_p \to L_p$ — *изоморфизм, то подпространство*

$$X = \Bigl(\sum_{n \in N_1} L_p\{-1,1\}^{M_n}\Bigr)_p$$

неподвижно относительно U *(т. е.* $UX = X$*).*

Доказательство. Сначала докажем более слабое утверждение: именно, что неподвижно

$$X' = \Bigl(\sum_{n \in N_1'} L_p\{-1, 1\}^{M_n}\Bigr)_p,$$

где

$$N_1' = \{n \in N_0 : \overline{\overline{M}}_n > \overline{\overline{M}}_{n_0}\}$$

(это утверждение слабее, поскольку если N_1' непусто и $\overline{\overline{M}}_{n_1}$ непосредственно следует за $\overline{\overline{M}}_{n_0}$ в ряду $\{\overline{\overline{M}}_n : n \in N_0\}$, то

$$N_1' = \{n \in N_0 : \overline{\overline{M}}_n \geqslant \overline{\overline{M}}_{n_1}\}).$$

Действительно, поскольку

$$\operatorname{codim} UX' = \operatorname{codim} U^{-1}X' = \sum_{n \in N_0 \setminus N_1'} \overline{\overline{M}}_n \leqslant \overline{\overline{M}}_{n_0} < \overline{\overline{M}}_{n_1}$$

при $n_1 \in N_1'$, то, согласно следствию 5,

$$X' \subset UX' \text{ и } X' \subset U^{-1}X',$$

откуда $X' = UX'$.

Для доказательства теоремы заметим, что если N_1 не представимо в виде $\{n \in N_0 : \overline{\overline{M}}_n > \overline{\overline{M}}_{n_1}\}$, где $n_1 \in N_0$, то существуют $\{n_k\}_{k=2}^{\infty} \subset N_0$ такие, что $\overline{\overline{M}}_{n_k} < \overline{\overline{M}}_{n_{k+1}}$ для любого $k \geqslant 2$, причем $\sum_{k=2}^{\infty} \overline{\overline{M}}_{n_k} = \overline{\overline{M}}_{n_0}$. Положим

$$N_k = \{n \in N_0 : \overline{\overline{M}}_n > \overline{\overline{M}}_{n_k}\}; \quad X_k = \left(\sum_{n \in N_k} L_p \{-1,\ 1\}^{M_n}\right)_p$$

при $k \geqslant 2$. Тогда $N_1 = \bigcap_{k=2}^{\infty} N_k$, следовательно, $X = \bigcap_{k=2}^{\infty} X_k$. Однако, согласно доказанному выше, $UX_k = X_k$ для любого $k \geqslant 2$. Итак, $UX = X$. ■

Замечание. Если $\overline{\overline{M}}_{n_0}$ — не наибольшая из всех мощностей $\overline{\overline{M}}_n$, $n \in N_0$, то теорема 9 перестает быть верной при замене знака в неравенстве на противоположный:

$$N_1 = \{n \in N_0 : \overline{\overline{M}}_n \leqslant \overline{\overline{M}}_{n_0}\}.$$

Доказательство. Положим

$$N_1' = N_0 \setminus N_1 = \{n \in N_0 : \overline{\overline{M}}_n > \overline{\overline{M}}_{n_0}\}.$$

Пусть T — произвольный ненулевой линейный непрерывный оператор из

$$L_p(\mu_1) = \left(\sum_{n \in N_1} L_p\{-1,\ 1\}^{M_n}\right)_p \text{ в } L_p(\mu_2) = \left(\sum_{n \in N_1'} L_p\{-1,\ 1\}^{M_n}\right)_p$$

(таковой существует, так как $L_p\{-1,\ 1\}^{M_{n_0}}$ изоморфно подпространству $L_p(\mu_2)$ в силу того, что $n_0 \in N_1$; $\overline{\overline{M}}_n > \overline{\overline{M}}_{n_0}$ при $n \in N_1'$ и N_1' непусто, согласно условию). Положим

$$Y = \{x + Tx : x \in L_p(\mu_1)\}.$$

Тогда, как нетрудно видеть, $L_p(\mu) = Y \oplus L_p(\mu_2)$. Поскольку Y и $L_p(\mu_1)$ дополняют $L_p(\mu_2)$ до $L_p(\mu)$, то они изоморфны. Пусть

$U_1 : L_p(\mu_1) \to Y$ — изоморфизм, I — единичный оператор в $L_p(\mu_2)$. Тогда $U = U_1 \oplus I$ — изоморфизм $L_p(\mu)$ на себя, а поскольку T — ненулевой оператор, то $Y \neq L_p(\mu_1)$, следовательно, $L_p(\mu_1)$ не является неподвижным относительно U. ■

Теорема 10. *Пусть $0 < p < 1$ и существует ненулевой линейный непрерывный оператор T из $L_p\{-1, 1\}^M$ в*

$$L_p(\mu) = \left(\sum_{n \in N_0} L_p\{-1, 1\}^{M_n}\right)_p.$$

Тогда $\overline{\overline{M}} \leqslant \overline{\overline{M}}_n$ для некоторого $n \in N_0$.

Доказательство. Пусть, напротив, $\overline{\overline{M}}_n < \overline{\overline{M}}$ для каждого $n \in N_0$. Положим

$$Z = (L_p(\mu) \oplus L_p\{-1, 1\}^M)_p.$$

Нетрудно видеть, что $Z = L_p(\mu) \oplus Y$, где

$$Y = \{x + Tx : x \in L_p\{-1, 1\}^M\}.$$

Поскольку Y и $L_p\{-1, 1\}^M$ являются дополняющими подпространствами к $L_p(\mu)$ в Z, то существует изоморфизм U_1 из $L_p\{-1, 1\}^M$ на Y. Обозначим через I единичный оператор в $L_p(\mu)$ и $U = I \oplus U_1$. Итак, U — изоморфизм Z на себя. Поскольку T — ненулевой оператор, то $Y \neq L_p\{-1, 1\}^M$, следовательно, $L_p\{-1, 1\}^M$ не является неподвижным подпространством относительно U, что противоречит теореме 9. ■

Следствие 11. *Пусть $0 < p < 1$ и*

$$L_p(\mu_i) = \left(\sum_{n \in N_i} L_p\{-1, 1\}^{M_n^{(i)}}\right)_p, \quad i = 1, 2.$$

Существует ненулевой линейный непрерывный оператор из $L_p(\mu_1)$ в $L_p(\mu_2)$ тогда и только тогда, когда $\overline{\overline{M}}_n^{(1)} \leqslant \overline{\overline{M}}_m^{(2)}$ для некоторых $n \in N_1$ и $m \in N_2$.

Теорема 12. *Пусть $0 < p < 1$. Пространства*

$$L_p(\mu_i) = \left(\sum_{n \in N_i} L_p\{-1, 1\}^{M_n^{(i)}}\right)_p, \quad i = 1, 2$$

изоморфны тогда и только тогда, когда

$$\{\overline{\overline{M}}_n^{(1)} : n \in N_1\} = \{\overline{\overline{M}}_n^{(2)} : n \in N_2\}.$$

Доказательство. Пусть $U : L_p(\mu_1) \to L_p(\mu_2)$ — изоморфизм, $n_1 \in N_1$. Тогда $L_p(\mu_1) = X \oplus Y$, где

$$Y = L_p\{-1, 1\}^{M_{n_1}^{(1)}} \text{ и } X = \left(\sum_{n \in N_1 \setminus \{n_1\}} L_p\{-1, 1\}^{M_n^{(1)}}\right)_p.$$

Следовательно, $L_p(\mu_2) = UX \oplus UY$, причем $\operatorname{codim} UX = \overline{\overline{M}}_{n_1}^{(1)}$. Положив

$$N_2 = \{n \in N_2 : \overline{\overline{M}}_n^{(2)} > \overline{\overline{M}}_{n_1}^{(1)}\},$$

будем иметь, согласно следствию 5,

$$Z=\left(\sum_{n\in N_2}{}' L_p\{-1,\ 1\}^{M_n^{(2)}}\right)_p\subset UX.$$

Пусть $\delta>0$ таково, что если $x\in UX$, $y\in UY$ и $\|x\|=\|y\|=1$, то $\|x-y\|\geqslant\delta$. Фактор-отображение T из $L_p(\mu_2)$ на $L_p(\mu_2)/Z$ изоморфно вкладывает UY в $L_p(\mu_2)/Z$, поскольку $\|x-y\|\geqslant\delta$, как только $x\in Z$, $y\in UY$ и $\|x\|=\|y\|=1$, в силу включения $Z\subset UX$. Итак, Y изоморфно вкладывается в $L_p(\mu_2)/Z$, которое, в свою очередь, изоморфно $\left(\sum_{n\in N_2\setminus N_2'}{}' L_p\{-1,\ 1\}^{M_n^{(2)}}\right)_p$. Согласно теореме 10, существует $n\in N_2\setminus N_2'$ такое, что $\overline{\overline{M}}{}_n^{(2)}\geqslant\overline{\overline{M}}{}_{n_1}^{(1)}$. С другой стороны, $\overline{\overline{M}}{}_n^{(2)}\leqslant\overline{\overline{M}}{}_{n_1}^{(1)}$, согласно определению N_2. Итак,

$$\{\overline{\overline{M}}{}_n^{(1)} : n\in N_1\}\subset\{\overline{\overline{M}}{}_n^{(2)} : n\in N_2\}$$

в силу произвольности $n_1\in N_1$. Обратное включение доказывается аналогично. Доказательство изоморфности (даже изометричности) $L_p(\mu_1)$ и $L_p(\mu_2)$ в случае равенства соответствующих множеств мощностей не представляет труда.

Следствие 13. *Пусть $0<p<1$. Если пространства $L_p(\mu_1)$ и $L_p(\mu_2)$ изоморфны, то они изометричны.*

Список литературы: 1. *Maharam D.* On gomogeneous measure algebras. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1942, 28, p. 108—111. 2. *Lacey H. E.* The isometric theory of classical Banach spaces. — Berlin — Heidelberg — New York: Springer Verl., 1974.—270 p. 3. *Rosenthal H. P.* On injective Banach spaces and the spaces $L^\infty(\mu)$ for finite measures μ. — Acta Math., 1970, **124**, № 3—4, p. 205—248. 4. *Попов М. М.* О коразмерности пространств $L_p(\mu)$ при $p<1$. — Функцион. анализ и его прил., 1984, **18**, № 2, с. 94—95.

Поступила в редколлегию 08.07.85.