О ДОПОЛНИТЕЛЬНОМЪ ЧЛЕНѢ

ВЪ ФОРМУЛѢ П. Л. ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННАГО ВЫРАЖЕНІЯ ОДНОГО ОПРЕДѢЛЕННАГО ИНТЕГРАЛА ЧЕРЕЗЪ ДРУГІЕ, ВЗЯТЫЕ ВЪ ТѢХЪ ЖЕ ПРЕДѢЛАХЪ.

К. А. Поссе.

Въ «Сообщеніяхъ харьковскаго математическаго общества» за 1882 годъ П. Л. Чебышевъ даетъ разложеніе интеграла

$$\int_a^b uv\vartheta dx,$$

гдѣ u и v произвольныя, непрерывныя въ предѣлахъ a и b, функціи отъ x, ϑ — прерывная или непрерывная функція отъ x, сохраняющая знакъ $+$ въ тѣхъ же предѣлахъ, въ рядъ, общій членъ котораго есть

$$\frac{\int_a^b u\psi_m\vartheta dx . \int_a^b v\psi_m\vartheta dx}{\int_a^b \psi^2{}_m\vartheta dx}$$

гдѣ ψ_m есть знаменатель $(m+1)$-ой подходящей дроби въ разложеніи интеграла

$$\int_a^b \frac{\vartheta(z)\,dz}{x-z}$$

въ непрерывную дробь[1].

---

[1] Статья П. Л. Чебышева прислана обществу въ началѣ 1883 года и по причинѣ живаго интереса, уже возбужденнаго ея предметомъ въ литературѣ, была немедленно помѣщена въ печатавшейся тогда послѣдней тетради «Сообщеній харьк. м. о.» за 1882 г. *(Примѣч. ред.)*.

Останавливая этотъ рядъ на членѣ

$$\frac{\int_a^b u\psi_{n-1}\vartheta dx \int_a^b v\psi_{n-1}\vartheta dx}{\int_a^b \psi^2_{n-1}\vartheta dx}$$

и обозначая черезъ R_n дополнительный членъ, Чебышевъ даетъ, безъ доказательства, слѣдующія свойства его:

1. Числовая величина R_n не превосходитъ

$$\frac{\int_a^b \psi_n^2 \vartheta dx}{\left(\frac{d^n\psi_n}{dx^n}\right)^2} AB,$$

гдѣ A, B суть наибольшія числовыя величины производныхъ $\frac{d^nu}{dx^n}$, $\frac{d^nv}{dx^n}$ въ предѣлахъ интегрированія.

2. Если въ этихъ предѣлахъ производныя $\frac{d^nu}{dx^n}$ и $\frac{d^nv}{dx^n}$ не мѣняютъ своего знака, то R_n имѣетъ одинаковый знакъ съ произведеніемъ $\frac{d^nu}{dx^n} \cdot \frac{d^nv}{dx^n}$.

Для частнаго случая $n=1$ и $\vartheta=1$ выраженіе дополнительнаго члена дано и оба свойства его доказаны К. А. Андреевымъ[1]. Это выраженіе можетъ быть также легко получено изъ тождества А. Н. Коркина, публикованнаго имъ въ «Comptes rendus, T. XCVI, № 5.

Въ настоящей замѣткѣ я даю общее выраженіе дополнительнаго члена R_n и доказываю оба его свойства, приведенныя выше. Во всѣхъ послѣдующихъ формулахъ мы будемъ, для простоты, опускать обозначеніе предѣловъ интеграловъ, которые всѣ берутся отъ a до b; кромѣ того при обозначеніи различныхъ функцій отъ x будемъ писать fx, φx, ϑx и т. д., опуская скобки.

[1] Въ той-же тетради «Сообщеній харьк. мат. общ.».

Относительно функціи $\psi_m x$, изображающихъ знаменатели подходящихъ дробей въ разложеніи интеграла

$$\int \frac{\vartheta z\, dz}{x-z}$$

въ непрерывную дробь, припомнимъ, что

$\psi_0 x = 1$, а $\psi_m x$ — цѣлая функція m-ой степени, обладающая свойствомъ, выражаемымъ равенствомъ

$$\int \psi_m x\; \omega x\; \vartheta x\; dz = 0, \qquad (1)$$

гдѣ ωx есть произвольная цѣлая функція степени не выше $m-1$.

Введемъ теперь слѣдующія обозначенія:

$x_1, x_2, \ldots. x_n, x_{n+1}$ будутъ обозначать $n+1$ независимыхъ другъ отъ друга величинъ, лежащихъ въ предѣлахъ a и b;

$$\Delta_{n-1}(f) = \begin{vmatrix} \psi_{n-1}x_1, \psi_{n-1}x_2, \ldots. \psi_{n-1}x_{n+1} \\ \psi_{n-2}x_1, \psi_{n-2}x_2, \ldots. \psi_{n-2}x_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_1 x_1, \psi_1 x_2, \ldots. \psi_1 x_{n+1} \\ 1 \quad 1 \quad \ldots.. \quad 1 \\ fx_1, fx_2 \quad \ldots.. \quad fx_{n+1} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

$\Delta_{n-1}(\varphi)$ обозначаетъ опредѣлитель, получаемый изъ $\Delta_{n-1}(f)$ замѣною функціи f функціею φ;

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} \psi_{n-1}x_1, \psi_{n-1}x_2, \ldots. \psi_{n-1}x_n \\ \psi_{n-2}x_1, \psi_{n-2}x_2, \ldots. \psi_{n-2}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_1 x_1 \quad \psi_1 x_2, \ldots. \psi_1 x_n \\ 1, 1 \ldots, \ldots.. 1 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

$$\prod_1^n \vartheta x_i\, dx_i = \vartheta x_1\, \vartheta x_2 \ldots. \vartheta x_n\, dx_1\, dx_2 \ldots. dx_n$$

$$J_{n-1}(f,\varphi) = \int^{(n+1)} \Delta_{n-1}(f)\,\Delta_{n-1}(\varphi) \prod_1^{n+1} \vartheta x_i\, dx_i \qquad (5)$$

гдѣ $\int^{(n+1)}$ обозначаетъ результатъ $(n+1)$-кратнаго интегрированія по всѣмъ перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ между предѣлами a и b;

$$J_{n-1} = \int^{(n)} \Delta^2_{n-1} \prod_1^n \vartheta x_i \, dx_i. \tag{6}$$

Мы будемъ искать формулу приведенія для интеграла $J_{n-1}(f,\varphi)$, т. е. зависимость между $J_{n-1}(f,\varphi)$ и $J_{n-2}(f,\varphi)$; эта формула и приведетъ насъ къ формулѣ Чебышева съ дополнительнымъ членомъ.

Разлагая опредѣлители $\Delta_{n-1}(f)$ и $\Delta_{n-1}(\varphi)$ по элементамъ первой строки, находимъ

$$\Delta_{n-1}(f) = \psi_{n-1}x_1 . A_1 + \psi_{n-1}x_2 . A_2 + \ldots + \psi_{n-1}x_{n+1} . A_{n+1}$$
$$\Delta_{n-1}(\varphi) = \psi_{n-1}x_1 . B_1 + \psi_{n-1}x_2 . B_2 + \ldots + \psi_{n-1}x_{n+1} . B_{n+1},$$

гдѣ A_i, B_i суть опредѣлители миноры, независящіе отъ элемента x_i.

Отсюда находимъ

$$\Delta_{n-1}(f) \cdot \Delta_{n-1}(\varphi) = \sum \psi^2_{n-1} x_i . A_i B_i +$$
$$+ \sum \psi_{n-1} x_i \cdot \psi_{n-1} x_k \cdot A_i B_k, \tag{7}$$

гдѣ первая сумма распространена на всѣ значенія

$$i = 1,\ 2\ \ 3, \ldots .(n+1),$$

а вторая на всѣ комбинаціи значеній

$$i = 1,\ 2,\ 3, \ldots .(n+1)$$
$$k = 1,\ 2,\ 3, \ldots .(n+1),$$

за исключеніемъ комбинацій, въ которыхъ $i = k$, число членовъ первой суммы равно $n+1$, и второй $n(n+1)$; всѣ члены въ каждой изъ суммъ получаются изъ одного перестановкой буквъ: $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$.

Умножая обѣ части равенства (7) на

$$\prod_1^{n+1} \delta x_i \, dx_i$$

и интегрируя $(n+1)$ разъ, находимъ, на основаніи вышесказаннаго,

$$J_{n-1}(f,\varphi) = (n+1) \int^{(n+1)} \psi^2_{n-1} x_1 A_1 B_1 \prod_1^{n+1} \vartheta x_i dx_i +$$

$$+ n(n+1) \int^{(n+1)} \psi_{n-1} x_1 \psi_{n-1} x_2 A_1 B \prod_1^{n+1} \vartheta x_i dx_i. \qquad (8)$$

$$\text{гдѣ } A_1 = \begin{vmatrix} \psi_{n-2} x_2, & \psi_{n-2} x_3, & \ldots & \psi_{n-2} x_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_1 x_2, & \psi_1 x_3, & \ldots & \psi_1 x_{n+1} \\ 1, & 1, & \ldots & 1 \\ f x_2, & f x_3, & \ldots & f x_{n+1} \end{vmatrix}$$

B_1 получается изъ A_1 замѣною f на φ,

$$B_2 = - \begin{vmatrix} \psi_{n-2} x_1, & \psi_{n-2} x_3, & \ldots & \psi_{n-2} x_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_1 x_1, & \psi_1 x_3, & \ldots & \psi_1 x_{n+1} \\ 1, & 1, & \ldots & 1 \\ \varphi x_1, & \varphi x_3, & \ldots & \varphi x_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Первый членъ второй части формулы (8), очевидно, приведется къ

$$(n+1) \int \psi^2_{n-1} x \vartheta x \, dx \, . \int^{(n)} \Delta_{n-2}(f) \, \Delta_{n-2}(\varphi) \prod_1^n \vartheta x_i \, dx_i,$$

т. е. на основаніи нашихъ обозначеній къ

$$(n+1) J_{n-2}(f\varphi) . \int \psi^2_{n-1} x \vartheta x \, dx.$$

Второй членъ въ правой части формулы (8) мы можемъ, очевидно, переписать такъ

$$n(n+1)\int^{(n+1)}\left\{\int\psi_{n-1}x_1 B_2\,\vartheta x_1\,dx_1\int\psi_{n-1}x_2 A_1\,\vartheta x_2\,dx_2\right\}\prod_3^{(n+1)}\vartheta x_i\,dx_i$$

Замѣчая же, что

$$A_1=(-1)^{n-1}fx_2.\begin{vmatrix}\psi_{n-2}x_3, & \psi_{n-2}x_4, & \ldots & \psi_{n-2}x_{n+1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \psi_1 x_3, & \psi_1 x_4, & \ldots & \psi_1 x_{n+1}\\ 1, & 1, & \ldots & 1\end{vmatrix}+\omega x_2$$

$$\text{а } B_2=-(-1)^{n-1}\varphi x.\begin{vmatrix}\psi_{n-2}x_3, & \ldots & \psi_{n-2}x_{n+1}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \psi_1 x_3, & \ldots & \psi_1 x_{n+1}\\ 1, & \ldots & 1\end{vmatrix}+\varrho x_1,$$

гдѣ ωx и ϱx суть цѣлыя функціи не выше $(n-2)$-ой степени, на основаніи свойства функцій $\psi_m x$, выражаемаго равенствомъ (1), заключаемъ, что второй членъ правой части формулы (8) приведется къ

$$-n(n+1)\int fx\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx.\int\varphi x\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx.\int^{(n-1)}\Delta^2_{n-2}\prod_1^{n-1}\vartheta x_i dx_i$$

$$=-n(n+1)\,J_{n-2}.\int fx\,\psi_{n-1}\,x\,\vartheta x\,dx.\int\varphi x\,\psi_{n-1}\,x\,\vartheta x\,dx.$$

Поэтому формула (8) приметъ видъ

$$J_{n-1}(f,\varphi)=(n+1)\,J_{n-2}(f,\varphi).\int\psi^2_{n-1}x\,\vartheta x\,dx\,-$$

$$-\,n\,(n+1)\,J_{n-2}\int fx\,\psi_{n-1}\,x\,\vartheta x\,dx.\int\varphi x\,\psi_{n-1}\,x\,\vartheta x\,dx$$

или $$\frac{J_{n-1}(f,\varphi)}{n(n+1)\,J_{n-2}\cdot\int\psi^2_{n-1}x\,\vartheta x\,dx}=$$

$$=\frac{J_{n-2}(f,\varphi)}{n\,J_{n-2}}-\frac{\int fx\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx\cdot\int\varphi x\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx}{\int\psi^2_{n-1}x\,\vartheta x\,dx}. \qquad (9)$$

Дѣлая здѣсь частное предположеніе о функціяхъ f и φ, а именно:

$$fx=\varphi x=\psi_{n-1}x,$$

причемъ $J_{n-1}(\psi_{n-1},\psi_{n-1})$ обратится въ 0, потому что въ опредѣлителѣ $\Delta_{n-1}(\psi_{n-1})$ двѣ строки будутъ тождественныя, а $J_{n-2}(\psi_{n-1},\psi_{n-1})$ обратится въ J_{n-1}, потому что

$$\Delta^2_{n-2}(\psi_{n-1})=\Delta^2_{n-2},$$

находимъ

$$J_{n-1}=n\,J_{n-2}\cdot\int\psi^2_{n-1}x\,\vartheta x\,dx \qquad (10)$$

и формула (9) приметъ видъ

$$\frac{J_{n-1}(f,\varphi)}{(n+1)\,J_{n-1}}=\frac{J_{n-2}(f,\varphi)}{n\,J_{n-2}}-\frac{\int fx\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx\cdot\int\varphi x\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx}{\int\psi^2_{n-1}x\,\vartheta x\,dx}. \qquad (11)$$

Полагая въ этой формулѣ послѣдовательно $n=2,\ 3,\ldots\ldots n$, складывая результаты и замѣчая, что

$$\frac{J_0(f,\varphi)}{2\,J_0}=\frac{{}^1\!/_2\iint(fx_2-fx_1)(\varphi x_2-\varphi x_1)\,\vartheta x_1\,\vartheta x_2\,dx_1\,dx_2}{\int\vartheta x\,dx}=$$

$$=\int fx\,\varphi x\,\vartheta x\,dx-\frac{\int fx\,\vartheta x\,dx\cdot\int\varphi x\,\vartheta x\,dx}{\int\vartheta x\,dx},$$

получаемъ окончательно формулу

$$\int fx\,\varphi x\,\vartheta x\,dx = \sum_{n=1}^{n=n} \frac{\int fx\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx \,.\int \varphi x\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx}{\int \psi^2_{n-1}x\,\vartheta x\,dx} +$$

$$+ \frac{J_{n-1}(f,\varphi)}{(n+1)\,J_{n-1}}. \qquad (12)$$

Это и есть формула Чебышова съ дополнительнымъ членомъ

$$R_n = \frac{J_{n-1}(f,\varphi)}{(n+1)\,J_{n-1}}. \qquad (13)$$

Приступая къ доказательству свойствъ R_n, мы сперва упростимъ выраженіе его, пользуясь извѣстными свойствами опредѣлителей.

Разсматривая выраженія опредѣлителей $\Delta_{n-1}(f)$, $\Delta_{n-1}(\varphi)$ и Δ_{n-1}, входящихъ подъ знаки интеграловъ $J_{n-1}(f,\varphi)$ и J_{n-1}, и замѣчая, что

$$\psi_{n-1}x = c_{n-1}x^{n-1} + \omega x,$$

гдѣ ωx цѣлая функція не выше $(n-2)$-ой степени, мы можемъ представить $\psi_{n-1}x$ въ видѣ

$$\psi_{n-1}x = c_{n-1}x^{n-1} + a_0\psi_{n-2}x + a_1\psi_{n-3}x + \ldots + a_{n-2},$$

гдѣ $a_0, a_1 \ldots a_{n-2}$ отъ x не зависитъ; отсюда, по извѣстному свойству опредѣлителей, заключаемъ, что въ выраженіяхъ $\Delta_{n-1}(f)$, $\Delta_{n-1}(\varphi)$ мы можемъ замѣнить элементы первой строки

$$\psi_{n-1}x_1\,,\ \psi_{n-1}x_2\,,\ \ldots\ldots\ \psi_{n-1}x_{n+1}$$

элементами

$$c_{n-1}x_1^{n-1}, c_{n-1}x_2^{n-1}, \ldots\ldots\ c_{n-1}x_{n+1}^{n-1}.$$

Точно также убѣждаемся, что вообще строку

$$\psi_k x_1, \psi_k x_2, \ldots\ldots\ \psi_k x_{n+1}$$

можемъ замѣнить строкою

$$c_k x_1^{\ k},\ c_k x_2^{\ k},\ \ldots\ldots\ c_k x_{n+1}^{\ k},$$

гдѣ c_k есть коэффиціентъ при x^k въ $\psi_k x$.

Дѣлая такое-же преобразованіе въ опредѣлителѣ Δ_{n-1} и раздѣливъ числителя и знаменателя въ выраженіи R_n на постоянное количество $(c_1 c_2 \ldots . c_{n-1})^2$, находимъ для R_n формулу

$$R_n = \frac{\int^{(n+1)} D_{n-1}(f) D_{n-1}(\varphi) \prod_1^{n+1} \vartheta x_i\, dx_i}{(n+1)\int^{(n)} D^2_{n-1} \prod_1^{n} \vartheta x_i\, dx_i}, \qquad (14)$$

гдѣ $D_{n-1}(f) = \begin{vmatrix} 1 & , 1 & , \ldots 1 \\ x_1 & , x_2 & , \ldots x_{n+1} \\ x_1^{\ 2} & , x_2^{\ 2} & , \ldots x^2_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{\ n-1} & , x_2^{\ n-1} & , \ldots x_{n+1}^{\ n-1} \\ fx_1 & , fx_2 & , \ldots fx_{n+1} \end{vmatrix}$

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & , 1 & , \ldots . 1 \\ x_1 & , x_2 & , \ldots . x_n \\ x_1^{\ 2}, & x_2^{\ 2} & , \ldots . x_n^{\ 2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{\ n-1}, & x_2^{\ n-1}, & \ldots . x_n^{\ n-1} \end{vmatrix},$$

или иначе

$$D_{n-1} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1}).$$

Докажемъ теперь одно свойство опредѣлителя $D_{n-1}(f)$, которое и послужитъ для вывода свойствъ R_n. Свойство это выражается формулою

$$D_{n-1}(f) = (x_2 - x_1) \ldots . (x_{n+1} - x_1)(x_3 - x_2) \ldots . (x_{n+1} - x_n) \frac{f^{(n)}(\xi)}{1.2 \ldots . n}$$

или
$$D_{n-1}(f) = D_n \cdot \frac{f^{(n)}(\xi)}{1.2\ldots n}, \tag{15}$$

гдѣ $f^{(n)}(x)$ обозначаетъ n-ую производную отъ fx, а ξ число, лежащее въ тѣхъ-же предѣлахъ, въ которыхъ лежатъ числа

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots\ x_{n+1}.$$

Для доказательства замѣчаемъ, что формула (15) очевидно повѣряется въ случаѣ $n=1$, потому что

$$D_0(f) = \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ fx_1, & fx_2 \end{vmatrix} = fx_2 - fx_1 = (x_2 - x_1) f'(\xi),$$

гдѣ ξ число среднее между x_1 и x_2.

Достаточно, слѣдовательно, убѣдиться, что если формула справедлива для какого-нибудь значенія n, то она будетъ справедлива и для значенія n на единицу большаго.

Руководствуясь этимъ, преобразуемъ $D_{n-1}(f)$ слѣдующимъ образомъ

$$D_{n-1}(f) = \begin{vmatrix} 1 & , 1, & \ldots\ldots\ldots & 1 \\ x_1 & , x_2, & \ldots\ldots\ldots & x_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & , x_2^{n-1} & \ldots\ldots\ldots & x_{n+1}^{n-1} \\ fx_1 & , fx_2, & \ldots\ldots\ldots & fx_{n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1, & x_3 - x_1, & \ldots & x_{n+1} - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2, & x_3^2 - x_1^2, & \ldots & x_{n+1}^2 - x_1^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_2^{n-1} - x_1^{n-1}, & x_3^{n-1} - x_1^{n-1}, & \ldots & x_{n+1}^{n-1} - x_1^{n-1} \\ fx_2 - fx_1, & fx_3 - fx_1, & \ldots & fx_{n+1} - fx_1 \end{vmatrix}.$$

Раздѣляя элементы перваго столбца на $x_2 - x_1$, втораго на $x_3 - x_1$ и т. д., находимъ

$$\frac{D_{n-1}(f)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_{n+1}-x_1)}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2+x_1, & x_3+x_1 & \dots & x_{n+1}+x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2}+x_1x_2^{n-3}+\dots+x_1^{n-2}, & x_3^{n-2}+x_1x_3^{n-3}+\dots+x_1^{n-2} & \dots & x_{n+1}^{n-2}+x_1x_{n+1}^{n-3}+\dots+x_1^{n-2} \\ \frac{fx_2-fx_1}{x_2-x_1}, & \frac{fx_3-fx_1}{x_3-x_1} & \dots & \frac{fx_{n+1}-fx_1}{x_{n+1}-x_1} \end{vmatrix}$$

или обозначая $\frac{fx-fx_1}{x-x_1}$ черезъ $F(x)$

и пользуясь извѣстнымъ свойствомъ опредѣлителей, находимъ

$$\frac{D_{n-1}(f)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_{n+1}-x_1)}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots\dots & 1 \\ x_2, & x_3, & \dots\dots & x_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2}, & x_3^{n-2}, & \dots\dots & x_{n+1}^{n-2} \\ Fx_2, & Fx_3, & \dots\dots & Fx_{n+1} \end{vmatrix}=D_{n-2}(F).$$

Допуская справедливость формулы (15) для опредѣлителя $D_{n-2}(F)$, получимъ

$$D_{n-1}(f)=(x_2-x_1)\dots(x_{n+1}-x_1)\dots(x_{n+1}-x_n)\frac{F^{(n-1)}(\xi_1)}{1.2.\dots(n-1)}, \quad (16)$$

гдѣ ξ_1 — число, лежащее въ тѣхъ-же предѣлахъ, въ которыхъ лежатъ x_2, x_3, ... x_{n+1}.

Составляя же $(n-1)$-ую производную функціи

$$F(x)=\frac{fx-fx_1}{x-x_1}=(fx-fx_1)\,(x-x_1)^{-1}$$

находимъ

$$F^{(n-1)}x=(x-x_1)^{-1}f^{(n-1)}x-(n-1)(x-x_1)^{-2}f^{(n-2)}x+$$
$$+(n-1)(n-2)\,(x-x_1)^{-3}f^{(n-3)}x-\dots$$
$$\dots+(-1)^{n-1}\,1.2\dots(n-1)\,(x-x_1)^{-n}\,(fx-fx_1)$$

$$=1.2\dots(n-1)\,\frac{fx_1-fx-\dfrac{x_1-x}{2}f'x\quad\dots-\dfrac{(x_1-x)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f^{(n-1)}x}{(x_1-x)^n}$$

$$=1.2\dots(n-1)\frac{f^{(n)}(\varepsilon)}{1.2\dots n},$$

гдѣ ε — число, лежащее между x_1 и x,
а потому

$$\frac{F^{(n-1)}(\xi_1)}{1.2\dots(n-1)}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{1.2\dots n},$$

гдѣ ξ — число лежащее между ξ_1 и x_1, т. е. въ тѣхъ-же предѣлахъ, въ которыхъ лежатъ $x_1, x_2, \dots x_{n+1}$.

Подставляя въ формулу (16) найденное выраженіе для $\dfrac{F^{(n-1)}(\xi_1)}{1.2\dots(n-1)}$, находимъ

$$D_{n-1}(f)=D_n\,.\,\frac{f^{(n)}(\xi)}{1.2\dots n},$$

что и доказываетъ формулу (15).

Примѣняя ту же формулу къ $D_{n-1}(\varphi)$, находимъ, что дополнительный членъ формулы Чебышева можетъ быть написанъ въ видѣ

$$R_n=\frac{\int^{(n+1)}D_n{}^2.\,f^{(n)}(\xi)\,\varphi^{(n)}(\eta)\prod_1^{n+1}\vartheta x_i\,dx_i}{(n+1)\int^{(n)}D^2_{n-1}\prod_1^{n}\vartheta x_i\,dx_i}\,. \qquad (17)$$

Изъ этой формулы вытекаетъ прямо второе свойство R_n, по которому онъ имѣетъ одинаковый знакъ съ $f^{(n)}x.\varphi^{(n)}x$, если $f^{(n)}x$ и $\varphi^{(n)}x$ не мѣняютъ знака въ предѣлахъ интегрированія.

Далѣе видимъ, что числовая величина R_n не превосходитъ

$$\frac{\int^{(n+1)} D_n{}^2 \prod_1^{n+1} \vartheta x_i\, dx_i}{\int^{(n)} D_{n-1}{}^2 \prod_1^{n} \vartheta x_i\, dx_i} . AB, \tag{18}$$

гдѣ A, B суть наибольшія числовыя величины $f^{(n)}x$ и $\varphi^{(n)}x$ въ этихъ предѣлахъ.

Кромѣ того, если положимъ въ формулѣ (12) $Fx=\varphi x=$ $=\psi_n x$, то въ силу (1) свойства $\psi_n x$ всѣ члены второй части, кромѣ R_n, обратятся въ 0,

$$F^{(n)}x=\varphi^{(n)}x=1.2\ldots n.c_n=\frac{d^n\psi_n x}{dx^n}.$$

и находимъ

$$\int \psi_n{}^2 x\,\vartheta x\,dx=\left(\frac{d^n\psi_n x}{dx^n}\right)^2 . \frac{\int^{(n+1)} D_n{}^2 \prod_1^{n+1} \vartheta x_i\, dx_i}{\int^{(n)} D_{n-1}{}^2 \prod_1^{n} \vartheta x_i\, dx_i}$$

въ силу чего выраженіе (18) приметъ видъ

$$\frac{\int \psi_n{}^2 x\,\vartheta x\,dx}{\left(\frac{d^n\psi_n x}{dx^n}\right)^2} . AB.$$

Что и доказываетъ 1-ое свойство дополнительнаго члена.

5-го Мая 1883 года.