УДК 517.5

*М. Л. СОДИН, П. М. ЮДИЦКИЙ*

# АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ Е. И. ЗОЛОТАРЕВА И Н. И. АХИЕЗЕРА О МНОГОЧЛЕНАХ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ

Хорошо известно, что ряд классических задач о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля, решается с помощью эллиптических функций [1]. Наиболее важными задачами такого типа являются, по-видимому, задачи Е. И. Золотарева и Н. И. Ахиезера. Напомним их формулировки.

*Задача Е. И. Золотарева.* Для заданного числа $\sigma > 0$ определить многочлен степени $n$ $P_n(x) = x^n - n\sigma x^{n-1} + \cdots$, наименее уклоняющийся от нуля на интервале $[-1, 1]$.

*Задача Н. И. Ахиезера.* Для заданного числа $\xi$, $0 < \xi < 1$, определить многочлен нечетной степени $2n+1$ $A_{2n+1}(x) = x^{2n+1} + \cdots$, наименее уклоняющийся от нуля на двух симметричных интервалах $[-1, -\xi] \cup [\xi, 1]$.

В настоящей работе приведем алгебраические решения этих задач, основываясь на следующем наблюдении, восходящем к П. Л. Чебышеву. Экстремальные многочлены в этих задачах удовлетворяют неопределенному функциональному уравнению типа уравнения Пелля. С другой стороны, аналогичным уравнениям удовлетворяют и некоторые ортогональные многочлены. Это позволяет показать, что наименее уклоняющиеся от нуля многочлены являются ортогональными при некотором вспомогательном весе. После того, как этот вес определен, многочлены легко выписываются в виде определителей. Отметим, что роль уравнений типа Пелля в различных задачах анализа подчеркивалась многими математиками, начиная с П. Л. Чебышева [2—5], и что предлагаемый ниже прием применим к другим задачам о наименее уклоняющихся от нуля функциях (см., например, [6]).

В конце работы свяжем вновь найденное алгебраическое решение задач Золотарева и Ахиезера с их классическим решением, использующим эллиптические функции.

§ 1. *Задача Золотарева.* При $\sigma \leqslant \sigma_n = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}$ задача Золотарева решается элементарно, так как экстремальный многочлен является чебышевским для интервала $[-1, \beta]$, $\beta = 1 + 2\sigma$. Поэтому далее мы рассматриваем лишь нетривиальный случай $\sigma > \sigma_n$. В этом случае чебышевский многочлен $T_n\left(\frac{2x - \beta + 1}{1 + \beta}\right)$ не является экстремальным, так как, по крайней мере, одна из его точек альтернанса (суть корней чебышевского многочлена 2-го рода $U_{n-1}\left(\frac{2x - \beta + 1}{1 + \beta}\right)$) больше единицы.

Из теоремы об альтернансе следует (см., например, [2]), из-
стное функциональное уравнение для экстремального многочлена:

$$L^2 = P_n^2(x) - (x^2 - 1)(x - \alpha)(x - \beta) Q_{n-2}^2(x), \qquad (1)$$

сь $1 < \alpha < \beta$, $\beta > \beta_n = \dfrac{1 + \cos^2(\pi/2n)}{\sin^2(\pi/2n)}$ — неопределенные числовые
чения, $Q_{n-2}(x) = P'_n(x)/(n(x-\gamma))$, $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \sigma$ — много-
н степени $n - 2$, корнями которого являются точки альтернанса
очлена $P_n$, лежащие внутри интервала $[-1, 1]$, $L$ — величина
онения многочлена $P_n$ от нуля на интервале $[-1, 1]$.

Покажем, что для каждого $\beta > \beta_n$ уравнение (1) имеет единст-
ое решение при дополнительном условии принадлежности всех
ней многочлена $Q_{n-2}$ интервалу $[-1, 1]$, соответствующий мно-
ен $P_n$ является экстремальным для задачи Золотарева. При
будет получено явное выражение для параметра $\sigma = \sigma(\beta)$,
оторого вытекает непрерывная зависимость $\sigma$ от $\beta$. Поэтому
возрастании $\beta$ от $\beta_n$ до $+\infty$ параметр $\sigma$ также непрерывно
стает от $\sigma_n$ до $+\infty$.

так, зафиксируем значение $\beta > \beta_n$ и перепишем уравнение (1)
ющим образом:

$$\frac{L^2(x-1)}{P_n^2(x)(x-\alpha)(x-\beta)(x+1)} =$$

$$= \frac{x-1}{(x-\alpha)(x-\beta)(x+1)} - \left(\frac{(x-1)Q_{n-2}(x)}{P_n(x)}\right)^2.$$

ем положительную при $x > \beta$ ветвь функции $\omega(x) =$
$\sqrt{\dfrac{x-1}{(x+1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$, тогда

$$\omega(x) - \frac{(x-1)Q_{n-2}(x)}{P_n(x)} = O\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right), \quad x \to \infty. \qquad (2)$$

(2) следует, что дробь $R = \dfrac{(x-1)Q_{n-2}}{P_n}$ является подходящей к
ерывной дроби для

$$\omega(x) = \int_E \frac{p(t)}{x-t}\,dt, \quad E = [-1, 1] \cup [\alpha, \beta],$$

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{1-t}{(t+1)(t-\alpha)(t-\beta)}}, & t \in E \\ 0, & t \notin E \end{cases}$$

— неотрицательный вес. Поэтому многочлены $P_n$ и $(x-1)Q_n$ являются ортогональными многочленами соответственно 1-го и 2-го рода при весе $p(x)$ [7]. Таким образом,

$$P_n(x) = \frac{1}{\det \| s_{i+j} \|_{i,\,j=0}^{n-1}} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{n+1} \\ - & - & - & - \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix},$$

$$\sigma = -\frac{1}{n \det \| s_{i+j} \|_{i,\,j=0}^{n-1}} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-2} & s_n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} & s_{n+1} \\ - & - & - & - & - \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-3} & s_{2n-1} \end{vmatrix},$$

$$L = -P_n(1) = -\frac{1}{\det \| s_{i+j} \|_{i,\,j=0}^{n-1}} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{n+1} \\ - & - & - & - \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

где $s_k$ — моменты функции $p(t)$, т. е.

$$s_k = \int_E p(t)\, t^k\, dt$$

или

$$\omega(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{x^{k+1}}.$$

Как следует из (3), числа $s_k$ суть многочлены степени $k$ от чисел $\alpha$ и $\beta$; используя формулу бинома Ньютона, нетрудно написать для них явную формулу.

Теперь остается определить значение параметра $\alpha$. Оно определяется из условия, что многочлен 2-го рода степени $n-1$ при весе $p(t)$ обращается в ноль в точке $x=1$. Чтобы придать этому условию более явный вид, напомним выражение для ортогонального многочлена 2-го рода:

$$\tilde{Q}_{n-1}(x) = (x-1)\, Q_{n-2}(x) = \int_E \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t}\, p(t)\, dt = \frac{1}{\det \| s_{i+j} \|_{i,\,j=0}^{n-1}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{n+1} \\ - & - & - & - \\ 0 & s_0 & \ldots & s_0 x^{n-1} + s_1 x^{n-2} + \cdots + s_{n-1} \end{vmatrix},$$

откуда

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{n+1} \\ - & - & - & - & - \\ 0 & s_0 & s_0 + s_1 & \ldots & s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

**Мы получили алгебраическое уравнение для определения параметра $\alpha$, так как определитель в левой части (4) есть многочлен от Укажем, какой из корней этого уравнения необходимо выбрать.**

Покажем, что искомым является положительный корень этого уравнения $\alpha^* < \beta$, ближайший к $\beta$. Будем следить за корнями ортогонального многочлена второго рода $\tilde{Q}_{n-1}(x)$.

Прежде всего отметим, что все корни многочлена $\tilde{Q}_{n-1}$ — простые и лежат внутри интервала $(-1, \beta)$, на котором сосредоточен вес $p(t)$. При $\alpha = \beta$ вес $p(t)$ имеет вид

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(\beta - t)} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1], \end{cases}$$

поэтому все корни ортогонального многочлена 2-го рода $\tilde{Q}_{n-1}$ расположены внутри интервала $(-1, 1)$. При $\alpha = 1$

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{-\frac{1}{(1+t)(t-\beta)}}, & t \in [-1, \beta], \\ 0, & t \notin [-1, \beta] \end{cases}$$

— чебышевский вес на $[-1, \beta]$. Следовательно,

$$\tilde{Q}_{n-1}(x) = U_{n-1}\left(\frac{2x - \beta + 1}{1 + \beta}\right),$$

и, по крайней мере, один из корней этого многочлена больше единицы.

Будем уменьшать $\alpha$, начиная с $\alpha = \beta$. При $\alpha$, близких к $\beta$, корни уравнения $\tilde{Q}_{n-1}(x) = 0$ по-прежнему расположены внутри интервала $(-1, 1)$. Так как при $\alpha = 1$ это неверно, то найдется значение $\alpha^*$, при котором наибольший из корней многочлена $\tilde{Q}_{n-1}$ равен единице. Это искомое значение и есть ближайший к $\beta$ корень $\alpha^* < \beta$ уравнения (4). Многочлен $P_n$ является экстремальным, так как он имеет $n - 2$ точки альтернанса (суть нулей $Q_{n-2}$), расположенных на $(-1, 1)$ и две точки альтернанса на концах отрезка $x = \pm 1$.

§ 2. *Некоторые замечания.* 1. Рассмотрим разложение функции

$$\sqrt{(x^2 - 1)(x - \alpha)(x - \beta)} = x^2 - \mu_{-2}x - \mu_{-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{x^{k+1}}.$$

Здесь $\mu_k$, $k \geqslant 0$ — моменты веса

$$q(t) \doteq \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{(1 - t^2)(t - \alpha)(t - \beta)}, & t \in E, \\ 0, & t \notin E, \end{cases}$$

их нетрудно выразить через моменты $s_k$ либо непосредственно через $\alpha$ и $\beta$. Сам вес $q(t)$ положительный на $(-1, 1)$ и отрицательный при $\alpha < t < \beta$. Рассмотрим матрицу

$$S(\alpha) = \|\mu_{i+j}\|_{i,j=0}^{n-2}.$$

Она положительно определена при $\alpha=\beta$ и имеет, по крайней м одно отрицательное собственное значение при $\alpha=1$. Да $\det S(\alpha)$ — многочлен от $\alpha$ и в качестве искомого значения необходимо взять ближайший к $\beta$ корень уравнения

$$\det S(\alpha)=0, \qquad (4')$$

меньший $\beta$. Иными словами, $\alpha^*$ — граница области положительно определенности матрицы $S(\alpha)$. В несколько иной ситуации связ определяющих экстремальную функцию параметров с границе области положительной определенности отмечалась в [8].

2. Пусть многочлен $U_{n-1}\left(\frac{2x-\beta+1}{\beta+1}\right)$ имеет $k\leqslant n-1$ корне больших единицы. Тогда у уравнения (4) и (4′) имеется $k$ корне расположенных на интервале $(1, \beta)$. Переход $\alpha$ через такой корен соответствует переходу корня ортогонального многочлена 2-го род $\tilde{Q}_{n-1}(x, \alpha)$ через точку $x=1$. Причем при каждом $\alpha$ в лаку $(1, \alpha)$ может находиться не более одного корня многочлена $\tilde{Q}_{n-1}(x, \alpha)$ Аналогичная ситуация детально исследовалась А. А. Марковы [9, с. 34—43].

3. Чтобы получить все решения уравнения Пелля (1) при фи сированном значении $\beta$, необходимо перебрать все корни $\alpha$ урав ния (4), формулы для $P_n$ и $Q_{n-2}$ сохраняются. При этом значени можно не предполагать вещественным.

4. Касаясь задачи Золотарева, А. А. Марков в [9, с. 51—75] у зал на целесообразность нахождения алгебраического реше этой задачи и дал набросок пути, на котором такое решение мог быть найдено, не доводя вычисления до конкретного ответа. Вы такое решение выписано, оно сводится к нахождению определе ного корня алгебраического уравнения (4) или (4′), а не тран цендентного уравнения, как в решении самого Е. И. Золотаре [2]. Отметим, что предложенный в этой работе прием нахожден алгебраического решения экстремальных задач Золотарева и Ах езера отличается от предлагавшегося А. А. Марковым.

§ 3. *Задача Ахиезера.* Будем предполагать, что $\xi>\sin\frac{\pi}{2(2n+1)}$ в противном случае экстремальным является чебышевский мно член $T_n(x)$. Из теоремы об альтернансе следует функциональн уравнение:

$$L^2=A^2_{2n+1}(x)-(x^2-1)(x^2-\xi^2)(x^2-\delta^2)B^2_{2n-2}(x). \qquad (\ldots)$$

В этом уравнении значение $\xi$ фиксировано, а нечетный экстремальны многочлен $A_{2n+1}$, параметр $\delta$, $0<\delta<\xi$, величина уклонения и четный многочлен $B_{2n-2}$, корнями которого являются точ альтернанса многочлена $A_{2n+1}$, расположенные внутри интервал $[-1, -\xi]$, $[\xi, 1]$, подлежат определению.

Введем новую переменную $y=x^2$. Тогда $A_{2n+1}(x)=xp_n(x^2)$, $B_{2n-2}(x)=q_{n-1}(x^2)$, далее, положим $\mu=\xi^2$, $\nu=\delta^2$. Уравнение (…) примет следующий вид:

$$L^2=yp_n^2(y)-(y-1)(y-\mu)(y-\nu)q^2_{n-1}(y).$$

Перепишем это уравнение аналогично тому, как это было сделано при решении задачи Золотарева:

$$\frac{L^2(y-\mu)}{(y-1)(y-\nu)\,p_n^2(y)}=\frac{y(y-\mu)}{(y-1)(y-\nu)}-\left(\frac{(y-\mu)\,q_{n-1}(y)}{p_n(y)}\right)^2$$

или

$$\sqrt{\frac{y(y-\mu)}{(y-1)(y-\nu)}}-\frac{(y-\mu)\,q_{n-1}(y)}{p_n(y)}=0\left(\frac{1}{y^{2n+1}}\right),\quad y\to\infty, \tag{6}$$

где ветвь квадратного корня предполагается положительной при $y>1$. Положим

$$\sqrt{\frac{y(y-\mu)}{(y-1)(y-\nu)}}=1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_k}{y^{k+1}},$$

где числа $s_k$ — моменты неотрицательного веса

$$\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\sqrt{-\dfrac{y(y-\mu)}{(y-1)(y-\nu)}}, & t\in[0,\ \nu]\cup[\mu,\ 1],\\ 0, & t\notin[0,\ \nu]\cup[\mu,\ 1].\end{cases}$$

Эти числа являются многочленами от $\nu$ и $\mu$ степени $k+1$. Тогда в силу (6) $p_n(y)$ и $(y-\mu)\,q_{n-1}(y)-p_n(y)$ являются ортогональными многочленами соответственно 1-го и 2-го рода при весе $\varphi(t)$. Следовательно,

$$A_{2n+1}(x)=xp_n(x^2)=\frac{x}{\det\|s_{i+j}\|_{i,\,j=0}^{n-1}}\begin{vmatrix}s_0 & s_1 & \dots & s_n\\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1}\\ \hline 1 & x^2 & \dots & x^{2n}\end{vmatrix},$$

$$L=A_{2n+1}(1)=\frac{1}{\det\|s_{i+j}\|_{i,\,j=0}^{n-1}}\begin{vmatrix}s_0 & s_1 & \dots & s_n\\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1}\\ \hline 1 & 1 & \dots & 1\end{vmatrix},$$

а число $\nu$ является наименьшим положительным корнем алгебраического уравнения:

$$\begin{vmatrix}s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_n\\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1}\\ \hline s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1}\\ 1 & s_0+\mu & s_1+s_0\mu+\mu^2 & \dots & s_{n-1}+s_{n-2}\mu+\dots+s_0\mu^{n-1}+\mu^n\end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

§ 4. *Связь с классическим решением задач Золотарева и Ахиезера.* Алгебраические уравнения, эквивалентные (4) и (7), можно получить иным путем, исходя из классического решения задач Золотарева и Ахиезера, использующего эллиптические функции

[1, 10, 11]. Остановимся вкратце на этом вопросе для случая задачи Ахиезера. Напомним сперва параметризацию решения этой задачи в якобиевых функциях, данную самим Н. И. Ахиезером [1, 10].

Определим модуль $k$ $(0 < k < 1)$ из уравнения

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K}{2n+1},\ k\right) = \xi, \tag{8}$$

модуль $k$ связан с величиной $\delta$ равенством

$$k^2 = \frac{\xi^2 - \delta^2}{\xi^2 (1 - \delta^2)}.$$

Положим

$$x = \frac{\xi \operatorname{cn} u}{\sqrt{\xi^2 - \operatorname{sn}^2 u}},$$

где радикал выбран так, что $x = 1$ при $u = 0$. Тогда

$$A_{2n+1}(x) = \frac{1}{2} L_n \left\{ \left[\frac{H(\rho + u)}{H(\rho - u)}\right]^{n+\frac{1}{2}} + \left[\frac{H(\rho - u)}{H(\rho + u)}\right]^{n+\frac{1}{2}} \right\},$$

где $\rho = \dfrac{K}{2n+1}$, и

$$L_n = \frac{}{2^{n-1}} \left[\frac{\Theta(0)}{\Theta(\rho)} \frac{\Theta_1(0)}{\Theta_1(\rho)}\right]^n.$$

Роль алгебраического уравнения (7) здесь играет трансцендентное уравнение (8). Можно показать, что оно имеет единственное решение [10, с. 212—213] (см. также [12]). Покажем, как привести уравнение (8) к алгебраическому.

Добавим к равенству (8) равенство

$$\operatorname{sn}^2 (K,\ k) = 1. \tag{9}$$

Далее, $\operatorname{sn}^2(mu,\ k)$ является рациональной функцией от $\operatorname{sn}^2(u,\ k)$ и $k^2$. В самом деле, воспользуемся теоремами сложения [10, табл. XIV]. Имеем

$$\operatorname{sn} 2u = \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)},$$

тогда

$$\operatorname{sn}^2 2u = \frac{4 \operatorname{sn}^2 u (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)^2}.$$

Положим

$$\operatorname{sn}^2 (mu,\ k) = R_m (\operatorname{sn}^2 (u,\ k),\ k^2),\ \operatorname{sn}^2 u = z.$$

В этих обозначениях $R_1 (z,\ k^2) \equiv z$ и

$$R_2 (z,\ k^2) = \frac{4z (1 - z)(1 - k^2 z)}{(1 - k^2 z^2)^2}.$$

Дальнейшие функции $R_m$ вычисляются индуктивно:

$$\operatorname{sn}(m+1)u\operatorname{sn}(m-1)u=\frac{\operatorname{sn}^2 mu-\operatorname{sn}^2 u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 mu},$$

или

$$R_{m+1}(z,\ k^2)\,R_{m-1}(z,\ k^2)=\left(\frac{R_m(z,\ k^2)-z}{1-k^2zR_m(z,\ k^2)}\right)^2.$$

В частности, из последнего равенства следует, что все $R_m$ — рациональные функции от $z$ и $k^2$. (Если ввести вместо $k^2$ новую переменную $w=zk^2$, то рекуррентная формула несколько упростится).

Таким образом, вместо (8) можно решать алгебраическое уравнение относительно $k^2$:

$$R_{2n+1}(\xi^2,\ k^2)=1. \tag{10}$$

Чтобы придать наглядный смысл корням этого уравнения, введем параметр $\rho$ $(-K\leqslant \operatorname{Re}\rho\leqslant K, -K'\leqslant \operatorname{Im}\rho\leqslant K')$ равенством $\operatorname{sn}^2\rho=\xi^2$. Тогда уравнение (10) эквивалентно тому, что $\operatorname{sn}^2(2n+1)\rho=1$, или $(2n+1)\rho\equiv K \pmod{2iK',\ 2K}$. Искомому решению $k^2$ уравнения (10) соответствует значение $\rho=K/(2n+1)$.

Используя факторизационный метод, предложенный Н. И. Ахиезером для решения неопределенных уравнений типа уравнения Пелля (см. [10, § 53], а также [4, 5]), можно показать, что алгебраические уравнения (7) и (10) эквивалентны. Мы не будем здесь доказывать это утверждение.

Когда эта статья была подготовлена к печати, Ф. Пехерсторфер любезно предоставил авторам текст своей статьи «Orthogonal and Chebyshev polinomials on two intervals», которая вскоре будет опубликована в журнале «Acta Math. Sci. Hungary». В этой статье среди прочего им были получены аналогичные алгебраические решения задач Золотарева и Ахиезера. Близким вопросам посвящены и другие недавние работы Ф. Пехерстофера, среди которых отметим [13—15].

**Список литературы:** 1. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М., 1965. 2. *Ахиезер Н. И.* Чебышевское направление в теории функций. Математика XIX в. М., 1987. С. 9—97. 3. *Крейн М. Г.* Об обратных задачах теории фильтров λ-зон устойчивости // ДАН СССР. 1953. **93**. № 5. С. 767—770. 4. *Ахиезер Н. И.* Об одном неопределенном уравнении Чебышевского типа в задачах построения ортогональных систем // Мат. физика и функцион. анализ. 1971. Вып. 2. С. 3—14. 5. *Krein M. G., Levin B. Ya., Nudelman A. A.* On a special representation of polynomials that are positive on a system of closed intervals // Amer. Math. Soc. Transl. Ser 2. 1989. V. 142. 6. *Юдицкий П. М.* О верхней огибающей семейства рациональных функций, не превосходящих единицы на единичной окружности, с фиксированными полюсами и с фиксированным нулем // ДАН СССР. 1989. **307**, № 4. С. 815—818. 7. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М., 1961. 8. *Горин Е. А.* Неравенства Бернштейна с точки зрения теории операторов // Вестн. Харьк. ун-та. 1980. № 205. С. 77—105. 9. *Марков А. А.* Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.; Л., 1948. 100 с. 10. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М., 1970. 11. *Carlson B. C., Todd J.* Zolotarev's First Problem // Aequat. Math. 1983. **26**, P. 1—33. 12. *Carlson B. C., Todd J.*

The degenerating behavior of elliptic functions // SIAM J. Numer. Anal. 1983. 20, N 6. P. 1120—1129. 13. *Peherstorfer F.* On Tchebysheff polynomials on disjoint intervals // Coll. Math. Soc. I. Bolyai 49. A Haar Mem. Conf., Budapest. 1985. P. 737—751. 14. *Peherstofer F.* Orthogonal polynomials in $L^1$-approximation // Journ. Approx. Theory. 1988. 52, N 3. P. 241—268. 15. *Peherstorfer F.* On Bernstein-Szegö orthogonal polynomials on several intervals II: orthogonal polynomials with periodic recurrence coefficients // To appear in Journ. Approx. Theory. P. 59—88.

*Поступила в редколлегию 17.03.90*