

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
ВВЕДЕНИЕ К КУРСУ «ТЕОРИЯ ПОЛЯ»	5
§ 1. Функция Лагранжа для заряженной частицы в электромагнитном поле. Четырехмерный векторный потенциал электромагнитного поля.....	9
§ 2. Уравнение движения для заряженной частицы в электромагнитном поле. Сила Лоренца.....	17
§ 3. Первая пара уравнений Максвелла	22
§ 4. Градиентная инвариантность потенциалов. Условие калибровки потенциалов.....	25
§ 5. Релятивистски-ковариантное уравнение движения заряда в электромагнитном поле. Тензор электромагнитного поля.....	30
§ 6. Четырехмерный вектор импульса заряженной частицы в электромагнитном поле.....	37
§ 7. Свойства преобразования Лоренца применительно к векторным и тензорным величинам из теории электромагнитного поля.....	41
§ 8. Преобразования Лоренца для электромагнитного поля.....	45
§ 9. Инварианты электромагнитного поля.....	52
§ 10. Плотность зарядов. Четырехмерный вектор плотности тока.....	57
§ 11. Закон сохранения заряда. Уравнение непрерывности	61
§ 12. Функционал действия для электромагнитного поля.....	65
§ 13. Вторая пара уравнений Максвелла	71
§ 14. Самосогласованная система уравнений микроэлектродинамики (теории поля).....	81
§ 15. Закон сохранения энергии в микроэлектродинамике	85
§ 16. Электростатика.....	90
§ 17. Магнитостатика.....	97
Приложение А. Векторный анализ.....	102
Приложение В. Тензорный анализ	110
Приложение С. Специальная теория относительности.....	119
Приложение D. Релятивистская механика	125
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.....	130
ЛИТЕРАТУРА.....	134

ПРЕДИСЛОВИЕ

Электродинамика как раздел теоретической физики является одним из базовых курсов, читаемых на радиофизическом факультете, который составляет основу профессиональной подготовки радиофизиков. Курс опирается на такие общенаучные дисциплины, как высшая математика, физика, теоретическая механика, и структурно состоит из двух частей: «Теория поля» и «Макроскопическая электродинамика».

Данное учебное пособие, представляющее собой конспект лекций, предлагается использовать при изучении первой части курса электродинамики «Теория поля». Для облегчения понимания материала в приложениях кратко приведена вспомогательная информация из курсов векторного и тензорного анализа, а также необходимые выводы теоретической механики и специальной теории относительности.

ВВЕДЕНИЕ К КУРСУ «ТЕОРИЯ ПОЛЯ»

Физический объект исследований в теории поля (микроскопической электродинамике)

Физическим объектом исследований в микроскопической электродинамике является физическая система, состоящая из материальных тел и электромагнитных полей. Аналог таких систем исследуется в теоретической механике. Отличие от теоретической механики заключается в том, что в электродинамике каждое тело кроме массы m обладает еще и электрическим зарядом e . При этом полагается, что заряд и масса – независимые характеристики тела.

Наличие заряда приводит к появлению электромагнитного поля, которое определяет взаимодействие заряда с другими электрическими зарядами.

Методы исследования объектов микроскопической электродинамики

Существуют два метода исследования физических систем – теоретический и экспериментальный.

Достоинством экспериментального метода является получение полной реальной физической информации, содержащей как общие закономерности, так и частные особенности, детали.

Назначение теоретического метода состоит в выявлении главных закономерностей при абстрагировании от незначительных деталей. Для этого надо упростить характеристики системы, не потеряв основные механизмы взаимодействия.

Теоретическая модель реального физического объекта, используемого в микроскопической электродинамике. Область применимости данной теории

В рамках рассматриваемой модели размерами и формой тел можно пренебречь, поэтому для исследований будем использовать следующую

теоретическую модель – физическую систему, образованную материальными точками, обладающими массами и зарядами.

Электродинамика изучает эволюцию физической системы движущихся заряженных материальных точек и их взаимодействие с электромагнитным полем, также входящим в физическую систему.

Ограничения теории, связанные с принятыми допущениями:

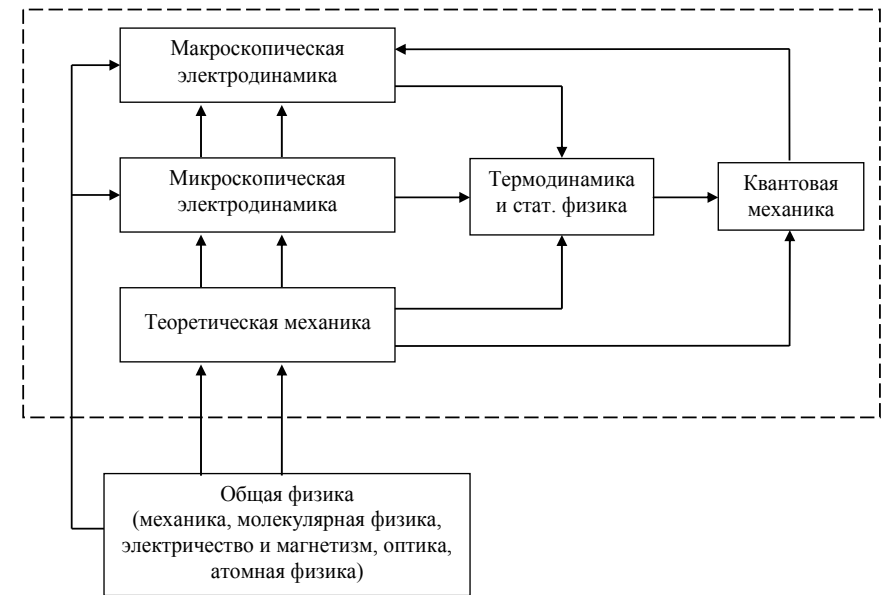
- поскольку мы моделируем реальные объекты материальными точками, то теория поля не позволяет исследовать процессы, происходящие внутри тел;
- так как реальными размерами тел мы пренебрегаем, то случай бесконечно малых расстояний между телами из рассмотрения исключается, т. е. рассматриваются тела, удаленные друг от друга на конечные расстояния.

Эти ограничения и определяют область применимости теории.

Фундаментальная проблема естествознания, решаемая в электродинамике

Фундаментальной проблемой естествознания является изучение процесса изменения системы во времени, т. е. эволюции системы. Специфика электродинамических систем состоит в наличии элемента системы, который распространяется со скоростью света – электромагнитного поля. Это обуславливает необходимость учета релятивистских эффектов.

Место микроэлектродинамики в курсе теоретической физики



Фундаментальные положения теоретической физики, на которых основывается построение теории поля

Признаком совершенства науки является минимальное количество постулатов, на которых она основывается.

В основе теории поля лежат три постулата:

два общефизических:

1) постулаты специальной теории относительности Эйнштейна (СТО), а именно, принцип относительности и инвариантности скорости света (Приложение С);

2) принцип наименьшего действия по Гамильтону (ПНД) (Приложение D);

и специальный постулат электромагнетизма:

3) определение силы Лоренца

$$\vec{F}_L = e\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}(\vec{r}, t)],$$

состоящей из силы Кулона и силы Ампера. Особенностью электродинамики является то, что появилась сила, зависящая от вектора скорости $\vec{v}$, которая не может быть определена в теоретической механике.

Роль релятивистской механики в построении теории поля

При построении теории поля релятивистская механика служит:

- источником научных предположений;
- средством проверки математических соотношений.

§ 1. Функция Лагранжа для заряженной частицы в электромагнитном поле. Четырехмерный векторный потенциал электромагнитного поля

1.1. Физические объекты микроскопической электродинамики.

Свойство аддитивности функционала действия

Механика изучает движение материальных тел, обладающих массой m_i , положение которых в данный момент времени характеризуется радиус-вектором $\vec{r}_i$.

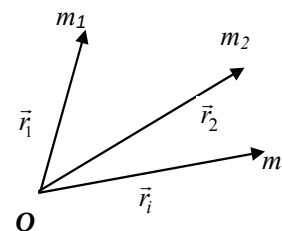


Рис. 1

Каждому телу (частице, материальной точке), обладающему массой m_i , ставится в соответствие функционал действия S_{m_i} . Частицы являются независимыми объектами. Функционал действия системы частиц равен сумме функционалов действия всех независимых частиц, т. е. функционал действия обладает свойством аддитивности

$$S = \sum_{(i)} S_{m_i}.$$

В электродинамике (теории поля) объектом исследования выступает материальная точка, которая кроме массы m_i обладает еще и зарядом e_i . Заряд не зависит от массы и является равноправной характеристикой материальной точки.

1.2. Функционал действия для заряженной частицы в электромагнитном поле. Четырехмерный векторный потенциал электромагнитного поля

Аксиоматика электродинамики вводится на основе постулатов релятивистской механики – понятии об инерциальной системе отсчета, посту-

лате относительности, законе движения, физических представлениях о пространстве и времени, а также принципе наименьшего действия (см. Приложения С, D).

Пусть S – функционал действия для заряженной частицы. Свойства частицы, обладающей массой и зарядом, эквивалентны свойствам двух со-
вмещенных частиц массы m_0 и заряда e .

Исходя из аддитивности функционала действия,

$$S = S_m + S_{mf}, \quad (1.1)$$

где S_m – функционал действия частицы, обладающей только массой, а S_{mf} – функционал действия частицы, обладающей зарядом.

Из релятивистской механики известно, что функционал действия свободной релятивистской частицы определяется согласно (D.11):

$$S_m = -m_0 c \int_a^b \sqrt{-dx_\mu^2}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (1.2)$$

Здесь функционал действия записан в четырехмерном пространстве, где $x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$; $x_4 = ict = \tau$; под знаком интеграла стоит элементарный интервал (C.8)

$$ds = \sqrt{-dx_\mu^2} = \sqrt{-dx_\mu dx_\mu} = \sqrt{-d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}. \quad (1.3)$$

Функционал действия частицы, обладающей только массой, определяется следующим образом:

$$S_m = \int_{t_a}^{t_b} L dt = \int_a^b \alpha ds; \quad \alpha = -m_0 c, \quad (1.4)$$

где L – функция Лагранжа.

Функционал действия заряженной частицы S_{mf} будем строить аналогично тому, как построен S_m . Кроме того, в рассуждениях будем опираться

на тот факт, что функционал действия должен быть инвариантен относительно преобразований Лоренца.

1) $S_m \sim m_0$, $m_0 = \text{inv}$. Следовательно, $S_{mf} \sim e$, $e = \text{inv}$.

2) $S_m \sim \int_a^b [ds]$. Поэтому будем предполагать, что $S_{mf} \sim \int_a^b \{?\}$, где $\{?\}$ – аналог $[ds]$.

3) Подынтегральное выражение $[ds]$ является инвариантом относительно преобразований Лоренца, поэтому подынтегральное выражение $\{?\}$ также должно быть инвариантно относительно преобразований Лоренца.

4) $[ds]$ является истинным скаляром (не меняет знак при инверсии системы координат), значит, $\{?\}$ – тоже истинный скаляр.

5) $[ds] \sim \sqrt{-dx_\mu^2} \sim (dx_\mu)^1$. Следовательно, $\{?\} \sim (dx_\mu)^1$.

Для того чтобы условия 3-5 были выполнены, под интегралом в S_{mf} должно стоять выражение, являющееся инвариантом относительно преобразований Лоренца и при этом пропорциональное $(dx_\mu)^1$. Поскольку скалярное произведение двух векторов инвариантно относительно преобразований Лоренца, выберем подынтегральное выражение в виде скалярного произведения $A_\mu dx_\mu$. Вектор A_μ должен характеризовать электромагнитное поле, действующее на заряд, явный вид этого вектора пока не известен. Представим вектор A_μ в четырехмерном пространстве следующим образом:

$$A_\mu = (A_1, A_2, A_3, i\varphi) = (\vec{A}, i\varphi), \quad (1.5)$$

где $\vec{A}$ – трехмерный вектор. Назовем

A_μ – четырехмерным потенциалом электромагнитного поля,

$\vec{A}$ – векторным потенциалом,

φ – скалярным потенциалом.

В общем случае векторный и скалярный потенциалы являются функциями координат и времени: $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$, $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$.

Итак, функционал действия имеет вид (с точностью до коэффициента)

$$S_{mf} \sim e \int_a^b A_\mu dx_\mu. \quad (1.6)$$

Окончательно представим функционал действия так:

$$S_{mf} = \frac{e}{c} \int_a^b A_\mu dx_\mu. \quad (1.7)$$

В (1.7) вектор A_μ подлежит дальнейшему определению, а коэффициент $\frac{1}{c}$ введен для обеспечения размерности.

Таким образом, функционал действия заряженной частицы в электромагнитном поле имеет вид:

$$S = S_m + S_{mf} = -m_0 c \int_a^b \sqrt{-dx_\mu^2} + \frac{e}{c} \int_a^b A_\mu dx_\mu. \quad (1.8)$$

1.3. Функция Лагранжа для заряженной частицы в электромагнитном поле

Получим выражение для функции Лагранжа заряженной частицы в электромагнитном поле. Из теоретической механики известно, что согласно (D.2)

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L dt. \quad (1.9)$$

Поэтому для определения L мы должны в выражении для функционала действия перейти к интегралу по времени, тогда подынтегральное выражение даст нам искомую функцию Лагранжа.

$$\begin{aligned} S &= -m_0 c \int_a^b \sqrt{-dx_\mu^2} + \frac{e}{c} \int_a^b A_\mu dx_\mu = \\ &= \int_a^b [-m_0 c \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} + \\ &+ \frac{e}{c} (A_x dx + A_y dy + A_z dz + i\varphi \cdot icdt)] = \\ &= \int_{t_a}^{t_b} dt [-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} + \frac{e}{c} \vec{A} \frac{d\vec{r}}{dt} - e\varphi]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь скалярное произведение $A_\mu dx_\mu = A_x dx + A_y dy + A_z dz + i\varphi \cdot icdt$;

$A_x dx + A_y dy + A_z dz = \vec{A} \cdot d\vec{r}$; $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ – вектор скорости.

Таким образом, функционал действия заряженной частицы в электромагнитном поле

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt [-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi]. \quad (1.11)$$

Сравнив (1.11) с (1.9), получаем, что функция Лагранжа заряженной частицы в электромагнитном поле равна

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi = L_m + L_{mf}. \quad (1.12)$$

Здесь часть L_m обусловлена наличием у частицы массы, а L_{mf} возникает благодаря наличию у частицы заряда. В отсутствие заряда ($e \equiv 0$) $L_{mf} \equiv 0$ и $L = L_m$.

1.4. Обобщенный вектор импульса для заряженной частицы в электромагнитном поле. Физический смысл трехмерного векторного потенциала электромагнитного поля

В релятивистской механике импульс определяется следующим образом (см. (D.5)):

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \nabla_v L, \quad (e \equiv 0), \quad (1.13)$$

где $\dot{q}$ – обобщенная скорость, ∇_v – градиент функции Лагранжа по скорости.

Сохраним определение для импульса и в электродинамике, подставляя вместо L выражение для функции Лагранжа заряженной частицы в электромагнитном поле.

$$\vec{P} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \nabla_v L = \nabla_v (L_m + L_{mf}). \quad (1.14)$$

В релятивистской механике получено выражение для трехмерного релятивистского механического импульса (D.12):

$$\vec{P} = \nabla_v L_m = \nabla_v (-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2}) = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \quad (1.15)$$

$$\nabla_v L_{mf} = \nabla_v \left(\frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi \right) = \nabla_v \left(\frac{e}{c} A_x v_x + \frac{e}{c} A_y v_y + \frac{e}{c} A_z v_z \right) - \nabla_v (e\varphi) = \frac{e}{c} \vec{A}.$$

$\nabla_v (e\varphi) = 0$, т. к. $e = \text{const}$, φ не зависит от скорости.

Тогда обобщенный импульс заряженной частицы в электромагнитном поле

$$\vec{P} = \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}. \quad (1.16)$$

Если $e = 0$, то обобщенный импульс равен механическому:

$$\vec{P} = \vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \quad (1.17)$$

Физический смысл векторного потенциала: векторный потенциал с точностью до множителя является добавкой к механическому импульсу за счет наличия заряда и электромагнитного поля.

1.5. Энергия заряженной частицы в электромагнитном поле. Физический смысл скалярного потенциала электромагнитного поля

В релятивистской механике ($e \equiv 0$) энергия определяется соотношением (D.7)

$$\mathcal{E} = \vec{P} \cdot \vec{v} - L \quad (L = L_m). \quad (1.18)$$

По аналогии:

$$\mathcal{E} = \vec{P} \cdot \vec{v} - L \quad (L = L_m + L_{mf}). \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left(\vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{v} - (-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi) = \\ &= \frac{m_0 \vec{v} \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} + m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} - \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} + e\varphi = \\ &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} + e\varphi = \\ &= \frac{m_0 v^2 + m_0 c^2 (1 - v^2 / c^2)}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + e\varphi = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + e\varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, энергия заряженной частицы в электромагнитном поле определяется выражением

$$\mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + e\varphi. \quad (1.20)$$

При этом первое слагаемое зависит только от скорости, следовательно, это кинетическая энергия частицы. Второе слагаемое представляет собой потенциальную энергию.

Отсюда следует физический смысл скалярного потенциала – это с точностью до множителя добавка к энергии за счет электромагнитного поля. $U = e\varphi$ – потенциальная энергия.

1.6. Гамильтониан для заряженной частицы в электромагнитном поле

По определению функция Гамильтона – это полная энергия, выраженная через обобщенные координаты и обобщенные импульсы

$$H = H(q, p, t) = \mathcal{E}. \quad (1.21)$$

Для получения выражения для функции Гамильтона заряженной частицы в электромагнитном поле необходимо представить полную энергию $\mathcal{E}$ через обобщенный импульс.

Из формулы для полной энергии следует

$$H - e\varphi = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \left(\frac{H - e\varphi}{c} \right)^2 = \frac{m_0^2 c^2}{1 - v^2/c^2}.$$

Используя выражение для обобщенного импульса, получаем

$$\vec{\mathcal{P}} - \frac{e}{c} \vec{A} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Из вспомогательного соотношения

$$\begin{aligned} \left(\vec{\mathcal{P}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + m_0^2 c^2 &= \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 + m_0^2 c^2 = \\ &= \frac{m_0^2 v^2 + m_0^2 c^2 (1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} = \frac{m_0^2 c^2}{1 - v^2/c^2} = \left(\frac{H - e\varphi}{c} \right)^2 \end{aligned}$$

имеем

$$\left(\vec{\mathcal{P}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + m_0^2 c^2 = \left(\frac{H - e\varphi}{c} \right)^2,$$

отсюда автоматически получаем выражение для функции Гамильтона заряженной частицы в электромагнитном поле:

$$H = c \sqrt{\left(\vec{\mathcal{P}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + m_0^2 c^2} + e\varphi, \quad (1.22)$$

тут первое слагаемое отвечает кинетической энергии, а второе – потенциальной.

В отсутствие заряда ($e \equiv 0$) и электромагнитного поля полученное выражение для функции Гамильтона переходит в известное из релятивистской механики

$$H = c \sqrt{P^2 + m_0^2 c^2}. \quad (1.23)$$

§ 2. Уравнение движения для заряженной частицы в электромагнитном поле. Сила Лоренца

2.1. Вывод уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле на основе релятивистского уравнения движения

Из релятивистской механики известно, что для любой физической системы уравнение движения имеет вид (D.4)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}, \quad (2.1)$$

функция Лагранжа L конкретизирует физическую систему. Если подставить в общее уравнение движения функцию Лагранжа для заряженной частицы

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi, \quad (2.2)$$

то получим уравнение движения для заряженной частицы в электромагнитном поле, которое характеризуется скалярным и векторным потенциалами.

Ранее было получено (см. (1.15))

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \nabla_v L = \vec{\mathcal{P}} = \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}, \quad \vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.3)$$

здесь $\vec{\mathcal{P}}$ – обобщенный импульс заряженной частицы в электромагнитном поле, $\vec{P}$ – трехмерный релятивистский импульс.

Напомним, что $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}(t), t)$, $\varphi = \varphi(\vec{r}(t), t)$.

Продифференцируем по времени выражение (2.3)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} \vec{\mathcal{P}} = \frac{d}{dt} \left(\vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) = \frac{d}{dt} \vec{P} + \frac{e}{c} \frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{r}(t), t). \quad (2.4)$$

Для удобства рассмотрим отдельно производную по времени от $\vec{A}(\vec{r}(t), t)$, воспользовавшись выражением для полной производной сложной функции нескольких переменных.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{r}(t), t) &= \frac{d}{dt} \vec{A}(x(t), y(t), z(t), t) = \\
&= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \\
&= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{A}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Таким образом, окончательно запишем

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{A}. \tag{2.6}$$

Тогда левая часть уравнения движения (2.1) имеет вид

$$\frac{d}{dt} \vec{\mathcal{P}} = \frac{d}{dt} \vec{P} + \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} (\vec{v} \nabla) \vec{A}. \tag{2.7}$$

Найдем правую часть уравнения движения (2.1)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q} &\equiv \nabla L = \nabla(-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi) = \\
&= \nabla(-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}) + \frac{e}{c} \nabla(\vec{A} \cdot \vec{v}) - e \nabla \varphi.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Выражение $(-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2})$ не зависит от координат, следовательно, первое слагаемое равно нулю. Пользуясь известным векторным тождеством (А.32) для градиента скалярного произведения, получаем

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{v}) = [\vec{A}, \text{rot } \vec{v}] + [\vec{v}, \text{rot } \vec{A}] + (\vec{A} \nabla) \vec{v} + (\vec{v} \nabla) \vec{A}. \tag{2.9}$$

Поскольку скорость не зависит от координат, то первое и третье слагаемые в этом выражении равны нулю. Следовательно,

$$\nabla L = \frac{e}{c} [\vec{v}, \text{rot } \vec{A}] + \frac{e}{c} (\vec{v} \nabla) \vec{A} - e \nabla \varphi. \tag{2.10}$$

Подставляем полученные выражения в уравнение движения

$$\frac{d}{dt} \vec{P} + \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} (\vec{v} \nabla) \vec{A} = \frac{e}{c} [\vec{v}, \text{rot } \vec{A}] + \frac{e}{c} (\vec{v} \nabla) \vec{A} - e \nabla \varphi \tag{2.11}$$

и получаем окончательный вид уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = e \left(-\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{e}{c} [\vec{v}, \text{rot } \vec{A}]. \tag{2.12}$$

Здесь $\vec{P}$ – трехмерный механический импульс. Правая часть уравнения пропорциональна заряду. Если заряд равен нулю, то полученное уравнение переходит в уравнение движения свободной частицы

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = 0. \tag{2.13}$$

Если заряд отличен от нуля, то имеем второй закон Ньютона

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F}. \tag{2.14}$$

2.2. Постулат силы Лоренца. Напряженности электрического и магнитного полей. Связь векторного и скалярного потенциалов с силовыми характеристиками электромагнитного поля

Из эксперимента известно, что на заряженную частицу в электромагнитном поле действует сила Лоренца, являющаяся суммой силы Кулона и силы Ампера

$$\begin{aligned}
\vec{F}_L &= e \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}(\vec{r}, t)] = \vec{F}_K + \vec{F}_A, \\
\vec{F}_K &= e \vec{E}, \quad \vec{F}_A = \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}].
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Сила Кулона параллельна напряженности электрического поля $\vec{E}$ и не зависит от скорости движения частицы.

Напряженность электрического поля – силовая характеристика электрического поля. Она равна силе, действующей со стороны электрического поля на единичный положительный заряд:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_K}{e}. \tag{2.16}$$

Сила Ампера направлена перпендикулярно векторам скорости и напряженности магнитного поля $\vec{H}$ и зависит от скорости, таким образом, имеем качественно новую природу сил. Напряженность магнитного поля – силовая характеристика магнитного поля. Она равна множителю при скорости (точнее, при $\vec{v}/c$) в силе Ампера, действующей со стороны магнитного поля на единичный положительный заряд.

Если

$\vec{E} \neq 0, \quad \vec{H} = 0$, то имеем электрическое поле;

$\vec{E} = 0, \quad \vec{H} \neq 0$ – магнитное поле;

$\vec{E} \neq 0, \quad \vec{H} \neq 0$ – электромагнитное поле.

Из релятивистской механики (исходя из принципа наименьшего действия) получено уравнение движения для заряженной частицы в электромагнитном поле

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = e\left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{e}{c}[\vec{v}, \text{rot}\vec{A}]. \quad (2.17)$$

В правой части этого уравнения записана сила, действующая на заряженную частицу в электромагнитном поле. По определению это должна быть сила Лоренца (2.15). Имеем уравнение движения для заряженной частицы в электромагнитном поле в виде

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = e\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}(\vec{r}, t)]. \quad (2.18)$$

Так как производная по времени от импульса есть сила, то, сравнивая правые части уравнений движения (2.17) и (2.18), можно установить однозначную связь между силовыми характеристиками (напряженностями) электромагнитного поля и потенциалами:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \text{rot}\vec{A}. \quad (2.19)$$

2.3. Изменение кинетической энергии заряженной частицы в электромагнитном поле. Работа электромагнитного поля по изменению кинетической энергии

В § 1. получено выражение для полной энергии заряженной частицы в электромагнитном поле (1.20)

$$\mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\varphi,$$

где первое слагаемое представляет собой кинетическую энергию. Нас интересует $\frac{d\mathcal{E}_k}{dt}$.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_k}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = \frac{m_0 c^2 \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-2\frac{v}{c^2}\right) \frac{dv}{dt}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{m_0 \frac{d\vec{v}}{dt}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Используя выражение для $\frac{d\vec{P}}{dt}$ из уравнения движения, получаем

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \vec{v} \cdot e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v}[\vec{v}, \vec{H}]. \quad (2.21)$$

Второе слагаемое в этом выражении равно нулю в силу свойства смешанного произведения векторов. Таким образом, окончательно имеем

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \vec{v} \cdot e\vec{E} = \vec{v} \cdot \vec{F}_K. \quad (2.22)$$

Изменение кинетической энергии со временем есть работа, совершенная полем над частицей в единицу времени. Она равна произведению скорости заряда на силу, с которой на заряд действует электрическое поле. Магнитное поле не производит работу над движущимся зарядом, поскольку сила Ампера перпендикулярна скорости.

2.4. Понятие изотропии времени

Уравнения механики инвариантны по отношению к перемене знака у времени, т. е. по отношению замены будущего прошлым. Таким образом, в механике оба направления времени эквивалентны. Следовательно, если согласно уравнениям механики возможно какое-либо движение, то возможно и обратное движение, т. е. такое движение, при котором система проходит те же состояния, но в обратном порядке.

Это справедливо и в теории поля. При движении в обратном порядке $t \rightarrow -t$; $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$; $\vec{p} \rightarrow -\vec{p} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt}$, при этом уравнение движения не меняется, если заменить $\vec{E} \rightarrow \vec{E}$; $\vec{H} \rightarrow -\vec{H}$. Кроме того, согласно (2.19) должно выполняться условие $\varphi \rightarrow \varphi$; $\vec{A} \rightarrow -\vec{A}$.

Таким образом, если в электромагнитном поле возможно некоторое движение, то возможно и обратное движение в поле с $\vec{H} \rightarrow -\vec{H}$.

§ 3. Первая пара уравнений Максвелла

3.1. Первая пара уравнений Максвелла в дифференциальной форме

Будем исходить из соотношений (2.19)

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{H} = \text{rot} \vec{A}.$$

Задача состоит в представлении векторного и скалярного потенциалов $\vec{A}$, φ через напряженности электрического и магнитного поля $\vec{E}$, $\vec{H}$. Для этого применим операцию rot к выражению для $\vec{E}$

$$\text{rot} \vec{E} = -\text{rot grad} \varphi - \frac{1}{c} \text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (3.1)$$

Согласно известному векторному тождеству (A.24) $\text{rot grad} \varphi = 0$, а оператор rot и дифференцирование по времени можно поменять местами. С учетом того, что $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$, имеем

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Аналогично подействуем оператором div на выражение для $\vec{H}$

$$\text{div} \vec{H} = \text{div rot} \vec{A}. \quad (3.2)$$

Как известно из векторного анализа (A.25), $\text{div rot} \vec{A} = 0$.

Таким образом, получаем первую пару уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \text{div} \vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Уравнения Максвелла, впервые сформулированные в 1860 году, являются основными уравнениями электродинамики.

3.2. Первая пара уравнений Максвелла в интегральной форме, их физический смысл

Получим интегральную формулировку уравнений Максвелла. Для этого проинтегрируем обе части первого уравнения (3.3) по произвольной поверхности S

$$\int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (3.4)$$

Применим к левой части этого выражения теорему Стокса (A.38)

$$\int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = \oint_L \vec{E} d\vec{l}, \quad (3.5)$$

где интеграл справа берется по замкнутому контуру L , на который опирается поверхность S . В правой части (3.4) поменяем местами интегрирование и дифференцирование по времени. Получаем интегральную формулировку первого уравнения Максвелла

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{H} d\vec{S}. \quad (3.6)$$

Интеграл от вектора по поверхности называется потоком вектора через эту поверхность, а производная по времени от этого интеграла – изменением потока вектора. Интеграл от вектора по замкнутому контуру называется циркуляцией вектора, а циркуляция вектора напряженности электрического поля – электродвижущей силой или ЭДС.

Таким образом, физический смысл первого уравнения Максвелла можно сформулировать так: электродвижущая сила в некотором контуре равна взятому с обратным знаком изменению потока вектора напряженности магнитного поля через поверхность, на которую опирается этот контур. Это известный закон Фарадея или закон электромагнитной индукции.

Получим интегральную формулировку второго уравнения (3.3). Для этого проинтегрируем это уравнение по произвольному объему V . Согласно теореме Остроградского–Гаусса (А.37) интеграл по объему от дивергенции вектора равен потоку этого вектора через замкнутую поверхность S , ограничивающую этот объем V .

$$\int_V \operatorname{div} \vec{H} dV = \oint_S \vec{H} d\vec{S}.$$

Получаем интегральную формулировку второго уравнения Максвелла:

$$\oint_S \vec{H} d\vec{S} = 0. \quad (3.7)$$

Физический смысл второго уравнения Максвелла: поток вектора напряженности магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность равен нулю. Это выражает закон неразрывности силовых линий магнитного поля, т. е. факт отсутствия в природе магнитных зарядов.

Таким образом, интегральная формулировка первой пары уравнений Максвелла имеет вид:

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{E} d\vec{l} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{H} d\vec{S}; \\ \oint_S \vec{H} d\vec{S} &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.3. Первая пара уравнений Максвелла – незамкнутая система уравнений

Два уравнения Максвелла не определяют полностью свойства поля. Они определяют только изменение поля со временем.

Спроецируем первое уравнение Максвелла на оси декартовой системы координат, а во втором уравнении распишем явно оператор дивергенции

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{E})_x &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}; \\ (\operatorname{rot} \vec{E})_y &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}; \\ (\operatorname{rot} \vec{E})_z &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Имеем 4 уравнения и 6 неизвестных компонент поля. Очевидно, что система двух первых уравнений Максвелла является незамкнутой.

§ 4. Градиентная инвариантность потенциалов. Условие калибровки потенциалов

4.1. Определение напряженностей электромагнитного поля через потенциалы

Выпишем определение $\vec{E}$ и $\vec{H}$ через потенциалы (2.19):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \\ \vec{H} &= \operatorname{rot} \vec{A}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Согласно этим соотношениям напряженности поля определены однозначно. Возникает вопрос, насколько однозначно определены потенциалы. Оказывается, что одному и тому же полю могут соответствовать различные потенциалы, т. е. имеется определенная свобода в выборе потенциалов $\vec{A}$ и φ .

Введем векторный и скалярный потенциалы в виде

$$\begin{aligned}\vec{A}' &= \vec{A} + \text{grad } f(\vec{r}, t); \\ \varphi' &= \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t}.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Здесь $f(\vec{r}, t)$ – произвольная функция. Подставим $\vec{A}'$ и φ' в соотношения (4.1) и получим $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= -\text{grad } \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}' = -\text{grad} \left(\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \text{grad } f) = \\ &= -\text{grad } \varphi + \frac{1}{c} \text{grad} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \frac{1}{c} \text{grad} \frac{\partial f}{\partial t} = \vec{E}; \\ \vec{H}' &= \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} + \text{rot grad } f(\vec{r}, t) = \vec{H}.\end{aligned}$$

Нами учтено векторное тождество (A.24) $\text{rot grad } f(\vec{r}, t) = 0$. Заметим, что функция $f(\vec{r}, t)$ должна быть дважды дифференцируемой.

Если использовать четырехмерный вектор потенциала $A_\mu = (\vec{A}, i\varphi)$, то уравнения (4.2) в четырехмерном пространстве запишутся в виде

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu}.\quad (4.3)$$

Здесь $\frac{\partial f}{\partial x_\mu}$ – градиент по четырем координатам (x, y, z, ict) .

4.2. Градиентная инвариантность потенциалов

Преобразование потенциалов вида (4.2) не меняет поле:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \vec{E}; \\ \vec{H}' &= \vec{H}.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Поэтому потенциалы определены неоднозначно – векторный потенциал определен с точностью до градиента произвольной функции, а скалярный – с точностью до производной по времени от той же функции.

В частности, к векторному потенциалу можно прибавить любой постоянный вектор, а к скалярному – любую постоянную. Это видно и непосредственно из того, что в определения $\vec{E}$ и $\vec{H}$ входят только производные от $\vec{A}$ и φ , и потому прибавление к последним постоянных не влияет на напряженности поля.

Физический смысл имеют лишь те величины, которые инвариантны по отношению к преобразованию потенциалов (4.2), поэтому все уравнения должны быть инвариантны по отношению к этому преобразованию. Эта инвариантность называется калибровочной или градиентной.

4.3. Лоренцевская калибровка, кулоновская калибровка потенциалов

Свяжем потенциалы между собой и получим условие калибровки для потенциалов электромагнитного поля. Для этого применим оператор div к первому из уравнений (4.2) и $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ – ко второму:

$$\begin{aligned}\text{div } \vec{A}' &= \text{div } \vec{A} + \text{div grad } f(\vec{r}, t); \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(\vec{r}, t)}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Сложим полученные выражения с учетом векторного тождества (A.23) $\text{div grad } f = \Delta f$

$$\text{div } \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Выберем функцию f таким образом, чтобы выполнялось уравнение

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Это уравнение называется волновым уравнением. Тогда

$$\operatorname{div} \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Поскольку поле на бесконечности должно равняться нулю (т. е. последнее равенство должно выполняться во всех точках, в том числе и на бесконечности), приравняем нулю обе его части. Таким образом, получаем условие калибровки Лоренца для потенциалов:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (4.5)$$

Можно подобрать функцию f так, чтобы

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (4.6)$$

Это условие калибровки Кулона.

Под термином «калибровка» мы понимаем выбор функции f .

Проверим выполнение условия градиентной инвариантности для некоторых физических величин, в частности, для энергии и импульса заряженной частицы в электромагнитном поле.

Обобщенный импульс заряженной частицы в электромагнитном поле определяется выражением (1.16)

$$\vec{p} = \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}; \quad \vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где $\vec{P}$ – трехмерный релятивистский импульс (1.15). Энергия заряженной частицы в электромагнитном поле в соответствии с (1.20)

$$\mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\varphi.$$

Подставим формулы (4.2) для $\vec{A}'$ и φ' в выражения для импульса и энергии.

$$\begin{aligned} \vec{p}' &= \vec{P} + \frac{e}{c} (\vec{A} + \operatorname{grad} f), \\ \mathcal{E}' &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e \left(\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.4. Связь градиентной инвариантности потенциалов с принципом наименьшего действия по Гамильтону

Рассмотрим точки пространственно-временного континуума a и b . Пусть эти точки фиксированы, т. е. $\delta x_\mu(a) = 0$ и $\delta x_\mu(b) = 0$. Переход из точки a в точку b осуществляется согласно ПНД (D.3) так, чтобы $\delta S = 0$. Для заряженной частицы в электромагнитном поле функционал действия имеет вид (1.8)

$$S = S_m + S_{mf} = \int_a^b \left\{ -m_0 c \sqrt{-dx_\mu^2} + \frac{e}{c} A_\mu dx_\mu \right\}.$$

Покажем, что для принципа наименьшего действия выполняется условие градиентной инвариантности, т. е. он инвариантен относительно преобразования потенциалов (4.2), (4.3). Для этого получим S' , подставив выражение $A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu}$ в соотношение для S .

$$S' = \int_a^b \left\{ -m_0 c \sqrt{-dx_\mu^2} + \frac{e}{c} A_\mu dx_\mu \right\} + \frac{e}{c} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_\mu} dx_\mu.$$

Первый интеграл равен функционалу действия S . Для второго слагаемого справедливо

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial f}{\partial x_4} dx_4 \right) = \int_a^b df(x_\nu).$$

Тогда

$$S' = S + \frac{e}{c} \int_a^b df(x_\nu) = S + \frac{e}{c} [f(x_\nu)]_a^b = S + \text{const.}$$

Найдем вариацию S' :

$$\delta S' = \delta S + \delta(\text{const}) = 0.$$

Таким образом, $\delta S' = 0$ при условии $\delta x_\mu(a) = 0$ и $\delta x_\mu(b) = 0$, т. е. принцип наименьшего действия оказывается инвариантным относительно преобразования потенциалов (4.2), (4.3).

§ 5. Релятивистски-ковариантное уравнение движения заряда в электромагнитном поле. Тензор электромагнитного поля

5.1. Необходимость получения уравнения движения в ковариантной форме

Уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле имеет вид (2.18)

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = e\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}(\vec{r}, t)]; \quad \vec{P} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Это уравнение справедливо для трехмерных векторов. Для перехода от одной инерциальной системы координат к другой используются преобразования Лоренца, полученные в четырехмерном пространстве. Следовательно, для использования преобразований Лоренца необходимо иметь уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле также в четырехмерном пространстве, т. е. уравнение движения в ковариантной форме.

5.2. Формулировка задачи в общем виде для получения уравнения движения в ковариантной форме. Специфика электромагнитного случая

Рассмотрим точки пространственно-временного континуума a и b . Будем полагать эти точки фиксированными, т. е. $\delta x_\mu(a) = 0$ и $\delta x_\mu(b) = 0$. Переход из точки a в точку b осуществляется согласно ПНД

так, чтобы $\delta S = 0$. Для заряженной частицы в электромагнитном поле функционал действия имеет вид (1.8)

$$S = S_m + S_{mf} = \int_a^b \left\{ -m_0 c \sqrt{-dx_\mu^2} + \frac{e}{c} A_\mu dx_\mu \right\}.$$

5.3. Вариация функционала действия для заряженной частицы в электромагнитном поле

Найдем вариацию функционала действия δS .

$$\delta S = \int_a^b \left\{ -m_0 c \delta \sqrt{-dx_\mu^2} + \frac{e}{c} \delta(A_\mu dx_\mu) \right\}.$$

$$\delta \sqrt{-dx_\mu^2} = \frac{(-2)dx_\mu \cdot \delta dx_\mu}{2\sqrt{-dx_\mu^2}} = -\frac{dx_\mu \cdot \delta dx_\mu}{ds} = -u_\mu \delta dx_\mu.$$

Здесь учтено, что $ds = \sqrt{-dx_\mu^2}$; $u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds}$ – четырехмерный вектор скорости.

$$\delta(A_\mu dx_\mu) = \delta A_\mu \cdot dx_\mu + A_\mu \cdot \delta dx_\mu = \delta A_\mu \cdot dx_\mu + A_\mu \cdot d\delta x_\mu.$$

В последних двух соотношениях использовано $\delta dx_\mu = d\delta x_\mu$.

Тогда вариация функционала действия равна

$$\delta S = \int_a^b \left\{ m_0 c u_\mu d\delta x_\mu + \frac{e}{c} A_\mu d\delta x_\mu + \frac{e}{c} \delta A_\mu dx_\mu \right\}.$$

Проинтегрировав по частям первые два слагаемых, получаем

$$\delta S = m_0 c u_\mu \delta x_\mu \Big|_a^b + \frac{e}{c} A_\mu \delta x_\mu \Big|_a^b - \int_a^b m_0 c du_\mu \delta x_\mu - \int_a^b \frac{e}{c} dA_\mu \delta x_\mu + \int_a^b \frac{e}{c} \delta A_\mu dx_\mu.$$

Распишем

$$dA_\mu \delta x_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} dx_\nu \delta x_\mu$$

$$\delta A_\mu dx_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \delta x_\nu dx_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \delta x_\mu dx_\nu.$$

В последнем соотношении в силу того, что индексы μ , ν являются «немыми», выполнена замена $\mu \leftrightarrow \nu$.

Запишем вариацию функционала действия, разделив и домножив подинтегральное выражение на ds .

$$\begin{aligned} \delta S = & (m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu) \delta x_\mu \Big|_a^b + \\ & + \int_a^b \left\{ -m_0 c \frac{du_\mu}{ds} + \frac{e}{c} \left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \cdot \frac{dx_\nu}{ds} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \cdot \frac{dx_\nu}{ds} \right) \right\} ds \delta x_\mu. \end{aligned}$$

С учетом того, что $u_\nu = \frac{dx_\nu}{ds}$, получаем окончательное выражение для вариации функционала действия заряженной частицы в электромагнитном поле

$$\begin{aligned} \delta S = & (m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu) \delta x_\mu \Big|_a^b + \\ & + \int_a^b \left\{ -m_0 c \frac{du_\mu}{ds} + \frac{e}{c} \left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) u_\nu \right\} ds \delta x_\mu. \end{aligned} \quad (5.1)$$

5.4. Уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле в релятивистски-ковариантной форме

Согласно ПНД вариация функционала действия должна равняться нулю при условии, что исходная и конечная точки a и b фиксированы, т. е. $\delta S = 0$ при $\delta x_\mu(a) = 0$ и $\delta x_\mu(b) = 0$.

Тогда

$$(m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu) \delta x_\mu \Big|_a^b = 0.$$

Остается

$$\int_a^b \left\{ -m_0 c \frac{du_\mu}{ds} + \frac{e}{c} \left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) u_\nu \right\} ds \delta x_\mu = 0.$$

Поскольку точки a и b произвольны, следовательно, нулю равно подинтегральное выражение.

Таким образом, получаем уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле в релятивистски-ковариантной форме

$$m_0 c \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} \left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) u_\nu, \quad (5.2)$$

где $\frac{du_\mu}{ds}$ и u_ν – 4-векторы, а $\left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right)$ – 4-тензор второго ранга. К

этому уравнению можно применять преобразования Лоренца.

5.5. Тензор электромагнитного поля, его общие свойства. Определение элементов этого тензора через составляющие (проекции) векторов напряженности электрического и магнитного поля

Введем тензор электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu} = -\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \quad (5.3)$$

Это тензор второго ранга в четырехмерном пространстве, характеризующийся $4^2 = 16$ компонентами

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (5.2) запишется в виде

$$m_0 c \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u_\nu. \quad (5.4)$$

Найдем $F_{\nu\mu}$:

$$F_{\nu\mu} = -\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = -F_{\mu\nu},$$

т. е. тензор электромагнитного поля является антисимметричным, следовательно, его диагональные элементы равны нулю (см. Приложение В)

$$F_{\nu\nu} = F_{\mu\mu} = 0,$$

и он имеет вид

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ -F_{12} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ -F_{13} & -F_{23} & 0 & F_{34} \\ -F_{14} & -F_{24} & -F_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для определения явного вида компонент тензора электромагнитного поля необходимо найти 6 его компонент $F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{23}, F_{24}, F_{34}$. Выразим компоненты тензора через проекции векторов напряженности электрического и магнитного поля. Для этого распишем выражения для напряженностей поля через потенциалы в декартовой системе координат (см. (A.14), (A.16)).

$$\begin{aligned} \vec{H} = \text{rot } \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{x}_0 \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \\ &= \vec{x}_0 \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) + \vec{y}_0 \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) + \vec{z}_0 \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Напомним также, что при определении $F_{\mu\nu}$ индексы соответствуют таким координатам: $1 \rightarrow x; 2 \rightarrow y; 3 \rightarrow z; 4 \rightarrow ict$, а 4-вектор потенциала имеет вид $A_\mu = (\vec{A}, i\varphi) = (A_x, A_y, A_z, i\varphi)$. Тогда с учетом (5.5), (5.6) имеем

$$F_{12} = -\frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} = H_z;$$

$$F_{13} = -\frac{\partial A_1}{\partial x_3} + \frac{\partial A_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial x} = -H_y;$$

$$F_{14} = -\frac{\partial A_1}{\partial x_4} + \frac{\partial A_4}{\partial x_1} = -\frac{\partial A_x}{\partial(ict)} + \frac{\partial(i\varphi)}{\partial x} = -i \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) = -iE_x.$$

Аналогично

$$F_{23} = H_x; \quad F_{24} = -iE_y; \quad F_{34} = -iE_z.$$

Окончательно тензор электромагнитного поля равен

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

5.6. Четыре скалярных уравнения, которые содержит в себе релятивистски-ковариантное уравнение движения

В уравнении движения заряженной частицы в электромагнитном поле, записанном в релятивистски-ковариантной форме (5.4), индекс μ принимает значения $\mu = 1, 2, 3, 4$, а по повторяющемуся индексу ν осуществляется суммирование от 1 до 4. Таким образом, векторному уравнению (5.4) соответствуют четыре скалярных уравнения, отвечающих четырем возможным значениям μ . Получим эти уравнения.

Пусть $\mu = 1$.

$$m_0 c \frac{du_1}{ds} = \frac{e}{c} F_{1\nu} u_\nu = \frac{e}{c} (F_{11} u_1 + F_{12} u_2 + F_{13} u_3 + F_{14} u_4). \quad (5.8)$$

Здесь $u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds}$ – компоненты четырехмерного вектора скорости. С уче-

том того, что $x_1 \rightarrow x; x_2 \rightarrow y; x_3 \rightarrow z; x_4 \rightarrow ict$ и $ds = c dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$,

эти компоненты имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_x}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}; & u_2 &= \frac{v_y}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}; \\ u_3 &= \frac{v_z}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}; & u_4 &= \frac{i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Подставляя эти значения, а также соответствующие значения компонент тензора электромагнитного поля (5.7) в (5.8), получим следующие выражения:

$$\frac{d\left(\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)}{dt} = eE_x + \frac{e}{c}(v_y H_z - v_z H_y).$$

Выражение, дифференцируемое по времени, есть проекция трехмерного релятивистского механического импульса на ось OX , а $(v_y H_z - v_z H_y) = [\vec{v}, \vec{H}]_x$. Окончательно имеем, что при $\mu = 1$ уравнению (5.4) соответствует скалярное уравнение, являющееся проекцией на ось OX трехмерного уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле

$$\frac{dP_x}{dt} = eE_x + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]_x.$$

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что при $\mu = 2$ и $\mu = 3$ имеем проекции этого уравнения на оси OY и OZ

$$\begin{aligned} \frac{dP_y}{dt} &= eE_y + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]_y; \\ \frac{dP_z}{dt} &= eE_z + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]_z. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\mu = 1, 2, 3$ уравнение движения в релятивистски-ковариантной форме (5.4) дает проекции на оси координат трехмерного уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле. Если эти уравнения домножить на соответствующие орты и сложить, то получим векторное уравнение движения (2.18)

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}].$$

Рассмотрим $\mu = 4$.

$$m_0 c \frac{du_4}{ds} = \frac{e}{c} F_{4\nu} u_\nu = \frac{e}{c} (F_{41} u_1 + F_{42} u_2 + F_{43} u_3 + F_{44} u_4).$$

После подстановки компонент 4-вектора скорости и соответствующих значений компонент тензора электромагнитного поля получим

$$\frac{d\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)}{dt} = e(v_x E_x + v_y E_y + v_z E_z).$$

Дифференцируемая величина слева есть кинетическая энергия. Таким образом, при $\mu = 4$ имеем полученную нами ранее формулу изменения кинетической энергии (2.22)

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \vec{v} \cdot e\vec{E} = \vec{v} \cdot \vec{F}_K,$$

согласно которой изменение кинетической энергии равно скалярному произведению силы Кулона на вектор скорости.

§ 6. Четырехмерный вектор импульса заряженной частицы в электромагнитном поле

6.1. Формулировка задачи по отысканию 4-вектора импульса в общем случае

Пусть имеются две мировые точки a и b . Точка a является фиксированной ($\delta x_\mu(a) = 0$), а точка b свободна ($\delta x_\mu(b) \neq 0$). Переход системы из точки a в точку b осуществляется по истинной траектории, т. е. выполняется уравнение движения (5.4)

$$m_0 c \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u_\nu.$$

Найдем вариацию функционала действия S как функцию координат (при движении по истинной траектории).

Из релятивистской механики известно, что

$$\delta S = \mathcal{P}_\mu \delta x_\mu(b), \quad (6.1)$$

где $\mathcal{P}_\mu$ – четырехмерный обобщенный импульс.

Специфика электродинамики состоит в соответствующей записи функционала действия.

6.2. 4-вектор импульса заряженной частицы в электромагнитном поле, его составляющие

При вычислении вариации функционала действия ранее было получено выражение (5.1)

$$\begin{aligned} \delta S = & (m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu) \delta x_\mu(b) - (m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu) \delta x_\mu(a) + \\ & + \int_a^b \left\{ -m_0 c \frac{du_\mu}{ds} + \frac{e}{c} \left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) u_\nu \right\} ds \delta x_\mu. \end{aligned}$$

Поскольку точка a фиксирована, т. е. $\delta x_\mu(a) = 0$, то второе слагаемое равно нулю. Нулю также равно и подинтегральное выражение, т. к. движение осуществляется по истинной траектории, т. е. выполняется уравнение движения.

Тогда вариация функционала действия равна

$$\delta S = (m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu) \delta x_\mu(b). \quad (6.2)$$

Сравнивая формулы (6.2) и (6.1), получаем выражение для четырёхмерного вектора импульса заряженной частицы в электромагнитном поле

$$\mathcal{P}_\mu = m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (6.3)$$

Найдем теперь компоненты 4-вектора импульса. Для этого воспользуемся выражениями для компонент 4-вектора скорости (5.9)

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_x}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}; u_2 = \frac{v_y}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}; \\ u_3 &= \frac{v_z}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}; u_4 = \frac{i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned}$$

и 4-вектора потенциала $A_\mu = (\vec{A}, i\varphi) = (A_x, A_y, A_z, i\varphi)$.

Пусть $\mu = 1$.

$$\mathcal{P}_1 = m_0 c u_1 + \frac{e}{c} A_1 = m_0 c \frac{v_x}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{e}{c} A_x = P_x + \frac{e}{c} A_x. \quad (6.4)$$

Аналогично при $\mu = 2$ и $\mu = 3$ имеем

$$\mathcal{P}_2 = P_y + \frac{e}{c} A_y; \quad (6.5)$$

$$\mathcal{P}_3 = P_z + \frac{e}{c} A_z. \quad (6.6)$$

Если соотношения (6.4), (6.5) и (6.6) домножить на орты декартовой системы координат и сложить, то получим выражение для обобщенного импульса (2.3)

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}.$$

Рассмотрим $\mu = 4$.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_4 &= m_0 c u_4 + \frac{e}{c} A_4 = m_0 c \frac{i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{e}{c} i\varphi = \\ &= \frac{i}{c} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + e\varphi \right) = \frac{i}{c} (\mathcal{E}_k + U) = i \frac{\mathcal{E}}{c}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{E}_k, U$ – кинетическая и потенциальная энергия, а $\mathcal{E}$ – полная энергия частицы в электромагнитном поле.

Таким образом, четырехмерный вектор импульса заряженной частицы в электромагнитном поле имеет следующие компоненты:

$$\mu = 1, 2, 3, \quad \vec{\mathcal{P}} = \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}; \quad (6.7)$$

$$\mu = 4, \quad \mathcal{P}_4 = i \frac{\mathcal{E}}{c}. \quad (6.8)$$

6.3. Уравнение Гамильтона–Якоби в релятивистски-ковариантной форме

Получим уравнение Гамильтона–Якоби. Для этого распишем вариацию функционала действия как функцию координат ($S = S(x_\mu)$)

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial x_\mu} \delta x_\mu(b). \quad (6.9)$$

Сравнив это выражение с (6.1), имеем

$$\mathcal{P}_\mu = \frac{\partial S}{\partial x_\mu}. \quad (6.10)$$

Приравняем вариацию функционала действия, записанную в виде (6.9) и (6.2), и получим

$$m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu = \frac{\partial S}{\partial x_\mu}.$$

Перепишем это выражение в виде

$$\frac{\partial S}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c} A_\mu = m_0 c u_\mu$$

и возведем обе части равенства в квадрат. Учтем при этом, что

$$u_\mu^2 = \frac{dx_\mu^2}{dS^2} = -\frac{dx_\mu^2}{dx_\mu^2} = -1,$$

т. к. $dS = \sqrt{-dx_\mu^2}$. Таким образом, получаем уравнение Гамильтона–Якоби в релятивистски-ковариантной форме

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c} A_\mu \right)^2 = -m_0^2 c^2. \quad (6.11)$$

§ 7. Свойства преобразования Лоренца применительно к векторным и тензорным величинам из теории электромагнитного поля

7.1. Четырехмерные векторные и тензорные величины теории поля

В микроскопической электродинамике вводились следующие четырехмерные величины:

радиус-вектор (координаты)	$x_\mu = (\vec{r}, ict); \quad \vec{r} = (x, y, z)$
скорость	$u_\mu = \left(\frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right); \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$
потенциал	$A_\mu = (\vec{A}, i\varphi); \quad \vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$
обобщенный импульс	$\mathcal{P}_\mu = (\vec{\mathcal{P}}, i\frac{\mathcal{E}}{c}); \quad \vec{\mathcal{P}} = \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}; \quad \mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + e\varphi$
тензор электро-магнитного поля	$F_{\mu\nu} = -\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}$

7.2. Прямое и обратное преобразование Лоренца в матричной форме. Свойство ортогональности матрицы преобразования Лоренца

Запишем прямые преобразования Лоренца для координат x, y, z, t (см. Приложение С):

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Напомним, что большой буквой V обозначена скорость одной системы отсчета относительно другой. Для определенности будем считать, что эта скорость направлена вдоль оси OX . Перепишем преобразования для ко-

ординат x_μ ($x_1 = x; x_2 = y; x_3 = z; x_4 = ict$). Для этого выразим

$$t = \frac{x_4}{ic} = -i \frac{x_4}{c}; \quad t' = \frac{x_4'}{ic} = -i \frac{x_4'}{c}. \quad \text{Тогда}$$

$$x_1 = \frac{x_1' - i \frac{V}{c} x_4'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad x_2 = x_2'; \quad x_3 = x_3'; \quad x_4 = \frac{x_4' + i \frac{V}{c} x_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (7.1)$$

Запишем эти преобразования в матричной форме.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{-iV/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{iV/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1' - i \frac{V}{c} x_4'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ x_2' \\ x_3' \\ \frac{x_4' + i \frac{V}{c} x_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Введем матрицу преобразования Лоренца

$$\alpha_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{-iV/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{iV/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Тогда прямые преобразования Лоренца можно записать в виде

$$x_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu'. \quad (7.4)$$

Наличие повторяющегося индекса указывает на то, что по этому индексу производится суммирование (такие индексы называются «немыми»).

Докажем, что матрица преобразования Лоренца обладает свойством ортогональности (см. Приложение В). Воспользуемся для этого тем фактом, что

квадрат интервала является величиной инвариантной относительно преобразований Лоренца (см. Приложения В, С).

$$S^2 = S'^2; \quad S = \sqrt{-x_\mu^2}; \quad S' = \sqrt{-x_\nu'^2}.$$

Тогда

$$x_\mu^2 = x_\nu'^2;$$

$$x_\mu^2 = x_\mu x_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu' \alpha_{\mu\lambda} x_\lambda' = \alpha_{\mu\nu} \alpha_{\mu\lambda} x_\nu' x_\lambda'.$$

С другой стороны,

$$x_\nu'^2 = x_\nu' x_\nu'.$$

$$\alpha_{\mu\nu} \alpha_{\mu\lambda} x_\nu' x_\lambda' = x_\nu' x_\nu'.$$

Последнее равенство верно при условии

$$\alpha_{\mu\nu} \alpha_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} = \begin{cases} 1, & \nu = \lambda; \\ 0, & \nu \neq \lambda. \end{cases} \quad (7.5)$$

Это условие ортогональности матрицы. Следовательно, преобразование Лоренца является ортогональным преобразованием.

Запишем обратное преобразование Лоренца. Для этого домножим (7.4) на $\alpha_{\mu\lambda}$, воспользуемся условием ортогональности матрицы (7.5)

$$\alpha_{\mu\lambda} x_\mu = \alpha_{\mu\lambda} \alpha_{\mu\nu} x_\nu'$$

и получим обратные преобразования Лоренца

$$x_\lambda' = \alpha_{\mu\lambda} x_\mu. \quad (7.6)$$

7.3. Свойство скалярного произведения пары произвольных 4-векторов

Покажем, что скалярное произведение двух произвольных векторов инвариантно относительно преобразований Лоренца. Введем произвольные векторы A_μ, B_μ . Запишем их скалярное произведение и применим к каждому из векторов прямое преобразование Лоренца

$$A_\mu B_\mu = \alpha_{\mu\nu} A_\nu' \alpha_{\mu\lambda} B_\lambda' = \alpha_{\mu\nu} \alpha_{\mu\lambda} A_\nu' B_\lambda' = \delta_{\nu\lambda} A_\nu' B_\lambda' = A_\nu' B_\nu'.$$

Таким образом, получаем, что скалярное произведение двух произвольных векторов инвариантно относительно преобразований Лоренца

$$A_\mu B_\mu = A'_\mu B'_\mu. \quad (7.7)$$

Следствие: квадрат длины 4-вектора – инвариант относительно преобразований Лоренца

$$A_\mu A_\mu = A'_\mu A'_\mu. \quad (7.8)$$

7.4. 4-тензор 2 ранга $A_{\mu\nu}$. Тензорность матрицы $A_{\mu\nu}$

Тензором первого ранга в четырехмерном пространстве (4-вектором) называется совокупность четырех величин, которые при преобразовании системы координат преобразуются по закону

$$A_\mu = \alpha_{\mu\nu} A'_\nu; \quad A'_\lambda = \alpha_{\mu\lambda} A_\mu. \quad (7.9)$$

Тензором второго ранга в четырехмерном пространстве называется совокупность 16 величин, которые при преобразовании системы координат преобразуются по закону

$$A_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\lambda} \alpha_{\nu\sigma} A'_{\lambda\sigma}. \quad (7.10)$$

Сформулируем критерий тензорности матрицы $A_{\mu\nu}$. Введем в рассмотрение два 4-вектора B_μ, C_ν и построим функционал (квадратичную форму):

$$F = A_{\mu\nu} B_\mu C_\nu; \quad F' = A'_{\lambda\sigma} B'_\lambda C'_\sigma.$$

Покажем, что если $A_{\mu\nu}$ – тензор второго ранга, то $F = F'$, т. е. функционал инвариантен относительно преобразований Лоренца. Рассмотрим F' , учтем при этом, что B_μ, C_ν – векторы, и для них выполняется преобразование вида (7.9)

$$F' = A'_{\lambda\sigma} B'_\lambda C'_\sigma = A'_{\lambda\sigma} \alpha_{\mu\lambda} B_\mu \alpha_{\nu\sigma} C_\nu = \alpha_{\mu\lambda} \alpha_{\nu\sigma} A'_{\lambda\sigma} B_\mu C_\nu.$$

Если выполняется равенство

$$A_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\lambda} \alpha_{\nu\sigma} A'_{\lambda\sigma},$$

то

$$F' = A'_{\lambda\sigma} B'_\lambda C'_\sigma = A_{\mu\nu} B_\mu C_\nu = F.$$

Таким образом, если $F = F'$, то $A_{\mu\nu}$ – тензор второго ранга.

§ 8. Преобразования Лоренца для электромагнитного поля

8.1. Формулы преобразования Лоренца для четырехмерного векторного потенциала

Электромагнитное поле характеризуется двумя величинами $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (или $\vec{A}$ и φ)

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}.$$

Выясним, как изменится поле при переходе от одной инерциальной системы отсчета (ИСО) к другой. Получим формулы преобразования Лоренца для четырехмерного векторного потенциала A_μ

$$A_\mu = (A_1, A_2, A_3, A_4) = (A_x, A_y, A_z, i\varphi). \quad (8.1)$$

Пусть в системе K' потенциал A'_μ известен. Требуется найти потенциал A_μ в системе K .

Для вектора в четырехмерном пространстве известен закон преобразования компонент (7.4) – прямые преобразования Лоренца. Значит, справедливо выражение

$$A_\mu = \alpha_{\mu\nu} A'_\nu, \quad (8.2)$$

где $\alpha_{\mu\nu}$ – матрица преобразования Лоренца (7.3). Введем

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (8.3)$$

Тогда

$$\alpha_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\frac{V}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\frac{V}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

Получим формулы преобразований Лоренца для компонент вектора потенциала.

Пусть $\mu = 1$.

$$A_1 = \alpha_{1\nu} A'_\nu = \alpha_{11} A'_1 + \alpha_{12} A'_2 + \alpha_{13} A'_3 + \alpha_{14} A'_4.$$

Согласно (8.4) $\alpha_{12} = \alpha_{13} = 0$, $\alpha_{11} = \gamma$, $\alpha_{14} = -i\frac{V}{c}\gamma$. С учетом (8.1) получим

$$A_x = \gamma(A'_x + \frac{V}{c}\varphi').$$

Рассуждая аналогично, можно получить, что при $\mu = 2$

$$A_y = A'_y,$$

а при $\mu = 3$

$$A_z = A'_z.$$

Рассмотрим $\mu = 4$:

$$A_4 = \alpha_{4\nu} A'_\nu = \alpha_{41} A'_1 + \alpha_{42} A'_2 + \alpha_{43} A'_3 + \alpha_{44} A'_4.$$

В соответствии с (8.4) и (8.1) имеем

$$i\varphi = \gamma(i\varphi' + i\frac{V}{c}A'_x).$$

Запишем прямые преобразования Лоренца для четырехмерного вектора потенциала

$$A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c}\varphi'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad A_y = A'_y; \quad A_z = A'_z; \quad \varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c}A'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (8.5)$$

Обратные преобразования Лоренца для четырехмерного вектора потенциала
получим из (8.5) с помощью замены $V \rightarrow -V$:

$$A'_x = \frac{A_x - \frac{V}{c}\varphi}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad A'_y = A_y; \quad A'_z = A_z; \quad \varphi' = \frac{\varphi - \frac{V}{c}A_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (8.6)$$

8.2. Формулы преобразований Лоренца для элементов тензора электромагнитного поля

Тензор электромагнитного поля является антисимметричным тензором, т. е. $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$. Диагональные элементы антисимметричного тензора $F_{\nu\nu} = F_{\mu\mu} = 0$ (Приложение В). Пусть в системе K' тензор электромагнитного поля $F'_{\lambda\sigma}$ известен. Требуется найти тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$.

$$F'_{\lambda\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & F'_{12} & F'_{13} & F'_{14} \\ -F'_{12} & 0 & F'_{23} & F'_{24} \\ -F'_{13} & -F'_{23} & 0 & F'_{34} \\ -F'_{14} & -F'_{24} & -F'_{34} & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.7)$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ -F_{12} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ -F_{13} & -F_{23} & 0 & F_{34} \\ -F_{14} & -F_{24} & -F_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Принимая во внимание вид тензора электромагнитного поля, надо найти формулы преобразования Лоренца для элементов $F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{23}, F_{24}, F_{34}$. Компоненты тензора второго ранга в соответствии с (7.10) преобразуются по закону

$$A_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\lambda} \alpha_{\nu\sigma} A'_{\lambda\sigma}.$$

Пусть $\mu = 1, \nu = 2$

$$F_{12} = \alpha_{1\lambda} \alpha_{2\sigma} F'_{\lambda\sigma} = \alpha_{1\lambda} (\alpha_{21} F'_{\lambda 1} + \alpha_{22} F'_{\lambda 2} + \alpha_{23} F'_{\lambda 3} + \alpha_{24} F'_{\lambda 4}).$$

Согласно (8.4) единственный отличный от нуля элемент второй строки матрицы α – это элемент $\alpha_{22} = 1$. Получаем

$$F_{12} = \alpha_{1\lambda} F'_{\lambda 2} = \alpha_{11} F'_{12} + \alpha_{12} F'_{22} + \alpha_{13} F'_{32} + \alpha_{14} F'_{42}.$$

Подставив соответствующие значения элементов матрицы преобразования Лоренца и тензора электромагнитного поля, получаем преобразование Лоренца для элемента F_{12}

$$F_{12} = \gamma \left(F'_{12} - i \frac{V}{c} F'_{42} \right).$$

Аналогично получаем преобразования Лоренца для других элементов. Окончательно преобразования Лоренца для элементов тензора электромагнитного поля имеют вид

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{F'_{12} - i \frac{V}{c} F'_{42}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; & F_{13} &= \frac{F'_{13} - i \frac{V}{c} F'_{43}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; & F_{14} &= F'_{14}; \\ F_{23} &= F'_{23}; & F_{24} &= \frac{F'_{24} - i \frac{V}{c} F'_{12}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; & F_{34} &= \frac{F'_{34} - i \frac{V}{c} F'_{13}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Напомним, что остальные элементы определяются исходя из свойств антисимметричного тензора $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$ и $F_{\mu\mu} = 0$.

8.3. Преобразования векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой

Электромагнитное поле относительно, т. е. изменяется при переходе от одной системы координат к другой. Соотношения (8.5), (8.6) характеризуют изменение векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля при переходе от одной системы координат к другой. Выясним, как преобразуются компоненты векторов напряженности электрического и

магнитного поля. Для этого воспользуемся выражением (5.7), определяющим тензор электромагнитного поля через компоненты векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}.$$

В движущейся системе координат тензор электромагнитного поля

$$F'_{\lambda\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & H'_z & -H'_y & -iE'_x \\ -H'_z & 0 & H'_x & -iE'_y \\ H'_y & -H'_x & 0 & -iE'_z \\ iE'_x & iE'_y & iE'_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись преобразованиями (8.8) и подставив соответствующие выражения для компонент тензоров $F_{\mu\nu}$ и $F'_{\lambda\sigma}$ из приведенных выше соотношений, получаем прямые преобразования Лоренца для компонент векторов напряженности электрического и магнитного поля

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x; & E_y &= \frac{E'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; & E_z &= \frac{E'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \\ H_x &= H'_x; & H_y &= \frac{H'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; & H_z &= \frac{H'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Таким образом, векторы напряженности электромагнитного поля являются относительными величинами. В частности, в одной системе координат электрическое или магнитное поле может быть равным нулю и присутствовать в другой системе координат. Например, пусть в системе K' : $\vec{H}' = 0$; $\vec{E}' \neq 0$. Найдем напряженности поля в системе K . Согласно (8.9),

$$E_x = E'_x; \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1-V^2/c^2}};$$

$$H_x = H'_x = 0; \quad H_y = \frac{-\frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad H_z = \frac{\frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Очевидно, что в системе K' : $\vec{H}' = 0$, а в системе K : $\vec{H} \neq 0$.

Получим обратные преобразования Лоренца для компонент векторов напряженности электрического и магнитного полей, заменив $V \rightarrow -V$:

$$E'_x = E_x; \quad E'_y = \frac{E_y - \frac{V}{c}H_z}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad E'_z = \frac{E_z + \frac{V}{c}H_y}{\sqrt{1-V^2/c^2}};$$

$$H'_x = H_x; \quad H'_y = \frac{H_y + \frac{V}{c}E_z}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad H'_z = \frac{H_z - \frac{V}{c}E_y}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \quad (8.10)$$

8.4. Формулы преобразований Лоренца для векторов напряженностей электромагнитного поля в нерелятивистском случае

Рассмотрим нерелятивистский случай, т.е. будем полагать, что $1 - V^2/c^2 \approx 1$. Преобразуем выражения (8.9) для этого случая. Тогда формулы прямых преобразований Лоренца примут вид

$$E_x = E'_x; \quad E_y = E'_y + \frac{V}{c}H'_z; \quad E_z = E'_z - \frac{V}{c}H'_y;$$

$$H_x = H'_x; \quad H_y = H'_y - \frac{V}{c}E'_z; \quad H_z = H'_z + \frac{V}{c}E'_y. \quad (8.11)$$

Переформулируем (8.11) в векторной форме. При этом учтем, что преобразования Лоренца записываются нами для случая, когда скорость одной системы отсчета относительно другой направлена вдоль оси OX , т.е. $\vec{V} = \vec{x}_0 V$. Воспользуемся следующим вспомогательным выражением:

$$[\vec{H}', \vec{V}] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ H'_x & H'_y & H'_z \\ V & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \cdot 0 + \vec{y}_0 \cdot H'_z \cdot V - \vec{z}_0 \cdot H'_y \cdot V.$$

Тогда прямые преобразования Лоренца в векторной форме запишутся так:

$$\vec{E} = \vec{E}' + \frac{1}{c}[\vec{H}', \vec{V}]; \quad \vec{H} = \vec{H}' - \frac{1}{c}[\vec{E}', \vec{V}], \quad (8.12)$$

а обратные преобразования Лоренца в векторной форме

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{V}, \vec{H}]; \quad \vec{H}' = \vec{H} - \frac{1}{c}[\vec{V}, \vec{E}]. \quad (8.13)$$

Рассмотрим два частных случая.

1) Пусть в системе K' : $\vec{H}' = 0$; $\vec{E}' \neq 0$. Тогда, исходя из (8.12), в системе K получим

$$\vec{E} = \vec{E}'; \quad \vec{H} = -\frac{1}{c}[\vec{E}, \vec{V}].$$

2) Пусть в системе K' : $\vec{H}' \neq 0$; $\vec{E}' = 0$. Тогда в K

$$\vec{H} = \vec{H}'; \quad \vec{E} = \frac{1}{c}[\vec{H}, \vec{V}].$$

В обоих случаях в силу свойств векторного произведения векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны. Следовательно, если в некоторой системе координат электрическое или магнитное поле равно нулю, то во всех других системах координат векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны. Справедливо и обратное: если в некоторой системе координат векторы напряженности $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны (но не равны друг другу), то существует такая система координат, в которой поле или чисто электрическое, или чисто магнитное.

§ 9. Инварианты электромагнитного поля

9.1. Условие инвариантности для потенциалов электромагнитного поля

Инвариант – это величина, которая не изменяется при переходе от одной системы координат к другой.

Как получено ранее (соотношение (7.7)), скалярное произведение двух произвольных векторов является инвариантом. В случае равенства этих векторов имеем условие (7.8) инвариантности квадрата длины вектора

$$A_\mu A_\mu = A'_\nu A'_\nu = \text{inv}.$$

Пусть вектор A_μ – 4-вектор потенциала. Предположим, что в системе K задан потенциал $A_\mu = (\vec{A}, i\varphi)$, а в K' – потенциал $A'_\nu = (\vec{A}', i\varphi')$. Найдем квадраты длин этих векторов:

$$A_\mu A_\mu = A^2 + (i\varphi)^2 = A^2 - \varphi^2,$$

$$A'_\nu A'_\nu = A'^2 + (i\varphi')^2 = A'^2 - \varphi'^2.$$

В силу (7.8) имеем

$$A^2 - \varphi^2 = A'^2 - \varphi'^2 = \text{inv}, \quad (9.1)$$

то есть разность квадратов векторного и скалярного потенциалов есть инвариант относительно преобразований Лоренца.

9.2. Сведения из тензорного анализа, используемые для отыскания инвариантов электромагнитного поля

Найдем инварианты для векторов напряженности электрического и магнитного поля. Пусть в системе K заданы векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$, а в K' – векторы $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$.

Из тензорного исчисления известно следующее. Пусть $A_{\mu\nu}$ – симметричный (антисимметричный) тензор второго ранга. Такой тензор можно привести к диагональному виду (главное значение тензора). Для

этого строится характеристическое уравнение, решениями которого будут диагональные элементы (главные значения) тензора. Характеристическое уравнение представляет собой равенство нулю определителя

$$|A_{\mu\nu} - \lambda \delta_{\mu\nu}| = 0,$$

где

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Расписав определитель, получаем полином степени не старше четвертой относительно λ

$$a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5 = 0, \quad (9.2)$$

корни которого λ_i и будут главными значениями тензора.

Главные значения тензора инвариантны относительно преобразований Лоренца, значит, и коэффициенты a_i уравнения (9.2) тоже инвариантны относительно преобразований Лоренца ($i = 1, 2, 3, 4$).

9.3. Получение и анализ инвариантов векторов напряженности электромагнитного поля

Тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ является антисимметричным.

Построим для него характеристическое уравнение

$$|F_{\mu\nu} - \lambda \delta_{\mu\nu}| = 0,$$

корни которого будут инвариантны относительно преобразований Лоренца, следовательно, инвариантами будут и коэффициенты, стоящие в уравнении при λ . Эти коэффициенты будут выражаться через компоненты тензора $F_{\mu\nu}$, которые, в свою очередь, определяются через компоненты векторов напряженности электрического и магнитного поля. Эти обстоятельства позволят нам определить инварианты векторов напряженности электро-

магнитного поля. Учитывая явный вид тензора электромагнитного поля (5.7)

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix},$$

получим характеристическое уравнение в виде равенства нулю определителя

$$\begin{vmatrix} -\lambda & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & -\lambda & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & -\lambda & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Расписав определитель, получаем характеристическое уравнение в виде биквадратного уравнения

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \lambda^2(H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) - \\ & -(E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z)E_x H_x - \\ & -(E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z)E_y H_y - \\ & -(E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z)E_z H_z = 0. \end{aligned}$$

Коэффициент при λ^2 представляет собой разность квадратов длин векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, а свободный член – квадрат их скалярного произведения

$$\lambda^4 + \lambda^2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2) - \lambda^0(\vec{E}, \vec{H})^2 = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения инвариантны относительно преобразований Лоренца

$$\begin{aligned} \vec{H}^2 - \vec{E}^2 &= \text{inv}; \\ (\vec{E}, \vec{H})^2 &= \text{inv} \Rightarrow (\vec{E}, \vec{H}) = \text{inv}. \end{aligned}$$

Получаем инварианты напряженностей электромагнитного поля

$$\begin{aligned} \vec{H}^2 - \vec{E}^2 &= \text{inv}; \\ (\vec{E}, \vec{H}) &= \text{inv}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

При этом первое из соотношений (9.3) носит название первого инварианта, а второе – второго инварианта электромагнитного поля.

Таким образом, если в системе K заданы векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$, а в K' – векторы $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$, то имеют место равенства

$$\begin{aligned} \vec{H}^2 - \vec{E}^2 &= \vec{H}'^2 - \vec{E}'^2; \\ (\vec{E}, \vec{H}) &= (\vec{E}', \vec{H}'). \end{aligned}$$

Проанализируем полученные выражения.

1) Рассмотрим в качестве примера плоскую электромагнитную волну.

Для плоской волны выполняется соотношение $|\vec{E}| = |\vec{H}|$. Тогда первый инвариант равен нулю: $\vec{H}^2 - \vec{E}^2 = 0$, и это равенство будет справедливо во всех системах отсчета. Очевидно, это свойство плоской волны сохраняется в любой инерциальной системе отсчета. Таким образом, если в какой-либо системе отсчета $|\vec{E}| = |\vec{H}|$, то длины этих векторов будут равны и в любой другой системе отсчета.

2) Другим свойством плоской волны является тот факт, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны, т. е. равен нулю второй инвариант $(\vec{E}, \vec{H}) = 0$. Следовательно, и в любой другой системе отсчета такое скалярное произведение будет равно нулю, и это свойство плоских волн сохраняется. Таким образом, если в какой-либо системе отсчета электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны, то они перпендикулярны и во всякой другой инерциальной системе отсчета.

3) Если в одной системе отсчета электромагнитное поле является преимущественно магнитным, $|\vec{H}| > |\vec{E}|$ (преимущественно электрическим,

$|\vec{E}| > |\vec{H}|$), то оно будет преимущественно магнитным (электрическим) и в любой другой системе координат. Этот вывод является следствием первого инварианта, поскольку выражение $\vec{H}^2 - \vec{E}^2$ должно сохранять свой знак во всех системах координат.

4) Второй инвариант также должен сохранять свой знак во всех системах координат. Поэтому если в какой-либо системе координат векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ образуют острый (тупой) угол, то они будут образовывать острый (тупой) угол и во всякой другой системе координат.

5) Преобразованиями Лоренца всегда можно достичь того, чтобы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ получили любые значения, удовлетворяющие только условию: чтобы $\vec{H}^2 - \vec{E}^2$ и $(\vec{E}, \vec{H})$ имели заданные определенные значения. Исключением является случай, когда оба инварианта равны нулю. В этом случае $\vec{E}$ и $\vec{H}$ во всех системах отсчета равны по величине и взаимно перпендикулярны по направлению.

6) Если $(\vec{E}, \vec{H}) = 0$, то всегда можно найти такую систему отсчета, в которой $\vec{E} = 0$ или $\vec{H} = 0$ (в зависимости от знака $\vec{H}^2 - \vec{E}^2$), т. е. поле является чисто электрическим или чисто магнитным. Справедливо и обратное: если в какой-либо системе отсчета $\vec{E} = 0$ или $\vec{H} = 0$, то во всякой другой системе отсчета $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны.

9.4. Первый инвариант электромагнитного поля в виде тензора $F_{\mu\nu}$

Запишем первый инвариант в четырехмерной форме. Тензор электромагнитного поля имеет вид (5.7). Найдем $F_{\mu\nu}^2$.

$$F_{\mu\nu}^2 = F_{\mu\nu} \cdot F_{\mu\nu} = \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\nu=1}^4 F_{\mu\nu} \cdot F_{\mu\nu} = H_z^2 + H_y^2 - E_x^2 + H_z^2 + H_x^2 - E_y^2 + H_y^2 + H_x^2 - E_z^2 - E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2).$$

Получаем, что

$$F_{\mu\nu}^2 = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2) = \text{inv}. \quad (9.4)$$

§ 10. Плотность зарядов.

Четырехмерный вектор плотности тока

10.1. Проблемы, возникающие при попытке описать заряженную материальную точку в терминах плотности заряда. Понятие плотности заряда

До сих пор мы рассматривали только точечные заряды – материальные точки, обладающие кроме массы еще и зарядом.

Все имеющиеся в природе заряды можно считать точечными, т. к. элементарные частицы, по сути, являются точечными зарядами, а всякую сложную систему зарядов можно рассматривать как совокупность элементарных (точечных) зарядов.

Рассмотрим объем V , в котором заряд Q распределен непрерывно. Введем плотность заряда ρ таким образом, что

$$Q = \int_V \rho dV. \quad (10.1)$$

Заряд элементарного объема $dQ = \rho dV$. Тогда плотность заряда определим так:

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}. \quad (10.2)$$

В общем случае плотность заряда есть функция координат и времени $\rho = \rho(\vec{r}, t)$.

В действительности заряды являются точечными. Материальная точка не имеет объема, т. е. $\Delta V \rightarrow 0$, поэтому плотность заряда ρ , определенная согласно (10.2), будет стремиться к бесконечности.

Это происходит потому, что мы пытаемся определить плотность дискретного заряда, используя понятие плотности заряда, введенное для не-

прерывного распределения заряда. Для точечного заряда плотность заряда равна нулю везде, кроме точки, где находится сам заряд, в этой точке $\rho \rightarrow \infty$. Следовательно, ρ для точечного заряда можно записать с помощью дельта-функции, которая позволит связать дискретное распределение зарядов с непрерывным.

10.2. Основные свойства одномерной дельта-функции Дирака

1) По определению

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ \infty, & x = 0. \end{cases} \quad (10.3)$$

δ -функция интегрируема в бесконечных пределах, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (10.4)$$

Это дает возможность представить модель δ -функции в виде прямоугольника, основание которого стремится к нулю при равенстве единице его площади.

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0, & x \neq a; \\ \infty, & x = a. \end{cases} \quad (10.5)$$

2) Условие нормировки

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x-a) dx = \begin{cases} 1, & a \in (x_1, x_2); \\ 0, & a \notin (x_1, x_2). \end{cases} \quad (10.6)$$

3)

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta(x-a) dx = \begin{cases} f(a), & a \in (x_1, x_2); \\ 0, & a \notin (x_1, x_2). \end{cases} \quad (10.7)$$

4) δ -функция является четной функцией

$$\delta(x) = \delta(-x). \quad (10.8)$$

10.3. Свойства трехмерной δ -функции

Введем в рассмотрение радиус-вектор $\vec{r} = \vec{x}_0 x + \vec{y}_0 y + \vec{z}_0 z$ и произвольный вектор $\vec{a} = \vec{x}_0 a_x + \vec{y}_0 a_y + \vec{z}_0 a_z$.

1) Трехмерную δ -функцию будем определять так:

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z); \quad (10.9)$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{a}) = \delta(x - a_x)\delta(y - a_y)\delta(z - a_z). \quad (10.10)$$

2) Условие нормировки

$$\begin{aligned} \int_V \delta(\vec{r} - \vec{a}) dV &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \delta(x - a_x)\delta(y - a_y)\delta(z - a_z) dx dy dz = \\ &= \begin{cases} 1, & \vec{a} \in V; \\ 0, & \vec{a} \notin V. \end{cases} \end{aligned} \quad (10.11)$$

3)

$$\int_V f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{a}) dV = \begin{cases} f(\vec{a}), & \vec{a} \in V; \\ 0, & \vec{a} \notin V. \end{cases} \quad (10.12)$$

4) δ -функция является четной функцией

$$\delta(\vec{r}) = \delta(-\vec{r}). \quad (10.13)$$

10.4. Определение плотности заряда с помощью дельта-функции

Рассмотрим объем V , в котором сосредоточены точечные заряды e_i , характеризующиеся радиус-векторами $\vec{r}_i$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения – точки, в которой определяем плотность заряда. Введем плотность заряда, воспользовавшись понятием δ -функции

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (10.14)$$

Для введенной таким образом плотности зарядов выполняется условие

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \infty, & \vec{r} = \vec{r}_i; \\ 0, & \vec{r} \neq \vec{r}_i. \end{cases}$$

Найдем полный заряд Q объема V

$$Q = \int_V \rho dV = \int_V \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV = \sum_{(i)} e_i \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV = \sum_{(i)} e_i.$$

Здесь мы воспользовались свойством дельта-функции (10.11), поскольку $\vec{r}_i \in V$.

Выясним, является ли плотность заряда инвариантом относительно преобразований Лоренца. Заряд объема dV определяется таким образом:

$$dQ = \rho dV. \quad (10.15)$$

Заряд dQ является инвариантом, а элементарный объем dV – не инвариант (что следует из преобразований Лоренца). Следовательно, ρ не является инвариантом.

10.5. Четырехмерный вектор плотности тока, его составляющие

Рассмотрим в качестве dV сколь угодно малый объем. dQ – заряд dV . В классической физике плотность тока вводилась таким образом:

$$\vec{j} = \rho \vec{v}, \quad (10.16)$$

где $\vec{v}$ – скорость движения заряженных частиц.

Домножим (10.15) на dx_μ

$$dQ dx_\mu = \rho dV dx_\mu = \rho dV dt \frac{dx_\mu}{dt}. \quad (10.17)$$

Величина, стоящая слева, является 4-вектором. Значит и справа должен стоять 4-вектор. $dV dt$ является скаляром. Введем вектор плотности тока так:

$$j_\mu = \rho \frac{dx_\mu}{dt}; \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (10.18)$$

По месту расположения плотности тока в уравнении (10.17) j_μ является 4-вектором.

Рассмотрим последовательно $\mu = 1, 2, 3, 4$ ($x_\mu = (x, y, z, ict)$).

$$\mu = 1 \quad j_1 = \rho \frac{dx_1}{dt} = \rho \frac{dx}{dt} = \rho v_x = j_x;$$

$$\mu = 2 \quad j_2 = \rho \frac{dx_2}{dt} = \rho \frac{dy}{dt} = \rho v_y = j_y;$$

$$\mu = 3 \quad j_3 = \rho \frac{dx_3}{dt} = \rho \frac{dz}{dt} = \rho v_z = j_z.$$

Если каждое из этих уравнений домножить на соответствующий орт декартовой системы координат и сложить, то получим классическое выражение для трехмерного вектора плотности тока (10.16)

$$\vec{j} = \rho \vec{v}.$$

Здесь $\vec{v}$ – скорость движения объема dV .

$$\mu = 4 \quad j_4 = \rho \frac{dx_4}{dt} = \rho \frac{d(ict)}{dt} = ic\rho.$$

Окончательно имеем, что 4-вектор плотности тока равен

$$j_\mu = (\vec{j}, ic\rho). \quad (10.19)$$

Трехмерный вектор плотности тока $\vec{j}$ согласно (10.16) с учетом (10.14) можно записать так:

$$\vec{j} = \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (10.20)$$

§ 11. Закон сохранения заряда. Уравнение непрерывности

11.1. Приращение во времени величины заряда, содержащегося в объеме, с использованием понятия плотности заряда

Рассмотрим объем V , окруженный поверхностью S . Внутри объема имеется заряд, распределенный с плотностью $\rho(\vec{r}, t)$. Полагаем, что заряды могут свободно проходить через поверхность S . Введем в рассмотрение также единичный вектор внешней нормали к поверхности $\vec{n}$ и радиус-вектор точки наблюдения $\vec{r}$.

Полный заряд Q внутри объема V определяется с использованием понятия плотности заряда по формуле (10.1)

$$Q = \int_V \rho dV.$$

Для определения изменения со временем заряда в объеме необходимо найти производную заряда по времени

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV. \quad (11.1)$$

Поскольку $\partial t > 0$, то и $\partial Q > 0$, т. е. мы рассматриваем приращение (увеличение) заряда в объеме.

11.2. Приращение во времени величины заряда в том же объеме V с использованием понятия плотности тока

С другой стороны, изменение заряда в объеме можно определить, используя понятие плотности тока. Изменение заряда в объеме за единицу времени определяется количеством заряда, выходящего из объема V в единицу времени или входящего в объем V за единицу времени. Используя определение скорости и плотности заряда, можно утверждать, что за единицу времени через элементарную поверхность $d\vec{S}$ пройдет заряд, равный $\rho \vec{v} d\vec{S}$. Здесь $\vec{v}$ - скорость заряда в точке пространства, где находится $d\vec{S}$. Учтем, что $d\vec{S} = dS \vec{n}$, где $\vec{n}$ - единичный вектор внешней нормали к поверхности. Это означает, что выражение $\rho \vec{v} d\vec{S}$ положительно, если заряд выходит из объема V , и отрицательно, если заряд входит в него.

Полный заряд, проходящий через замкнутую поверхность S за единицу времени, определяется так:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \oint_S \rho \vec{v} d\vec{S}.$$

Знак «минус» перед интегралом появился потому, что нас интересует приращение заряда в объеме. Воспользуемся определением трехмерного

вектора плотности тока $\vec{j} = \rho \vec{v}$. Тогда приращение заряда в объеме запишется следующим образом:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \oint_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (11.2)$$

Введем понятие полного тока как количество заряда, выходящего через всю поверхность S за единицу времени

$$I = \oint_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (11.3)$$

Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -I.$$

11.3. Закон сохранения заряда в интегральной и дифференциальной форме

Приравняем выражения (11.1), (11.2) и получим уравнение непрерывности в интегральной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (11.4)$$

Физический смысл этого соотношения – закон сохранения заряда.

Получим закон сохранения заряда в дифференциальной форме, используя теорему Остроградского–Гаусса

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV.$$

Подставим это выражение в (11.4)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = 0.$$

Поменяем порядок интегрирования и дифференцирования в первом интеграле и запишем все под один интеграл

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right) dV = 0.$$

Поскольку интегрирование производится по произвольному объему, то нулю равно подынтегральное выражение. Получаем уравнение непрерывности в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0. \quad (11.5)$$

11.4. Закон сохранения заряда в релятивистски-ковариантной форме

Запишем уравнение непрерывности в релятивистски-ковариантной форме

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (11.6)$$

$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}$ – 4-дивергенция 4-вектора $j_\mu = (\vec{j}, ic\rho)$. Убедимся в справедливости (11.6)

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial (ic\rho)}{\partial (ict)} = \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Убедимся, что уравнение непрерывности автоматически удовлетворяется, если ρ представлено через δ – функцию. Плотность заряда имеет вид

$$\rho = \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i),$$

а плотность тока

$$\vec{j} = \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i).$$

Пусть для простоты у нас есть только одна частица с зарядом e и радиус-вектором $\vec{r}_0$

$$\rho = e\delta(\vec{r} - \vec{r}_0),$$

$$\vec{j} = e\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0).$$

Найдем $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, учтем при этом, что $\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial t}$ – скорость заряженной частицы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}_0} \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial t} = \vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}_0}.$$

Поскольку ρ зависит от разности $\vec{r} - \vec{r}_0$, то

$$\frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}_0} = -\frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}} = -\text{grad } \rho.$$

Тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{v} \text{grad } \rho.$$

Воспользуемся векторным тождеством и учтем, что скорость частицы не зависит от координат

$$\text{div } \rho \vec{v} = \rho \text{div } \vec{v} + \vec{v} \text{grad } \rho = \vec{v} \text{grad } \rho;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } \rho \vec{v} = -\text{div } \vec{j}.$$

Таким образом, получаем, что для рассматриваемого случая выполняется уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0.$$

§ 12. Функционал действия для электромагнитного поля

12.1. Функционал действия для физической системы «заряженная частица + электромагнитное поле»

Как получено в § 1, функционал действия для заряженной частицы, движущейся в заданном электромагнитном поле, имеет вид (1.1)

$$S(A_\mu, x_\mu) = S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu), \quad (12.1)$$

где

$$S_m = S_m(x_\mu) = -m_0 c \int_a^b \sqrt{-dx_\mu^2}$$

– функционал действия для свободной частицы, а

$$S_{mf} = S_{mf}(A_\mu, x_\mu) = \frac{e}{c} \int_a^b A_\mu dx_\mu$$

– функционал действия, обусловленный взаимодействием заряженной частицы и электромагнитного поля.

Если речь идет о системе частиц, то в силу аддитивности функционала действия функционал действия системы равен сумме функционалов действия каждой частицы в отдельности

$$S_m = \sum_{(i)} \left(-m_{0_i} c \int_{a_i}^{b_i} \sqrt{-dx_{\mu_i}^2} \right), \quad (12.2)$$

$$S_{mf} = \sum_{(i)} \frac{e_i}{c} \int_{a_i}^{b_i} A_{\mu_i} dx_{\mu_i}. \quad (12.3)$$

Здесь суммирование происходит по всем частицам системы, произвольная i -я частица характеризуется массой m_{0_i} , зарядом e_i , a_i, b_i – соответственно ее начальное и конечное положение, x_{μ_i} описывает ее траекторию, а A_{μ_i} – потенциал поля в той точке пространства, где находится i -я частица.

Рассмотрим теперь систему, состоящую из электромагнитного поля и находящихся в нем частиц.

Электромагнитное поле является объективной реальностью, т. е. оно существует независимо от того, внесены в него пробные заряды или нет, и более того, будучи однажды возбужденным источниками в виде электромагнитной волны, поле может существовать даже тогда, когда источники удалены на бесконечность. Поэтому необходимо оперировать с полем как с реальным объектом. В данном случае мы приписываем ему функционал

действия S_f , зависящий только от свойств электромагнитного поля и характеризующий поле в отсутствие заряженных частиц.

До тех пор, пока мы интересовались только движением зарядов в данном электромагнитном поле, часть функционала действия, характеризующая само поле, в рассмотрении не учитывалась, поскольку функционал действия S_f не зависит от свойств частиц и, следовательно, не может влиять на вывод уравнений движения заряженных частиц в заданном электромагнитном поле. При выводе уравнений, определяющих само поле, учет S_f обязателен. Без учета S_f мы получили только первую пару уравнений Максвелла, которых не достаточно для определения поля, система уравнений получается незамкнутой.

12.2. Часть функционала действия, которая зависит только от поля

Сформулируем исходные предпосылки, на основе которых будем определять функционал действия для электромагнитного поля, необходимый для получения уравнений электромагнитного поля.

1) Будем исходить из принципа суперпозиции, которому, как известно из опыта, подчиняется электромагнитное поле: поле, создаваемое системой зарядов, представляет собой результат векторного сложения полей, которые создаются каждым из зарядов. Это значит, что напряженности результирующего поля в каждой точке равны векторной сумме напряженностей в этой точке каждого из полей в отдельности.

2) Всякое решение уравнений поля должно являться полем, которое может быть осуществлено в природе. Согласно принципу суперпозиции сумма любых таких полей также должна быть полем, которое может быть осуществлено в природе, т. е. должно удовлетворять уравнениям поля.

3) Линейные дифференциальные уравнения обладают таким свойством, что сумма любых их решений также является решением. Следовательно, уравнения поля должны быть линейными дифференциальными уравнениями.

4) Поскольку функционал действия записывается в виде интеграла, то из сказанного выше следует, что под знаком интеграла должно стоять выражение квадратичное по полю. Только в этом случае уравнения будут линейными, поскольку уравнения поля получаются варьированием функционала действия, при варьировании степень подынтегрального выражения понижается на единицу.

5) В выражение для S_f не могут входить потенциалы поля, т. к. они не определены однозначно (4.2) (в определении S_{mf} эта неоднозначность не была существенной).

6) Функционал действия S_f должен быть скаляром, тогда и подынтегральное выражение должно быть скаляром. И этот скаляр должен характеризовать поле. Этим требованиям удовлетворяет $F_{\mu\nu}^2$

$$F_{\mu\nu}^2 = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2). \quad (12.4)$$

Таким образом, функционал действия для электромагнитного поля пишется в виде

$$S_f = a \int_V \int_{t_a}^{t_b} F_{\mu\nu}^2 dV dt, \quad (12.5)$$

где $a = \text{const}$.

Докажем, что a должно быть отрицательным. Под интегралом стоит выражение (12.4), поле $\vec{E}$ согласно (2.19)

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

т. е. содержит $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, а $\vec{E}^2$ — соответственно $\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2$. Пусть $a > 0$, и $\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2$

входит в подынтегральное выражение с минусом. Тогда достаточно быстрым изменением векторного потенциала $\vec{A}$ во времени всегда можно сде-

лать $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ сколь угодно большим, следовательно, S_f будет отрицательным со сколь угодно большим абсолютным значением

$$\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2 \rightarrow \infty \Rightarrow S_f < 0; \quad |S_f| \rightarrow \infty.$$

В этом случае S_f не будет иметь минимума, как того требует принцип наименьшего действия ($\delta S = 0$ — условие минимума функционала действия). Следовательно, $a < 0$.

Численное значение a определяется выбором единиц для измерения поля. После выбора a (т. е. выбора единиц измерения поля) однозначно определяются и единицы измерения всех остальных электромагнитных величин.

Мы пользуемся гауссовской системой единиц, в которой константа a является безразмерной и численно равна $a = -\frac{1}{16\pi}$. Тогда

$$S_f = -\frac{1}{16\pi} \int_V \int_{t_a}^{t_b} F_{\mu\nu}^2 dV dt. \quad (12.6)$$

Здесь $dV = dx dy dz$.

Учтем в (12.6), что согласно (12.4) $F_{\mu\nu}^2 = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2)$. Тогда

$$S_f = \frac{1}{8\pi} \int_V \int_{t_a}^{t_b} (\vec{E}^2 - \vec{H}^2) dV dt. \quad (12.7)$$

Найдем функцию Лагранжа электромагнитного поля. По определению (D.2)

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L dt.$$

Сравнивая последнюю формулу с (12.7), получим, что функция Лагранжа электромагнитного поля имеет вид

$$L_f = \frac{1}{8\pi} \int_V (\vec{E}^2 - \vec{H}^2) dV. \quad (12.8)$$

Перейдем в (12.6) к интегрированию по четырехмерному объему. Для этого выразим dt через $d\tau$

$$d\tau = icdt; \quad dt = d\tau / ic = -\frac{i}{c} d\tau.$$

Введем в рассмотрение элементарный четырехмерный объем $d\Omega = dx dy dz d\tau$ и запишем (12.6) в виде интеграла по четырехмерному объему Ω

$$S_f = \frac{i}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{\mu\nu}^2 d\Omega. \quad (12.9)$$

12.3. Общий вид функционала действия для системы, состоящей из электромагнитного поля и находящихся в нем заряженных частиц

Таким образом, функционал действия для физической системы, состоящей из электромагнитного поля и находящихся в нем заряженных частиц

$$S(A_\mu, x_\mu) = S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu), \quad (12.10)$$

или в явном виде

$$S = \sum_{(i)} \left(-m_{0_i} c \int_{a_i}^{b_i} \sqrt{-dx_{\mu_i}^2} \right) + \sum_{(i)} \frac{e_i}{c} \int_{a_i}^{b_i} A_{\mu_i} dx_{\mu_i} + \frac{i}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{\mu\nu}^2 d\Omega. \quad (12.11)$$

Заметим, что заряды уже не считаются малыми, как при выводе уравнений движения зарядов в заданном поле. Следовательно, A_μ и $F_{\mu\nu}$ относятся к истинному полю, т. е. внешнему полю вместе с полем, создаваемым самими зарядами. Поэтому A_μ и $F_{\mu\nu}$ зависят от положения и скорости зарядов.

§ 13. Вторая пара уравнений Максвелла

13.1. Полное выражение для функционала действия системы «заряженная частица + электромагнитное поле»

Полное выражение для функционала действия физической системы, состоящей из электромагнитного поля и находящихся в нем заряженных частиц, имеет вид (12.10)

$$S(A_\mu, x_\mu) = S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu)$$

или в явном виде (12.11)

$$S = \sum_{(i)} \left(-m_{0_i} c \int_{a_i}^{b_i} \sqrt{-dx_{\mu_i}^2} \right) + \sum_{(i)} \frac{e_i}{c} \int_{a_i}^{b_i} A_{\mu_i} dx_{\mu_i} + \frac{i}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{\mu\nu}^2 d\Omega.$$

Заметим, что функционал действия является инвариантом относительно преобразований Лоренца.

13.2. Принцип наименьшего действия с использованием полного выражения для функционала действия

Убедимся в том, что при использовании в ПНД полного выражения для функционала действия системы «заряженная частица + электромагнитное поле» сохраняется полученный ранее результат: уравнение движения для зарядов в электромагнитном поле и первая пара уравнений Максвелла.

Исходя из принципа наименьшего действия по Гамильтону, задача формулируется таким образом: рассмотрим точки пространственно-временного континуума a_i и b_i , характеризующие начальное и конечное положение i -й заряженной частицы. Будем полагать эти точки фиксированными, т. е. $\delta x_\mu|_{a_i} = 0$ и $\delta x_\mu|_{b_i} = 0$. Переход из точки a_i в точку b_i осуществляется согласно ПНД так, чтобы $\delta S(x_\mu, A_\mu) = 0$.

Найдем вариацию записанного нами функционала действия

$$\delta S(A_\mu, x_\mu) = \delta \{ S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \} = 0;$$

$$\delta S(A_\mu, x_\mu) = \delta S(A_\mu, x_\mu) \Big|_{A_\mu = \text{const}} + \delta S(A_\mu, x_\mu) \Big|_{x_\mu = \text{const}} = 0. \quad (13.1)$$

В первом слагаемом полагается фиксированным поле, а во втором – траектория движения частиц. Далее «= const» будем для краткости опускать.

Таким образом, получаем вариационную задачу в такой постановке:

$$\begin{aligned} \delta S(A_\mu, x_\mu) &= \delta \{S_m + S_{mf} + S_f\} \Big|_{A_\mu} + \delta \{S_m + S_{mf} + S_f\} \Big|_{x_\mu} = 0; \\ \delta x_\mu \Big|_{a_i} &= 0; \\ \delta x_\mu \Big|_{b_i} &= 0. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \delta S(A_\mu, x_\mu) \Big|_{A_\mu} &= \delta \{S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu)\} \Big|_{A_\mu} = \\ &= \delta S_m(x_\mu) \Big|_{A_\mu} + \delta S_{mf}(A_\mu, x_\mu) \Big|_{A_\mu} + \delta S_f(A_\mu) \Big|_{A_\mu}. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое при постоянном поле равно нулю.

$$\begin{aligned} \delta S(A_\mu, x_\mu) \Big|_{x_\mu} &= \delta \{S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu)\} \Big|_{x_\mu} = \\ &= \delta S_m(x_\mu) \Big|_{x_\mu} + \delta S_{mf}(A_\mu, x_\mu) \Big|_{x_\mu} + \delta S_f(A_\mu) \Big|_{x_\mu}. \end{aligned}$$

В этом выражении первое слагаемое равно нулю при заданных траекториях.

Рассмотрим две вариационные задачи отдельно: при постоянном поле варьируем траектории и при фиксированных траекториях варьируем поле.

Первая вариационная задача формулируется так:

$$\begin{aligned} \delta \{S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu)\} \Big|_{A_\mu} &= 0; \\ \delta x_\mu \Big|_{a_i} &= 0; \\ \delta x_\mu \Big|_{b_i} &= 0. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Эта задача уже решалась в § 5. Ее результатом было уравнение движения заряженной частицы в заданном электромагнитном поле, записанное в релятивистски-ковариантной форме (5.4)

$$m_0 c \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u_\nu,$$

следствием которого является трехмерное уравнение движения заряженной частицы в заданном поле (2.18)

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = e \vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}]$$

и первая пара уравнений Максвелла (3.3)

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \text{div } \vec{H} &= 0. \end{aligned}$$

Функционал действия электромагнитного поля и находящихся в нем зарядов, в общем случае состоящий из трех слагаемых, для системы, в которой поле полагается заданным, представлен двумя слагаемыми, как это нами и полагалось при решении первой вариационной задачи в § 5. Другими словами, использование полного выражения для функционала действия при постоянном поле дает полученный нами ранее результат.

13.3. Вариационная задача для получения второй пары уравнений Максвелла

Для нахождения уравнений для электромагнитного поля, исходя из ПНД, мы должны считать заданным движение заряженной частицы, а варьировать потенциал поля A_μ . Вторая вариационная задача имеет вид

$$\begin{aligned} \delta \{S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu)\} \Big|_{x_\mu} &= 0; \\ \delta x_\mu \Big|_{a_i} &= 0; \\ \delta x_\mu \Big|_{b_i} &= 0. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Найдем вариацию функционала действия, расписав входящие в него слагаемые явно

$$\delta \left\{ \sum_{(i)} \frac{e_i}{c} \int_{a_i}^{b_i} A_{\mu_i} dx_{\mu_i} + \frac{i}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{\mu\nu}^2 d\Omega \right\} \Big|_{x_\mu} = 0.$$

13.4. Запись выражения для $S_{mf}(A_\mu, x_\mu)$ в виде интеграла по четырехмерному объему

Преобразуем интеграл, входящий в выражение S_{mf} , к четырехмерному виду. Для этого воспользуемся выражением для плотности заряда

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i),$$

тогда полный заряд объема V

$$Q = \int_V \rho dV = \sum_{(i)} e_i.$$

Перепишем выражение S_{mf} и используем свойство δ -функции (10.12)

$$\begin{aligned} S_{mf} &= \sum_{(i)} \frac{e_i}{c} \int_{a_i}^{b_i} A_{\mu_i} dx_{\mu_i} = \frac{1}{c} \int \sum_{(i)} e_i A_{\mu_i} dx_{\mu_i} = \\ &= \frac{1}{ic^2} \int_V dV \int_{t(a_i)}^{t(b_i)} ic \rho(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \frac{dx_\mu}{dt} dt A_\mu. \end{aligned}$$

Учтем, что $icdVdt = dVd(ict) = dVd\tau = d\Omega$. Теперь можно перейти к интегралу по четырехмерному объему. Воспользуемся при этом определением четырехмерного вектора плотности тока (10.18)

$$S_{mf} = \frac{1}{ic^2} \int_{\Omega} \rho \frac{dx_\mu}{dt} A_\mu d\Omega = -\frac{i}{c^2} \int_{\Omega} j_\mu A_\mu d\Omega.$$

Подставим S_{mf} в вариационную задачу

$$\begin{aligned} \delta \left\{ -\frac{i}{c^2} \int_{\Omega} j_\mu A_\mu d\Omega + \frac{i}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{\mu\nu}^2 d\Omega \right\} \Big|_{x_\mu} &= 0, \\ -\frac{i}{c} \int_{\Omega} \delta \left(\frac{1}{c} j_\mu A_\mu - \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}^2 \right) d\Omega \Big|_{x_\mu} &= 0. \end{aligned}$$

Отметим, что $j_\mu = j_\mu(x_\mu)$, плотность тока не зависит от A_μ . Поэтому

$j_\mu \Big|_{x_\mu} = \text{const}$, тогда $\delta(j_\mu A_\mu) = j_\mu \delta A_\mu$. Отсюда

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{c} j_\mu \delta A_\mu - \frac{1}{16\pi} \delta F_{\mu\nu}^2 \right) d\Omega \Big|_{x_\mu} = 0.$$

13.5. Вторая пара уравнений Максвелла в релятивистски-ковариантной форме. Условие излучения в теории поля

Найдем $\delta F_{\mu\nu}^2$, учтем при этом определение тензора электромагнитного

поля (5.3) $F_{\mu\nu} = -\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu}^2 &= 2F_{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = -2F_{\mu\nu} \delta \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right) + 2F_{\mu\nu} \delta \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) = \\ &= -2F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \delta A_\mu + 2F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \delta A_\nu. \end{aligned}$$

Мы поменяли порядок дифференцирования и варьирования. Примем во внимание, что тензор электромагнитного поля является антисимметричным, т. е. $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$:

$$\delta F_{\mu\nu}^2 = -2F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \delta A_\mu - 2F_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \delta A_\nu.$$

Индексы μ и ν являются немymi, поэтому во втором слагаемом можем поменять их местами.

$$\delta F_{\mu\nu}^2 = -2F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \delta A_\mu - 2F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \delta A_\mu = -4F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \delta A_\mu.$$

Вариационная задача примет вид

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{c} j_\mu \delta A_\mu + \frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \delta A_\mu \right) d\Omega \Big|_{x_\mu} = 0.$$

Рассмотрим 4-вектор, заданный произведением $F_{\mu\nu} \delta A_\mu$, в котором по индексу μ осуществляется суммирование, а $\nu = 1, 2, 3, 4$. По определению дивергенция в четырехмерном пространстве от 4-вектора равна $\frac{\partial}{\partial x_\nu} (F_{\mu\nu} \delta A_\mu)$.

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} (F_{\mu\nu} \delta A_\mu) = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \delta A_\mu + F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \delta A_\mu.$$

Нас интересует второе слагаемое. Оно имеет вид

$$F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \delta A_\mu = -\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \delta A_\mu + \frac{\partial}{\partial x_\nu} (F_{\mu\nu} \delta A_\mu).$$

Подставим последнее выражение в вариационную задачу и запишем в виде двух интегралов

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{c} j_\mu \delta A_\mu - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \delta A_\mu \right) \Big|_{x_\mu} d\Omega + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (F_{\mu\nu} \delta A_\mu) \Big|_{x_\mu} d\Omega = 0.$$

Воспользуемся теоремой Остроградского–Гаусса для четырехмерного пространства

$$\int_{\Omega} \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\nu} d\Omega = \int_{S_\Omega} B_\nu dS_\nu.$$

Применим ее ко второму интегралу

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (F_{\mu\nu} \delta A_\mu) d\Omega = \int_{S_\Omega} (F_{\mu\nu} \delta A_\mu) dS_\nu$$

и вернемся к вариационной задаче

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{c} j_\mu \delta A_\mu - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \delta A_\mu \right) d\Omega + \frac{1}{4\pi} \int_{S_\Omega} F_{\mu\nu} \delta A_\mu dS_\nu = 0.$$

Устремим $\Omega \rightarrow \infty$, тогда $S_\Omega \rightarrow \infty$. $F_{\mu\nu}$ определяется через компоненты векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ согласно (5.7). Пределами интегрирования по координатам является бесконечность, где поле стремится к нулю. На преде-

лах интегрирования по времени в начальный и конечный моменты времени вариация потенциалов равна нулю, т. к. по смыслу ПНД потенциалы в начальный и конечный моменты времени заданы. Таким образом, $F_{\mu\nu} \Big|_{S_\Omega \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, следовательно, интеграл по гиперповерхности S_Ω стремится к нулю.

Сформулируем условие излучения электромагнитного поля. Потребуем убывания на бесконечности тензора электромагнитного поля

$$\lim_{R \rightarrow \infty} F_{\mu\nu} = 0 \text{ как } \frac{1}{R^{\alpha+1}} \quad (\alpha > 0).$$

Таким образом, интеграл по поверхности при $S_\Omega \rightarrow \infty$ тоже стремится к нулю. Вариационная задача приобретает вид

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{c} j_\mu - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \right) \delta A_\mu d\Omega = 0.$$

По смыслу ПНД вариация потенциала поля δA_μ произвольна, следовательно, нулю должен равняться коэффициент при δA_μ . Получаем следующее ковариантное уравнение, следствием которого является вторая пара уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu, \quad (13.5)$$

$\mu = 1, 2, 3, 4$, по ν осуществляется суммирование.

13.6. Получение второй пары уравнений Максвелла в дифференциальной форме для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ из релятивистски-ковариантного уравнения

Рассмотрим уравнение (13.5) с учетом явного вида тензора электромагнитного поля (5.7)

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

и 4-вектора плотности тока (10.19)

$$j_\mu = (\vec{j}, ic\rho) = (j_x, j_y, j_z, ic\rho).$$

Воспользуемся также явным видом выражения для $\text{rot } \vec{H}$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{x}_0 \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим $\mu = 1$.

$$\frac{\partial F_{1\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_1;$$

$$\frac{\partial F_{1\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

С учетом явного выражения для $\text{rot } \vec{H}$

$$\left(\text{rot } \vec{H} \right)_x = \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_x.$$

Аналогично $\mu = 2$ дает

$$\left(\text{rot } \vec{H} \right)_y = \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_y;$$

при $\mu = 3$ имеем

$$\left(\text{rot } \vec{H} \right)_z = \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_z.$$

Домножив каждое из этих уравнений на соответствующий орт и сложив, получаем следующее уравнение:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Пусть $\mu = 4$.

$$\frac{\partial F_{4\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_4;$$

$$\frac{\partial F_{4\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{44}}{\partial x_4} = i \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = i \text{div } \vec{E}.$$

Учтем, что $j_4 = ic\rho$, тогда получим уравнение

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho.$$

Таким образом, имеем вторую пару уравнений Максвелла в дифференциальной форме

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \\ \text{div } \vec{E} &= 4\pi\rho. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Две пары уравнений Максвелла (3.3), (13.6) полностью определяют электромагнитное поле и являются основными уравнениями электродинамики.

13.7. Вторая пара уравнений Максвелла в интегральной форме, их физическая интерпретация

Получим вторую пару уравнений Максвелла в интегральной форме. Введем в рассмотрение произвольный объем V , ограниченный поверхностью S , а также единичный вектор внешней нормали к поверхности $\vec{n}$. Проинтегрируем второе из уравнений (13.6) по объему

$$\int_V \text{div } \vec{E} dV = 4\pi \int_V \rho dV.$$

Согласно (10.1)

$$Q = \int_V \rho dV,$$

где Q – полный заряд объема V . Применим теорему Остроградского–Гаусса (А.37)

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \oint_S \vec{E} d\vec{S},$$

$d\vec{S} = \vec{n}dS$. Тогда интегральная форма второго уравнения (13.6) имеет вид

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q. \quad (13.7)$$

Поток электрического поля через замкнутую поверхность равен умноженному на 4π полному заряду, находящемуся в объеме, ограниченном этой поверхностью. Интегральная формулировка (13.7) второго из уравнений (13.6) соответствует известному экспериментальному закону Кулона.

Рассмотрим первое уравнение (13.6). Проинтегрируем его по некоторой замкнутой поверхности S .

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S \left\{ \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} d\vec{S}.$$

Применим к левой части теорему Стокса

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{S} = \oint_L \vec{H} d\vec{l},$$

где $d\vec{l} = dl\vec{\tau}$, $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к контуру.

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \left\{ \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} d\vec{S}. \quad (13.8)$$

По месту в уравнении величина $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ имеет смысл плотности тока. Эта величина получила название тока смещения. Интегральная формулировка (13.8) первого уравнения (13.6) соответствует известному экспериментальному закону Ампера: циркуляция магнитного поля по некоторому контуру

равна домноженной на $\frac{4\pi}{c}$ сумме токов истинного и смещения, протекающих через поверхность, ограничиваемую этим контуром.

13.8. Первая пара уравнений Максвелла в релятивистски-ковариантной форме

Первая пара уравнений Максвелла (3.3) в релятивистски-ковариантной форме имеет вид

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = 0. \quad (13.9)$$

Здесь индексы μ, ν, σ независимо изменяются от единицы до четырех.

Величина $\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}$ является тензором третьего ранга. Мож-

но показать, что этот тензор антисимметричен по всем индексам, и отличными от нуля у него будут только те компоненты, у которых значения всех трех индексов различны. Это дает четыре скалярных уравнения, соответствующих первой паре уравнений Максвелла – векторному

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

которое можно представить в виде трех скалярных уравнений, и скалярному

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0.$$

§ 14. Самосогласованная система уравнений микроскопической электродинамики (теории поля)

14.1. Аксиоматика, лежащая в основе теории поля

1) Существование двух равноправных форм материи – частиц и электромагнитного поля.

2) Пространство и время едины и образуют пространственно-временной континуум (ПВК), процессы в котором подчиняются законам специальной теории относительности Эйнштейна.

3) Постулат силы Лоренца

$$\vec{F}_L = e\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}(\vec{r}, t)].$$

Физическая система, состоящая из электромагнитного поля и находящихся в нем зарядов, характеризуется функционалом действия (12.10)

$$S(A_\mu, x_\mu) = S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu),$$

который в явном виде записывается согласно (12.11)

$$S = \sum_{(i)} \left(-m_{0i} c \int_{a_i}^{b_i} \sqrt{-dx_{\mu_i}^2} \right) + \sum_{(i)} \frac{e_i}{c} \int_{a_i}^{b_i} A_{\mu_i} dx_{\mu_i} + \frac{i}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{\mu\nu}^2 d\Omega,$$

где $d\Omega = dx dy dz d\tau$.

Переход физической системы из одного состояния в другое осуществляется согласно принципу наименьшего действия (ПНД) таким образом, чтобы функционал действия был минимальным, начальное и конечное положения при этом полагаются фиксированными:

$$\delta S = 0;$$

$$\delta x_{\mu_i} \Big|_{a_i} = 0;$$

$$\delta x_{\mu_i} \Big|_{b_i} = 0.$$

Применяя ПНД к функционалу действия физической системы, состоящей из электромагнитного поля и находящихся в нем зарядов, получим

$$\begin{aligned} \delta S(A_\mu, x_\mu) &= \delta \{ S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \} \Big|_{A_\mu = \text{const}} + \\ &+ \delta \{ S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \} \Big|_{x_\mu = \text{const}} = 0. \end{aligned}$$

Учтем, что вариация $S_f(A_\mu)$ при постоянном поле ($A_\mu = \text{const}$) равна нулю, также равна нулю вариация $S_m(x_\mu)$ на заданной траектории ($x_\mu = \text{const}$). Тогда вариационная задача примет вид

$$\begin{aligned} \delta S(A_\mu, x_\mu) &= \delta \{ S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) \} \Big|_{A_\mu = \text{const}} + \\ &+ \delta \{ S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \} \Big|_{x_\mu = \text{const}} = 0. \end{aligned}$$

14.2. Самосогласованная система уравнений микроэлектродинамики, ее физический смысл

Будем рассматривать две вариационные задачи отдельно:

$$\delta \{ S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) \} \Big|_{A_\mu = \text{const}} = 0; \quad (14.1)$$

$$\delta \{ S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \} \Big|_{x_\mu = \text{const}} = 0. \quad (14.2)$$

Первая вариационная задача описывает процессы, происходящие с заряженной частицей в заданном электромагнитном поле. Ее решение дает уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле и первую пару уравнений Максвелла.

Вторая вариационная задача описывает процессы, происходящие с электромагнитным полем при движении в нем заряженных частиц. Траектории частиц предполагаются заданными. Решение второй вариационной задачи дает вторую пару уравнений Максвелла.

Таким образом, электромагнитное поле и движущиеся в нем заряженные частицы взаимодействуют друг с другом: электромагнитное поле изменяется при движении зарядов, и движение зарядов изменяется под действием электромагнитного поля. Имеем так называемую самосогласованную задачу, представляющую собой совместное рассмотрение двух вариационных задач

$$\begin{cases} \delta \{ S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) \} \Big|_{A_\mu = \text{const}} = 0; \\ \delta \{ S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \} \Big|_{x_\mu = \text{const}} = 0. \end{cases} \quad (14.3)$$

Совместное решение двух вариационных задач называется самосогла-
сованным решением.

Сформулируем самосогласованную задачу микроскопической электродинамики. В самосогласованную задачу микроскопической электродинамики входят две пары уравнений Максвелла, определения для плотности заряда и плотности тока, уравнения движения для каждой заряженной частицы, входящей в систему, дополненные начальными значениями радиус-векторов и скоростей, которые необходимы для определения плотностей заряда и тока. Кроме того, для напряженностей электрического и магнитного полей должно выполняться условие излучения.

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \text{div } \vec{H} = 0; \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \\ \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho; \\ \rho = \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)); \\ \vec{j} = \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)); \quad \vec{v}_i(t) = \frac{d\vec{r}_i}{dt}; \\ \frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = e_i \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e_i}{c} [\vec{v}_i, \vec{H}(\vec{r}, t)]; \\ \vec{r}_i(t_0) = \vec{r}_{0i}; \quad \vec{v}_i(t_0) = \vec{v}_{0i}; \\ \lim_{R \rightarrow \infty} |\vec{E}|, |\vec{H}| = 0. \end{cases} \quad (14.4)$$

Здесь $\vec{r}_i$, $\vec{v}_i$ – радиус-вектор и скорость i -й заряженной частицы, m_0 , e_i – ее масса и заряд, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения.

§ 15. Закон сохранения энергии в микроскопической электродинамике

15.1. Изменение в единицу времени кинетической энергии заряженных частиц, находящихся в электромагнитном поле

Уравнение движения одной заряженной частицы в электромагнитном поле в релятивистски-ковариантной форме имеет вид (5.4)

$$m_0 c \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u_\nu,$$

где $\mu = 1, 2, 3, 4$, $u_\nu = \frac{dx_\nu}{ds}$ – четырехмерный вектор скорости. С учетом того, что $x_1 \rightarrow x$; $x_2 \rightarrow y$; $x_3 \rightarrow z$; $x_4 \rightarrow ict$ и $ds = c dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$, эти компоненты имеют значения (5.9)

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_x}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}; & u_2 &= \frac{v_y}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \\ u_3 &= \frac{v_z}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}; & u_4 &= \frac{i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}$$

$F_{\mu\nu}$ – тензор электромагнитного поля (5.3):

$$F_{\mu\nu} = -\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}.$$

Напомним, что при $\mu = 1, 2, 3$ получаем трехмерное уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле (2.18)

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}].$$

Значение $\mu = 4$ дает следующий результат:

$$m_0 c \frac{du_4}{ds} = \frac{e}{c} F_{4\nu} u_\nu = \frac{e}{c} (F_{41} u_1 + F_{42} u_2 + F_{43} u_3 + F_{44} u_4).$$

После подстановки компонент 4-вектора скорости (5.9) и соответствующих значений компонент тензора электромагнитного поля (5.7) получим

$$\frac{d\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)}{dt} = e(v_x E_x + v_y E_y + v_z E_z).$$

Дифференцируемая величина слева есть кинетическая энергия. Таким образом, при $\mu = 4$ имеем полученную нами раньше формулу изменения кинетической энергии (2.22)

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \vec{v} \cdot e\vec{E} = \vec{v} \cdot \vec{F}_K,$$

согласно которой изменение кинетической энергии заряженной частицы равно скалярному произведению силы Кулона и вектора скорости.

Это соотношение было получено для одной частицы. Рассмотрим теперь систему заряженных частиц, находящихся в электромагнитном поле. Тогда изменение кинетической энергии i -й частицы равно

$$\frac{d\mathcal{E}_{k_i}}{dt} = \vec{v}_i \cdot e_i \vec{E}(\vec{r}_i, t), \quad (15.1)$$

где $\vec{r}_i$, $\vec{v}_i$ – радиус-вектор и скорость i -й заряженной частицы.

Кинетическая энергия системы частиц равна сумме кинетических энергий всех частиц системы, т. е. $\mathcal{E}_k = \sum_{(i)} \mathcal{E}_{k_i}$. Тогда изменение кинетической энергии системы частиц

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{(i)} \mathcal{E}_{k_i} = \sum_{(i)} \frac{d\mathcal{E}_{k_i}}{dt} = \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \cdot \vec{E}(\vec{r}_i, t). \quad (15.2)$$

Воспользуемся определением для плотности тока (10.20)

$$\vec{j} = \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i),$$

а также свойством δ -функции (10.12) с учетом того, что все $\vec{r}_i \in V$ (V – объем, содержащий систему заряженных частиц)

$$\vec{E}(\vec{r}_i, t) = \int_V \vec{E}(\vec{r}, t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV. \quad (15.3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \cdot \vec{E}(\vec{r}_i, t) &= \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i(t) \int_V \vec{E}(\vec{r}, t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV = \\ &= \int_V \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \vec{E}(\vec{r}, t) dV = \int_V \vec{j} \vec{E}(\vec{r}, t) dV. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \int_V \vec{j} \vec{E} dV. \quad (15.4)$$

15.2. Закон сохранения энергии в интегральной форме. Энергетические величины, характеризующие электромагнитное поле

Найдем $\vec{j}$ из уравнения Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \Rightarrow \vec{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

и подставим в (15.4)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_k}{dt} &= \int_V \left\{ \frac{c}{4\pi} \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} \vec{E} dV = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV + \frac{c}{4\pi} \int_V \vec{E} \text{rot } \vec{H} dV. \end{aligned}$$

Учтем, что

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2} \frac{\partial |\vec{E}|^2}{\partial t}, \quad (15.5)$$

кроме того, выполняется векторное тождество

$$\text{div} [\vec{E}, \vec{H}] = \vec{H} \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \text{rot } \vec{H} \Rightarrow \vec{E} \text{rot } \vec{H} = -\text{div} [\vec{E}, \vec{H}] + \vec{H} \text{rot } \vec{E}.$$

Получаем

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = -\frac{1}{8\pi} \int_V dV \frac{\partial |\vec{E}|^2}{\partial t} + \frac{c}{4\pi} \int_V dV \vec{H} \text{rot } \vec{E} - \frac{c}{4\pi} \int_V dV \text{div} [\vec{E}, \vec{H}].$$

Воспользуемся уравнением Максвелла

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \vec{H} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{2c} \frac{\partial |\vec{H}|^2}{\partial t}$$

и подставим в $\frac{d\mathcal{E}_k}{dt}$. Изменение кинетической энергии системы заряженных

частиц в электромагнитном поле определяется так:

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = -\frac{1}{8\pi} \int_V dV \frac{\partial |\vec{E}|^2}{\partial t} - \frac{1}{8\pi} \int_V dV \frac{\partial |\vec{H}|^2}{\partial t} - \frac{c}{4\pi} \int_V dV \text{div} [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (15.6)$$

Введем обозначения:

$$w_E = \frac{1}{8\pi} |\vec{E}|^2; \quad w_H = \frac{1}{8\pi} |\vec{H}|^2; \quad w = w_E + w_H; \quad (15.7)$$

$$\vec{P} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (15.8)$$

По месту положения этих величин в (15.6) видно, что w_E , w_H имеют смысл плотности энергии. w_E – плотность энергии электрического поля, w_H – плотность энергии магнитного поля, тогда w – плотность энергии электромагнитного поля. $\vec{P}$ – вектор Умова–Пойнтинга. Тогда

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V (w_E + w_H) dV - \int_V \text{div } \vec{P} dV. \quad (15.9)$$

Обозначим

$$W = \int_V (w_E + w_H) dV. \quad (15.10)$$

W – энергия электромагнитного поля, заключенного в объеме V . Воспользуемся теоремой Остроградского–Гаусса

$$\int_V \text{div } \vec{P} dV = \oint_S \vec{P} d\vec{S} = \oint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали. Величина $\oint_S \vec{P} d\vec{S}$ – это по-

ток вектора Умова–Пойнтинга. Она положительна, когда векторы $\vec{P}$ и $\vec{n}$ образуют острый угол, т. е. этот поток направлен из объема V во внешнюю область.

Получаем закон сохранения энергии в интегральной форме – теорему Умова–Пойнтинга

$$-\frac{d}{dt}(W + \mathcal{E}_k) = \oint_S \vec{P} d\vec{S}. \quad (15.11)$$

Здесь S – замкнутая поверхность, ограничивающая объем V , $(W + \mathcal{E}_k)$ – полная энергия в объеме. Знак «-» свидетельствует об убывании энергии в объеме. Таким образом, можно сформулировать закон сохранения энергии микроскопической электродинамики так: уменьшение энергии в объеме V происходит за счет ее излучения во внешнюю область.

Из формулировки (15.11) становится очевидным физический смысл вектора $\vec{P}$. Поскольку $\frac{d}{dt}(W + \mathcal{E}_k)$ – это мощность, то вектор Умова–Пойнтинга представляет собой плотность потока мощности электромагнитного поля, протекающего через поверхность S , т. е. количество энергии поля, протекающей через единичную поверхность за единицу времени.

Переформулируем выражение (15.11)

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = -\frac{dW}{dt} - \oint_S \vec{P} d\vec{S}. \quad (15.12)$$

Для такой формы записи формулировка теоремы Умова–Пойнтинга звучит так: приращение кинетической энергии частиц происходит за счет уменьшения энергии электромагнитного поля внутри V и притока энергии извне объема.

Возможна и такая формулировка:

$$-\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \frac{dW}{dt} + \oint_S \vec{P} d\vec{S} \quad (15.13)$$

– уменьшение кинетической энергии заряженных частиц в объеме V расходуется на увеличение энергии электромагнитного поля в объеме и энергию излучения поля за пределы V .

15.3. Закон сохранения энергии в дифференциальной форме

Получим закон сохранения энергии в дифференциальной форме. Для этого учтем, что

$$\frac{d}{dt}W = \frac{d}{dt} \int_V (w_E + w_H) dV = \frac{d}{dt} \int_V w dV. \quad (15.14)$$

Подставим (15.4) и (15.14) в (15.9)

$$\int_V \vec{j} \vec{E} dV = -\frac{d}{dt} \int_V w dV - \int_V \operatorname{div} \vec{P} dV.$$

Это выражение можно переписать так:

$$\int_V (\vec{j} \vec{E} + \frac{dw}{dt} + \operatorname{div} \vec{P}) dV = 0.$$

Поскольку равенство должно выполняться для произвольного объема V , то нулю равно подынтегральное выражение. Отсюда получаем дифференциальную форму закона сохранения энергии микроскопической электродинамики (теорему Умова–Пойнтинга)

$$\operatorname{div} \vec{P} + \vec{j} \vec{E} + \frac{dw}{dt} = 0. \quad (15.15)$$

§ 16. Электростатика

16.1. Вид системы уравнений микроскопической электродинамики в случае электростатики. Физический смысл этого приближения

Сформулируем физическую постановку задачи микроскопической электродинамики в общем виде: в ограниченном объеме V движутся за-

ряженные частицы с массами m_i и зарядами e_i , характеризуемые в любой момент времени радиус-векторами $\vec{r}_i(t)$. По известному распределению зарядов требуется найти электромагнитное поле в точке наблюдения с радиус-вектором $\vec{r}$. Задача электродинамики в общей постановке описывается исходными уравнениями микроскопической электродинамики (14.4)

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0; \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \\ \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho; \\ \rho = \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)); \\ \vec{j} = \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)); \quad \vec{v}_i(t) = \frac{d\vec{r}_i}{dt}; \\ \frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = e_i \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e_i}{c} [\vec{v}_i, \vec{H}(\vec{r}, t)]; \\ \vec{r}_i(t_0) = \vec{r}_{0_i}; \quad \vec{v}_i(t_0) = \vec{v}_{0_i}; \\ \lim_{R \rightarrow \infty} |\vec{E}|, |\vec{H}| = 0. \end{array} \right.$$

Частным случаем общей задачи электродинамики является электростатика. Физическая постановка задачи электростатики формулируется следующим образом: требуется найти электромагнитное поле при условии, что:

1) все заряженные частицы покоятся, т. е. все их радиус-векторы $\vec{r}_i$ не зависят от времени, являются постоянными, а все их скорости равны нулю

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = 0;$$

2) положения всех зарядов заданы, т. е. все $\vec{r}_i$ известны.

Задача упрощается по сравнению с общей формулировкой, т. к. положения и скорости всех заряженных частиц известны, и нет необходимости интегрировать уравнение движения. Можем определить плотность заряда

$$\rho = \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i),$$

а плотность тока равна нулю

$$\vec{j} = \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \equiv 0 \quad (\vec{v}_i(t) = 0).$$

Кроме того, поскольку все частицы покоятся, то все производные по времени равны нулю ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$).

В случае электростатики уравнения Максвелла разделяются на две независимые системы уравнений относительно электрического и магнитного полей

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = 0; \\ \text{div } \vec{H} = 0. \end{cases} \quad (16.1)$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0; \\ \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho. \end{cases} \quad (16.2)$$

Решением системы (16.1) является постоянный вектор. В силу условия излучения $\lim_{R \rightarrow \infty} |\vec{H}| = 0$, магнитное поле на бесконечности должно равняться нулю. Следовательно, магнитное поле должно равняться нулю в любой точке пространства, т. е. $\vec{H} \equiv 0$.

Найдем решение системы (16.2). Для этого воспользуемся выражением для напряженности электрического поля $\vec{E}$ через потенциалы (2.19) с учетом того, что $\frac{\partial}{\partial t} = 0$:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (16.3)$$

Здесь φ – скалярный потенциал.

Получим уравнение для скалярного потенциала. Для этого подставим выражение (16.3) в систему (16.2). Подстановка в первое уравнение системы в силу известного векторного тождества (A.24) $\text{rot grad } \varphi = 0$ превращает уравнение в тождество. Подставив выражение (16.3) во второе уравнение системы и воспользовавшись векторным тождеством (A.23) $\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi$, получаем уравнение Пуассона для скалярного потенциала

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho. \quad (16.4)$$

В случае $\rho = 0$ уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \quad (16.5)$$

Решив уравнение Пуассона, найдем скалярный потенциал, затем с помощью (16.3) – напряженность электрического поля.

16.2. Идея метода функции Грина. Реализация метода функции Грина в случае электростатики

Для решения уравнения Пуассона воспользуемся методом функции Грина. Мы предполагаем, что все радиус-векторы в некотором замкнутом объеме заданы, т. е. все $\vec{r}_i$ известны. Кроме радиус-вектора точки наблюдения

$$\vec{r} = \vec{x}_0 x + \vec{y}_0 y + \vec{z}_0 z$$

введем вспомогательный вектор

$$\vec{r}' = \vec{x}_0 x' + \vec{y}_0 y' + \vec{z}_0 z'$$

и элемент объема

$$dV' = dx' dy' dz'.$$

Воспользовавшись свойствами трехмерной дельта-функции (10.12)

$$\int_V f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{a}) d\vec{r} = \begin{cases} f(\vec{a}), & \vec{a} \in V; \\ 0, & \vec{a} \notin V \end{cases}$$

и (10.13)

$$\delta(\vec{r}) = \delta(-\vec{r}),$$

запишем плотность заряда в виде интеграла по объему

$$\rho(\vec{r}) = \int_V dV' \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (16.6)$$

и подставим в уравнение Пуассона

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = -4\pi \int_V dV' \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (16.7)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V dV' \rho(\vec{r}') g(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (16.8)$$

где $\rho(\vec{r}')$ – весовая функция, а $g(\vec{r}, \vec{r}')$ – искомая функция. Подставим это представление в уравнение Пуассона (16.7). При этом учтем, что оператор Лапласа содержит производные по нештрихованным координатам.

Поменяем порядок интегрирования и дифференцирования

$$\int_V dV' \rho(\vec{r}') \Delta g(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \int_V dV' \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

Перепишем это выражение следующим образом:

$$\int_V dV' \rho(\vec{r}') [\Delta g(\vec{r}, \vec{r}') + 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')] = 0.$$

Поскольку интегрирование производится по произвольному объему, то равенство нулю интеграла означает равенство нулю подынтегрального выражения. Поэтому имеем

$$\Delta g(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (16.9)$$

Сравнивая (16.9) и (16.4) с учетом (10.14), делаем вывод о том, что это уравнение является уравнением Пуассона для единичного точечного заряда, а решением его есть функция Грина $g(\vec{r}, \vec{r}')$ – функция излучения единичного точечного источника.

Вид уравнения для функции Грина не зависит от распределения заряда в объеме. Таким образом, если известно решение уравнения для функ-

ции Грина, то соотношение (16.8) позволяет найти потенциал, создаваемый любым заданным распределением заряда.

Решение уравнения (16.9) известно:

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (16.10)$$

Тогда потенциал определяется соотношением (16.8)

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (16.11)$$

Зная потенциал, определим напряженность электрического поля с помощью формулы (16.3). Учтем при этом, что градиент берется по нештрихованным координатам

$$\vec{E} = -\nabla \varphi = -\nabla \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\int_V dV' \rho(\vec{r}') \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

В явном виде градиент согласно (A.34) равен

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Тогда окончательное выражение для напряженности электрического поля будет иметь вид

$$\vec{E} = \int_V dV' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (16.12)$$

16.3. Мультипольное разложение для потенциала в случае электростатики, область его применимости

Найдем приближенное выражение для электростатического потенциала в случае, когда точка наблюдения удалена от объема V , в котором сосредоточены заряды, $(\vec{r}_i \in V, i = 1, 2, 3...)$, на значительное расстояние, т. е. $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$.

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}},$$

при этом $x \gg x', y \gg y', z \gg z'$. Разложим это выражение в ряд Тейлора по малому параметру $\vec{r}'$, ограничив разложение двумя слагаемыми

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r}|} - \vec{r}' \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} + \dots$$

Подставив полученное выражение в (16.11), представим его в виде двух интегралов

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}|} - \int_V dV' \rho(\vec{r}') \vec{r}' \nabla \frac{1}{|\vec{r}|}.$$

Интегрирование производится по штрихованным координатам, а $\vec{r}$ и $\nabla \frac{1}{|\vec{r}|}$ зависят от нештрихованных координат, следовательно, эти величины можно вынести за знак интеграла

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|} \int_V dV' \rho(\vec{r}') - \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} \int_V dV' \rho(\vec{r}') \vec{r}'.$$

Рассмотрим первый интеграл, воспользовавшись определением плотности заряда (10.14)

$$\rho(\vec{r}') = \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)$$

и свойством дельта-функции (10.11)

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r}|} \int_V dV' \rho(\vec{r}') &= \frac{1}{|\vec{r}|} \int_V dV' \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) = \\ &= \frac{1}{|\vec{r}|} \sum_{(i)} e_i \int_V dV' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) = \frac{1}{|\vec{r}|} \sum_{(i)} e_i = \frac{Q}{|\vec{r}|}, \end{aligned}$$

где Q – полный заряд объема V .

Второй интеграл с учетом (10.12)

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} \int_V dV' \rho(\vec{r}') \vec{r}' &= \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} \int_V dV' \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) \vec{r}_i = \\ &= \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} \sum_{(i)} e_i \int_V dV' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) \vec{r}_i = \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} \sum_{(i)} e_i \vec{r}_i = \vec{p} \nabla \frac{1}{|\vec{r}|}. \end{aligned}$$

Здесь $\vec{p} = \sum_{(i)} e_i \vec{r}_i$ – дипольный момент системы зарядов.

Таким образом, для случая, когда точка наблюдения удалена от объема V на значительное расстояние ($|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$), получаем приближенное выражение для электростатического потенциала

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{|\vec{r}|} - \vec{p} \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} + \dots \quad (16.13)$$

Это так называемое мультипольное разложение. В данном случае мы ограничились дипольным разложением, последующие слагаемые, возникающие при удержании в разложении в ряд Тейлора большего количества членов, являются моментами более высоких порядков.

§ 17. Магнитостатика

17.1. Вид системы уравнений микроскопической электродинамики в случае магнитостатики. Физический смысл этого приближения

Вторым частным случаем общей постановки задачи электродинамики является магнитостатика. Рассмотрим поля, которые создаются зарядами, совершающими стационарные (постоянные) движения, при своем движении они не приходят из бесконечности и не уходят на бесконечность, а двигаются в конечном объеме. Предположим, что импульсы движущихся зарядов остаются все время конечными, следовательно, все величины изменяются в конечных пределах, значит, их можно рассматривать средними во времени. В частности, среднее магнитное поле $\vec{H}$, которое создается движущимися зарядами, является функцией координат и не зависит от

времени, т. е. является стационарным. Таким образом, приближение магнитостатики состоит в следующем:

- 1) положения и скорости всех зарядов заданы, т. е. все $\vec{r}_i$ и $\vec{v}_i$ известны;
- 2) поскольку все процессы стационарны, то все производные по времени $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, кроме $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \neq 0$, следовательно, и плотность тока $\vec{j} \neq 0$.

Как и в случае электростатики, задача упрощается по сравнению с общей формулировкой, т. к. положения и скорости всех заряженных частиц известны, и нет необходимости интегрировать уравнение движения. Можем определить плотность заряда и плотность тока

$$\rho = \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad \vec{j} = \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i).$$

В случае магнитостатики уравнения Максвелла разделяются на две независимые системы уравнений относительно электрического и магнитного полей:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}); \\ \text{div } \vec{H} = 0. \end{cases} \quad (17.1)$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0; \\ \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho. \end{cases} \quad (17.2)$$

17.2. Реализация метода функции Грина в случае магнитостатики

Найдем решение системы (17.1). Для этого получим уравнение для векторного потенциала $\vec{A}$ с учетом выражения (2.19)

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A},$$

а также условия калибровки Кулона (4.6)

$$\text{div } \vec{A} = 0.$$

Подставим выражения для $\vec{H}$ через векторный потенциал в первое уравнение системы (17.1) и воспользуемся известным векторным тождеством (A.26)

$$\text{rot } \vec{H} = \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Первое слагаемое этого выражения обращается в нуль в силу условия калибровки Кулона. Получаем уравнение Пуассона для векторного потенциала

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (17.3)$$

Для решения этого уравнения также воспользуемся методом функции Грина. Запишем плотность тока в виде интеграла по объему

$$\vec{j}(\vec{r}) = \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (17.4)$$

Векторный потенциал ищем в виде

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') g(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (17.5)$$

где $\vec{j}(\vec{r}')$ – весовая функция, а $g(\vec{r}, \vec{r}')$ – искомая функция Грина. Подставим представления (17.4) и (17.5) в уравнение Пуассона (17.3)

$$\frac{1}{c} \Delta \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') g(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{4\pi}{c} \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

Оператор Лапласа содержит производные по нештрихованным координатам. Поменяем порядок интегрирования и дифференцирования

$$\begin{aligned} \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') \Delta g(\vec{r}, \vec{r}') &= -4\pi \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \\ \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') [\Delta g(\vec{r}, \vec{r}') + 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')] &= 0, \end{aligned}$$

откуда имеем

$$\Delta g(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

Получаем уравнение для функции Грина, такое же, как в случае электростатики (16.9). Его решение (16.10) известно

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Таким образом, векторный потенциал определяется соотношением

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (17.6)$$

а напряженность магнитного поля

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{c} \text{rot} \int_V dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

17.3. Приближенное решение задачи магнитостатики

Определим векторный потенциал, пользуясь приближенным выражением для функции Грина в случае, когда заряды сосредоточены в объеме V , а поле вычисляется в удаленной точке ($|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$). Аналогично предыдущему воспользуемся разложением в ряд Тейлора выражения

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r}|} - \vec{r}' \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} + \dots,$$

градиент в явном виде (А.34)

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

Тогда приближенное выражение для функции Грина

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r}|} + \vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \dots$$

Подставим его в выражение для векторного потенциала

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') \left(\frac{1}{|\vec{r}|} + \vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = \\ &= \frac{1}{c|\vec{r}|} \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') + \frac{\vec{r}}{c|\vec{r}|^3} \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{r}'. \end{aligned}$$

Воспользуемся определением плотности тока (10.20)

$$\vec{j}(\vec{r}') = \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)$$

и свойствами дельта-функции (10.11), (10.12)

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{c|\vec{r}|} \int_V dV' \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) + \frac{\vec{r}}{c|\vec{r}|^3} \int_V dV' \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) \vec{r}' = \\ &= \frac{1}{c|\vec{r}|} \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \int_V dV' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) + \frac{\vec{r}}{c|\vec{r}|^3} \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \int_V dV' \vec{r}' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i). \end{aligned}$$

Тогда приближенное решение задачи магнитостатики для векторного потенциала в дипольном приближении имеет вид

$$\vec{A} = \frac{1}{c|\vec{r}|} \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i + \frac{1}{c|\vec{r}|^3} \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i (\vec{r} \cdot \vec{r}_i), \quad (17.7)$$

а для того, чтобы определить напряженность магнитного поля, необходимо применить оператор rot к векторному потенциалу (17.7).

Приложение А. Векторный анализ

В данном Приложении кратко представлены известные определения и формулы векторной алгебры.

Скалярное произведение двух векторов

Скалярное произведение двух векторов в специальной литературе может записываться различными способами:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a} \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b}.$$

Определение скалярного произведения дается формулой

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \quad (\text{A.1})$$

Пусть в декартовой системе координат векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ имеют вид

$$\vec{a} = a_x \vec{x}_0 + a_y \vec{y}_0 + a_z \vec{z}_0; \quad \vec{b} = b_x \vec{x}_0 + b_y \vec{y}_0 + b_z \vec{z}_0,$$

где $a_x, a_y, a_z; b_x, b_y, b_z$ – проекции этих векторов на оси, а $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ – орты декартовой системы координат. Тогда их скалярное произведение

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (\text{A.2})$$

Результатом скалярного произведения двух векторов является скаляр.

Векторное произведение двух векторов

Различные формы записи векторного произведения:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a} \vec{b}] = [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Результатом векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор, перпендикулярный $\vec{a}$ и $\vec{b}$, по абсолютной величине равный

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \quad (\text{A.3})$$

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $[\vec{a}, \vec{b}]$ образуют правую тройку векторов.

В декартовой системе координат

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Свойство векторного произведения

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]. \quad (\text{A.5})$$

Смешанное произведение векторов

Смешанное или векторно-скалярное произведение трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ является скаляром, численно равным

$$\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Свойство смешанного произведения

$$\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] = \vec{b}[\vec{c}, \vec{a}] = \vec{c}[\vec{a}, \vec{b}] = -\vec{b}[\vec{a}, \vec{c}] = -\vec{a}[\vec{c}, \vec{b}] = -\vec{c}[\vec{b}, \vec{a}]. \quad (\text{A.7})$$

Двойное векторное произведение векторов

Результатом двойного векторного произведения является вектор

$$[\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}). \quad (\text{A.8})$$

Скалярное и векторное поле

Скалярным или векторным полем называется область пространства, каждой точке которой поставлено в соответствие значение некоторого скаляра или, соответственно, вектора.

Каждая точка в пространстве определяется радиус-вектором – вектором, проведенным из начала координат в данную точку. В декартовой системе координат точка с координатами (x, y, z) характеризуется радиус-вектором

$$\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0. \quad (\text{A.9})$$

Поскольку каждая точка поля определяется ее радиус-вектором $\vec{r}$, то задание скалярного или векторного поля эквивалентно заданию соответственно скалярной функции $\varphi(\vec{r})$ или векторной функции $\vec{a}(\vec{r})$. Эти функции могут зависеть, помимо $\vec{r}$ еще и от других аргументов, например, от времени.

Операторы градиент, дивергенция, ротор и лапласиан

Рассмотрим систему координат, не конкретизируя ее вид. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – орты, q_1, q_2, q_3 – координаты, a_1, a_2, a_3 – проекции вектора $\vec{a}$ на оси этой системы. Для этой произвольной системы координат введем операторы: градиент, дивергенция, ротор и лапласиан

$$\text{grad } \varphi = \frac{\vec{e}_1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}; \quad (\text{A.10})$$

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 a_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 a_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 a_3) \right); \quad (\text{A.11})$$

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3} & \frac{\vec{e}_2}{h_1 h_3} & \frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 a_1 & h_2 a_2 & h_3 a_3 \end{vmatrix}; \quad (\text{A.12})$$

$$\Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \right). \quad (\text{A.13})$$

Здесь h_1, h_2, h_3 – коэффициенты Ляме (в некоторых источниках встречается транскрипция «Ламе»). С помощью коэффициентов Ляме записаны общие выражения для операторов градиент, дивергенция, ротор и лапласиан,

справедливые для произвольной системы координат. Конкретизируя вид системы координат и воспользовавшись известными для данного вида коэффициентами Ляме, с помощью (A.10) – (A.13) можно получить выражения для этих операторов в выбранной системе координат.

Коэффициенты Ляме.

	Коэффициенты Ляме		
Система координат (координаты)	h_1	h_2	h_3
декартова (x, y, z)	1	1	1
цилиндрическая (ρ, φ, z)	1	ρ	1
сферическая (r, θ, φ)	1	r	$r \sin \theta$

Например, для декартовой системы координат ортам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ соответствуют $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$; координатам $q_1, q_2, q_3 = x, y, z$; проекциям вектора $a_1, a_2, a_3 = a_x, a_y, a_z$. Коэффициенты Ляме для декартовой системы все равны единице. Тогда операторы градиент, дивергенция, ротор и лапласиан в декартовой системе координат будут иметь вид

$$\text{grad } \varphi = \vec{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (\text{A.14})$$

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}; \quad (\text{A.15})$$

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}; \quad (\text{A.16})$$

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (\text{A.17})$$

Вид операторов градиент, дивергенция, ротор и лапласиан в сферической и цилиндрической системах координат можно получить аналогично, используя соответствующие выражения для коэффициентов Ляме.

Приведем в виде таблицы объекты, на которые действуют операторы градиент, дивергенция, ротор и лапласиан, и результаты, которые получаются в результате действия этих операторов.

Оператор	Объект действия оператора	Результат действия оператора
градиент	скаляр	вектор
дивергенция	вектор	скаляр
ротор	вектор	вектор
лапласиан	скаляр	скаляр
	вектор	вектор

Оператор набла

Введем векторно-дифференциальный оператор набла

$$\nabla = \vec{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{A.18})$$

С помощью оператора набла операторы градиент, дивергенция, ротор и лапласиан записываются следующим образом:

$$\nabla \varphi = \text{grad } \varphi = \vec{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (\text{A.19})$$

$$(\nabla \vec{a}) = \text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}; \quad (\text{A.20})$$

$$[\nabla \vec{a}] = \text{rot } \vec{a} = \left\| \begin{array}{ccc} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{array} \right\|; \quad (\text{A.21})$$

$$(\nabla \nabla) \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (\text{A.22})$$

Правила векторной алгебры распространяются на оператор набла, если он входит сомножителем в произведение, содержащее только один истинный вектор или скаляр (определение истинного вектора и скаляра см. в Приложении В).

С учетом (A.19) – (A.22) можно показать, что имеют место тождества:

$$\text{div grad } \varphi = (\nabla, \nabla \varphi) = (\nabla, \nabla) \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi; \quad (\text{A.23})$$

$$\text{rot grad } \varphi = [\nabla, \nabla \varphi] = [\nabla, \nabla] \varphi = 0; \quad (\text{A.24})$$

$$\text{div rot } \vec{a} = (\nabla [\nabla \vec{a}]) = ([\nabla, \nabla] \vec{a}) = 0; \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{a} &= [\nabla [\nabla \vec{a}]] = \nabla(\nabla \vec{a}) - \vec{a}(\nabla \nabla) = \\ &= \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

При выводе (A.23), (A.24) мы воспользовались тем, что скаляр можно вынести из скалярного (векторного) произведения, в (A.24), (A.25) использован факт равенства нулю векторного произведения двух одинаковых векторов (см. (A.3)), в (A.25) и (A.26) – свойства смешанного (A.7) и двойного векторного (A.8) произведения.

Применение оператора набла к произведению

Если векторно-дифференциальный оператор набла действует на произведение, содержащее два и более истинных скаляра или вектора, то правила векторной алгебры нельзя применять непосредственно. На произведение оператор ∇ действует в два этапа:

1) как дифференциальный оператор ∇ применяется к каждому сомножителю отдельно, считая другой при этом постоянным (как при дифференцировании в математическом анализе: $d(\varphi\psi) = \varphi d\psi + \psi d\varphi$);

2) как векторный оператор, подчиняющийся всем правилам векторной алгебры. При этом оператор набла всегда ставится после сомножителя, который считается условно постоянным, перед сомножителем, являющимся переменным.

Согласно этому справедливы следующие тождества:

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \varphi \text{grad} \psi + \psi \text{grad} \varphi; \quad (\text{A.27})$$

$$\text{div}(\varphi \vec{a}) = \vec{a} \text{grad} \varphi + \varphi \text{div} \vec{a}; \quad (\text{A.28})$$

$$\text{rot}(\varphi \vec{a}) = \varphi \text{rot} \vec{a} - [\vec{a}, \text{grad} \varphi]; \quad (\text{A.29})$$

$$\text{div}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b} \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \text{rot} \vec{b}; \quad (\text{A.30})$$

$$\text{rot}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \text{div} \vec{b} - \vec{b} \text{div} \vec{a} + (\vec{b} \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \nabla) \vec{b}; \quad (\text{A.31})$$

$$\text{grad}(\vec{a}, \vec{b}) = [\vec{a}, \text{rot} \vec{b}] + [\vec{b}, \text{rot} \vec{a}] + (\vec{b} \nabla) \vec{a} + (\vec{a} \nabla) \vec{b}. \quad (\text{A.32})$$

При этом выражение вида $(\vec{a} \nabla)$ является оператором и имеет вид

$$(\vec{a} \nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A.33})$$

(не путать с $(\nabla \vec{a}) = \text{div} \vec{a}$!). Оператор $(\vec{a} \nabla)$ действует на вектор или скаляр, при этом вектор $\vec{a}$ полагается постоянным, на него оператор набла не действует.

Действие операторов градиент, дивергенция, ротор на сложные функции

$$\text{grad} \varphi[f(r)] = \text{grad} f \frac{\partial \varphi}{\partial f}; \quad (\text{A.34})$$

$$\text{div} \vec{a}[f(r)] = \left[\text{grad} f, \frac{\partial \vec{a}}{\partial f} \right]; \quad (\text{A.35})$$

$$\text{rot} \vec{a}[f(r)] = \left[\text{grad} f, \frac{\partial \vec{a}}{\partial f} \right]; \quad (\text{A.36})$$

Теорема Остроградского-Гаусса

Рассмотрим произвольную замкнутую поверхность S , V – объем, ограниченный поверхностью S .

Интеграл по замкнутой поверхности S произвольного вектора $\vec{a}$ называется поток вектора $\vec{a}$ через поверхность S .

Теорема Остроградского-Гаусса: поток вектора $\vec{a}$ через произвольную замкнутую поверхность S равен интегралу дивергенции этого вектора по объему V , ограниченному этой поверхностью

$$\oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{a} dV. \quad (\text{A.37})$$

Здесь $d\vec{S} = \vec{n} dS$, где dS – бесконечно малая площадка, $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к этой площадке.

Теорема Стокса

Рассмотрим произвольный замкнутый контур L и поверхность S , опирающуюся на этот контур.

Интеграл от произвольного вектора $\vec{a}$ по замкнутому контуру L называется циркуляцией этого вектора по контуру L .

Теорема Стокса: циркуляция произвольного вектора $\vec{a}$ по замкнутому контуру L равна потоку ротора этого вектора через поверхность S , опирающуюся на контур L

$$\oint_L \vec{a} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{a} d\vec{S}. \quad (\text{A.38})$$

Здесь $d\vec{l} = \vec{\tau} dl$, где dl – бесконечно малый элемент контура, $\vec{\tau}$ – единичный вектор, касательный к этому элементу; $d\vec{S} = \vec{n} dS$.

Приложение В. Тензорный анализ

В Приложении В изложены основные положения тензорного анализа в объеме, необходимом для изучения курса «Микроскопическая электродинамика».

Понятие скаляр, вектор, тензор, широко применяемые в физике, являются

математическими абстракциями, которые отображают общие свойства реальных физических величин, таких, как плотность, скорость, напряженность поля, момент инерции и другие.

Тензоры – это математические величины, которые определяются своими законами преобразования при поворотах системы координат.

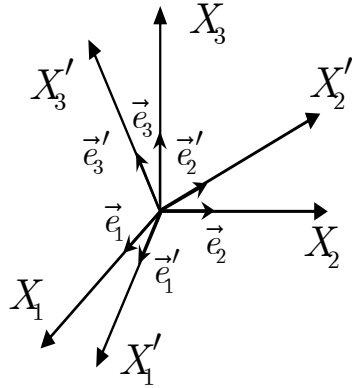


Рис. 2

Рассмотрим две декартовы системы координат – исходную $X_1X_2X_3$ и повернутую $X'_1X'_2X'_3$, имеющие общее начало (рис. 2). $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – орты исходной, а $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ – орты повернутой (штрихованной) системы координат.

Тензор нулевого ранга

Скаляром (инвариантом) называется величина, которая не изменяет своего значения при поворотах координатной системы, т. е. имеет одно и то же значение в исходной и повернутой системах координат:

$$R = R'. \quad (\text{В.1})$$

Скаляр – это тензор нулевого ранга. Примером скаляра может служить расстояние между двумя точками, масса, заряд, время.

Связь между ортами исходной и повернутой систем координат

Выразим орты системы $X'_1X'_2X'_3$ через орты исходной системы $X_1X_2X_3$.

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 \cos(\widehat{\vec{e}'_1, \vec{e}_1}) + \vec{e}_2 \cos(\widehat{\vec{e}'_1, \vec{e}_2}) + \vec{e}_3 \cos(\widehat{\vec{e}'_1, \vec{e}_3});$$

$$\vec{e}'_2 = \vec{e}_1 \cos(\widehat{\vec{e}'_2, \vec{e}_1}) + \vec{e}_2 \cos(\widehat{\vec{e}'_2, \vec{e}_2}) + \vec{e}_3 \cos(\widehat{\vec{e}'_2, \vec{e}_3});$$

$$\vec{e}'_3 = \vec{e}_1 \cos(\widehat{\vec{e}'_3, \vec{e}_1}) + \vec{e}_2 \cos(\widehat{\vec{e}'_3, \vec{e}_2}) + \vec{e}_3 \cos(\widehat{\vec{e}'_3, \vec{e}_3}).$$

Одной формулой эту связь можно записать:

$$\vec{e}'_i = \sum_{j=1}^3 \cos(\widehat{\vec{e}'_i, \vec{e}_j}) \vec{e}_j = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \vec{e}_j.$$

Здесь введена матрица перехода от исходной системы координат к повернутой – матрица поворота. Элемент матрицы поворота представляет собой косинус угла между i -й осью повернутой и j -й осью исходной системы координат

$$\alpha_{ij} = \cos(\widehat{\vec{e}'_i, \vec{e}_j}). \quad (\text{В.2})$$

Отметим, что элемент матрицы поворота также может быть введен как результат скалярного произведения i -го орта повернутой и j -го орта исходной системы координат: $(\vec{e}'_i, \vec{e}_j) = \alpha_{ij}$.

Связь между ортами в матричной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}.$$

В тензорном анализе принято знак суммы опускать; на тот факт, что в выражении имеет место суммирование, указывает наличие повторяющегося индекса, в данном случае индекса j . (Индекс суммирования называется «немым» индексом, от него результат суммирования не зависит, поэтому он

может быть обозначен любой буквой.) Таким образом, связь между ортами двух систем координат:

$$\vec{e}'_i = \alpha_{ij} \vec{e}_j. \quad (\text{B.3})$$

Суммирование в этом выражении происходит по элементам строки матрицы поворота.

Аналогично можно выразить орты исходной системы координат через орты повернутой

$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 \cos(\widehat{\vec{e}'_j, \vec{e}_i}) \vec{e}'_j = \alpha_{ji} \vec{e}'_j. \quad (\text{B.4})$$

В последнем выражении суммирование происходит по элементам столбца матрицы поворота.

Преобразование компонент вектора при переходе от одной системы координат к другой. Тензор первого ранга

Определим, как преобразуются компоненты вектора при переходе от исходной системы координат к повернутой. Для этого запишем радиус-вектор произвольной точки в каждой из систем координат

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2 + x'_3 \vec{e}'_3.$$

Перепишем это выражение следующим образом:

$$\sum_{k=1}^3 x_k \vec{e}_k = \sum_{i=1}^3 x'_i \vec{e}'_i.$$

Опустим знак суммы:

$$x_k \vec{e}_k = x'_i \vec{e}'_i. \quad (\text{B.5})$$

Определим отсюда x'_i . Для этого домножим последнее выражение слева скалярно на вектор $\vec{e}'_i$

$$x_k (\vec{e}'_i, \vec{e}_k) = x'_i (\vec{e}'_i, \vec{e}'_i).$$

Далее учтем, что $(\vec{e}'_i, \vec{e}'_i) = 1$, а $(\vec{e}'_i, \vec{e}_k) = \alpha_{ik}$. Тогда выражение, определяющее закон преобразования компонент вектора при переходе от исходной системы координат к другой, будет таким:

$$x'_i = \alpha_{ik} x_k. \quad (\text{B.6})$$

Суммирование происходит по элементам строки.

Аналогично получаем обратное преобразование компонент вектора. Для этого домножим (B.5) справа скалярно на вектор $\vec{e}_k$

$$x_k (\vec{e}_k, \vec{e}_k) = x'_i (\vec{e}'_i, \vec{e}_k).$$

Поскольку $(\vec{e}_k, \vec{e}_k) = 1$, а $(\vec{e}'_i, \vec{e}_k) = \alpha_{ik}$, то обратное преобразование компонент вектора запишется так:

$$x_k = \alpha_{ik} x'_i. \quad (\text{B.7})$$

Суммирование происходит по элементам столбца.

Вектор в трехмерном пространстве – это совокупность трех величин, преобразующихся при повороте системы координат по закону

$$x'_i = \alpha_{ik} x_k.$$

Вектор – это тензор первого ранга. Примером тензора первого ранга может служить радиус-вектор, скорость.

Тензор второго ранга. Тензор s-го ранга

Тензором второго ранга в трехмерном пространстве называется совокупность девяти величин, преобразующихся при повороте системы координат по закону

$$T'_{ik} = \alpha_{il} \alpha_{km} T_{lm}. \quad (\text{B.8})$$

В этом выражении суммирование происходит от 1 до 3 по индексам l и m .

Примером тензора второго ранга может служить диэлектрическая и магнитная проницаемость анизотропных магнитодиэлектриков

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}; \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}.$$

Тензором s-го ранга в трехмерном пространстве называется совокупность 3^s величин, преобразующихся при повороте системы координат по закону

$$T'_{i'k'l'...t'} = \alpha_{i'i} \alpha_{k'k} \alpha_{l'l} \dots \alpha_{t't} T_{ikl...t}. \quad (\text{B.9})$$

Свойство ортогональности матрицы поворота

Для получения условия ортогональности матрицы поворота будем исходить из условия ортогональности векторов: два вектора ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю. В силу ортогональности ортов исходной и повернутой систем координат, а также учитывая, что орты имеют единичную длину, имеем

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} = \delta_{ij}; \quad (\text{B.10})$$

$$(\vec{e}'_k, \vec{e}'_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases} = \delta_{kl}. \quad (\text{B.11})$$

Распишем $(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, выражая орты нештрихованной системы координат через орты штрихованной (B.4) и учитывая (B.10), (B.11).

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = (\alpha_{ki} \vec{e}'_k, \alpha_{lj} \vec{e}'_l) = \alpha_{ki} \alpha_{lj} (\vec{e}'_k, \vec{e}'_l) = \alpha_{ki} \alpha_{lj} \delta_{kl} = \alpha_{ki} \alpha_{kj} = \delta_{ij}.$$

Таким образом, имеем условие ортогональности матрицы по второй паре индексов

$$\alpha_{ki} \alpha_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Если элементы матрицы перехода удовлетворяют этому условию, то матрица перехода является ортогональной, и само преобразование называется

ортогональным. Таким образом, поворот системы координат – ортогональное преобразование.

Аналогично рассмотрим скалярное произведение $(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j)$.

$$(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j) = (\alpha_{ik} \vec{e}_k, \alpha_{jl} \vec{e}_l) = \alpha_{ik} \alpha_{jl} (\vec{e}_k, \vec{e}_l) = \alpha_{ik} \alpha_{jl} \delta_{kl} = \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij}.$$

Получим условие ортогональности матрицы по первой паре индексов:

$$\alpha_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Построение обратной матрицы преобразования

По определению обратной матрицей называется такая матрица, для которой имеет место соотношение

$$\hat{\alpha}^{-1} \hat{\alpha} = \hat{\alpha} \hat{\alpha}^{-1} = \hat{I}, \quad (\text{B.14})$$

где $\hat{I}$ – единичная матрица:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В явном виде соотношение (B.14)

$$\alpha^{-1}_{ik} \alpha_{kj} = \alpha_{ik} \alpha^{-1}_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

Сравнивая последнее выражение с условием ортогональности матрицы (B.13), получаем

$$\alpha^{-1}_{kj} = \alpha_{jk} \Leftrightarrow \hat{\alpha}^{-1} = \hat{\alpha}^T. \quad (\text{B.16})$$

Матрица обратного преобразования получается путем транспонирования матрицы прямого преобразования. Это справедливо для ортогонального преобразования.

Воспользуемся (B.16) для получения выражения обратного преобразования компонент вектора (B.7) из прямого преобразования (B.6). Для этого прямое преобразование (B.6)

$$x'_k = \alpha_{ki} x_i$$

умножим слева и справа на α^{-1}_{ik} :

$$\alpha^{-1}_{ik} x'_k = \alpha^{-1}_{ik} \alpha_{ki} x_i.$$

Согласно (B.15), (B.16) $\alpha^{-1}_{ik} \alpha_{ki} = 1$, а $\alpha^{-1}_{ik} = \alpha_{ki}$. Тогда

$$\alpha_{ki} x'_k = x_i.$$

Таким образом, получаем то же выражение для обратного преобразования, что и в (B.7).

Симметрия тензоров

Тензор $S_{ikl\dots}$ называется симметричным по паре индексов i и k , если он не изменяется при перестановке индексов:

$$S_{ikl\dots} = S_{k il\dots} \quad (\text{B.17})$$

Если при такой перестановке изменяется знак, то тензор называется антисимметричным.

$$A_{ikl\dots} = -A_{k il\dots} \quad (\text{B.18})$$

Диагональные элементы антисимметричного тензора равны нулю:

$$A_{i il\dots} = -A_{i il\dots} = 0. \quad (\text{B.19})$$

Условие симметричности (антисимметричности) тензора можно обобщить на любую пару индексов.

Свойство симметричности (антисимметричности) тензора сохраняется при переходе от одной системы координат к другой, т. е. является инвариантным. Понятие симметрии тензора относится к тензорам ранга не ниже второго.

Симметричный тензор второго ранга содержит 6 независимых компонент, а антисимметричный тензор второго ранга – всего 3 независимые компоненты.

Свертывание тензоров

Процедура свертывания тензора состоит в суммировании его по двум индексам, которые приравниваются. Например, свернем тензор 3-го ранга T_{ikl} по первой паре индексов. Для этого приравняем $i = k$ и просуммируем:

$$T_{iil} = \sum_{i=1}^3 T_{iil} = T_{11l} + T_{22l} + T_{33l}; \quad l = 1, 2, 3. \quad (\text{B.20})$$

Пользуясь определением тензора 3-го ранга и вектора, а также свойством ортогональности матрицы перехода, можно показать, что результат свертывания T_{iil} представляет собой тензор первого ранга (вектор). Процедура свертывания тензора понижает ранг тензора на две единицы. Свернуть можно тензор ранга не ниже другого. Тензор четного ранга может быть свернут до скаляра (инварианта), тензор нечетного ранга – до вектора.

Преобразование тензоров при инверсии системы координат

Ранее мы рассматривали повороты системы координат. Важное значение в физике имеет инверсное преобразование системы координат. Инверсией системы координат назовем зеркальное отражение координатных осей, т. е.

$$x'_\alpha = -x_\alpha. \quad (\text{B.21})$$

Векторы могут вести себя по-разному по отношению к инверсии системы координат. В зависимости от поведения при инверсии существуют два типа векторов – истинные векторы и псевдовекторы.

Истинный (полярный) вектор – это такой вектор, компоненты которого при инверсии системы координат меняют свой знак. Примером истинного вектора могут служить радиус-вектор точки $\vec{r}$, скорость частицы $\vec{v}$, импульс $\vec{p}$, сила $\vec{F}$, напряженность электрического поля $\vec{E}$ и многие другие.

Псевдовектор (аксиальный вектор) – это такой вектор, компоненты которого при инверсии системы координат не меняют свой знак. Например, к аксиальным векторам относятся угловая скорость $\vec{\omega}$, момент им-

пульса $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$, напряженность магнитного поля $\vec{H} = [\nabla \times \vec{A}]$ и вообще любое векторное произведение двух истинных векторов.

Сформулированные определения полярных и аксиальных векторов распространяется на тензоры произвольного ранга. Тензор s-го ранга называется истинным или полярным, если его компоненты при инверсии приобретают множитель $(-1)^s$, и псевдотензором, если его компоненты умножаются на $(-1)^{s+1}$.

Приложение С. Специальная теория относительности

Приложение С содержит основные положения специальной теории относительности.

Системой отсчета называют систему координат для пространственных измерений, объединенную с часами для измерения времени.

Инерциальная система отсчета (ИСО) – это такая система, в которой выполняется закон инерции (первый закон Ньютона), согласно которому тело движется равномерно прямолинейно или находится в состоянии покоя, если на него не действуют силы или действие этих сил компенсировано.

Теория относительности отвечает на вопрос: что такое пространство и время, изучает их и все процессы, происходящие в пространстве и времени.

Физический процесс представляет собой непрерывную последовательность событий. Событие – составная часть процесса. В четырехмерном пространстве событие изображается так называемой мировой точкой, характеризующейся четырьмя координатами – тремя пространственными и временем (x, y, z, t) . Всякой частице соответствует некоторая линия (мировая линия), точки которой определяют координаты частицы во все моменты времени.

Существуют две теории относительности:

- 1) Теория относительности Галилея–Ньютона, которая справедлива в классической механике для скоростей, значительно меньших скорости света ($v \ll c$).
- 2) Теория относительности Эйнштейна, которая выполняется при скоростях, сравнимых со скоростями света ($v \rightarrow c$).

В соответствии с общенаучным принципом дополнительности Бора, утверждающим, что всякая новая теория не отбрасывает старую, а включает ее в себя как предельный случай, теория относительности Галилея–Ньютона является предельным случаем теории относительности Эйнштейна.

Теория относительности Галилея–Ньютона

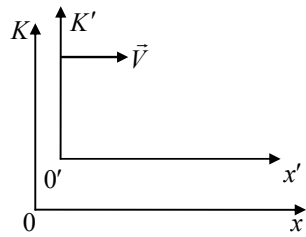


Рис. 3

Одно событие можно наблюдать в разных ИСО. Рассмотрим две системы отсчета K и K' , при этом K' движется относительно K со скоростью $\vec{V}$, для определенности направленной вдоль оси OX – $\vec{V} = \vec{x}_0 V$ (рис. 3).

Пусть событие в системе K характеризуется координатами (x, y, z, t) , а в $K' - (x', y', z', t')$. Связь между координатами

в двух системах осуществляется с помощью преобразований Галилея–Ньютона.

Прямые преобразования Галилея–Ньютона:

$$x = x' + Vt'; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t'. \quad (C.1)$$

Обратные преобразования Галилея–Ньютона можно получить из прямых путем замены $V \rightarrow -V$:

$$x' = x - Vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t. \quad (C.2)$$

В классической механике:

1) пространство относительно (пространственные соотношения между различными событиями зависят от того, в какой системе отсчета они рассматриваются);

2) время абсолютно (свойства времени не зависят от системы отсчета – время одинаково для всех систем отсчета).

Постулаты теории относительности Галилея–Ньютона:

1) все законы природы (механики) инвариантны во всех ИСО;

2) выполняется классический закон сложения скоростей $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$.

Скорость распространения взаимодействия полагается бесконечной.

Инварианты теории относительности Галилея–Ньютона:

Введем в рассмотрение элементарный отрезок dl . Рассмотрим квадрат его длины:

$$\text{в системе } K \quad dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

$$\text{в системе } K' \quad dl'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2.$$

Инвариантами теории относительности Галилея–Ньютона является квадрат длины элементарного отрезка

$$dl^2 = dl'^2$$

и квадрат элементарного временного интервала

$$dt^2 = dt'^2.$$

Специальная теория относительности Эйнштейна (СТО)

Изучение явлений электромагнетизма заставило пересмотреть постулаты теории относительности Галилея–Ньютона. Электродинамика изучает тела, обладающие не только массой, но и зарядом. Экспериментально установлено, что сила Лоренца, действующая на заряд со стороны электромагнитного поля, пропорциональна скорости и равна

$$\vec{F}_L = e\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}(\vec{r}, t)].$$

Рассмотрим уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}(\vec{r}, t)].$$

Если для перехода к другой ИСО применить к этому уравнению классический закон сложения скоростей, то уравнение окажется неинвариантным.

Из приведенного примера видно, что уравнения электродинамики не инвариантны относительно преобразований Галилея–Ньютона. Следовательно, необходимо пересматривать представления о пространстве и времени. Уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле

остаётся инвариантным, если применить к нему не преобразования Галилея–Ньютона, а преобразования Лоренца.

Прямые преобразования Лоренца имеют вид:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (\text{C.3})$$

обратные преобразования Лоренца ($V \rightarrow -V$):

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (\text{C.4})$$

Аксиоматика специальной теории относительности Эйнштейна

1) Постулат относительности: все законы природы, в том числе и законы электродинамики, инвариантны в любой инерциальной системе отсчета.

2) Постулат постоянства скорости света: скорость света во всех инерциальных системах отсчета одинакова, конечна и равна $c = 2,998 \cdot 10^{10}$ см/с – предельная скорость передачи взаимодействия между телами.

При построении теории поля важным является тот факт, что первый постулат распространяется и на законы электродинамики. В специальной теории относительности сохраняется понятие инерциальной системы отсчета.

Четырёхмерный пространственно-временной континуум (ПВК)

В СТО используются понятия относительного пространства и относительного времени, которые составляют ПВК. Геометрия ПВК представляет собой систему четырех взаимно ортогональных координат. Рассмотрим два события 1 и 2 в системах K и K' .

	в системе K	в системе K'
Событие 1	(x_1, y_1, z_1, t_1)	(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)
Событие 2	(x_2, y_2, z_2, t_2)	(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2)

Интервал между событиями 1 и 2 в K :

$$S = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}; \quad (\text{C.5})$$

в K' :

$$S' = \sqrt{c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2}. \quad (\text{C.6})$$

В СТО интервал между двумя событиями является инвариантом. Этот факт – математическое выражение постоянства скорости света

$$S = S'. \quad (\text{C.7})$$

Введем обозначение $\tau = ict$ ($i^2 = -1$). Тогда элементарный интервал определим так:

$$dS = \sqrt{-d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}. \quad (\text{C.8})$$

Элементарный интервал является инвариантом специальной теории относительности.

Преобразования Лоренца для скорости

Найдем формулы, связывающие скорость движущейся материальной частицы в одной системе отсчета со скоростью этой же частицы в другой системе. Пусть, как и раньше, система K' движется относительно системы K со скоростью $\vec{V}$ вдоль оси OX (рис. 3). Скорость частицы в системе K – $\vec{v}$, а в K' – $\vec{v}'$. По определению компоненты скорости частицы в обеих системах координат равны

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt}; & v_y &= \frac{dy}{dt}; & v_z &= \frac{dz}{dt}; \\ v'_x &= \frac{dx'}{dt'}; & v'_y &= \frac{dy'}{dt'}; & v'_z &= \frac{dz'}{dt'}. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Воспользовавшись формулами (C.3), находим

$$dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad dy = dy'; \quad dz = dz'; \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Разделим выражения для dx, dy, dz на выражение для dt и получим формулы, определяющие преобразования скоростей:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}; \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}; \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (\text{C.10})$$

Приложение D. Релятивистская механика

Это Приложение содержит короткие сведения из релятивистской механики, известные из теоретической механики.

В теоретической механике состояние одной частицы в трехмерном пространстве описывается шестью независимыми переменными: обобщенными координатами q_1, q_2, q_3 и обобщенными скоростями $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$

($\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$, $q_i = q_i(t)$; $\dot{q}_i = \dot{q}_i(t)$). Система из N частиц характеризуется $3N$ обобщенными координатами и $3N$ обобщенными скоростями, т. е. $6N$ независимыми переменными.

Задачей физики является описание движения – перехода физической системы из одного состояния в другое.

Для характеристики состояния физической системы вводится функция Лагранжа

$$L \equiv L(q, \dot{q}, t), \quad (\text{D.1})$$

где q – совокупность всех обобщенных координат, $\dot{q}$ – совокупность всех обобщенных скоростей, которые параметрически зависят от времени. Функция Лагранжа описывает состояние системы в любой момент времени.

Переход системы из одного состояния в другое характеризуется функционалом действия (действием) S :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t). \quad (\text{D.2})$$

t_1 и t_2 – моменты времени, в которые система находится в начальном и конечном положении.

Принцип наименьшего действия (ПНД). Уравнение Лагранжа

Согласно принципу наименьшего действия переход из одного состояния в другое осуществляется по истинной траектории, т. е. по такой траек-

тории, на которой функционал действия минимален. Математически ПНД выражается в равенстве нулю вариации функционала действия

$$\delta S = 0. \quad (D.3)$$

Исходя из ПНД, уравнение движения частицы (уравнение Лагранжа) имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (D.4)$$

Импульс частицы

Импульс частицы определяется следующим образом:

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \nabla_v L, \quad (D.5)$$

где

$$\nabla_v = \vec{x}_0 \frac{\partial}{\partial v_x} + \vec{y}_0 \frac{\partial}{\partial v_y} + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial v_z}. \quad (D.6)$$

Энергия частицы

Энергия частицы определяется по следующей формуле:

$$\mathcal{E} = \vec{P} \vec{v} - L. \quad (D.7)$$

Функционал действия и функция Лагранжа свободной материальной релятивистской частицы

Будем исходить из того, что в релятивистской механике:

1) ПНД сохраняется, следовательно, в релятивистской механике можно ввести функционал действия в виде интеграла по мировой линии между двумя заданными событиями a и b – нахождением частицы в начальном и конечном положении в определенные моменты времени t_1 и t_2 ;

2) справедлив постулат относительности, согласно которому законы релятивистской механики инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Значит, интеграл должен браться от скаляра (инварианта). Кроме того, под интегралом должен стоять дифференциал в первой степени. Единст-

венный такой скаляр, который можно построить для свободной материальной частицы, это dS – элементарный интервал, являющийся инвариантом относительно преобразований Лоренца. Следовательно, функционал действия для свободной частицы должен иметь вид

$$S = \int_a^b \alpha dS,$$

где α – некоторая постоянная. Можно показать, что для того, чтобы интеграл имел минимум, коэффициент α должен быть отрицательным.

С учетом явного вида элементарного интервала (C.8) имеем

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \alpha dS = \int_a^b \alpha \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \alpha c dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right)} = \int_{t_a}^{t_b} \alpha c dt \sqrt{1 - v^2 / c^2}. \end{aligned}$$

Получаем, что функционал действия свободной релятивистской частицы

$$S = \int_{t_a}^{t_b} \alpha c dt \sqrt{1 - v^2 / c^2}.$$

Сравнив последнюю формулу с (D.2), получаем выражение для функции Лагранжа свободной релятивистской частицы

$$L = \alpha c \sqrt{1 - v^2 / c^2}.$$

Определим коэффициент α , который должен характеризовать частицу. Для этого осуществим предельный переход при $c \rightarrow \infty$ к классическому случаю, при этом релятивистское выражение для функции Лагранжа свободной материальной частицы должно перейти в классическое выраже-

ние $L = \frac{mv^2}{2}$. Разложим L в ряд по степеням $\frac{v}{c}$.

$$L = \alpha c \sqrt{1 - v^2 / c^2} \approx \alpha c - \frac{\alpha v^2}{2c}.$$

Постоянные члены в функции Лагранжа не отражаются на уравнениях движения, поэтому αc в последнем выражении можно опустить. Сравнивая $-\frac{\alpha v^2}{2c}$ с классическим $L = \frac{mv^2}{2}$, получаем $\alpha = -m_0 c$.

Таким образом, функционал действия свободной релятивистской частицы

$$S = -m_0 c \int_a^b dS = -m_0 c^2 \int_{t_a}^{t_b} dt \sqrt{1 - v^2 / c^2}, \quad (\text{D.8})$$

а функция Лагранжа свободной релятивистской частицы

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2}. \quad (\text{D.9})$$

Удобно записывать функционал действия в четырехмерном пространстве, оси которого обозначаются x_1, x_2, x_3, x_4 . При этом оси x_1 поставим в соответствие координату x , оси x_2 – координату y , оси x_3 – z , а x_4 – $\tau = ict$. Тогда элементарный интервал

$$dS = \sqrt{-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2} = \sqrt{-dx_\mu dx_\mu} = \sqrt{-dx_\mu^2}. \quad (\text{D.10})$$

В последнем выражении знак суммы опущен, на суммирование по μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) указывает наличие повторяющегося индекса.

Функционал действия свободной релятивистской частицы в четырехмерном пространстве записывается так:

$$S = -m_0 c \int_a^b \sqrt{-dx_\mu^2}. \quad (\text{D.11})$$

Импульс релятивистской частицы

Найдем импульс релятивистской частицы, подставляя в определение импульса (D.5) (с учетом (D.6)) соответствующее выражение для функции Лагранжа (D.9). В результате получаем, что импульс релятивистской частицы

$$\vec{P} = \nabla_v \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} \right) = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \quad (\text{D.12})$$

Энергия релятивистской частицы

Подставим в формулу (D.7) выражение для функции Лагранжа свободной релятивистской частицы (D.9) и получим, что энергия свободной релятивистской частицы равна

$$\mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \quad (\text{D.13})$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что является физическим объектом исследований в теории поля (микроскопической электродинамике)?
2. Какие существуют методы исследования объектов микроскопической электродинамики?
3. Какая теоретическая модель реального физического объекта используется в микроскопической электродинамике? Какова область применимости данной теории?
4. В чем состоит фундаментальная проблема естествознания, решаемая в электродинамике?
5. Какое место занимает микроскопическая электродинамика в курсе теоретической физики?
6. Сформулируйте фундаментальные положения теоретической физики, на которых основывается построение теории поля.
7. В чем состоит роль релятивистской механики в построении теории поля?
8. Сформулируйте свойство аддитивности функционала действия. Какой вид имеет функционал действия для заряженной частицы в электромагнитном поле? Как вводится четырехмерный векторный потенциал электромагнитного поля?
9. Получите выражение функции Лагранжа для заряженной частицы в электромагнитном поле.
10. Как вводится обобщенный вектор импульса для заряженной частицы в электромагнитном поле? Чему он равен? В чем состоит физический смысл трехмерного векторного потенциала электромагнитного поля?
11. Выведите формулу для энергии заряженной частицы в электромагнитном поле. Сформулируйте физический смысл скалярного потенциала электромагнитного поля.
12. Чему равна функция Гамильтона для заряженной частицы в электромагнитном поле?
13. Получите уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле на основе релятивистского уравнения движения.
14. Сформулируйте постулат силы Лоренца. Дайте определение напряженности электрического и магнитного полей. Как связаны векторный и скалярный потенциалы с силовыми характеристиками электромагнитного поля?
15. Найдите изменение кинетической энергии заряженной частицы в электромагнитном поле. Чему равна работа электромагнитного поля по изменению кинетической энергии?
16. Определите понятие изотропии времени. Как оно отражается в теории поля?
17. Получите первую пару уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

18. Получите первую пару уравнений Максвелла в интегральной форме. В чем состоит их физический смысл?
19. Докажите, что первая пара уравнений Максвелла является незамкнутой системой уравнений.
20. Как определяются напряженности электромагнитного поля через потенциалы? Является ли однозначным это определение? Насколько однозначно определяются потенциалы?
21. В чем состоит градиентная инвариантность потенциалов?
22. Сформулируйте условия калибровки Лоренца, калибровки Кулона для потенциалов.
23. Как связана градиентная инвариантность потенциалов с принципом наименьшего действия по Гамильтону?
24. Почему возникает необходимость получения уравнения движения в ковариантной форме? Сформулируйте в общем виде задачу для получения уравнения движения в ковариантной форме. В чем состоит специфика электромагнитного случая?
25. Определите вариацию функционала действия для заряженной частицы в электромагнитном поле.
26. Получите уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле в релятивистски-ковариантной форме.
27. Как вводится тензор электромагнитного поля? Сформулируйте его общие свойства. Определите элементы этого тензора через составляющие (проекции) векторов напряженности электрического и магнитного поля.
28. Какие четыре скалярных уравнения содержит в себе релятивистски-ковариантное уравнение движения?
29. Сформулируйте задачу по отысканию 4-вектора импульса в общем виде. Определите 4-вектор импульса заряженной частицы в электромагнитном поле, его составляющие.
30. Получите уравнение Гамильтона–Якоби в релятивистски-ковариантной форме.
31. Сформулируйте прямое и обратное преобразования Лоренца в матричной форме. В чем состоит свойство ортогональности матрицы преобразования Лоренца? Свойство скалярного произведения пары произвольных 4-векторов?
32. Дайте определение 4-тензора 2 ранга $A_{\mu\nu}$. Сформулируйте условие тензорности матрицы $A_{\mu\nu}$.
33. Получите формулы прямого и обратного преобразования Лоренца для четырехмерного векторного потенциала.
34. Выведите формулы преобразования Лоренца для элементов тензора электромагнитного поля.
35. Получите прямые и обратные преобразования Лоренца для компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

36. Какой вид приобретают формулы преобразования Лоренца для векторов напряженностей электромагнитного поля в нерелятивистском случае?

37. Сформулируйте условие инвариантности для потенциалов электромагнитного поля.

38. Получите и проанализируйте инварианты векторов напряженности электромагнитного поля.

39. Получите первый инвариант электромагнитного поля в виде тензора $F_{\mu\nu}$.

40. Какие проблемы возникают при попытке описать заряженную материальную точку в терминах плотности заряда? Как вводится понятие плотности заряда?

41. Дайте определение плотности заряда с помощью трехмерной дельта-функции. Является ли плотность заряда инвариантом относительно преобразований Лоренца?

42. Как определяется четырехмерный вектор плотности тока? Чему равны его составляющие?

43. Определите приращение во времени величины заряда, который содержится в объеме, с использованием понятия плотности заряда.

44. Найдите приращение во времени величины заряда в том же объеме V с использованием понятия плотности тока.

45. Выведите закон сохранения заряда в интегральной и дифференциальной форме.

46. Получите закон сохранения заряда в релятивистски-ковариантной форме.

47. Сформулируйте функционал действия для физической системы «заряженная частица + электромагнитное поле».

48. Определите часть функционала действия, которая зависит только от электромагнитного поля.

49. Какой общий вид имеет функционал действия для системы, которая состоит из электромагнитного поля и находящихся в нем заряженных частиц?

50. Убедитесь в том, что при использовании в ПНД полного выражения для функционала действия системы «заряженная частица + электромагнитное поле» сохраняется полученный ранее результат: уравнение движения для зарядов в электромагнитном поле и первая пара уравнений Максвелла.

51. Сформулируйте вариационную задачу для получения второй пары уравнений Максвелла.

52. Как записать выражение для $S_{mf}(A_\mu, x_\mu)$ в виде интеграла по четырехмерному объему?

53. Выведите вторую пару уравнений Максвелла в релятивистски-ковариантной форме. В чем состоит условие излучения в теории поля?

54. Получите вторую пару уравнений Максвелла в дифференциальной форме для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ из релятивистски-ковариантного уравнения.

55. Сформулируйте вторую пару уравнений Максвелла в интегральной форме, дайте их физическую интерпретацию.

56. Как выглядит первая пара уравнений Максвелла в релятивистски-ковариантной форме?

57. Какая аксиоматика лежит в основе теории поля?

58. Сформулируйте самосогласованную систему уравнений микроэлектродинамики, проанализируйте ее физический смысл.

59. Определите изменение в единицу времени кинетической энергии заряженных частиц, которые находятся в электромагнитном поле.

60. Получите закон сохранения энергии в микроэлектродинамике в интегральной форме. Какие энергетические величины вводятся для характеристики электромагнитного поля?

61. Дайте определение вектора Умова-Пойнтинга. В чем состоит его физический смысл?

62. Сформулируйте закон сохранения энергии в микроэлектродинамике в дифференциальной форме.

63. Сформулируйте физическую постановку задачи микроэлектродинамики в общем виде.

64. Как формулируется физическая постановка задачи микроэлектродинамики в частном случае электростатики?

65. Какой вид приобретает система уравнений микроэлектродинамики в случае электростатики? В чем состоит физический смысл этого приближения?

66. Получите уравнение Пуассона (Лапласа) для электростатического потенциала.

67. В чем состоит идея метода функции Грина? Как реализуется метод функции Грина в случае электростатики?

68. Найдите приближенное выражение для электростатического потенциала в случае удаленной точки наблюдения. В чем состоит мультипольное разложение для потенциала в случае электростатики? Какова область его применимости?

69. Сформулируйте физическую постановку задачи микроэлектродинамики в частном случае магнитостатики?

70. Как выглядит система уравнений микроэлектродинамики в случае магнитостатики? Сформулируйте физический смысл этого приближения.

71. Получите уравнение Пуассона для векторного потенциала.

72. Как реализуется метод функции Грина в случае магнитостатики?

73. Как определяется векторный потенциал в случае удаленной точки наблюдения?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Краткий курс теоретической физики. Кн.1: Механика. Электродинамика. – М.: Наука, 1969. – 271 с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. В 10 т. Т.2. Теория поля. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. В 10 т. Т.1. Механика. – М.: Наука, 2002. – 224 с.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. В 10 т. Т.8. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 620 с.
5. *Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.* Классическая электродинамика. – М.: Наука, 1985. – 399 с.
6. *Джесксон Дж.* Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965. – 702 с.
7. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. – М.: Наука, 1989. – 504 с.
8. *Батыгин В. В., Топтыгин И. Н.* Сборник задач по электродинамике. – М.: Наука, 1970. – 503 с.