# ГЛАВА VIII

# ПОЛЕ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ

## § 64. Запаздывающие потенциалы

В гл. V мы изучали постоянное поле, создаваемое покоящимися зарядами, а в гл. VI — переменное поле, но в отсутствии зарядов. Теперь мы займемся изучением переменных полей при наличии произвольно движущихся зарядов.

Выведем уравнения, определяющие потенциалы произвольного электромагнитного поля. Этот вывод удобнее сделать в четырехмерном виде. Для этого напишем вторую пару уравнений Максвелла в виде (30,2)

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_i.$$

Подставим сюда $F_{ik}$, выраженные через потенциалы, т. е.

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}.$$

Тогда мы находим

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k^2} = \frac{4\pi}{c} j_i. \tag{64,1}$$

Наложим теперь на потенциалы $A_i$ дополнительное условие

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0; \tag{64,2}$$

написанное в трехмерной форме, оно гласит:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{64,3}$$

Это условие является обобщением тех условий, которые мы накладывали на потенциалы в ранее рассмотренных случаях. Так, для постоянного поля (64,3) превращается в $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ — условие, совпадающее с (42,3). Для электромагнитного поля в пустоте (§ 44) мы выбирали потенциалы так, чтобы $\varphi = 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$; такие потенциалы удовлетворяют, очевидно, и условию (64,3) [1]).

Уравнение (64,1) превращается теперь в

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k^2} = -\frac{4\pi}{c} j_i. \tag{64,4}$$

---

[1]) Следует отметить, что, несмотря на дополнительное условие (64,3), потенциалы $\varphi$ и $\mathbf{A}$ все же остаются не вполне однозначными. Именно, к $\mathbf{A}$ можно прибавить $\operatorname{grad} f$, а из $\varphi$ при этом вычесть $\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$, причем, однако, функция $f$ теперь уже не произвольна, а должна удовлетворять, как легко убедиться, уравнению

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Это и есть уравнение, определяющее потенциалы произвольного электромагнитного поля. В трехмерном виде оно записывается в виде двух уравнений — для **A** и для $\varphi$:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{64,5}$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \tag{64,6}$$

Для постоянного поля они превращаются в уже известные нам уравнения (36,4) и (43,4), а для переменного поля без зарядов — в уравнение (45,6). В (64,5) и (64,6) $\rho$ и $\mathbf{j}$ суть функции, вообще говоря, от всех координат и от времени.

Решение неоднородных линейных уравнений (64,5—6) может быть представлено, как известно, в виде суммы решения этих же уравнений без правой части и частного интеграла уравнений с правой частью. Для нахождения этого частного интеграла разделим все пространство на бесконечно малые участки и определим поле, создаваемое зарядом, находящимся в одном из таких элементов объема. Благодаря линейности уравнений поля истинное поле будет равно сумме полей, создаваемых всеми такими элементами.

Заряд $de$ в данном элементе объема является, вообще говоря, функцией от времени. Если выбрать начало координат в рассматриваемом элементе объема, то плотность заряда $\rho = de(t)\,\delta(\mathbf{R})$, где $\mathbf{R}$ — расстояние от начала координат (мы рассматриваем только один этот элемент).

Таким образом, нам надо решить уравнение

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\, de(t)\,\delta(\mathbf{R}). \tag{64,7}$$

Везде, кроме начала координат, $\delta(\mathbf{R}) = 0$, и мы имеем уравнение

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{64,8}$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае $\varphi$ обладает центральной симметрией, т. е. что $\varphi$ есть функция только от $R$. Поэтому, если написать оператор Лапласа в сферических координатах, то (64,8) приобретет вид

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Для решения этого уравнения сделаем подстановку $\varphi = \frac{\chi(R, t)}{R}$. Тогда для $\chi$ мы получим

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0.$$

Но это есть уравнение плоских волн, решение которого имеет вид (см. § 46):

$$\chi = f_1\left(t - \frac{R}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{R}{c}\right).$$

Поскольку мы ищем только частный интеграл уравнения, то достаточно взять только одну из функций $f_1$ и $f_2$. Обычно бывает удобным выбирать $f_2=0$ (см. об этом ниже). Тогда потенциал $\varphi$ везде, кроме начала координат, имеет вид

$$\varphi=\frac{\chi\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}. \tag{64,9}$$

Функция $\chi$ в этом равенстве пока произвольна; выберем ее теперь так, чтобы получить верное значение для потенциала также и в начале координат. Иначе говоря, мы должны подобрать $\chi$ так, чтобы в начале координат удовлетворялось уравнение (64,7). Это легко сделать, заметив, что при $R\to 0$ сам потенциал стремится к бесконечности, а потому его производные по координатам растут быстрее, чем производные по времени. Следовательно, при $R\to 0$ в уравнении (64,7) можно пренебречь членом $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ по сравнению с $\Delta\varphi$. Тогда (64,7) переходит в известное уже нам уравнение (36,9), приводящее к закону Кулона. Таким образом, вблизи начала координат (64,9) должно переходить в закон Кулона, откуда следует, что $\chi(t)=de(t)$, т. е.

$$\varphi=\frac{de\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}. \tag{64,10}$$

Отсюда легко перейти к решению уравнения (64,6) для произвольного распределения зарядов $\rho(x, y, z, t)$. Для этого достаточно в (64,10) написать $de=\rho\,dV$ ($dV$ — элемент объема) и проинтегрировать по всему пространству. К полученному таким образом решению неоднородного уравнения (64,6) можно прибавить еще решение $\varphi_0$ этого же уравнения без правой части. Таким образом, общее решение (64,6) имеет вид:

$$\varphi(x, y, z, t)=\int\frac{1}{R}\rho\left(x', y', z', t-\frac{R}{c}\right)dV'+\varphi_0,$$
$$R^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2, \quad dV'=dx'\,dy'\,dz'$$

($R$ есть расстояние от элемента объема $dV$ до точки, в которой мы ищем значение потенциала). Мы будем писать это выражение коротко в виде

$$\varphi=\int\frac{\rho_{t-\frac{R}{c}}}{R}dV+\varphi_0, \tag{64,11}$$

где индекс $t-\frac{R}{c}$ показывает, что значение $\rho$ надо брать в момент времени $t-\frac{R}{c}$.

Совершенно аналогично решается и уравнение (64,5). Очевидно,

$$\mathbf{A}=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}}}{R}dV+\mathbf{A}_0, \tag{64,12}$$

где $\mathbf{A}_0$ — решение уравнения (64,5) без правой части.

Потенциалы (64,11—12) без $\varphi_0$ и $\mathbf{A}_0$ называются запаздывающими потенциалами.

В случае неподвижных зарядов (т. е. не зависящей от времени плотности $\rho$) формула (64,11) переходит в известную уже нам формулу (36,8) $\varphi=\int\frac{\rho}{R}\,dV$ для электростатического поля, а (64,12) переходит (после усреднения) в формулу (43,5) для постоянного магнитного поля.

$\mathbf{A}_0$ и $\varphi_0$ в (64,11—12) определяются так, чтобы удовлетворить условиям задачи. Для этого, очевидно, достаточно задать начальные условия, т. е. поле в начальный момент времени. Однако, с такими начальными условиями обычно не приходится иметь дела. Вместо этого задаются обычно условия на больших расстояниях от системы зарядов в течение всего времени. Именно, задается падающее на систему внешнее излучение. Соответственно этому поле, возникающее в результате взаимодействия этого излучения с системой, может отличаться от внешнего поля только излучением, исходящим от системы. Такое исходящее от системы излучение на больших расстояниях должно иметь вид плоской волны, распространяющейся по направлению от системы, т. е. в направлении возрастающих $R$. Но этому условию, как видно из того, что мы положили $f_2=0$, удовлетворяет именно решение в виде (64,11—12), т. е. в виде запаздывающих потенциалов. Таким образом, в этом решении первые члены изображают собой поле, исходящее от системы, а $\varphi_0$ и $\mathbf{A}_0$ надо положить равными внешнему полю, действующему на систему.

В заключение этого параграфа применим формулы (64,11—12) к одному, произвольным образом движущемуся точечному заряду. При этом надо иметь в виду, что переход к точечному заряду не может быть произведен в этих формулах непосредственно, так как разным точкам области интегрирования соответствуют различные моменты времени $t-\frac{R}{c}$. Поэтому нужно предварительно преобразовать интегралы (64,11—12) в интегралы по элементам заряда $de$.

Рассмотрим элемент объема сферического слоя толщины $dR$, находящегося на расстоянии $R$ от точки $P$, в которой мы ищем значение поля. Объем такого элемента равен $dV=dR\,df$, где $df$ — площадь элемента сферической поверхности вырезываемого рассматриваемым элементом объема. На протяжении расстояния $dR$ время $t-\frac{R}{c}$ меняется на $\frac{dR}{c}$. Поэтому создающий поле заряд $de$ в рассматриваемом элементе объема должен быть написан в виде суммы заряда $\rho\,dV$ и заряда, попадающего в элемент $dV$ в течение времени $\frac{dR}{c}$. Через единицу поверхности сферы в единицу времени проходит заряд $\rho\frac{\mathbf{vR}}{R}$ ($\mathbf{R}$ — радиус-вектор от $P$ к $dV$). Поэтому в объем $dV=dR\,df$ в течение времени $\frac{dR}{c}$ попадает количество заряда, равное $\rho\frac{\mathbf{vR}}{R}\frac{dR}{c}\,df$. Таким образом,

$$de=\rho\left(1+\frac{\mathbf{vR}}{Rc}\right)dV,$$

так что

$$\rho\, dV = \frac{de}{1+\dfrac{\mathbf{vR}}{cR}}.$$

Подставляя это в (64,11—12) и переходя к точечному заряду, находим потенциалы поля произвольно движущегося заряда в виде

$$\varphi = \left.\frac{e}{R+\dfrac{\mathbf{vR}}{c}}\right|_{t-\frac{R}{c}}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c}\left.\frac{e\mathbf{v}}{R+\dfrac{\mathbf{vR}}{c}}\right|_{t-\frac{R}{c}}. \tag{64,13}$$

Все величины (в том числе и $R$) берутся здесь в момент времени $t-\dfrac{R}{c}$. Потенциалы поля в виде (64,13) называются потенциалами Лиенарда-Вихерта.

### Задача

Разложить поле равномерно и прямолинейно движущегося заряда на плоские волны.

Решение: Поступаем аналогично тому, как делалось в § 51. Плотность заряда пишем в виде $\rho = e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)$, где $\mathbf{v}$ — скорость частицы. Взяв компоненту Фурье от уравнения

$$\Box\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t),$$

находим

$$(\Box\varphi)_{\mathbf{k}} = -\frac{e}{2\pi^2}e^{-i(\mathbf{vk})t}.$$

С другой стороны, из

$$\varphi = \iiint e^{i\mathbf{kr}}\varphi_{\mathbf{k}}\,dk_x dk_y dk_z$$

имеем

$$(\Box\varphi)_{\mathbf{k}} = -k^2\varphi_{\mathbf{k}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} + k^2\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2}e^{-i(\mathbf{kv})t},$$

откуда окончательно

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2}\frac{e^{-i(\mathbf{kv})t}}{k^2-\left(\dfrac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}.$$

Отсюда следует, что волна с волновым вектором $\mathbf{k}$ обладает частотой $\omega = (\mathbf{kv})$. Аналогично находим для векторного потенциала

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2 c}\frac{\mathbf{v}e^{-i(\mathbf{kv})t}}{k^2-\left(\dfrac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}.$$

Наконец, для поля имеем

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} + \frac{i(\mathbf{kv})}{c}\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2}i\frac{-\mathbf{k}+\dfrac{(\mathbf{kv})\mathbf{v}}{c^2}}{k^2-\left(\dfrac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}e^{-i(\mathbf{kv})t}.$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}} = i[\mathbf{kA}_{\mathbf{k}}] = \frac{e}{2\pi^2 c}\frac{[\mathbf{kv}]}{k^2-\left(\dfrac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}e^{-i(\mathbf{kv})t}$$

## § 65. Функция Лагранжа с точностью до членов второго порядка

В обычной классической механике систему взаимодействующих друг с другом частиц можно описывать с помощью функции Лагранжа, зависящей только от координат и скоростей этих частиц (в один и тот же момент времени). Возможность этого в конечном итоге обусловлена тем, что в механике скорость распространения взаимодействий предполагается бесконечной.

Мы уже знаем, что благодаря конечной скорости распространения взаимодействий поле надо рассматривать как самостоятельную систему с собственными „степенями свободы". Отсюда следует, что если мы имеем систему взаимодействующих частиц (зарядов), то для ее описания мы должны рассматривать систему, состоящую из этих частиц и поля. Поэтому при учете конечной скорости распространения взаимодействий, вообще говоря, невозможно описывать систему взаимодействующих частиц с помощью функции Лагранжа, зависящей только от координат и скоростей частиц и не содержащей никаких величин, связанных с собственными „степенями свободы" поля. Однако, если скорости $v$ всех частиц малы по сравнению со скоростью света, то систему зарядов можно описывать некоторой приближенной функцией Лагранжа. При этом оказывается возможным ввести функцию Лагранжа, описывающую систему не только при пренебрежении всеми степенями $v/c$ (классическая функция Лагранжа), но и с точностью до величин порядка $v^2/c^2$.

Предварительно заметим, что в нулевом приближении, т. е. при полном пренебрежении запаздыванием потенциалов, функция Лагранжа для системы зарядов имеет вид

$$L=\sum_{A}\frac{m_A v_A^2}{2}-\frac{1}{2}\sum_{A\neq B}\frac{e_A e_B}{R_{AB}} \tag{65,1}$$

(суммирование производится по зарядам, входящим в состав системы). Второй член есть потенциальная энергия взаимодействия, какой она была бы для неподвижных зарядов [см. (36,10)].

Для получения следующего приближения в функции Лагранжа поступим следующим образом. Функция Лагранжа для заряда, находящегося во внешнем поле, есть [см. (14,3)]

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-e\varphi+\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}.$$

Выбрав какой-нибудь один из зарядов системы, мы определим потенциалы поля, создаваемого всеми остальными зарядами в точке, где находится первый, и выразим их через координаты и скорости зарядов, создающих это поле (как раз это можно сделать только приближенно: $\varphi$ — с точностью до членов порядка $v^2/c^2$, а $\mathbf{A}$ — до членов порядка $v/c$). Подставляя полученные таким образом выражения для потенциалов в приведенное выше выражение для $L$, мы получим функцию Лагранжа для одного из зарядов системы (при данном движении остальных). Отсюда уже без труда можно найти $L$ для всей системы.

Будем исходить из выражений (64,10—12) для запаздывающих потенциалов:

$$\varphi = \int \frac{\rho_{t-\frac{R}{c}}}{R} dV, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}}}{R} dV.$$

Если скорости всех зарядов малы по сравнению со скоростью света, то распределение зарядов, т. е. $\rho$ и $\mathbf{j}$, не успевает сильно измениться за время $R/c$. Поэтому мы можем разложить $\rho_{t-\frac{R}{c}}$ и $\mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}}$ в ряд по степеням $R/c$. Для скалярного потенциала мы находим, таким образом, с точностью до членов второго порядка:

$$\varphi = \int \frac{\rho\, dV}{R} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho\, dV + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R\rho\, dV$$

($\rho$ без индексов есть $\rho$ в момент времени $t$; $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ могут, очевидно, быть вынесены из-под знака интеграла). Но $\int \rho\, dV$ есть полный заряд, являющийся не зависящей от времени постоянной. Поэтому второй член в полученном выражении равен нулю, так что

$$\varphi = \int \frac{\rho\, dV}{R} + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R\rho\, dV. \tag{65,2}$$

Аналогично можно поступить с $\mathbf{A}$. Но выражение для векторного потенциала через плотность тока содержит уже само по себе $1/c$, а при подстановке в функцию Лагранжа умножается еще раз на $1/c$. Поскольку мы ищем функцию Лагранжа только с точностью до членов второго порядка, то в разложении $\mathbf{A}$ достаточно ограничиться только первым членом, т. е.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\rho \mathbf{v}}{R} dV \tag{65,3}$$

(мы подставили $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$).

Предположим, что имеется только один точечный заряд $e$ (для нескольких надо взять сумму получающихся выражений). Тогда для потенциалов создаваемого им поля получаем из (65,2—3)

$$\varphi = \frac{e}{R} + \frac{e}{2c^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{cR}, \tag{65,4}$$

где $R$ — расстояние от заряда.

Выберем вместо $\varphi$ и $\mathbf{A}$ другие потенциалы $\varphi'$ и $\mathbf{A}'$, сделав преобразование:

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f,$$

причем в качестве $f$ выберем функцию

$$f = \frac{e}{2c} \frac{\partial R}{\partial t}.$$

Тогда мы получим

$$\varphi' = \frac{e}{R}, \quad \mathbf{A}' = \frac{e\mathbf{v}}{cR} + \frac{e}{2c}\nabla\frac{\partial R}{\partial t}\ ^{1)}.$$

Для вычисления $\mathbf{A}'$ заметим раньше всего, что $\nabla\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla R$. Операция $\nabla$ означает здесь дифференцирование по координатам точки наблюдения, в которой ищется значение $\mathbf{A}'$. Поэтому $\nabla R$ равен единичному вектору $\mathbf{n}$, направленному от заряда $e$ к точке наблюдения, так что

$$\mathbf{A}' = \frac{e\mathbf{v}}{cR} + \frac{e}{2c}\dot{\mathbf{n}}.$$

Для вычисления $\dot{\mathbf{n}}$ пишем

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{R}}{R}\right) = \frac{\dot{\mathbf{R}}}{R} - \frac{\mathbf{R}\dot{R}}{R^2}.$$

Но производная $\dot{\mathbf{R}}$ при заданной точке наблюдения есть скорость $-\mathbf{v}$ заряда, а производную $\dot{R}$ легко определить, дифференцируя равенство $R^2 = \mathbf{R}^2$, т. е. написав

$$R\dot{R} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\mathbf{v}.$$

Таким образом,

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{-\mathbf{v} + \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v})}{R}.$$

Подставляя все это в выражение для $\mathbf{A}'$, находим окончательно:

$$\varphi' = \frac{e}{R}, \quad \mathbf{A}' = \frac{e[\mathbf{v} + (\mathbf{v}\mathbf{n})\mathbf{n}]}{2cR}. \qquad (65,5)$$

Если имеется несколько зарядов, то надо, очевидно, просуммировать по всем зарядам.

Подставляя эти выражения для потенциалов в функцию Лагранжа для заряда во внешнем поле, найдем функцию Лагранжа $L_A$ заряда $e_A$ (при заданном движении всех остальных зарядов). При этом нужно кинетическую энергию $-m_A c^2\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}$ тоже разложить по степеням $v_A/c$, оставляя члены до второго порядка. Таким образом, мы находим следующее выражение для $L_A$:

$$L_A = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{1}{8}\frac{m_A v_A^4}{c^2} - e_A\sum_B \frac{e_B}{R_{AB}} + \frac{e_A}{2c^2}\sum_B \frac{e_B}{R_{AB}}[\mathbf{v}_A\mathbf{v}_B + (\mathbf{v}_A\mathbf{n})(\mathbf{v}_B\mathbf{n})]$$

(суммирование производится по всем зарядам, за исключением $e_A$; $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении между $e_B$ и $e_A$).

---

1) Потенциалы $\varphi'$ и $\mathbf{A}'$ уже не будут удовлетворять уравнениям д'Аламбера, так как они не будут удовлетворять условию (64,3). В то же время, конечно, $\mathbf{A}'$ и $\varphi'$ будут давать верный результат для поля, если $\varphi$ и $\mathbf{A}$ дают этот результат.

Отсюда уже не представляет труда найти $L$ для всей системы. Легко сообразить, что эта функция равна не сумме $L_A$ для всех зарядов, а имеет вид

$$L=\sum_A \frac{m_A v_A^2}{2}+\sum_A \frac{m_A v_A^4}{8c^2}-\sum_{A>B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}}+ \\ +\sum_{A>B} \frac{e_A e_B}{2c^2 R_{AB}}\left[\mathbf{v}_A \mathbf{v}_B+(\mathbf{v}_A \mathbf{n})(\mathbf{v}_B \mathbf{n})\right]. \quad (65,6)$$

Действительно, для каждого из зарядов при заданном движении всех остальных эта функция $L$ переходит в приведенную выше $L_A$. Выражение (65,6) и определяет функцию Лагранжа системы зарядов с точностью до членов второго порядка.

Наконец, определим еще функцию Гамильтона системы зарядов в том же приближении. Это можно было бы сделать по общим правилам нахождения $\mathcal{H}$ по $L$; однако, проще поступить следующим образом. Второй и четвертый члены в (65,6) представляют собой малую поправку к $L_0=\sum_A \frac{m_A v_A^2}{2}-\sum_{A>B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}}$. С другой стороны, из механики известно, что при небольшом изменении $L$ и $\mathcal{H}$ малые добавки к ним равны по величине и противоположны по знаку (причем изменение $L$ рассматривается при постоянных координатах и скоростях, а изменение $\mathcal{H}$ — при постоянных координатах и импульсах [1]).

Поэтому мы можем сразу написать $\mathcal{H}$, вычтя из $\mathcal{H}_0=\sum_A \frac{p_A^2}{2m_A}+$ $+\sum_{A>B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}}$ те же второй и четвертый члены из (59,6), заменив в них

---

[1]) Если функция Лагранжа зависит, кроме координат и скорости, еще и от некоторого параметра $\lambda$, то

$$dL=F\,dq+p\,d\dot{q}+\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{q,\dot{q}} d\lambda$$

$\left(F=\frac{\partial L}{\partial q},\ p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \text{ — обобщенные сила и импульс}\right)$. Отсюда для $\mathcal{H}=p\dot{q}-L$ имеем

$$d\mathcal{H}=-F\,dq+\dot{q}\,dp-\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{q,\dot{q}} d\lambda,$$

так что

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}\right)_{q,p}=-\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{q,\dot{q}}.$$

При небольшом изменении параметра $\lambda$ $\mathcal{H}$ и $L$ тоже немного меняются; из полученного равенства видно, что для изменений $\delta\mathcal{H}$ и $\delta L$ имеет место равенство $(\delta\mathcal{H})_{q,p}=-(\delta L)_{q,\dot{q}}$ (индексы под скобками указывают, какие величины надо рассматривать как постоянные).

скорости на импульсы ($\mathbf{v}_A = \mathbf{p}_A/m_A$). Таким образом,

$$\mathscr{H} = \sum_A \frac{p_A^2}{2m_A} - \sum_A \frac{p_A^4}{8c^2m_A^3} + \sum_{A>B} \frac{e_Ae_B}{R_{AB}} - \sum_{A>B} \frac{e_Ae_B}{2c^2m_Am_B}\left[\mathbf{p}_A\mathbf{p}_B + (\mathbf{p}_A\mathbf{n})(\mathbf{p}_B\mathbf{n})\right]. \quad (65,7)$$

### Задача

Написать функцию Лагранжа во втором приближении для системы из двух частиц, исключив из нее движение системы как целого.

Решение: Выбираем систему отсчета, в которой сумма импульсов обеих частиц равна нулю, т. е. $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_1} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_2} = 0$, где $L$ определяется из (65,6). Вводя относительную скорость $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, выражаем отсюда $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ через $\mathbf{v}$ (все вычисления производим с точностью до членов порядка $1/c^2$):

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{v} + \frac{m_1m_2(m_2-m_1)}{2(m_1+m_2)^3c^2}v^2\mathbf{v} + \frac{e_1e_2}{2Rc^2}\frac{(m_2-m_1)}{(m_1+m_2)^2}[\mathbf{v} + \mathbf{n}(\mathbf{vn})],$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v} + \frac{m_1m_2(m_2-m_1)}{2(m_1+m_2)^3c^2}v^2\mathbf{v} + \frac{e_1e_2}{2Rc^2}\frac{(m_2-m_1)}{(m_1+m_2)^2}[\mathbf{v} + \mathbf{n}(\mathbf{vn})].$$

Подставляя это в $L$, находим с той же точностью:

$$L = \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}v^2 + \frac{m_1m_2(m_1^3+m_2^3)}{8(m_1+m_2)^4c^2}v^4 - \frac{e_1e_2}{R} - \frac{e_1e_2}{2Rc^2}\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}[v^2 + (\mathbf{vn})^2].$$

## § 66. Поле системы зарядов на далеких расстояниях

Рассмотрим поле, создаваемое системой движущихся зарядов на далеком расстоянии от этой системы (т. е. на расстоянии, большом по сравнению с размерами системы). При этом мы опять будем исходить из выражений для запаздывающих потенциалов:

$$\varphi = \int \frac{1}{R}\rho_{t-\frac{R}{c}}\,dV, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{1}{R}\mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}}\,dV.$$

Выберем начало координат $O$ где-нибудь внутри системы зарядов. Радиус-вектор из $O$ в точку $P$, где мы ищем значение поля, обозначим через $\mathbf{R}_0$, а единичный вектор в этом направлении через $\mathbf{n}$. Радиус-вектор заряда $de = \rho\,dV$ пусть будет $\mathbf{r}$, а радиус-вектор от $de$ в точку $P$ пусть будет $\mathbf{R}$. Очевидно, что $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$ и $R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|$. При интегрировании в $\varphi$ и $\mathbf{A}$ $\mathbf{R}_0$ считается постоянным.

На больших расстояниях от системы зарядов $|\mathbf{R}_0| \gg |\mathbf{r}|$. Поэтому угол, образуемый в точке $P$ векторами $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}$, весьма мал. Умножая равенство $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$ на $\mathbf{n}$ и замечая, что $\mathbf{R}_0\mathbf{n} = R_0$, получаем приближенно $R = R_0 - \mathbf{rn}$ (вместо $\mathbf{Rn}$ можно писать просто $R$, так как разница между ними второго порядка малости). Подставим это в выражение для запаздывающих потенциалов. В знаменателе подинтегральных выражений можно пренебречь $\mathbf{rn}$ по сравнению с $R_0$. В $t - R/c$, однако, этого пренебрежнеия, вообще говоря, сделать нельзя; возможность этого пренебрежения определяется здесь не относительной величиной $R_0/c$ и $\mathbf{rn}/c$, а тем, насколько меняются сами $\rho$ и $\mathbf{j}$ за время $\mathbf{rn}/c$. Таким образом, для потенциалов поля на большом расстоянии от системы зарядов находим выражения:

$$\varphi = \frac{1}{R_0}\int \rho_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}}{c}}\, dV, \tag{66,1}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}}{c}}\, dV. \tag{66,2}$$

На больших расстояниях от системы зарядов поле в не очень больших участках пространства можно рассматривать как плоскую волну. Поэтому напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ этого поля связаны посредством соотношения $\mathbf{H} = [\mathbf{nE}]$ [см. (46,4)]. Для определения поля достаточно, следовательно, вычислить только векторный потенциал $\mathbf{A}$, с помощью которого можно найти поле $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$. Заметим, что рассматривать поле как плоскую волну можно на расстояниях, больших не только по сравнению с размерами системы, но и по сравнению с длиной создаваемых или, как говорят, излучаемых системой электромагнитных волн.

Рассмотрим электромагнитную волну, обладающую определенной частотой. Она может представлять собой одну из компонент разложения некоторой не монохроматической волны в ряд или интеграл Фурье. Векторный потенциал такой волны имеет вид $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$, где $\omega$ — ее частота; аналогичный вид имеют, конечно, и другие величины, определяющие поле волны. Плотность тока (и плотность заряда) излучающей системы тоже можно разложить в ряд или интеграл Фурье, так что за испускание определенной монохроматической компоненты ответственна соответствующая компонента тока $\mathbf{j}_\omega e^{-i\omega t}$. Очевидно, что волна $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$ определяется формулой (66,2), где вместо $\mathbf{j}$ надо подставить соответствующую компоненту $\mathbf{j}_\omega e^{-i\omega t}$. Мы находим тогда

$$\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_\omega e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}}{c}\right)}\, dV. \tag{66,3}$$

Сокращая на $e^{-i\omega t}$ и вводя волновой вектор $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$, имеем [1])

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0}\int \mathbf{j}_\omega e^{-i\mathbf{kr}}\, dV. \tag{66,4}$$

## § 67. Дипольное излучение

Временем $\mathbf{rn}/c$ в подинтегральных выражениях (66,1—2) для запаздывающих потенциалов можно пренебречь в случаях, если за это время распределение зарядов мало меняется. Легко найти условия осуществления этого требования. Предположим, что движение зарядов в рассматриваемой системе является в общем стационарным, и пусть $T$

---

[1]) Мы пишем выражение для $\mathbf{A}_\omega$ в комплексном виде. Следует помнить что всегда в таких случаях следует брать действительную часть от $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$

есть порядок величины времени, в течение которого распределение зарядов в системе меняется заметным образом. Излучение этой системы будет, очевидно, обладать периодом порядка этого же $T$ (т. е. частотой порядка $1/T$). Обозначим далее посредством $a$ порядок величины размеров системы. Тогда время $\mathbf{rn}/c$ будет порядка $a/c$. Для того, чтобы за это время распределение зарядов в системе не успело значительно измениться, необходимо, чтобы $a/c \ll T$. Но $cT$ есть не что иное, как длина волны $\lambda$ излучения. Таким образом, условие $a \ll cT$ можно написать в виде

$$a \ll \lambda, \tag{67,1}$$

т. е. размеры системы должны быть малы по сравнению с длиной излучаемой волны.

Заметим, что это же условие (67,1) можно получить и из (66,4). В подинтегральном выражении $\mathbf{r}$ пробегает значения в области порядка размеров системы, так как вне системы $\mathbf{j}$ равно нулю. Поэтому показатель $i\mathbf{kr}$ мал, и им можно пренебречь для тех волн, у которых $ka \ll 1$, что эквивалентно (67,1).

Это условие можно написать еще и в другом виде, заметив, что $T \sim a/v$, так что $\lambda \sim ca/v$, если $v$ есть порядок величины скорости зарядов. Из $a \ll \lambda$ находим тогда

$$v \ll c, \tag{67,2}$$

т. е. скорости зарядов должны быть малы по сравнению со скоростью света.

Будем предполагать, что это условие выполнено, и займемся изучением излучения на расстояниях от излучающей системы, больших по сравнению с длиной волны (а, следовательно, во всяком случае больших по сравнению с размерами системы). Как было указано в § 66, на таких расстояниях поле можно рассматривать как плоскую волну, и потому для определения поля достаточно вычислить только векторный потенциал.

Векторный потенциал (66,2) поля на далеких расстояниях имеет теперь вид

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t'}\, dV, \tag{67,3}$$

где $t' = t - R_0/c$. $t'$ теперь уже не зависит от переменных интегрирования. Подставляя $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, переписываем (67,3) в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \left(\sum e\mathbf{v}\right)$$

(суммирование производится по всем зарядам системы; для краткости мы будем опускать индекс $t'$ — все величины берутся в момент времени $t'$). Но

$$\sum e\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \sum e\mathbf{r} = \dot{\mathbf{d}},$$

где $\mathbf{d}$ есть дипольный момент системы. Таким образом,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{d}}. \tag{67,4}$$

Теперь уже легко определить и поля **E** и **H**. Для **H** имеем

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}.$$

При дифференцировании произведения $\dot{\mathbf{d}} \frac{1}{R_0}$ можно считать множитель $1/R_0$ постоянным (так как при дифференцировании $1/R_0$ получается член, пропорциональный $1/R_0^2$, которым можно пренебречь по сравнению с членом с $1/R_0$) и дифференцировать только по $R_0$, содержащемуся в $t'$. Мы находим тогда

$$\mathbf{H} = \frac{1}{cR_0} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{d}}.$$

Для всякого вектора $\mathbf{a}(t')$, являющегося функцией от $t'$, имеет место соотношение

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(t') = \left[ \operatorname{grad} t' \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt'} \right].$$

Но $\nabla t' = -\frac{1}{c} \nabla R_0 = -\frac{\mathbf{n}}{c}$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{R}_0$, и потому

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(t') = -\frac{1}{c} [\dot{\mathbf{a}}\mathbf{n}]. \tag{67,5}$$

Таким образом, магнитное поле равно

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2 R_0} [\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}], \tag{67,6}$$

а электрическое поле

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R_0} [[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\,\mathbf{n}]. \tag{67,7}$$

Отметим, что поле излучаемой волны обратно пропорционально расстоянию от излучающей системы. Далее, излучение в рассматриваемом приближении определяется второй производной от дипольного момента системы. Такое излучение называется дипольным.

Поскольку $\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r}$, то $\ddot{\mathbf{d}} = \sum e\dot{\mathbf{v}}$. Таким образом, заряды могут излучать только в случае, если они движутся с ускорением. Равномерно движущиеся заряды не излучают. Это следует, впрочем, непосредственно из принципа относительности, так как равномерно движущийся заряд можно рассматривать в такой инерциальной системе, где он покоится, а покоящиеся заряды, очевидно, не излучают.

Излучение электромагнитных волн сопровождается, конечно, излучением энергии. Поток энергии определяется вектором Пойнтинга [см. (31,2)]:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}].$$

Поскольку в нашем случае $\mathbf{E} = [\mathbf{Hn}]$, а $\mathbf{H} \perp \mathbf{n}$, то

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} H^2 \mathbf{n}.$$

Подставляя сюда (67,6), находим

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c^3 R_0^2} [\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2 \mathbf{n}. \tag{67,8}$$

Вектор Пойнтинга, т. е. поток энергии, направлен по направлению распространения волны.

Найдем количество энергии $dJ$, протекающей в единицу времени через элемент поверхности $df$ шаровой поверхности с центром в начале координат и с радиусом $R_0$. Это количество равно, очевидно, потоку $S$, помноженному на $df$, т. е.

$$dJ = \frac{1}{4\pi c^3 R_0^2} [\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2 \, df.$$

Но элемент поверхности $df = R_0^2 \, do$, где $do$ — телесный угол, под которым $df$ видно из начала координат. Следовательно,

$$dJ = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2 \, do. \tag{67,9}$$

Это и есть количество энергии, излучаемой системой в единицу времени в телесный угол $do$. Мы видим, что это количество одинаково для всех расстояний (в одинаковые для них моменты $t'$). Так, конечно, и должно быть, так как излучаемая системой энергия распространяется в окружающем пространстве, нигде не накопляясь и не исчезая.

Исходя из (67,9), можно вычислить полное количество энергии $J$, излучаемое системой в единицу времени по всем направлениям. Для этого введем сферические координаты с полярной осью вдоль вектора $\ddot{\mathbf{d}}$. Полярный угол и азимут вектора $\mathbf{n}$ в этих координатах пусть будут $\theta$ и $\varphi$. $\theta$ есть, следовательно, угол между $\ddot{\mathbf{d}}$ и $\mathbf{n}$. Тогда $do = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$ и (67,9) переходит в

$$dJ = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \sin^3\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Интегрируя по $d\varphi$ от 0 до $2\pi$ и по $d\theta$ от 0 до $\pi$, находим

$$J = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2. \tag{67,10}$$

Если имеется всего один заряд, то $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ и $\ddot{\mathbf{d}} = e\mathbf{w}$, где $\mathbf{w}$ — ускорение заряда. Таким образом, полное излучение движущегося заряда

$$J = \frac{2e^2 w^2}{3c^3}. \tag{67,11}$$

Отметим, что система, состоящая из частиц, у которых отношение зарядов к массе одинаково, не может излучать (дипольно). Действительно, для такой системы дипольный момент

$$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r} = \sum \frac{e}{m} m\mathbf{r} = \mathrm{const.} \sum m\mathbf{r},$$

где const. есть одинаковое для всех зарядов отношение заряда к массе. Но $\sum m\mathbf{r} = \mathbf{R} \sum m$, где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор центра инерции системы (напоминаем, что все скорости $v \ll c$, так что применима нерелятивистская механика). Поэтому $\ddot{\mathbf{d}}$ пропорционально ускорению центра инерции, т. е. равно нулю, так как центр инерции движется равномерно.

## Задачи

1. Определить полное излучение за время одного оборота при эллиптическом движении двух притягивающихся зарядов.

Решение: Выберем начало координат в центре инерции обеих частиц. Тогда (67,10) дает

$$J = \frac{2}{3c^3}\left(\frac{em' - e'm}{m + m'}\right)^2 \ddot{\mathbf{r}}^2,$$

где $e$, $m$ и $e'$, $m'$ — заряды и массы частиц, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор между ними. Согласно уравнениям движения $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \frac{a}{r^3}\mathbf{r}$ ($\mu$ — приведенная масса, $a = |ee'|$), так что

$$J = \frac{2a^2}{3c^3\mu^2}\left(\frac{em' - e'm}{m + m'}\right)^2 \frac{1}{r^4}.$$

Уравнение орбиты есть, как известно, $p/r = 1 + \varepsilon\cos\varphi$, где $p = M^2/a\mu$ и $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathscr{E}M^2}{\mu a^2}}$ есть параметр и эксцентриситет орбиты ($M = \mu r^2\dot{\varphi}$ — момент импульса, $\mathscr{E}$ — энергия частицы, причем для эллиптического движения $\mathscr{E} < 0$). С помощью равенства $dt = \frac{\mu r^2}{M}d\varphi$ интегрирование по времени можно заменить интегрированием по углу $d\varphi$ (от 0 до $2\pi$). В результате находим полное излучение $\Delta\mathscr{E} = \int J\,dt$ за оборот в виде

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{2\pi}{3c^3}\sqrt{\frac{a^3\mu}{p^5}}\left(\frac{e}{m} - \frac{e'}{m'}\right)^2(2 + \varepsilon^2).$$

2. Определить полное излучение за время пролетания одного заряда мимо другого.

Решение: В случае притяжения зарядов траекторией является гипербола $p/r = 1 - \varepsilon\cos\varphi$, а в случае отталкивания $p/r = -1 + \varepsilon\cos\varphi$. Ее асимптоты образуют с ее осью угол $\varphi_0$, определяемый из $\cos\varphi_0 = 1/\varepsilon$, а угол отклонения при пролетании частицы равен $\chi = \pi - 2\varphi_0$. Решение такое же, как в задаче 1, но интегрирование по $d\varphi$ производится между $-\varphi_0$ и $+\varphi_0$. В результате находим:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{2\mu^3 v_0^5}{3c^3 a}\operatorname{tg}^5\frac{\chi}{2}\left\{(\pi - \chi)\left(1 + \frac{1}{2\sin^2\frac{\chi}{2}}\right) - 3\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2}\right\}\left(\frac{e}{m} - \frac{e'}{m'}\right)^2$$

(угол отклонения $\chi$ определяется из соотношения $\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2} = \frac{\mu v_0^2\rho}{a}$, $v_0$ — скорость при бесконечном расстоянии между частицами, $\rho$ — „прицельное расстояние", так что $\mathscr{E} = \frac{\mu v_0^2}{2}$, $M = \mu v_0\rho$).

В случае отталкивания зарядов при „лобовом" столкновении ($\rho = 0$) угол отклонения $\chi = \pi$, и написанная формула переходит в

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{2\mu^3 v_0^5}{45c^3 a}\left(\frac{e}{m} - \frac{e'}{m'}\right)^2.$$

3. Параллельный поток частиц (с зарядами $e$ и массами $m$) рассеивается зарядами $e'$ (с массами $m'$; $e$ и $e'$ имеют один знак). Определить полное излучение, отнесенное к единице плотности потока.

Решение: Если плотность равна единице (т. е. в единицу времени через единицу площади сечения пучка частиц переходит одна частица), то число частиц в пучке, имеющих „прицельное расстояние" $\rho$ между $\rho$ и $\rho + d\rho$, равно $2\pi\rho\, d\rho$. Поэтому искомое полное излучение получится умножением полного излучения одной частицы на $2\pi\rho\, d\rho$ и интегрированием по $d\rho$ от 0 до $\infty$. С помощью $\Delta\mathcal{E}$ из задачи 2 и соотношения $\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2} = \frac{\mu v_0^2 \rho}{a}$ находим

$$\int_0^\infty 2\pi\rho\, \Delta\mathcal{E}\, d\rho = \frac{14\pi\mu v_0 a}{9c^3}\left(\frac{e}{m} - \frac{e'}{m'}\right)^2.$$

4. Определить распределение по направлениям полного излучения при пролетании одного заряда мимо другого, если скорость заряда настолько велика (хотя и мала по сравнению со скоростью света), что отклонение от прямолинейного движения можно считать малым.

Решение: Угол отклонения мал, если кинетическая энергия $\mu v^2/2$ велика по сравнению с потенциальной энергией, порядок величины которой есть $a/\rho$ ($\mu v^2 \gg a/\rho$). Выберем направление движения в качестве оси $X$, а начало координат — опять в центре инерции. В первом приближении траектория определяется как $x = vt$, $y = \rho$. В следующем приближении уравнения движения дают

$$\mu\ddot{x} = \frac{a}{r^2}\,\frac{x}{r} = \frac{avt}{r^3}, \qquad \mu\ddot{y} = \frac{a}{r^2}\,\frac{y}{r} = \frac{a\rho}{r^3},$$

где для $r$ можно писать $r = \sqrt{\rho^2 + v^2t^2}$. Интегрируя с помощью этих выражений формулу (67,9) по времени от $-\infty$ до $+\infty$, находим для полного излучения в телесный угол $do$:

$$\Delta\mathcal{E}_{\mathbf{n}}\, do = \frac{a^2}{32vc^3\rho^3}\left(\frac{e}{m} - \frac{e'}{m'}\right)^2 (4 - 3n_x^2 - n_y^2)\, do$$

($n_x$, $n_y$ — компоненты единичного вектора $\mathbf{n}$ в направлении $do$).

## § 68. Квадрупольное и магнитное дипольное излучения

Рассмотрим теперь излучение, обусловленное следующими членами разложения векторного потенциала (66,2). Если размеры системы малы по сравнению с длиной волны, то эти члены, вообще говоря, значительно меньше первого члена, дающего дипольное излучение. Они, однако, существенны в тех случаях, когда дипольный момент системы зарядов равен нулю, и потому дипольное излучение отсутствует.

Разлагая (66,2):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t' + \frac{\mathbf{rn}}{c}}\, dV$$

по степеням $\mathbf{rn}/c$, находим с точностью до членов первого порядка

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'}\, dV + \frac{1}{c^2R_0}\,\frac{\partial}{\partial t'}\int (\mathbf{rn})\,\mathbf{j}_{t'}\, dV.$$

Подставляя $\mathbf{j}=\rho\mathbf{v}$, переписываем это в виде

$$\mathbf{A}=\frac{\sum e\mathbf{v}'}{cR_0}+\frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t'}\sum e\mathbf{v}'(\mathbf{r}'\mathbf{n}). \tag{68,1}$$

(Ниже, как и в § 67, мы будем для краткости опускать индекс $t'$.)

Преобразуем выражение для $\mathbf{A}$ следующим образом. Во втором члене можно написать

$$\mathbf{v}(\mathbf{rn})=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{nr})+\frac{1}{2}\mathbf{v}(\mathbf{nr})-\frac{1}{2}\mathbf{r}(\mathbf{nv})=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{nr})+\frac{1}{2}[[\mathbf{rv}]\mathbf{n}].$$

Мы находим тогда для $\mathbf{A}$ выражение

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}+\frac{1}{2c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e\mathbf{r}(\mathbf{nr})+\frac{1}{cR_0}[\dot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}],$$

где $\mathbf{d}$ — дипольный момент системы, а $\mathfrak{m}=\frac{1}{2c}\sum e[\mathbf{rv}]$ — ее магнитный момент. Для дальнейшего преобразования заметим, что к $\mathbf{A}$ можно прибавить, не изменяя поля, любой вектор, пропорциональный $\mathbf{n}$. Действительно, если прибавить к $\mathbf{A}$ вектор вида $f\mathbf{n}$, то магнитное поле не изменится, так как согласно (67,5)

$$\operatorname{rot} f\mathbf{n}=\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}[\mathbf{nn}]=0$$

(электрическое поле $\mathbf{E}=[\mathbf{Hn}]$, т. е. целиком определяется магнитным полем, и, следовательно, при указанном преобразовании тоже не меняется).

Прибавим на этом основании к полученному для $\mathbf{A}$ выражению вектор $-\frac{\mathbf{n}}{6c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum er^2$. Мы получим тогда для потенциала:

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}+\frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{2}\sum e\left[\mathbf{r}(\mathbf{n}\,\mathbf{r})-\frac{1}{3}\mathbf{n}r^2\right]+\frac{1}{cR_0}[\dot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}].$$

Но стоящее под знаком $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ выражение есть не что иное, как произведение $n_\beta D_{\alpha\beta}$ вектора $\mathbf{n}$ на тензор квадрупольного момента $D_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\sum e\left(x_\alpha x_\beta-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}r^2\right)$ (см. § 41). Вводя вектор $\mathbf{D}$ с компонентами $D_\alpha=D_{\alpha\beta}n_\beta$, находим окончательное выражение для векторного потенциала:

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}+\frac{1}{c^2R_0}\ddot{\mathbf{D}}+\frac{1}{cR_0}[\dot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}]. \tag{68,2}$$

Зная $\mathbf{A}$, мы можем теперь определить поля $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ излучения. С помощью общей формулы (67,5) находим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{H}&=\frac{1}{c^2R_0}\left\{[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]+\frac{1}{c}[\dddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}]+[[\ddot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]\right\},\\ \mathbf{E}&=\frac{1}{c^2R_0}\left\{[[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]+\frac{1}{c}[[\dddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]+[\mathbf{n}\ddot{\mathfrak{m}}]\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{68,3}$$

Зная магнитное поле, легко определить интенсивность $dJ$ излучения в телесном угле $do$, совершенно аналогично тому, как это было сделано в § 67 для дипольного излучения, т. е. по формуле $dJ = \frac{c}{4\pi} H^2 R_0^2 \, do$. Мы определим здесь полное излучение, т. е. энергию, излучаемую системой в единицу времени по всем направлениям. Для этого усредним $dJ$ по всем направлениям $\mathbf{n}$; полное излучение равно, очевидно, этому среднему, умноженному на $4\pi$. При усреднении квадрата магнитного поля все произведения первого, второго и третьего членов в $\mathbf{H}$ друг на друга исчезают, так что остаются только средние квадраты каждого из них. Несложные вычисления [1]) дают в результате следующее выражение для $J$:

$$J = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2 + \frac{1}{5c^5} \dddot{D}_{\alpha\beta}^2 + \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathfrak{m}}^2. \tag{68,4}$$

Таким образом, полное излучение состоит из трех независимых частей; они называются соответственно дипольным, квадрупольным и магнитным дипольным излучениями.

### Задача

Определить полное излучение при „лобовом" столкновении двух частиц с одинаковыми зарядами $e$ и массами $m$.

Решение: Дипольное излучение в этом случае отсутствует. Выбираем начало координат в центре инерции, а ось $X$ — вдоль направления движения. Для квадрупольного момента имеем

$$D_{xx} = \frac{1}{6} e x^2, \quad D_{yy} = D_{zz} = -\frac{1}{12} e x^2.$$

Из (68,4) находим

$$J = \frac{e^2}{30c^5} (x \dddot{x} + 3\dot{x}\ddot{x})^2.$$

Уравнение движения дает $\frac{m}{2} \ddot{x} = \frac{e^2}{x^2}$; интегрирование по времени удобно заменить интегрированием по $dx$ с помощью $\dot{x} = \sqrt{\frac{4\mathscr{E}}{m} - \frac{4e^2}{mx}}$, где $\mathscr{E} = \frac{mv_0^2}{4}$ — энергия относительного движения, а $v_0$ — скорость на бесконечности. В результате находим

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{1}{1575} \frac{mv_0^7}{c^5}.$$

---

[1]) Приведем удобный метод усреднения произведений компонент единичного вектора. Поскольку $\mathbf{n}$ есть единичный вектор, то $\overline{n_\alpha n_\beta}$, будучи симметричным тензором, может выражаться только через единичный тензор $\delta_{\alpha\beta}$, т. е. $\overline{n_\alpha n_\beta} = a\delta_{\alpha\beta}$; упрощая по паре индексов $\alpha$, $\beta$ и помня, что $n_\alpha^2 = 1$, находим, что $a = 1/3$.

Для среднего значения произведения четырех компонент пишем аналогично

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} = a(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})$$

(имея в виду симметричность $\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta}$ по всем четырем индексам); упрощая по парам индексов $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$, $\delta$, находим $a = 1/15$.

## § 69. Излучение на близких расстояниях

Формулы дипольного излучения были выведены для поля на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны (и значительно бо́льших, чем размеры излучающей системы). Мы будем в этом параграфе попрежнему считать, что длина волны велика по сравнению с размерами системы, но будем рассматривать поле на расстояниях, хотя и больших по сравнению с размерами системы, но порядка длины волны. При этом мы можем попрежнему пользоваться формулами § 66, выведенными для поля на расстояниях, больших только по сравнению с размерами системы, но, однако, не можем считать теперь поле даже в небольших участках плоской волной. Поэтому для определения поля необходимо вычислить как $\mathbf{A}$, так и $\varphi$.

Мы будем рассматривать компоненты Фурье искомого поля. Для каждой из этих монохроматических компонент мы можем воспользоваться общей формулой (66,4)

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0}\int \mathbf{j}_\omega e^{-i\mathbf{kr}}\,dV.$$

Поскольку размеры системы малы по сравнению с длиной волны, то $\mathbf{kr} \ll 1$, и мы можем разложить в подинтегральном выражении $e^{i\mathbf{kr}}$ в ряд по степеням $\mathbf{kr}$. Ограничиваясь в векторном потенциале членом нулевого порядка, имеем:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0}\int \mathbf{j}_\omega dV. \tag{69,1}$$

Это выражение можно написать в другом виде, заметив, что

$$\int \mathbf{j}_\omega dV = \left(\int \mathbf{j}\,dV\right)_\omega = \left(\sum e\mathbf{v}\right)_\omega = \dot{\mathbf{d}}_\omega,$$

а компонента Фурье от производной $\dot{\mathbf{d}}$ связана с соответствующей компонентой $\mathbf{d}_\omega$ посредством соотношения

$$\dot{\mathbf{d}}_\omega e^{-i\omega t} = \frac{d}{dt}(\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}) = -i\omega\,\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t},$$

т. е.

$$\dot{\mathbf{d}}_\omega = -i\omega\mathbf{d}_\omega.$$

Подставляя эти соотношения в (69,1), находим для векторного потенциала поля

$$\mathbf{A}_\omega = -ik\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\mathbf{d}_\omega. \tag{69,2}$$

Скалярный потенциал $\varphi_\omega$ можно получить непосредственно из $\mathbf{A}_\omega$, воспользовавшись общим условием (64,3) $\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$, налагаемым на потенциалы. Для компонент Фурье это условие дает

$$ik\varphi_\omega = \operatorname{div}\mathbf{A}_\omega, \tag{69,3}$$

и, подставляя (69,2), находим, помня, что $\mathbf{d}_\omega$ есть постоянная,

$$\varphi_\omega = -\mathbf{d}_\omega \nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}. \qquad (69,4)$$

Легко определить также и поля $\mathbf{E}_\omega$ и $\mathbf{H}_\omega$. Подставляя в $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\, \mathbf{A}$ и $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\, \varphi$ компоненты Фурье всех этих величин, находим:

$$\mathbf{H}_\omega = \mathrm{rot}\, \mathbf{A}_\omega, \qquad \mathbf{E}_\omega = ik\mathbf{A}_\omega - \mathrm{grad}\, \varphi_\omega, \qquad (69,5)$$

и с помощью (69,2), (69,4) получаем:

$$\mathbf{H}_\omega = ik\left[\mathbf{d}_\omega \nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}\right], \qquad (69,6)$$

$$\mathbf{E}_\omega = k^2 \frac{e^{ikR_0}}{R_0}\mathbf{d}_\omega + (\mathbf{d}_\omega \nabla)\nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}. \qquad (69,7)$$

Формулы (69,6) и (69,7) определяют поле на расстояниях порядка длины волны. В этих формулах, конечно, нельзя теперь пренебречь членами, содержащими $1/R_0^2$, так как их отношение к членам с $1/R_0$ порядка $1/kR_0$, а $kR_0 \approx 1$.

Произведенное здесь нами разложение можно было бы довести и до членов более высоких порядков, которые определяются соответствующими мультипольными моментами системы.

## § 70. Излучение быстро движущегося заряда

Рассмотрим теперь заряженную частицу, движущуюся со скоростью, не являющейся малой по сравнению со скоростью света. Формулы § 67, выведенные в предположении $v \ll c$, не применимы к этому случаю непосредственно. Мы можем, однако, рассматривать частицу в той системе отсчета, в которой она в данный момент покоится; в этой системе отсчета упомянутые формулы, очевидно, применимы (обращаем внимание на то, что это возможно сделать только в случае одной движущейся частицы; для системы зарядов не существует, очевидно, системы отсчета, в которой все частицы одновременно покоились бы).

Таким образом, в указанной системе отсчета частица излучает в течение времени $dt$ энергию

$$d\mathscr{E} = \frac{2e^2}{3c^3} w_0^2\, dt \qquad (70,1)$$

[согласно формуле (67,11)], где $w_0$ — ускорение частицы в этой же системе отсчета. Перепишем теперь эту формулу в четырехмерном виде, в котором она будет применима в произвольной системе отсчета. Для этого заметим, что $w_0^2 = c^4 w_k^2$, где $w_k$ есть 4-ускорение частицы в любой системе отсчета (см. задачу 1 § 7). Далее, вместо излученной энергии $d\mathscr{E}$ мы должны писать теперь „излучение 4-импульса" $\frac{c}{i}\, dP_i$, поскольку энергия (умноженная на $i/c$) является временной компонентой

4-импульса; вместо же $dt$ надо по аналогичной причине писать $dx_i/ic$. Мы находим, таким образом,

$$dP_i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{du_k}{ds}\right)^2 dx_i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{du_k}{ds}\right)^2 u_i ds, \tag{70,2}$$

где $u_k$ — 4-скорость частицы. Легко проверить, что в системе отсчета, где $v=0$, временная компонента этого уравнения действительно дает (70,1); пространственные же компоненты дают для излучения импульса в единицу времени $\frac{d\mathbf{p}}{dt}=0$ (при $v=0$ пространственные компоненты $u_k$ тоже равны нулю). Последний результат можно получить и непосредственно, определяя излучение импульса как интеграл от потока импульса $T_{\alpha\beta}$ (см. § 32 и 33) по замкнутой поверхности, охватывающей частицу; в системе отсчета, в которой $v=0$, поле определяется формулами (67, 6—7), и легко проверить, что указанный интеграл действительно равен нулю.

Обычно представляет интерес полное излучение за все время пролетания частицы через данное электромагнитное поле (напоминаем, что равномерно движущийся заряд вообще не излучает). Оно равно интегралу от (70,2), т. е.

$$\Delta P_i = \frac{2e^2}{3c}\int\left(\frac{du_k}{ds}\right)^2 dx_i. \tag{70,3}$$

Эту формулу можно написать в другом виде, выразив в ней 4-ускорения $\frac{du_k}{ds}$ через тензор электромагнитного поля посредством уравнений движения (21,4):

$$mc\frac{du_k}{ds} = \frac{e}{c}F_{kl}u_l.$$

Мы находим при этом

$$\Delta P_i = \frac{2e^4}{3m^2c^5}\int (F_{kl}u_l)^2\, dx_i. \tag{70,4}$$

Временная компонента этого уравнения дает полное излучение энергии $\Delta\mathscr{E}$. Подставляя для всех четырехмерных величин их выражения через соответствующие трехмерные величины, находим

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{2e^4}{3m^2c^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right\}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{Ev})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt. \tag{70,5}$$

В соответствующем выражении для полного излучения импульса $\Delta\mathbf{P}$ под интегралом стоит еще множитель $\mathbf{v}$.

### Задача

Определить полное излучение заряда $e$, пролетающего в кулоновском поле (с потенциалом $\varphi = e'/r$) со скоростью, близкой к скорости света.

Решение: При пролетании через поле заряд почти не отклоняется. Поэтому в (70,5) можно считать $\mathbf{v}$ постоянной, так что $E = \frac{e'}{r^2} = \frac{e'}{\rho^2 + v^2 t^2}$ (см. задачу 4 § 67). В результате находим

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{\pi e^4 e'^2}{12 m^2 c^3 v \rho^3} \frac{1 - \frac{3v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

## § 71. Излучение малых частот при столкновениях

Вернемся опять к случаю движения частиц со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, и рассмотрим излучение при столкновении заряженных частиц. Поскольку столкновение происходит в течение конечного промежутка времени, то излучение исчезает при $t \to \pm\infty$, так что мы можем разложить поле излучения в интеграл Фурье. Обозначая посредством $f$ любую из компонент поля, пишем

$$f = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega e^{-i\omega t} d\omega. \tag{71,1}$$

Для компонент Фурье поля $f_\omega$ мы имеем при этом

$$f_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f e^{i\omega t} dt. \tag{71,2}$$

Заметим, что, поскольку $f$ действительно, $f_{-\omega} = f_\omega^*$.

Полное количество излученной за время столкновения энергии определяется интегралом от квадрата поля $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 dt$. Выразим его через интенсивность отдельных монохроматических компонент. Пользуясь (71,1) и (71,2), находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f dt \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f e^{-i\omega t} dt =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega f_{-\omega} d\omega, \tag{71,3}$$

и помня, что $f_{-\omega} = f_\omega^*$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 dt = 4\pi \int_0^\infty |f_\omega|^2 d\omega. \tag{71,4}$$

Поскольку все скорости предполагаются малыми по сравнению с $c$, мы можем воспользоваться формулой (67,10) для излучения в единицу времени. Полное излучение $\Delta\mathscr{E}$ энергии за все время столкновения тогда равно:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{2}{3c^3} \int \ddot{\mathbf{d}}^2 dt,$$

где $\mathbf{d}$ есть дипольный момент системы из всех сталкивающихся частиц. Согласно (71,4) мы можем написать для полного излучения $(\Delta\mathcal{E})_\omega\,d\omega$ в данном интервале $d\omega$ частот выражение

$$(\Delta\mathcal{E})_\omega = \frac{8\pi}{3c^3}\,\ddot{\mathbf{d}}_\omega^2, \tag{71,5}$$

где

$$\mathbf{d}_\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ddot{\mathbf{d}}e^{i\omega t}\,dt \tag{71,6}$$

есть соответствующая компонента Фурье от вектора $\ddot{\mathbf{d}}$.

Написанные формулы особенно упрощаются для малых частот, удовлетворяющих условию

$$\omega\tau \ll 1, \tag{71,7}$$

где $\tau$ — порядок величины продолжительности столкновения. В подинтегральном выражении в (71,6) $\ddot{\mathbf{d}}$ отлично от нуля только во время столкновения; поэтому при соблюдении условия (71,7) мы можем считать, что под интегралом $\omega t \ll 1$, так что мы можем заменить $e^{i\omega t}$ единицей. Тогда

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ddot{\mathbf{d}}\,dt = \frac{1}{2\pi}(\dot{\mathbf{d}}_2 - \dot{\mathbf{d}}_1),$$

где $\dot{\mathbf{d}}_1$ и $\dot{\mathbf{d}}_2$ — значения вектора $\dot{\mathbf{d}}$ до и после столкновения. С другой стороны, $\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r}$ и потому $\dot{\mathbf{d}} = \sum e\mathbf{v}$. Следовательно,

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega = \frac{1}{2\pi}\sum e(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1),$$

где $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — скорости частиц до и после столкновения (индекс, указывающий номер частицы, мы для краткости опускаем). Подставляя это выражение в (71,5), находим окончательно для излучения малых частот при столкновении

$$(\Delta\mathcal{E})_\omega = \frac{2}{3\pi c^3}\left(\sum e(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\right)^2. \tag{71,8}$$

В частности, если имеется всего одна излучающая частица (пролетающая через поле других частиц, которые можно считать неподвижными при столкновении), то

$$(\Delta\mathcal{E})_\omega = \frac{2e^2}{3\pi c^3}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2. \tag{71,9}$$

Мы видим, что при малых частотах излучение не зависит от частоты. Иначе можно сказать, что при стремлении $\omega$ к нулю излучение $(\Delta\mathcal{E})_\omega$ стремится к конечному пределу.

Можно было бы получить аналогичные формулы и для случая скоростей, сравнимых со скоростью света. Для этого удобно воспользоваться потенциалами поля в форме (64,13). Мы, однако, не будем останавливаться на этом.

### Задача

Определить излучение малых частот при столкновении двух заряженных частиц.

Решение: Вводя относительную скорость обеих частиц и скорость их центра инерции, находим из (71,8):

$$(\Delta\mathcal{E})_\omega = \frac{2\mu^2}{3\pi c^3}\left(\frac{e}{m}-\frac{e'}{m'}\right)^2(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)^2,$$

где $m$, $m'$ и $e$, $e'$ — массы и заряды обеих частиц, $\mu$ — приведенная масса, а $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — относительная скорость частиц до и после столкновения. Поскольку относительная скорость в результате столкновения не меняется по абсолютной величине, то $(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)^2 = 2v_0^2\sin^2\frac{\chi}{2}$, где $v_0$ — относительная скорость на бесконечном расстоянии между частицами, а $\chi$ — угол отклонения в системе отсчета, в которой покоится центр инерции. Для $\chi$ имеем $\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2} = \frac{\mu v_0^2\rho}{|ee'|}$, где $\rho$ — „прицельное расстояние" (см. задачу 2 § 67). В результате находим

$$(\Delta\mathcal{E})_\omega = \frac{4\mu^2 v_0^2}{3\pi c^3}\left(\frac{e}{m}-\frac{e'}{m'}\right)^2\frac{1}{1+\left(\frac{\mu v_0^2\rho}{ee'}\right)^2}.$$

Поскольку „время столкновения" $\tau \sim \rho/v_0$, то эта формула применима при $\rho\omega/v_0 \ll 1$.

## § 72. Торможение излучением

В § 65 было показано, что разложение потенциалов поля системы зарядов в ряд по степеням $v/c$ приводит во втором приближении к функции Лагранжа, вполне определяющей (в этом приближении) движение зарядов. Произведем теперь разложение поля до членов более высокого порядка и выясним, к каким эффектам приводят эти члены.

В разложении скалярного потенциала

$$\varphi = \int \frac{1}{R}\rho_{t-\frac{R}{c}}\,dV$$

член третьего порядка по $1/c$ равен

$$\varphi^{(3)} = -\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int R^2\rho\,dV; \tag{72,1}$$

первых членов разложения (см. § 65) мы здесь для краткости писать не будем. По тем же причинам, что и при выводе (65,3), в разложении векторного потенциала мы должны взять только член второго порядка по $1/c$, т. е.

$$\mathbf{A}^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\,dV. \tag{72,2}$$

Произведем преобразование потенциалов:

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t},\quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f,$$

выбрав функцию $f$ таким образом, чтобы скалярный потенциал $\varphi^{(3)}$ обратился в нуль. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы

$$f = -\frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R^2 \rho\, dV.$$

Тогда новый векторный потенциал будет равен

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\, dV - \frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\int R^2\rho\, dV = $$
$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\, dV - \frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mathbf{R}\rho\, dV.$$

Переходя здесь от интегралов к суммам по отдельным зарядам, имеем для первого члена $-\frac{1}{c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$. Во втором же члене пишем $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, где $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$ имеют обычный смысл (см. § 66); тогда $\dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{v}$ и второй член обращается в $\frac{1}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$. Таким образом,

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{2}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}. \tag{72,3}$$

Соответствующее этому потенциалу магнитное поле $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}'^{(2)} = 0$, поскольку $\mathbf{A}'^{(2)}$ не содержит явным образом координат. Электрическое же поле $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}'^{(2)}$ равно

$$\mathbf{E} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}, \tag{72,4}$$

где $\mathbf{d}$ — дипольный момент системы.

Таким образом, члены третьего порядка в разложении поля приводят к появлению некоторых дополнительных, действующих на заряды сил, не содержащихся в функции Лагранжа (65,6); эти силы зависят от производных по времени от ускорения зарядов.

Рассмотрим систему зарядов, совершающих стационарные движения, и вычислим среднюю работу, производимую полем (72,4) за единицу времени. На каждый заряд $e$ действует сила $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$, т. е.

$$\mathbf{f} = \frac{2e}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}. \tag{72,5}$$

В единицу времени она производит работу, равную $\mathbf{fv}$, так что полная работа над всеми зарядами равна сумме по зарядам:

$$\sum \mathbf{fv} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}\sum e\mathbf{v} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}\dot{\mathbf{d}} = \frac{2}{3c^3}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{d}}\ddot{\mathbf{d}}) - \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2.$$

При усреднении по времени первый член исчезает (ср. § 43), так что средняя работа оказывается равной

$$\overline{\sum \mathbf{fv}} = -\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2. \tag{72,6}$$

Но стоящее справа выражение есть не что иное, как (взятая с обратным знаком) потеря энергии системой в единицу времени благодаря излучению [см. (67,10)]. Таким образом, возникающие в третьем приближении силы (72,5) описывают обратное действие излучения на испускающие его заряды. Эти силы называются торможением излучением или лоренцовыми силами трения.

Торможение излучением имеет место даже и при наличии всего лишь одного заряда. Оно равно тогда

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}. \tag{72,7}$$

Для одного заряда можно всегда выбрать такую систему отсчета, в которой он в данный момент покоится в начале координат. Легко видеть, что в такой системе отсчета все дальнейшие члены разложения силы, оказываемой зарядом самим на себя в результате излучения, обращаются в нуль. Действительно, все более высокие члены разложения поля заряда содержат, как легко сообразить, наряду с высшими производными радиуса-вектора $\mathbf{R}$ непременно также его самого или его первую производную $\dot{\mathbf{R}}$, т. е. скорость $\mathbf{v}$ заряда. Но в рассматриваемой системе отсчета $\mathbf{v} = 0$, а для вычисления силы $\mathbf{f}$ мы должны взять значение поля в точке нахождения самого заряда, т. е. положить $\mathbf{R} = 0$, так что высшие члены разложения $\mathbf{f}$ действительно исчезают. Таким образом, в случае одного заряда формула (72,3) является как бы точной формулой для силы обратного действия излучения в той системе отсчета, в которой скорость исчезает.

Надо, однако, иметь в виду, что описание действия заряда „самого на себя“ с помощью силы торможения вообще не является вполне удовлетворительным и содержит в себе противоречия. Уравнение движения заряда в отсутствие внешнего поля, на который действует только сила (72,7), есть

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}.$$

Это уравнение имеет кроме тривиального решения $\mathbf{v} = \text{const}$. еще решение, при котором ускорение $\dot{\mathbf{v}}$ пропорционально $e^{\frac{2e^2}{3c^3}t}$, т. е. неограниченно возрастает со временем. Это значит, например, что заряд, прошедший через какое-нибудь поле, по выходе из поля должен был бы неограниченно „самоускоряться“. Абсурдность этого результата и свидетельствует об ограниченной применимости формулы (72,7).

Может возникнуть вопрос о том, каким образом электродинамика, удовлетворяющая закону сохранения энергии, может привести к этому абсурдному результату, в котором свободная частица неограниченно увеличивает свою энергию. Корни этой трудности находятся в действительности в упоминавшейся выше (§ 37) бесконечной электромагнитной „собственной массе“ элементарных частиц. Когда мы пишем в уравнениях движения конечную массу заряда, то мы этим по существу приписываем ему формально бесконечную же отрицательную „собственную массу“ не электромагнитного происхождения, которая вместе с электромагнитной массой приводила бы к конечной массе частицы. Поскольку, однако, вычитание одной из другой двух бесконечностей не является вполне однозначной математической операцией, то это и приводит к ряду дальнейших трудностей, в том числе и к той, которую мы здесь рассматривали.

При движении заряда во внешнем поле уравнение движения с учетом торможения излучения имеет вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}] + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}. \qquad (72,8)$$

По изложенным соображениям это уравнение применимо только в тех случаях, когда сила торможения мала по сравнению с силой, происходящей от внешнего поля. Пусть на заряд падает электромагнитная волна с частотой $\omega$. Сила, действующая на заряд, есть $e\mathbf{E}$ (силой $\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$ можно пренебречь в виду малости $v/c$). Под влиянием этой силы он приобретает ускорение $\frac{e}{m}\mathbf{E}$, и потому торможение излучением есть $\frac{2}{3}\frac{e^3}{mc^2}\dot{\mathbf{E}}$. Но $\dot{\mathbf{E}}$ пропорционально $\omega\mathbf{E}$. Поэтому условие малости $\frac{2e^3}{3mc^2}\dot{\mathbf{E}}$, по сравнению с $e\mathbf{E}$, дает

$$\frac{e^2}{mc^3}\omega \ll 1,$$

или, вводя длину волны $\lambda \sim c/\omega$,

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2}. \qquad (72,9)$$

Таким образом, формула (72,7) для торможения излучением применима в тех случаях, когда длина падающей на заряд волны велика по сравнению с „радиусом“ заряда $e^2/mc^2$. Мы видим, что расстояния порядка $e^2/mc^2$ опять оказываются той границей, за которой теряет свою применимость классическая электродинамика (см. § 37).

Выведем релятивистское выражение для торможения излучения (для одного заряда), применимое и для движения со скоростями порядка скорости света. Эти силы будут теперь 4-вектором $f_i$, которым надо дополнить уравнение движения заряда, написанное в четырехмерном виде

$$mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}F_{ik}u_k + f_i. \qquad (72,10)$$

Для определения $f_i$ заметим, что при $v \ll c$ его три пространственные компоненты должны перейти в компоненты вектора $\mathbf{f}/c$ (72,7). Легко видеть, что этим свойством обладает 4-вектор $\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u_i}{ds^2}$. Он, однако, не удовлетворяет соотношению $f_iu_i = 0$, вытекающему из (72,10) в виду того, что $u_i\frac{du_i}{ds} = 0$ (7,6) и что $u_iu_kF_{ik} = 0$, поскольку тензор $F_{ik}$ антисимметричен. Так как временная компонента 4-силы $f_i$ должна в предельном случае $v = 0$ обращаться в нуль (эта компонента равна, как мы знаем, работе $\mathbf{fv}$ силы $\mathbf{f}$, обращающейся в нуль при

$\mathbf{v}=0$), то мы можем прибавить к написанному выражению сил только 4-вектор вида $\alpha u_i$. Скаляр $\alpha$ надо выбрать так, чтобы удовлетворить соотношению $f_i u_i = 0$. В результате находим

$$f_i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{d^2u_i}{ds^2} + u_i u_k \frac{d^2u_k}{ds^2}\right). \tag{72,11}$$

## § 73. Рассеяние свободными зарядами

Если на систему зарядов падает электромагнитная волна, то под ее влиянием заряды приходят в движение. Это движение в свою очередь сопровождается излучением во все стороны; происходит, как говорят, рассеяние первоначальной волны.

Рассеяние удобнее всего характеризовать отношением количества энергии, испускаемой рассеивающей системой в данном направлении в единицу времени, к плотности потока энергии, падающего на систему излучения. Это отношение имеет, очевидно, размерность площади и называется эффективным сечением рассеяния.

Пусть $dJ$ есть энергия, излучаемая системой в телесный угол $do$ (в 1 сек.) при падении на нее волны с вектором Пойнтинга $\mathbf{S}$. Тогда эффективное сечение рассеяния (в телесный угол $do$) есть

$$d\sigma = \frac{\overline{dJ}}{\overline{S}} \tag{73,1}$$

(черта над буквой означает среднее по времени). Интеграл $\sigma$ от $d\sigma$ по всем направлениям есть полное эффективное сечение рассеяния.

Рассмотрим рассеяние, производимое одним свободным зарядом. Пусть на этот заряд падает плоская монохроматическая прямолинейно поляризованная волна. Ее электрическое поле можно написать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha).$$

Мы будем предполагать, что скорость, приобретаемая зарядом под действием поля падающей волны, мала по сравнению со скоростью света, что практически всегда выполняется. Тогда можно считать, что сила, действующая на заряд, есть $e\mathbf{E}$, а силой $\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$ со стороны магнитного поля можно пренебречь. В этом случае можно также пренебречь влиянием смещения заряда при его колебаниях под влиянием поля. Если заряд совершает колебания около начала координат, то можно тогда считать, что на него все время действует то поле, которое имеется в начале координат, т. е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \alpha).$$

Поскольку уравнения движения заряда гласят

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E},$$

а его дипольный момент есть $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$,

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2}{m}\mathbf{E}. \tag{73,2}$$

Для вычисления рассеянного излучения воспользуемся формулой (67,9) для дипольного излучения (мы имеем право сделать это, поскольку скорость, приобретаемая зарядом под влиянием поля падающей волны, мала по сравнению со скоростью света). Заметим также, что частота излучаемой зарядом (т. е. рассеянной им) волны равна, очевидно, частоте падающей волны.

Подставляя (73,2) в (67,9), находим

$$dJ = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3}[\mathbf{En}]^2\, do.$$

С другой стороны, вектор Пойнтинга падающей волны

$$S = \frac{c}{4\pi} E^2.$$

Отсюда мы находим эффективное сечение рассеяния в телесный угол $do$:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do, \qquad (73,3)$$

где $\theta$ — угол между направлением рассеяния (вектором $\mathbf{n}$) и направлением электрического поля $\mathbf{E}$ падающей волны. Мы видим, что эффективное сечение рассеяния свободным зарядом не зависит от частоты.

Определим полное эффективное сечение $\sigma$. Для этого выберем сферические координаты с началом в месте нахождения заряда и полярной осью вдоль $\mathbf{E}$. Тогда $do = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$; подставляя это и интегрируя по $d\theta$ от 0 до $\pi$ и по $d\varphi$ от 0 до $2\pi$, находим

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2. \qquad (73,4)$$

Наконец, вычислим эффективное сечение $d\sigma$ в случае, когда падающая волна не поляризована (естественный свет). Для этого мы должны усреднить (73,3) по всем направлениям вектора $\mathbf{E}$ в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения падающей волны. Выберем систему координат с осью $Z$ по направлению распространения падающей волны (по направлению ее волнового вектора $\mathbf{k}$) и плоскостью $YZ$, в которой лежат $\mathbf{k}$ и направление $\mathbf{n}$ рассеянной волны. Вектор $\mathbf{E}$ лежит тогда в плоскости $XY$ (см. рис. 14). $\vartheta$ есть угол между направлением падающей и рассеянной волны; $\cos\theta$ есть, очевидно, проекция единичного вектора $\mathbf{n}$ на направление $\mathbf{E}$.

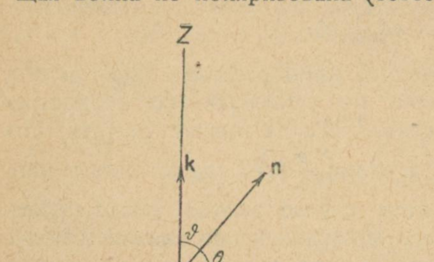

Рис. 14.

Эту проекцию можно получить, с другой стороны, проецируя $\mathbf{n}$ сначала на ось $Y$, а потом эту проекцию — на направление $\mathbf{E}$. Мы находим, таким образом, что $\cos\theta = \sin\vartheta\cos\varphi$, и потому

$$\sin^2\theta = 1 - \sin^2\vartheta\cos^2\varphi$$

(углы $\theta$ и $\varphi$ указаны на рис. 14). Усредняя $\sin^2\theta$ по всем направлениям **E** в плоскости $XY$, т. е. по всем $\varphi$, имеем

$$\overline{\sin^2\theta} = 1 - \frac{\sin^2\vartheta}{2} = \frac{1+\cos^2\vartheta}{2}.$$

Подставляя это в (73,3), имеем для рассеяния неполяризованной волны свободным зарядом

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1+\cos^2\vartheta). \qquad (73,5)$$

## Задачи

1. Определить эффективное сечение рассеяния эллиптически поляризованной волны свободным зарядом.

Решение: Поле волны имеет вид $\mathbf{E} = \mathbf{A}\cos(\omega t + \alpha) + \mathbf{B}\sin(\omega t + \alpha)$, где **A** и **B** — взаимно перпендикулярные векторы (см. § 48). Аналогично выводу, проделанному в тексте, находим

$$d\sigma = \frac{e^4}{\cancel{4\pi} m^2c^4}\frac{[\mathbf{An}]^2 + [\mathbf{Bn}]^2}{A^2+B^2}\, do.$$

2. Определить эффективное сечение рассеяния плоско поляризованной волны зарядом, совершающим (под влиянием некоторой упругой силы) малые колебания.

Решение: Уравнение движения заряда в падающей на него волне $E = E_0\cos(\omega t + \alpha)$ есть

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0\cos(\omega t + \alpha),$$

где $\omega_0$ — частота его свободных колебаний. Для вынужденных колебаний имеем отсюда

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0\cos(\omega t + \alpha)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Определяя отсюда $\ddot{\mathbf{d}}$, находим

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}\sin^2\theta\, do$$

($\theta$ — угол между **E** и **n**).

3. Определить степень деполяризации при рассеянии неполяризованного света свободным зарядом.

Решение: Из соображений симметрии очевидно, что обе главные составляющие рассеянного света будут плоско поляризованы, — одна в плоскости, проходящей через падающий и рассеянный лучи, а другая — перпендикулярно к ней. Выберем ось $Y$ в указанной плоскости. Тогда для первой поляризации находим $E = \text{const.}\cdot E_y\cos\vartheta$, а для второй $E = \text{const.}\cdot E_z$. Возводя в квадрат и усредняя, получаем (поскольку для неполяризованного света $\overline{\mathbf{E}_y^2} = \overline{\mathbf{E}_z^2}$)

$$\rho = \cos^2\vartheta$$

($\vartheta$ — угол между направлениями падающего и рассеянного света).

4. Определить частоту света, рассеянного движущимся зарядом.

Решение: В системе координат, где заряд покоится, частота света при рассеянии не меняется ($\omega = \omega'$). В инвариантной форме это соотношение можно написать в виде

$$k'_i u_i = k_i u_i,$$

где $u_i$ — 4-скорость заряда. Отсюда без труда получаем

$$\omega'\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta'\right)=\omega\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right),$$

где $\theta$ и $\theta'$ — углы, составляемые падающей и рассеянной волной с направлением движения ($v$ — скорость заряда).

## § 74. Рассеяние волн с большими частотами

Если на систему зарядов падает электромагнитная волна, поле которой мы будем считать слабым, то плотность тока системы можно представить в виде $\mathbf{j}=\mathbf{j}_0+\mathbf{j}'$, где $\mathbf{j}_0$ — плотность тока в отсутствии поля, а $\mathbf{j}'$ — изменение тока под влиянием поля волны. Соответственно этому векторный потенциал поля системы также будет иметь вид $\mathbf{A}=\mathbf{A}_0+\mathbf{A}'$, где $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}'$ определяются соответственно токами $\mathbf{j}$ и $\mathbf{j}'$. Очевидно, что $\mathbf{A}'$ описывает поле рассеянной системой зарядов волны.

Рассмотрим рассеяние электромагнитных волн, частота $\omega'$ которых велика по сравнению с частотой $\omega_0$, излучаемой самой системой волн. Как мы видели в § 67, $\omega_0\sim v/a$, так что $\omega'$ должно удовлетворять условию

$$\omega'\gg\omega_0\sim\frac{v}{a}. \tag{74,1}$$

Кроме того, мы будем предполагать, что скорости зарядов в системе малы ($v\ll c$).

Согласно условию (74,1) период движения зарядов в системе велик по сравнению с периодом волны. Поэтому в течение промежутков времени порядка периода волны движение зарядов в системе можно считать равномерным. Это значит, что при рассмотрении рассеяния коротких волн не существенно учитывать взаимодействие зарядов в системе друг с другом, т. е. их можно считать свободными.

Таким образом, при вычислении скорости $\mathbf{v}'$, приобретаемой зарядом в поле падающей волны, мы можем рассматривать каждый заряд системы в отдельности и писать для него уравнение движения в виде

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt}=e\mathbf{E}=e\mathbf{E}_0e^{-i(\omega't-\mathbf{k}_1\mathbf{r})},$$

где $\mathbf{k}_1=\frac{\omega'}{c}\mathbf{n}_1$ — волновой вектор падающей волны. Радиус-вектор заряда является, конечно, функцией времени. В показателе экспоненциального множителя с правой стороны этого уравнения скорость изменения первого члена со временем велика по сравнению со скоростью изменения второго (первая равна $\omega'$, а вторая — порядка $kv\sim v/\lambda\sim v\omega'/c\ll\omega'$). Поэтому при интегрировании уравнений движения можно считать в правой их части $\mathbf{r}$ постоянным. Тогда

$$\mathbf{v}'=-\frac{e}{i\omega'm}\mathbf{E}_0e^{-i(\omega't-\mathbf{k}_1\mathbf{r})}. \tag{74,2}$$

Для векторного потенциала рассеянной волны (на больших расстояниях от системы) имеем согласно общей формуле (66,2)

$$\mathbf{A}'=\frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}'_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\mathbf{n}_2}{c}}\,dV=\frac{1}{cR_0}\sum(e\mathbf{v}')_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\mathbf{n}_2}{c}},$$

где сумма берется по всем зарядам системы; $\mathbf{n}_2$ — единичный вектор в направлении рассеяния. Подставляя сюда (74,2), находим

$$\mathbf{A}'=-\frac{1}{icR_0\omega'}e^{-i\omega'\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}\mathbf{E}_0\sum\frac{e^2}{m}e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \tag{74,3}$$

где $\mathbf{q}=\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2$ есть разность между волновым вектором $\mathbf{k}_1$ падающей и волновым вектором $\mathbf{k}_2=\frac{\omega'}{c}\mathbf{n}_2$ рассеянной волны. Необходимо при этом отметить, что частота рассеянного излучения может быть благодаря наличию собственного движения зарядов в системе отличной от частоты $\omega'$ падающей волны. Это изменение частоты порядка величины $\omega_0$, т. е. мало по сравнению с самой частотой $\omega'$. Поэтому в $\mathbf{k}_2$ этим изменением можно пренебречь.

Для поля $\mathbf{H}'=\operatorname{rot}\mathbf{A}'$ рассеянной волны имеем из (74,3), пренебрегая членами высшего порядка по $1/R_0$,

$$\mathbf{H}'=\frac{[\mathbf{n}_2\mathbf{E}_0]}{c^2R_0}e^{-i\omega'\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}\sum\frac{e^2}{m}e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \tag{74,4}$$

(поскольку $\nabla R_0=\mathbf{n}_2$). Поток энергии в элементе телесного угла в направлении $\mathbf{n}_2$ равен

$$\frac{c\,|\mathbf{H}'|^2}{4\pi}R_0^2\,do=\frac{1}{4\pi c^3}[\mathbf{n}_2\mathbf{E}_0]^2\left|\sum\frac{e^2}{m}e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}\right|^2\cdot do$$

Разделив это на поток энергии $\frac{c}{4\pi}E_0^2$ падающей волны и вводя угол $\theta$ между направлениями поля $\mathbf{E}$ падающей волны и направлением рассеяния, находим окончательно эффективное сечение рассеяния в виде

$$d\sigma=\overline{\left|\sum\frac{e^2}{mc^2}e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}\right|^2}\sin^2\theta\,do. \tag{74,5}$$

Черта обозначает усреднение по времени, т. е. усреднение по движению зарядов в системе; оно производится в виду того, что рассеяние наблюдается в промежутки времени, большие по сравнению с периодом движения зарядов в системе.

Для длины волны падающего излучения из условия (74,1) следует неравенство $\lambda'\ll\frac{c}{v}a$. Что же касается относительной величины $\lambda'$ и $a$, то возможны оба предельных случая $\lambda'\gg a$ и $\lambda'\ll a$. В обоих этих случаях общая формула (74,5) значительно упрощается.

В случае $\lambda'\gg a$ в выражении (74,5) $\mathbf{q}\mathbf{r}\ll 1$, поскольку $\mathbf{q}$ обратно пропорционально $\lambda'$, а $\mathbf{r}$ порядка величины $a$. Заменяя, соответственно этому, $e^{i\mathbf{qr}}$ единицей, имеем

$$d\sigma = \left(\sum \frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta \, do. \tag{74,6}$$

В частности, при рассеянии атомом с $Z$ электронами

$$d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta \, do, \tag{74,7}$$

т. е. рассеяние пропорционально квадрату атомного номера (членом, соответствующим ядру атома можно в сумме (74,6) пренебречь, поскольку масса ядра значительно больше массы электронов).

Перейдем теперь к случаю $\lambda' \ll a$. В квадрате суммы, стоящем в (74,5), наряду с квадратами $(e^2/mc^2)^2$ модуля каждого из членов имеются произведения вида

$$\frac{e^2}{mc^2}\frac{e'^2}{m'c^2} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}.$$

При усреднении по движению зарядов, т. е. по их взаимным расположениям в системе, $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ пробегают значения в интервале порядка $a$. Поскольку $q \sim 1/\lambda'$, $\lambda' \ll a$, то экспоненциальный множитель $e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$ является в этом интервале быстро-переменной периодической функцией, и ее среднее значение обращается в нуль. Таким образом, при $\lambda' \ll a$ эффективное сечение рассеяния равно

$$d\sigma = \sum \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta \, do. \tag{74,8}$$

В частности, при рассеянии атомом имеем в этом случае

$$d\sigma = Z\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta \, do, \tag{74,9}$$

т. е. рассеяние пропорционально первой степени атомного номера. Заметим, что формулы (74,8) и (74,9) неприменимы при малых углах рассеяния (порядка $\lambda'/a$), так как в этом случае $\mathbf{q}$ уже не велико и показатель $\mathbf{qr}$ не велик по сравнению с единицей.

Как уже было указано, частота рассеянного излучения может быть отличной от частоты падающей волны. Эта часть рассеяния называется некогерентной в противоположность когерентному рассеянию без изменения частоты. Для определения эффективного сечения когерентного рассеяния мы должны выделить ту часть поля рассеянной волны, которая имеет частоту $\omega'$. Выражение (74,4) для поля зависит от времени посредством множителя $e^{-i\omega' t}$, и, кроме того, от времени зависит также и сумма $\sum \frac{e^2}{m} e^{i\mathbf{qr}(t)}$. Эта последняя зависимость и приводит к тому, что в поле рассеянной волны содержатся наряду с частотой $\omega'$ еще и другие частоты. Та часть поля, которая обладает частотой $\omega'$ (т. е. зависит от времени только посредством множителя $e^{-i\omega' t}$), получается, очевидно, если усреднить по времени (т. е. по движению зарядов) сумму $\sum \frac{e^2}{m} \overline{e^{i\mathbf{qr}}}$. Соответственно этому выражение для эффективного сечения $d\sigma_{\text{ког}}$ когерентного рассеяния отличается от полного сечения $d\sigma$ тем, что вместо среднего значения квадрата модуля суммы в нем стоит квадрат модуля среднего значения суммы

$$d\sigma_{\text{ког}} = \left|\overline{\sum \frac{e^2}{mc^2} e^{i\mathbf{qr}}}\right|^2 \sin^2\theta\, do. \tag{74,10}$$

В случае, если $\lambda' \gg a$, мы можем опять заменить $e^{i\mathbf{qr}}$ единицей, так что

$$d\sigma_{\text{ког}} = \left(\sum \frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do.$$

Сравнивая это с полным эффективным сечением (74,6), мы видим, что $d\sigma_{\text{ког}} = d\sigma$, т. е. все рассеяние является когерентным.

Если же $\lambda' \ll a$, то при усреднении в (74,10) все члены суммы исчезают, так что $d\sigma_{\text{ког}} = 0$. Таким образом, в этом случае все рассеяние некогерентно.

## § 75. Рассеяние волн с малыми частотами

Рассмотрим теперь случай рассеяния, противоположный исследованному в предыдущем параграфе, именно, рассеяние волн с малыми частотами. Другими словами, предположим, что частота $\omega'$ падающего света удовлетворяет неравенству [ср. (74,1)]

$$\omega' \ll \omega_0 \sim \frac{v}{a}. \tag{75,1}$$

Рассеяние опять будет состоять как из когерентной, так и из некогерентной части. Мы будем здесь рассматривать только когерентное рассеяние, т. е. рассеяние без изменения частоты.

Для вычисления поля рассеянной волны можно воспользоваться непосредственно формулами (68,3), определяющими поле дипольного, квадрупольного и магнитного дипольного излучений. В этих формулах надо теперь писать, как и в § 74, все величины со штрихами, например

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c^2R_0}\left\{[\ddot{\mathbf{d}}'\mathbf{n}] + \frac{1}{c}[\dddot{\mathbf{D}}'\mathbf{n}] + [[\ddot{\mathfrak{m}}'\mathbf{n}]\,\mathbf{n}]\right\},$$

где $\mathbf{d}'$, $\mathbf{D}'$, $\mathfrak{m}'$ — те части дипольного, квадрупольного и магнитного моментов системы зарядов, которые создаются падающим на систему рассеиваемым излучением.

Компонента $\mathbf{H}'_{\omega'}$ спектрального разложения поля рассеянной волны с частотой, равной частоте падающего излучения, определится этой же формулой, в которой надо вместо всех величин подставить их компоненты Фурье. Для производных по времени от дипольного и т. д. моментов имеем (ср. § 69)

$$\ddot{\mathbf{d}}'_{\omega'} = -\omega'^2\mathbf{d}_{\omega'}', \quad \ddot{\mathfrak{m}}'_{\omega'} = -\omega'^2\mathfrak{m}'_{\omega'}, \quad \dddot{\mathbf{D}}'_{\omega'} = i\omega'^3\mathbf{D}'_{\omega'}.$$

Поскольку частота $\omega'$ предполагается малой, то мы оставляем только члены с низшими степенями $\omega'$, т. е.

$$\mathbf{H}'_{\omega'} = \frac{1}{c^2 R_0}\omega'^2 \{[\mathbf{n}\mathbf{d}'_{\omega'}] + [\mathbf{n}[\mathfrak{m}'_{\omega'}\mathbf{n}]]\}. \qquad (75,2)$$

Следующие члены разложения поля (содержащие мультипольные моменты высших порядков) дали бы члены, пропорциональные высшим степеням частоты. Если скорости всех зарядов в системе малых ($v \ll c$), то в (75,2) можно пренебречь вторым членом по сравнению с первым, поскольку магнитный момент содержит отношение $v/c$. Тогда

$$\mathbf{H}'_{\omega'} = \frac{1}{c^2 R_0}\omega'^2 [\mathbf{n}\mathbf{d}'_{\omega'}]. \qquad (75,3)$$

Если сумма зарядов системы равна нулю, то при $\omega' \to 0$ $\mathbf{d}'_{\omega'}$ стремится к постоянному пределу (если бы сумма зарядов была отлична от нуля, то при $\omega' = 0$, т. е. в постоянном поле, система начала бы двигаться как целое [1])). Поэтому при малых $\omega'$ можно считать $\mathbf{d}'_{\omega'}$ не зависящим от частоты. Мы видим отсюда, что поле рассеянной волны пропорционально квадрату частоты. Интенсивность же ее, следовательно, пропорциональна $\omega'^4$. Таким образом, при рассеянии волн с малой частотой эффективное сечение рассеяния (когерентного) пропорционально четвертой степени частоты падающего излучения.

---

ГЛАВА IX

# ЧАСТИЦА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

## § 76. Гравитационные поля в нерелятивистской механике

Наряду с электромагнитными полями в природе существуют еще поля другого рода — так называемые гравитационные поля, или поля тяготения. Эти поля обладают следующим основным свойством: все тела, вне зависимости их от массы или заряда, движутся в них одинаковым образом (если, конечно, начальные условия одинаковы)[2]).

Это свойство гравитационных полей дает возможность установить существенную аналогию между движением тел в гравитационном поле и движением тел, не находящихся в каком-либо внешнем поле, но рассматриваемых с точки зрения неинерциальной системы отсчета. Действительно, в инерциальной системе отсчета свободное движение всех

---

[1]) То же самое относится, впрочем, и к рассеянию света не только нейтральными атомами, но и ионами. Благодаря большой массе ядра, рассеянием, происходящим от движения иона как целого, можно пренебречь.

[2]) Например, законы свободного падения в поле тяготения земли одинаковы для всех тел, какой бы массой они ни обладали, — все они приобретают одно и то же ускорение.

тел происходит прямолинейно и равномерно, и если, скажем, в начальный момент времени их скорости были одинаковыми, то они будут одинаковыми все время. Очевидно, поэтому, что если рассматривать это свободное движение в заданной неинерциальной системе, то и относительно нее все тела будут двигаться одинаковым образом.

Таким образом, свойства движения в неинерциальной системе отсчета те же, что в инерциальной системе при наличии гравитационного поля. Другими словами, неинерциальная система отсчета эквивалентна некоторому гравитационному полю. Это обстоятельство называют принципом эквивалентности.

Рассмотрим, например, движение в равномерно ускоренной системе отсчета. Свободно движущиеся в такой системе отсчета тела любой массы будут, очевидно, обладать относительно этой системы одинаковым постоянным ускорением, — равным и противоположным ускорению самой системы отсчета. Таким же является движение в однородном постоянном гравитационном поле, например, в поле тяготения земли (в небольших участках его, где поле можно рассматривать как однородное). Таким образом, равномерно ускоренная система отсчета эквивалентна постоянному однородному внешнему полю. Несколько более общим случаем является неравномерно ускоренная, поступательно и прямолинейно движущаяся система отсчета, — она, очевидно, эквивалентна однородному, но переменному гравитационному полю.

Необходимо, однако, отметить, что поля, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчета, все же не вполне тождественны с „истинными“ гравитационными полями, существующими и в инерциальных системах. А именно, между ними имеется весьма существенное отличие в отношении их свойств в бесконечности. На бесконечном расстоянии от создающих поле тел „истинное“ гравитационное поле всегда стремится к нулю. Поля же, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчета на бесконечности, напротив, неограниченно возрастают, или, в крайнем случае, остаются конечными по величине. Так, например, возникающие во вращающейся системе отсчета центробежные силы неограниченно растут при удалении от оси вращения; поле, которому эквивалентна ускоренно прямолинейно движущаяся система отсчета, одинаково во всем пространстве, в том числе и на бесконечности.

Поля, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчета, исчезают, как только мы перейдем к инерциальной системе. В противоположность этому, „истинные“ гравитационные поля (существующие и в инерциальной системе отсчета) невозможно исключить никаким выбором системы отсчета. Это видно уже непосредственно из указанного выше различия между условиями на бесконечности в „истинных“ гравитационных полях и в полях, которым эквивалентны неинерциальные системы, — поскольку последние на бесконечности к нулю не стремятся, то ясно, что никаким выбором системы отсчета нельзя исключить „истинные“ поля, обращающиеся на бесконечности в нуль.

Единственное, чего можно достичь соответствующим выбором системы отсчета, это — исключения гравитационного поля в данном участке пространства, достаточно малом для того, чтобы в нем можно было считать поле однородным. Это можно сделать путем выбора ускоренно движущейся системы, ускорение которой было бы равно по величине и противоположно по направлению тому ускорению, которое приобретает частица, помещенная в рассматриваемом участке поля.

Движение частицы и гравитационном поле определяется в нерелятивистской механике функцией Лагранжа, имеющей (в инерциальной системе отсчета) вид

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\varphi, \tag{76,1}$$

где $\varphi$ — некоторая функция координат и времени, характеризующая поле и называемая гравитационным потенциалом [1]). Соответственно уравнения движения частицы гласят

$$\dot{\mathbf{v}} = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{76,2}$$

Они не содержат массы или какой-либо другой постоянной, характеризующей свойства частицы, что и является выражением указанного в начале параграфа основного свойства гравитационных полей.

## § 77. Гравитационное поле в релятивистской механике

Указанное в предыдущем параграфе основное свойство гравитационных полей, что все тела движутся в них одинаковым образом, остается в силе и в релятивистской механике. Остается, следовательно, и аналогия между гравитационными полями и неинерциальными системами отсчета. Поэтому естественно при изучении свойств гравитационных полей в релятивистской механике тоже исходить из этой аналогии.

В инерциальной системе отсчета в декартовой системе координат интервал $ds$ определяется из соотношения:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

При переходе к любой другой инерциальной системе отсчета (т. е. при преобразовании Лоренца) интервал, как мы знаем, сохраняет тот же самый вид. Однако, если мы перейдем к неинерциальной системе отсчета, то $ds^2$ уже не будет суммой квадратов дифференциалов четырех координат.

Так, например, при переходе к равномерно вращающейся системе координат

$$x = x'\cos\Omega t - y'\sin\Omega t, \quad y = x'\sin\Omega t + y'\cos\Omega t, \quad z = z'$$

($\Omega$ — угловая скорость вращения, направленная вдоль оси $Z$) интервал приобретает вид

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2(x'^2 + y'^2)]\,dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - \\ - dz'^2 + 2c\Omega y'dx'dt - 2c\Omega x'dy'dt.$$

---

[1]) Ниже нам не придется больше пользоваться электромагнитным потенциалом $\varphi$, так что обозначение гравитационного потенциала той же буквой не может привести к недоразумению.

По какому бы закону ни преобразовывалось время, это выражение не может быть приведено к сумме квадратов дифференциалов четырех координат.

Таким образом, в неинерциальной системе отсчета квадрат интервала является некоторой квадратичной формой общего вида от дифференциалов координат, т. е. имеет вид

$$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k, \tag{77,1}$$

где $g_{ik}$ — некоторые функции координат, т. е. пространственных координат $x_1$, $x_2$, $x_3$, и временной координаты $x_0$ [1]). Четырехмерная система координат $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ является, таким образом, при пользовании неинерциальными системами отсчета криволинейной. Величины $g_{ik}$, определяя все свойства геометрии в каждой данной криволинейной системе координат, устанавливают, как говорят, метрику пространства-времени.

Величины $g_{ik}$ можно, очевидно, всегда считать симметричными по индексам $i$ и $k$ ($g_{ik} = g_{ki}$), поскольку они определяются из симметричной формы (77,1), куда $g_{ik}$ и $g_{ki}$ входят помноженными на одно и то же произведение $dx_i dx_k$. В инерциальной системе отсчета при пользовании декартовыми пространственными координатами $x_{1,2,3} = x, y, z$ и временем $x_0 = t$ величины $g_{ik}$ равны:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{00} = c^2, \quad g_{ik} = 0 \quad \text{при } i \neq k. \tag{77,2}$$

Систему координат (четырехмерную) с этими значениями $g_{ik}$ мы будем называть галилеевой.

В предыдущем параграфе было показано, что неинерциальные системы отсчета эквивалентны некоторым силовым полям. Мы видим теперь, что в релятивистской механике эти поля определяются величинами $g_{ik}$.

То же самое относится и к „истинным“ гравитационным полям. Всякое гравитационное поле является не чем иным, как изменением метрики пространства-времени, соответственно чему оно определяется величинами $g_{ik}$. Это важнейшее обстоятельство означает, что геометрические свойства пространства-времени (его метрика) определяются физическими явлениями, а не являются неизменными свойствами пространства и времени.

Теория гравитационных полей, построенная на основе теории относительности, носит название общей теории относительности в отличие от специальной теории относительности, изложенной нами ранее. Она также была создана Эйнштейном (и окончательно сформулирована им в 1916 г).

Как и в нерелятивистской механике, между „истинными“ гравитационными полями и полями, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчета, имеется коренное отличие. При переходе к инерциальной системе

[1]) Поскольку $ds^2$ все равно не является уже суммой квадратов, то не имеет смысла пользоваться мнимой временной координатой $x_4 = ict$. Действительную временную координату мы будем обозначать посредством $x_0$ (или $t$), соответственно чему в дальнейшем по дважды повторяющимся латинским индексам везде подразумевается суммирование от 0 до 3, а по греческим — по-прежнему от 1 до 3.

отсчета квадратичная форма (77,1), т. е. величины $g_{ik}$, получается из их галилеевых значений посредством простого преобразования координат. Соответственно этому в инерциальной системе отсчета $g_{ik}$ имеют весьма специальный вид, именно такой, который может быть приведен во всем пространстве к галилеевым значениям (77,2) посредством преобразования координат. То, что такой вид действительно является лишь весьма специальным, видно из того, что преобразованием всего лишь четырех координат нельзя, в общем случае, привести десять величин $g_{ik}$ к наперед заданному виду.

„Истинное" гравитационное поле не может быть исключено никаким преобразованием координат. Другими словами, при наличии гравитационного поля пространство-время таково, что определяющие его метрику величины $g_{ik}$ никаким преобразованием координат не могут быть приведены во всем пространстве к их галилеевскому виду. Такое пространство-время называется неэвклидовым или кривым, в отличие от эвклидова или плоского, в котором $ds^2$ всегда может быть приведено к сумме квадратов четырех дифференциалов. В неэвклидовом пространстве не имеют места законы обычной эвклидовой геометрии [1]).

Единственное, чего можно достичь преобразованием координат в неэвклидовом пространстве, это приведения величин $g_{ik}$ к значениям (77,2) (т. е. исключения гравитационного поля) в данном бесконечно малом элементе „объема" пространства-времени, между тем как в остальном пространстве-времени $g_{ik}$ остаются не галилеевыми. Действительно, в бесконечно малой области $g_{ik}$ можно считать постоянными, а всякую квадратичную форму с постоянными коэффициентами можно привести к сумме квадратов. Такую систему координат мы будем называть галилеевой для данной точки.

Заметим, что, будучи приведенными в данной точке к диагональному виду, величины $g_{ik}$ имеют, таким образом, три отрицательных и одно положительное главные значения. Отсюда следует, что детерминант $g$, составленный из величин $g_{ik}$ в реальном пространстве-времени, всегда отрицателен.

До сих пор мы говорили о пространственных и временной координатах, оставляя в стороне вопрос о том, каким образом эти координаты могут быть выбраны. Между тем само понятие системы отсчета приобретает в общей теории относительности смысл, отличный от того, какой она имела в специальной теории. В специальной теории относительности мы пользовались в качестве системы отсчета совокупностью тел, находящихся на неизменных расстояниях, т. е. покоящихся друг

---

[1]) Строго говоря, для того чтобы имела место эвклидова геометрия, необходимо, чтобы $ds^2$ можно было привести именно к сумме квадратов дифференциалов координат, между тем как в реальном эвклидовом пространстве-времени дифференциалы трех пространственных координат входят в $ds^2$ с одним, а квадрат $dx_0^2$ — с обратным знаком (если не вводить мнимых координат). Четырехмерную геометрию, определяемую квадратичной формой $dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$, иногда называют псевдо-эвклидовой; мы, однако, не будем здесь пользоваться этим термином (заметим также, что в псевдо-эвклидовом пространстве-времени чисто пространственная, т. е. трехмерная, геометрия является, конечно, просто эвклидовой).

относительно друга. В общей теории относительности это, однако, оказывается невозможным. Действительно, наличие какого-либо гравитационного поля означает, как мы видели, изменение метрики пространства-времени, при котором, в частности, меняется и метрика самого пространства, оказываясь к тому же зависящей от времени. Это приводит к тому, что ни в какой системе составляющие ее тела не могут быть неподвижными друг относительно друга [1]). Очевидно, что в результате этого ни в какой системе тел нельзя будет рассматривать их взаимное расположение как неизменное.

Таким образом, в общей теории относительности теряет смысл понятие о неподвижности тел друг относительно друга. Более того, теряет смысл и вообще понятие какой-либо определенной скорости относительного движения тел.

В соответствии с этим для точного определения положения тел в пространстве при наличии гравитационного поля необходимо, строго говоря, иметь систему из бесконечного числа тел, заполняющих все пространство. Такая система тел вместе со связанными с каждым из них произвольным образом идущими часами и является системой отсчета в общей теории относительности.

## § 78. Криволинейные координаты

Как мы видели, при изучении гравитационных полей мы сталкиваемся с необходимостью рассматривать явления в криволинейных координатах. В связи с этим необходимо развить четырехмерную геометрию в произвольных криволинейных координатах. Этому посвящены §§ 78—81.

Рассмотрим преобразование одной системы координат $x^0$, $x^1$, $x^2$, $x^3$ в другую $x'^0$, $x'^1$, $x'^2$, $x'^3$:

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3),$$

где $f^i$ — некоторые функции. При преобразовании координат их дифференциалы преобразуются согласно соотношению

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k. \tag{78,1}$$

Всякая совокупность четырех величин $A^i$ $(i = 0,1,2,3)$, которые при преобразовании координат преобразуются как их дифференциалы, называется контравариантным 4-вектором. Таким образом, при преобразовании координат

$$A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x'^k} A'^k. \tag{78,2}$$

---

[1]) Неизбежность таких деформаций видна, например, из того, что в неэвклидовом пространстве отношение длины окружности к ее радиусу не равно $2\pi$ и, вообще говоря, меняется со временем. Поэтому, если расстояния тел по радиусу окружности остаются неизменными, то расстояния по окружности должны изменяться и наоборот.

Компоненты контравариантных векторов мы будем обозначать с индексом сверху[1]).

Пусть $\varphi$ есть некоторый скаляр. Четыре величины $\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$ при преобразовании координат преобразуются согласно формулам

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}=\frac{\partial\varphi}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}, \tag{78,3}$$

отличным от формул (78,2). Всякая совокупность четырех величин $A_i$, которые при преобразовании координат преобразуются как производные от скаляра, называется ковариантным 4-вектором. Таким образом, при преобразовании координат

$$A_i=\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}A'_k. \tag{78,4}$$

Компоненты ковариантных векторов мы будем обозначать с индексом внизу.

Легко сообразить, что в декартовой системе координат нет разницы между ковариантными и контравариантными векторами, поскольку правила преобразования (78,2) и (78,4) делаются при этом эквивалентными[2]).

В связи с наличием в криволинейных координатах двух видов векторов имеется три вида тензоров 2-го ранга. Контравариантным тензором 2-го ранга $A^{ik}$ называется совокупность 16 величин, преобразующихся как произведение компонент двух контравариантных векторов, т. е. по закону

$$A^{ik}=\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}A'^{lm}. \tag{78,5}$$

Аналогично определяется ковариантный тензор, преобразующийся по формулам

$$A_{ik}=\frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}A'_{lm}, \tag{78,6}$$

и смешанный тензор, преобразующийся согласно формулам

$$A^i_k=\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}A'^l_m. \tag{78,7}$$

Совершенно аналогично определяются тензоры высших рангов. Например, тензор $A^m_{ikl}$, ковариантный по трем индексам и контравариантный по одному, преобразуется по формуле

$$A^m_{ikl}=\frac{\partial x'^p}{\partial x^i}\frac{\partial x'^r}{\partial x^k}\frac{\partial x'^s}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial x'^t}A'^t_{prs}.$$

---

[1]) Поскольку дифференциалы координат $x^i$ сами составляют контравариантный вектор, мы пишем здесь и в дальнейшем индекс у координат сверху. Только иногда мы будем писать индекс у отдельных координат внизу — там, где писать их сверху было бы неудобно [например, $x_2^2$ вместо $(x^2)^2$].

[2]) Для этого, впрочем, достаточно вспомнить, что в декартовых координатах градиент обладает такими же векторными свойствами, как и все другие векторы.

Если тензор симметричен или антисимметричен по какой-нибудь паре индексов (одинаковой ковариантности или контравариантности), то это имеет место в любой системе координат. Для смешанного же тензора, скажем $A_k^i$, понятие симметрии или антисимметрии не имеет смысла, так как разным индексам соответствуют различные законы преобразования, и потому при переходе от одной системы координат к другой свойства симметрии, вообще говоря, меняются.

Если тензор (т. е. все его компоненты) равен нулю в одной системе координат, то он равен нулю и во всякой другой системе. Сумма двух тензоров одинакового ко- или контравариантного характера есть тензор того же характера.

Очевидно, что произведение компонент векторов $A_i$ и $B_k$ есть тензор вида $A_{ik}$, векторов $A_i$ и $B^k$ — тензор вида $A_i^k$. Произведение вектора $A_l$ на тензор $A^{ik}$ есть тензор вида $A_l^{ik}$ и т. п.

В декартовых координатах из любых двух векторов можно составить скаляр — скалярное произведение этих векторов. В криволинейных же координатах можно составить скаляр не из любых двух векторов. Именно, нельзя составить скаляр из двух контравариантных или двух ковариантных векторов. Напротив, из контравариантного вектора $A^i$ и ковариантного $B_k$ можно составить скаляр; этим скаляром является величина $A^iB_i$, называемая скалярным произведением векторов $A^i$ и $B_i$. Легко убедиться с помощью формул преобразования (78,2) и (78,4), что $A^iB_i$ есть действительно скаляр.

Образование скалярного произведения из двух векторов является частным случаем следующего правила „упрощения" тензоров. Если мы имеем тензор $A^{\cdot\cdot i \cdot\cdot}_{\cdot\cdot k \cdot\cdot}$, то выражение $A^{\cdot i \cdot}_{\cdot i \cdot}$ (суммирование по $i$) есть тензор ранга на две единицы меньшего, чем ранг тензора $A^{\cdot i \cdot}_{\cdot k \cdot}$. Так, например, из тензора $A_i^k$ можно образовать скаляр $A_i^i$. Действительно, согласно (78,7)

$$A_i^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^m}{\partial x^i}A'^l_m = \frac{\partial x'^m}{\partial x'^l}A'^l_m = A'^l_l,$$

т. е. $A_i^i$ есть действительно инвариант[1]). Подобно этому являются скалярами выражения $A_{ik}^{ik}$, $A_i^k B_k^i$ и т. п. Выражение $A_{kli}^i$ есть ковариантный тензор второго ранга, $A_k^i B^k$ — контравариантный вектор и т. п.

Заметим, что выражения, получающиеся при суммировании по двум верхним или двум нижним индексам (например, $A_{kll}^i$), не являются тензорами. В дальнейшем мы не будем пользоваться такими величинами.

Единичным тензором в криволинейных координатах является смешанный тензор $\delta_i^k$, компоненты которого $\delta_i^k = 0$ при $i \neq k$, а при $i = k$ равны 1. Если $A^k$ — вектор, то при умножении на $\delta_k^i$ мы получим

$$A^k\delta_k^i = A^i,$$

т. е. опять вектор; это и доказывает, что $\delta_k^i$ является тензором.

[1]) Скаляр и инвариант — синонимы.

Квадрат элемента длины $ds^2$ есть квадратичная функция дифференциалов $dx^i$, т. е.

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \tag{78,8}$$

где $g_{ik}$ — функции координат; $g_{ik}$ симметричны по индексам $i$ и $k$, т. е.

$$g_{ik} = g_{ki}. \tag{78,9}$$

Поскольку произведение (упрощенное) $g_{ik}$ на контравариантный тензор $dx^i dx^k$ есть скаляр, то $g_{ik}$ есть ковариантный тензор. Тензор $g_{ik}$ носит название метрического тензора.

Как уже указывалось в § 77, в реальном эвклидовом пространстве-времени соответствующим выбором системы координат тензор $g_{ik}$ можно всегда преобразовать к галилеевской форме

$$g_{ik}^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}. \tag{78,10}$$

Два тензора $A_{ik}$ и $B^{ik}$ называются обратными друг другу, если

$$A_{ik} B^{kl} = \delta_i^l.$$

В частности, контравариантным метрическим тензором $g^{ik}$ называется тензор, обратный тензору $g_{ik}$, т. е.

$$g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l. \tag{78,11}$$

В декартовой (четырехмерной) системе координат, как уже упоминалось, нет различия между ко- и контравариантными векторами; это различие, однако, появляется при переходе к криволинейным координатам. Поэтому, если какая-нибудь физическая величина в декартовой системе координат является вектором, то при переходе к криволинейным координатам она может быть представлена в двух формах: в виде ковариантного и в виде контравариантного вектора. Две формы одного и того же вектора мы будем обозначать одинаковой буквой, но с индексами вверху и внизу ($A_i$ и $A^i$).

Легко убедиться в том, что переход от ковариантной к контравариантной форме вектора и обратно должен совершаться при помощи тензора $g_{ik}$ согласно формулам

$$A^i = g^{ik} A_k, \tag{78,12}$$

или иначе

$$A_i = g_{ik} A^k. \tag{78,13}$$

Действительно, в декартовой системе координат $g_{ik} = \delta_{ik}$ и эти формулы дают, как и должно быть, $A_i = A^i$ [1]).

---

[1]) В этом и аналогичных местах, где для доказательства мы пользуемся декартовой системой координат, нужно иметь в виду, что декартову систему координат можно выбрать только в том случае, когда пространство эвклидово. В случае же неэвклидова пространства надо для доказательства рассматри-

Все сказанное относится также и к тензорам. Всякий тензор в декартовой системе координат при переходе к криволинейным координатам можно представить в нескольких формах с разным ко- и контравариантным характером. Разные формы одного и того же тензора мы тоже будем обозначать одинаковой буквой с разными расположениями индексов. Переход между разными формами тензора совершается аналогично тому, как он совершается у векторов. Так,

$$A^{i}_{\ kl} = g_{lm} A^{im}_{\ \ k}, \quad A^{ik} = g^{il} g^{km} A_{lm} \quad \text{и т. д.}$$

Заметим, что если тензор 2-го ранга несимметричен, то следует различать $A_i^{\ k}$ и $A^k_{\ i}$, т. е. место, с которого индекс был поднят.

В декартовой системе координат квадрат абсолютной величины вектора равен сумме квадратов их компонент. Очевидно, что в криволинейных координатах квадратом абсолютной величины вектора является скаляр

$$A_i A^i = g_{ik} A^i A^k = g^{ik} A_i A_k. \tag{78,14}$$

Полезно заметить, что индексы, по которым производится суммирование в произведениях тензоров, имеют некоторую свободу передвижения. Так, например,

$$A_{ik} B^{ik} = A^{ik} B_{ik}, \quad A_{ik} B^{lk} = A_i^{\ k} B^l_{\ k} \quad \text{и т. д.}$$

Индекс может быть поднят у одного из множителей при условии, что такой же индекс будет опущен в другом (это легко проверить, воспользовавшись связью между ковариантными и контравариантными компонентами тензоров, осуществляемой тензором $g_{ik}$).

В § 6 был определен (в декартовых координатах) совершенно антисимметричный единичный псевдотензор $e_{iklm}$. Преобразуем теперь его к произвольной криволинейной системе координат. Предварительно заметим, что в силу определения $e_{iklm}$ мы можем написать

$$e_{nrst} k_{ni} k_{rk} k_{sl} k_{tm} = k e_{iklm}, \tag{78,15}$$

где $k$ — детерминант, составленный из величин $k_{ik}$. Действительно, от-

---

вать систему координат, декартову в данном бесконечно малом элементе объема, что всегда можно сделать (см. § 77). Все выводы остаются тогда теми же самыми и для неэвклидова пространства. Ниже мы будем в подобных случаях для краткости всегда говорить о декартовой системе координат; нужно иметь в виду, что все результаты в равной мере применимы и к неэвклидову пространству.

Необходимо отметить, что в реальном пространстве-времени, если пользоваться действительными координатами $x^i$, $ds^2$ может быть приведено в данном бесконечно малом элементе только к галилееву виду, в котором один квадрат дифференциала входит с положительным, а три — с отрицательными знаками. Это обстоятельство, однако, ничего не меняет в выводах этого и следующего параграфов, так как для перехода от галилеевых координат к четырехмерным декартовым надо ввести только вместо трех координат $x^\alpha$ их же, умноженных на $i$.

Заметим также, что в галилеевых координатах ковариантные и контравариантные компоненты вектора не в точности одинаковы. Именно, $A_\alpha = -A^\alpha$, $A_0 = c^2 A^0$.

дельные члены детерминанта получают, выбирая четыре элемента по одному из каждой строки (так что $n \neq r \neq s \neq t$) и из каждого столбца (так что $i \neq k \neq l \neq m$) и ставя перед их произведением знак $+$ или $-$, смотря по тому, можно ли порядок номеров столбцов перевести в порядок номеров строк посредством четного или нечетного числа транспозиций.

Согласно общим правилам преобразования тензоров и с помощью (78,15) имеем при переходе к криволинейным координатам

$$e_{iklm} = e'_{nrst} \frac{\partial x'^n}{\partial x^i} \frac{\partial x'^r}{\partial x^k} \frac{\partial x'^s}{\partial x^l} \frac{\partial x'^t}{\partial x^m} = e'_{nrst} J, \tag{78,16}$$

где

$$J = \frac{\partial (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial (x^0, x^1, x^2, x^3)}$$

есть якобиан преобразования от координат $x^i$ к $x'^i$. Этот якобиан может быть выражен через детерминант $g'$, составленный из компонент тензора $g'_{ik}$. Для этого заметим, что поскольку в декартовой системе координат $g_{ik} = \delta_{ik}$, то согласно формулам преобразования

$$\delta_{ik} = g'_{lm} \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k}.$$

Приравнивая детерминанты, составленные из величин, стоящих с обеих сторон этого равенства, имеем $1 = g' J^2$, т. е. $\sqrt{g'} = 1/J$; мы будем, однако, писать в дальнейшем всегда $-g$ под корнем, так как в действительности во всех координатах, относящихся к реальному пространству-времени, детерминант $g$ отрицателен (см. § 77). Из (78,16) находим теперь, что

$$e'_{iklm} = \sqrt{-g'}\, e_{iklm}.$$

Таким образом, в криволинейных координатах антисимметрический единичный тензор 4-го ранга определяется как $\sqrt{-g}\, e_{iklm}$. Если оставлять неопределенным знак корня $\sqrt{-g}$, то $\sqrt{-g}\, e_{iklm}$ можно рассматривать как истинный, а не как псевдотензор; при преобразованиях координат, содержащих отражения, надо соответствующим образом менять знак корня $\sqrt{-g}$.

Путем поднятия индексов у тензора $\sqrt{-g}\, e_{iklm}$ легко найти, что контравариантным единичным антисимметрическим тензором 4-го ранга является $\frac{1}{\sqrt{-g}} e^{iklm}$.

В декартовой системе координат интеграл от скаляра по $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ есть тоже скаляр, т. е. $d\Omega$ ведет себя при интегрировании как инвариант (§ 6). При переходе к криволинейным координатам $x'^i$ элемент интегрирования $d\Omega$ переходит в $\frac{1}{J} d\Omega' = \sqrt{-g'}\, d\Omega'$. Таким образом, в криволинейных координатах при интегрировании по некоторой области 4-пространства $\sqrt{-g}\,d\Omega$ ведет себя как инвариант[1]).

Все сказанное в конце § 6 относительно элементов интегрирования по гиперповерхности, поверхности и линии остается в силе и в криволинейных координатах, с тем только отличием, что несколько меняется определение дуальных тензоров. Элемент „площади" гиперповерхности, образованной на трех бесконечно малых смещениях, есть контравариантный антисимметричный тензор $dS^{ikl}$; дуальный ему вектор получается при умножении на тензор $\sqrt{-g}\,e_{iklm}$, т. е. равен

$$\sqrt{-g}\,dS_i = \frac{1}{6}\,e_{klmi}\,dS^{klm}\sqrt{-g}. \tag{78,17}$$

Аналогично, если $df^{ik}$ есть элемент поверхности (двухмерной), построенной на двух бесконечно малых смещениях, то дуальный ему тензор определяется как

$$\sqrt{-g}\,d\overset{*}{f}_{ik} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,e_{iklm}\,df^{lm}. \tag{78,18}$$

Мы оставляем здесь обозначения $dS_i$ и $d\overset{*}{f}_{ik}$, как и прежде, соответственно для $\frac{1}{6}\,e_{klmi}\,dS^{klm}$ и $\frac{1}{2}\,e_{iklm}\,df^{lm}$ (а не для их произведений на $\sqrt{-g}$); правила (6,11—13) для преобразования различных интегралов друг в друга остаются тогда теми же самыми, поскольку их вывод имеет формальный характер, не связанный с тензорными свойствами соответствующих величин. Из них нам в особенности понадобится правило преобразования интеграла по гиперповерхности в интеграл по объему (теорема Гаусса), осуществляющееся заменой

$$dS_i \to d\Omega\,\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{78,19}$$

## § 79. Расстояния и промежутки времени

Мы уже говорили, что в общей теории относительности выбор системы отсчета ничем не ограничен; тремя пространственными координатами $x^1$, $x^2$, $x^3$ могут являться любые величины, определяющие расположение тел в пространстве, а временная координата $x^0$ может определяться произвольно идущими часами. Возникает вопрос о том, каким образом по значениям величин $x^1$, $x^2$, $x^3$, $x^0$ можно определить истинные расстояния и промежутки времени.

Определим сначала связь истинного времени, которое мы будем ниже обозначать посредством $\tau$, с координатой $x^0$. Для этого рассмо-

---

[1]) Если $\varphi$ есть скаляр, то величину $\sqrt{-g}\,\varphi$, дающую при интегрировании по $d\Omega$ инвариант, иногда называют скалярной плотностью. Аналогично говорят о векторной и тензорной плотностях $\sqrt{-g}\,A^i$, $\sqrt{-g}\,A^{ik}$ и т. д. Эти величины дают вектор или тензор при интегрировании по бесконечно малому 4-объему (интеграл $\int A^i\sqrt{-g}\,d\Omega$ по конечной области, вообще говоря, не может быть вектором, так как законы преобразования вектора $A^i$ в разных точках различны).

трим два бесконечно близкие события, происходящие в одной и той же точке пространства. Тогда интервал $ds$ между этими двумя событиями есть, как мы знаем, не что иное, как $c\,d\tau$, где $d\tau$ — промежуток времени (истинного) между обоими событиями. Полагая $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ в общем выражении $ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k$, находим, следовательно,

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00} dx_0^2,$$

откуда

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,dx^0, \tag{79,1}$$

или, иначе, для времени между любыми двумя событиями, происходящими в одном и том же месте пространства,

$$\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{g_{00}}\,dx^0. \tag{79,2}$$

Эти соотношения и определяют промежутки истинного времени (или, как говорят еще, собственного времени для данной точки пространства) по интервалам координаты $x^0$. Заметим кстати, что величина $g_{00}$, как видно из приведенных формул, является положительной:

$$g_{00} > 0. \tag{79,3}$$

Определим теперь элемент $dl$ пространственного расстояния. В специальной теории относительности (§ 2) можно определять $dl$ как интервал между двумя бесконечно близкими событиями, происходящими в один и тот же момент времени. В общей теории относительности этого, вообще говоря, уже нельзя сделать, т. е. нельзя определить $dl$, просто положив $dx^0 = 0$ в $ds$. Это связано с тем, что в гравитационном поле собственное время в разных точках пространства различным образом связано с координатой $x^0$.

Для определения $dl$ поступим теперь следующим образом. Представим себе, что из данной точки пространства отправляется световой сигнал в другую точку, бесконечно близкую к ней, а потом обратно по тому же пути. Необходимое для этого время (отсчитываемое в одной и той же точке пространства), умноженное на $c$, есть, очевидно, удвоенное расстояние между обеими точками. Напишем интервал, выделив пространственную и временную координаты:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + 2g_{0\alpha} dx^0 dx^\alpha + g_{00} dx_0^2, \tag{79,4}$$

где под дважды повторяющимися греческими индексами подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3. Для двух событий, являющихся уходом и приходом сигнала из одной точки в другую, интервал, как мы знаем, равен нулю. Полагая $ds^2 = 0$, находим для „времени" распространения сигнала из первой точки во вторую

$$dx_0^{(1)} = \frac{1}{g_{00}}\left\{-g_{0\alpha} dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{\alpha\beta} g_{00})\,dx^\alpha dx^\beta}\right\}.$$

Для обратного движения сигнала из второй точки в первую „время"

$dx_0^{(2)}$ определяется такой же формулой, где теперь надо изменить знак у всех $dx^\alpha$, т. е.

$$dx_0^{(2)} = \frac{1}{g_{00}}\left\{ g_{0\alpha}dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})\,dx^\alpha dx^\beta}\right\}.$$

Таким образом, промежуток „времени" между отправлением и возвращением сигнала в ту же точку равен

$$dx_0^{(1)} + dx_0^{(2)} = \frac{2}{g_{00}}\sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})\,dx^\alpha dx^\beta}.$$

Соответствующий промежуток истинного времени получается отсюда согласно (79,1) умножением на $\frac{\sqrt{g_{00}}}{c}$, а расстояние $dl$ между обеими точками еще умножением на $c/2$. В результате находим

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right)dx^\alpha dx^\beta. \qquad (79,5)$$

Это и есть искомое выражение, определяющее расстояние через элементы пространственных координат. Оно определяет метрику, т. е. геометрические свойства, пространства. Заметим, что можно без труда показать, что стоящий в скобках тензор есть не что иное, как тензор, обратный контравариантному $g^{\alpha\beta}$.

Необходимо, однако, помнить, что $g_{ik}$ зависят, вообще говоря, от $x^0$, так что и пространственная метрика (79,5) меняется со временем. По этой причине не имеет смысла интегрировать $dl$, — такой интеграл зависел бы от того, по какой мировой линии между двумя заданными пространственными точками он брался бы. Таким образом, в общей теории относительности теряет, вообще говоря, смысл понятие об определенном расстоянии между телами, остающееся в силе лишь для бесконечно малых расстояний. Единственным случаем, когда расстояние может быть определено и в конечных областях пространства, являются такие системы отсчета, в которых $g_{ik}$ не зависят от времени, и потому интеграл $\int dl$ вдоль пространственной кривой имеет определенный смысл.

Перейдем теперь к определению понятия одновременности в общей теории относительности. Другими словами, выясним вопрос о возможности синхронизации часов, находящихся в разных точках пространства, т. е. приведения в соответствие друг с другом показаний этих часов.

Пусть из некоторой точки $B$ отправляется сигнал в бесконечно близкую к ней точку $A$, а затем сразу обратно из $A$ в $B$. „Время" распространения сигнала из $B$ в $A$ и из $A$ в $B$ равно, соответственно, определенным выше $dx_0^{(2)}$ и $dx_0^{(1)}$, где расстояние считается от $A$ к $B$. Одновременным приходу сигнала в $A$ надо, очевидно, считать показание часов в $B$, лежащее посредине между моментом отправления и моментом обратного прибытия сигнала. Другими словами, некоторому моменту $x^0$ в точке $A$ одновременен момент $x^0 + \Delta x^0 = x^0 + \frac{dx_0^{(1)} - dx_0^{(2)}}{2}$ в точке $B$. С помощью приведенных выше выражений для $dx_0^{(1)}$ и $dx_0^{(2)}$, следовательно, разность значений „времени" $x^0$ для двух одновременных событий, происходящих в бесконечно близких точках, можно представить в виде

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}. \tag{79,6}$$

Это соотношение дает возможность синхронизовать часы в любом бесконечно малом объеме пространства. Продолжая подобную синхронизацию из точки $B$ дальше, можно синхронизовать часы, т. е. определить одновременность событий, вдоль любой линии (незамкнутой).

Однако, если мы попытаемся произвести синхронизацию часов вдоль некоторого замкнутого контура, то это может оказаться невозможным. Действительно, обойдя вдоль контура и вернувшись в исходную точку, мы получили бы для $\Delta x^0$ значение, вообще говоря, отличное от нуля. Тем более оказывается тогда невозможной синхронизация часов во всем пространстве. Другими словами, в общей теории относительности одновременность событий не только имеет различный смысл в разных системах отсчета, как в специальной теории относительности, но, вообще говоря, не может быть установлена и внутри одной и той же системы отсчета. Единственным случаем, когда синхронизация часов оказывается возможной, являются такие системы отсчета, в которых все величины $g_{0\alpha}$ равны нулю (или могут быть обращены в нуль соответствующим выбором координаты $x^0$).

Наконец, если мы рассмотрим интервал собственного времени между двумя событиями, происходящими в некоторой точке пространства, и интервал времени между одновременными событиями в другом месте пространства, то эти интервалы окажутся, вообще говоря, не равными друг другу. Другими словами, истинное время течет различным образом в разных точках пространства. Между тем как в отсутствие гравитационного поля ход часов зависит только от выбора системы отсчета, в общей теории относительности он различен в разных точках пространства даже в одной и той же системе отсчета.

## § 80. Ковариантное дифференцирование

В декартовых координатах [1]) дифференциалы $dA_i$ вектора $A_i$ образуют вектор, а производные $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ от компонент вектора по координатам образуют тензор. В криволинейных же координатах это не имеет места; $dA_i$ не есть вектор, а $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ не есть тензор. Это связано с тем, что $dA_i$ есть разность векторов, находящихся в разных (бесконечно близких) точках пространства; в разных же точках пространства векторы преобразуются различно, так как коэффициенты в формулах преобразования (78,2), (78,4) являются функциями координат.

В сказанном легко убедиться и непосредственно. Для этого определим формулы преобразования для дифференциалов $dA_i$ в криволи-

[1]) А также в прямых косоугольных; вообще всегда, когда величины $g_{ik}$ постоянны.

нейных координатах. Ковариантный вектор преобразуется согласно формулам

$$A_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} A'_k;$$

поэтому

$$dA_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} dA'_k + A'_k d\,\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i \partial x'^l} dx'^l.$$

Таким образом, $dA_i$ преобразуется вовсе не как вектор (то же относится, конечно, и к дифференциалам контравариантных векторов). Только в случае, если вторые производные $\frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i \partial x'^l} = 0$, т. е. если $x^k$ являются линейными функциями от $x'^k$, формулы преобразования имеют вид

$$dA_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} dA'_k,$$

т. е. $dA_i$ преобразуется, как вектор.

Мы займемся теперь определением тензора, который играет в криволинейных координатах роль тензора $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ в декартовых координатах. Другими словами, мы должны преобразовать $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ от декартовых координат к криволинейным.

Для того, чтобы получить в криволинейных координатах дифференциал вектора, являющийся вектором, надо, чтобы оба вычитаемых один из другого вектора находились в одной точке пространства. В декартовых координатах достичь этого весьма просто. Для этого нужно один из двух бесконечно близких векторов перенести в точку, где находится второй из них, параллельно самому себе, т. е. так, чтобы его компоненты при этом не изменились. Если же пользоваться криволинейными координатами, то при таком переносе компоненты вектора, вообще говоря, изменятся. Перенос вектора, при котором в декартовых координатах его компоненты не меняются, называется параллельным переносом [1]).

Таким образом, при сравнении двух бесконечно близких векторов мы должны один из них подвергнуть параллельному переносу в точку, где находится второй. Рассмотрим какой-нибудь контравариантный вектор; если его значение в точке с координатами $x^i$ есть $A^i$, то в соседней точке $x^i + dx^i$ он равен $A^i + dA^i$. Вектор $A^i$ подвергнем бесконечно малому параллельному переносу в точку $x^i + dx^i$; его изменение при этом обозначим посредством $\delta A^i$. Тогда разность $DA^i$ между обоими векторами, находящимися теперь в одной точке, равна

$$DA^i = dA^i - \delta A^i. \qquad (80,1)$$

[1]) Напомним, что в случае неэвклидова пространства для всех доказательств и определений вместо декартовой системы координат надо пользоваться системой координат декартовой (вернее, галилеевой) для данного бесконечно малого участка.

Изменение $\delta A^i$ компонент вектора при бесконечно малом параллельном переносе зависит от величины самих компонент, причем эта зависимость должна, очевидно, быть линейной. Это следует непосредственно из того, что сумма двух векторов должна преобразовываться по тому же закону, что и каждый из них. Таким образом, $\delta A^i$ имеет вид

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k dx^l, \tag{80,2}$$

где $\Gamma^i_{kl}$ — некоторые функции координат. $\Gamma^i_{kl}$ зависят, конечно, от системы координат; в декартовой [1]) системе координат $\Gamma^i_{kl} = 0$.

Уже отсюда видно, что величины $\Gamma^i_{kl}$ не образуют тензора, так как тензор, равный нулю в одной системе координат, равен нулю и во всякой другой. В неэвклидовом пространстве нельзя, конечно, никаким выбором координат обратить все $\Gamma^i_{kl}$ в нуль во всем пространстве. Можно только выбрать такую систему координат — декартову для данной точки, — в которой $\Gamma^i_{kl}$ обращаются в нуль в данном бесконечно малом участке [2]). Величины $\Gamma^i_{kl}$ носят название символов Кристоффеля. Кроме величин $\Gamma^i_{kl}$ мы будем ниже пользоваться также и величинами $\Gamma_{i,kl}$ [3]), определяемыми следующим образом:

$$\Gamma_{i,kl} = g_{im}\Gamma^m_{kl}. \tag{80,3}$$

Очевидно, что, наоборот,

$$\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl}. \tag{80,4}$$

Легко связать и изменение компонент ковариантного вектора при параллельном переносе с символами Кристоффеля. Для этого заметим, что при параллельном переносе скаляры, очевидно, не меняются. В частности, не меняется при параллельном переносе скалярное произведение двух векторов.

Пусть $A_i$ и $B^i$ суть некоторый ковариантный и некоторый контравариантный векторы. Тогда из $\delta(A_iB^i) = 0$ имеем

$$B^i\delta A_i = -A_i\delta B^i = \Gamma^i_{kl}B^k A_i dx^l,$$

или, меняя обозначение индексов,

$$B^i\delta A_i = \Gamma^k_{il}A_k B^i dx^l.$$

---

1) А также и любой прямой косоугольной.

2) Мы увидим ниже (§ 81), что $\Gamma^i_{kl}$ выражаются через первые производные от метрического тензора $g_{ik}$. Можно доказать возможность выбора такой системы координат, в которой в данной точке все первые производные от $g_{ik}$, следовательно, и $\Gamma^i_{kl}$, обращаются в нуль (при этом вторые производные от $g_{ik}$ в нуль не обращаются).

3) Вместо обозначений $\Gamma^i_{kl}$ и $\Gamma_{i,kl}$ иногда пользуются обозначениями, соответственно, $\left\{ {kl \atop i} \right\}$ и $\left[ {kl \atop i} \right]$.

Отсюда имеем, в виду произвольности $B^i$,

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k dx^l, \tag{80,5}$$

что и определяет изменение ковариантного вектора при параллельном переносе.

Подставляя (80,2) и $dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} dx^l$ в (80,1), имеем

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k\right) dx^l. \tag{80,6}$$

Аналогично находим для ковариантного вектора

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k\right) dx^l. \tag{80,7}$$

Выражения, стоящие в скобках в (80,6—7), являются тензором, так как умноженные на вектор $dx^l$ они дают опять вектор. Очевидно, что эти тензоры и являются теми тензорами, которые играют в криволинейных координатах роль тензора $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ в декартовых. Эти тензоры носят название ковариантных производных соответственно векторов $A^i$ и $A_i$. Мы будем обозначать их в виде $A^i_{;k}$ и $A_{i;k}$. Таким образом,

$$DA^i = A^i_{;l} dx^l, \quad DA_i = A_{i;l} dx^l, \tag{80,8}$$

а сами ковариантные производные:

$$A^i_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k, \tag{80,9}$$

$$A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k. \tag{80,10}$$

В декартовых координатах $\Gamma^i_{kl} = 0$ и ковариантные производные переходят в обычные.

Легко определить также ковариантную производную от тензора. Для этого надо определить изменение тензора при бесконечно малом параллельном переносе. Рассмотрим, например, какой-нибудь контравариантный тензор, являющийся произведением двух контравариантных векторов $A^iB^k$. При параллельном переносе согласно (80,5)

$$\delta(A^iB^k) = A^i\delta B^k + B^k\delta A^i = -A^i\Gamma^k_{lm}B^l dx^m - B^k\Gamma^i_{lm}A^l dx^m.$$

В силу линейности этого преобразования оно должно иметь место и для любого тензора $A^{ik}$:

$$\delta A^{ik} = -(A^{im}\Gamma^k_{ml} + A^{mk}\Gamma^i_{ml})\, dx^l. \tag{80,11}$$

Подставляя это в

$$DA^{ik} = dA^{ik} - \delta A^{ik} \equiv A^{ik}_{;l} dx^l,$$

находим ковариантную производную $A^{ik}_{;l}$ тензора $A^{ik}$ в виде

$$A^{ik}_{;l} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml} A^{mk} + \Gamma^k_{ml} A^{im}. \tag{80,12}$$

Совершенно аналогично находим ковариантные производные смешанного тензора $A^i_k$ и ковариантного $A_{ik}$ в виде

$$A^i_{k;l}=\frac{\partial A^i_k}{\partial x^l}-\Gamma^m_{kl}A^i_m+\Gamma^i_{ml}A^m_k, \tag{80,13}$$

$$A_{ik;l}=\frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l}-\Gamma^m_{il}A_{mk}-\Gamma^m_{kl}A_{im}. \tag{80,14}$$

Аналогично можно определить ковариантную производную тензора любого ранга. При этом получается следующее правило ковариантного дифференцирования. Чтобы получить ковариантную производную тензора $A^{\cdots}_{\cdots}$ по $x^l$, к обычной производной $\frac{\partial A^{\cdots}_{\cdots}}{\partial x^l}$ на каждый ковариантный индекс $i$ $(A^{\cdot\cdot}_{\cdot i\cdot})$ надо прибавить член $-\Gamma^k_{il}A^{\cdot\cdot}_{\cdot k\cdot}$, а на каждый контравариантный индекс $i$ $(A^{\cdot i\cdot}_{\cdots})$ надо прибавить член $+\Gamma^i_{kl}A^{\cdot k\cdot}_{\cdots}$.

Можно легко убедиться в том, что ковариантная производная от произведения находится по тем же правилам, что и обычная производная от произведения. При этом ковариантную производную от скаляра $\varphi$ надо понимать как обычную производную, т. е. как ковариантный вектор $\varphi_k=\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}$, в согласии с тем, что для скаляров $\delta\varphi=0$ и потому $D\varphi=d\varphi$. Например, ковариантная производная произведения $A_iB_k$ равна

$$(A_iB_k)_{;l}=A_{i;l}B_k+A_iB_{k;l}.$$

Поднимая у ковариантных производных индекс, указывающий дифференцирование, мы получим так называемые контравариантные производные. Так,

$$A_i^{;k}=g^{kl}A_{i;l},\quad A^{i;k}=g^{kl}A^i_{;l}.$$

Докажем, что символы Кристоффеля $\Gamma^i_{kl}$ симметричны по нижним индексам. Поскольку ковариантная производная вектора $A_{i;k}$ есть тензор, то и разность $A_{i;k}-A_{k;i}$ есть тензор. Пусть вектор $A_i$ есть градиент скаляра, т. е. $A_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$. Тогда с помощью выражения (80,10) для $A_{i;k}$ имеем

$$A_{i;k}-A_{k;i}=(\Gamma^l_{ik}-\Gamma^l_{ki})\frac{\partial\varphi}{\partial x^l}$$

$\left(\text{так как } \frac{\partial A_i}{\partial x^k}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^k\, x^i}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\right)$. В декартовой системе координат ковариантные производные превращаются в обычные, а потому левая часть написанного равенства для вектора $A_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$ обращается в нуль. Но поскольку $A_{i;k}-A_{k;i}$ есть тензор, то, будучи равным нулю в одной системе, он должен быть равен нулю в любой системе координат. Отсюда находим, что

$$\Gamma^i_{kl}=\Gamma^i_{lk}. \tag{80,15}$$

Очевидно, что и

$$\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}. \tag{80,16}$$

В заключение этого параграфа приведем еще формулы преобразования из одной системы координат в другую для символов Кристоффеля. Эти формулы можно получить, сравнивая законы преобразования с обеих сторон равенств, определяющих любую из ковариантных производных, из требования, чтобы эти законы для обеих сторон были одинаковы. Простое вычисление даст, таким образом,

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma'^m_{np} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}. \tag{80,17}$$

Из этой формулы видно, что величины $\Gamma^i_{kl}$ ведут себя как тензор по отношению к линейным преобразованиям [когда исчезает второй член в (80,17)].

## § 81. Связь символов Кристоффеля с метрическим тензором

Докажем, что ковариантная производная от метрического тензора $g_{ik}$ равна нулю. Для этого заметим, что для вектора $DA_i$, как и для всякого вектора, имеет место соотношение

$$DA_i = g_{ik} DA^k.$$

С другой стороны, $A_i = g_{ik} A^k$, и потому

$$DA_i = D(g_{ik} A^k) = g_{ik} DA^k + A^k Dg_{ik}.$$

Сравнивая с $DA_i = g_{ik} DA^k$, имеем, в виду произвольности вектора $A^i$,

$$Dg_{ik} = 0.$$

Отсюда непосредственно следует, что ковариантная производная

$$g_{ik;l} = 0. \tag{81,1}$$

Таким образом, при ковариантном дифференцировании $g_{ik}$ надо рассматривать как постоянные.

Равенством $g_{ik;l} = 0$ можно воспользоваться для того, чтобы выразить символы Кристоффеля $\Gamma^i_{kl}$ через метрический тензор $g_{ik}$. Для этого напишем согласно общему определению (80,14) ковариантной производной от тензора:

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k,il} - \Gamma_{i,kl} = 0.$$

Отсюда легко определить $\Gamma_{i,kl}$, например, следующим образом. Напишем значение производных от $g_{ik}$, переставляя индексы $i$, $k$, $l$:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl},$$

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{l,ik},$$

$$-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = -\Gamma_{l,ki} - \Gamma_{k,li}.$$

Взяв полусумму этих равенств, находим (помня, что $\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}$):

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right). \tag{81,2}$$

Отсюда имеем для символов $\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl}$:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{81,3}$$

Эти формулы и дают искомые выражения символов Кристоффеля через метрический тензор.

Выведем полезное для дальнейшего выражение для упрощенного символа Кристоффеля $\Gamma^i_{ki}$. Для этого определим дифференциал $dg$ детерминанта $g$, составленного из компонент тензора $g_{ik}$. $dg$ можно получить, взяв дифференциал от каждой компоненты тензора $g_{ik}$ и умножив ее на свой коэффициент в детерминанте, т. е. на соответствующий минор. С другой стороны, компоненты тензора $g^{ik}$, обратного тензору $g_{ik}$, равны, как известно, минорам детерминанта из величин $g_{ik}$, деленным на этот детерминант. Поэтому миноры детерминанта $g$ равны $gg^{ik}$. Таким образом,

$$dg = gg^{ik}\,dg_{ik} = -gg_{ik}\,dg^{ik} \tag{81,4}$$

(поскольку $g_{ik}g^{ik} = \delta^i_i = 4$, то $g^{ik}dg_{ik} = -g_{ik}dg^{ik}$).

Из (81,3) имеем

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m}\right).$$

Меняя местами индексы $m$ и $i$ в третьем и первом членах в скобках, видим, что оба эти члена взаимно сокращаются, так что

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{im}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k},$$

или согласно (81,4)

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^k}. \tag{81,5}$$

Полезно заметить также выражение для величины $g^{kl}\Gamma^i_{kl}$; мы имеем

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{kl} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right).$$

С помощью (81,4) это можно преобразовать к виду

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,g^{ik})}{\partial x^k}. \tag{81,6}$$

Наконец, нетрудно вывести следующую формулу:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,g^{ik})}{\partial x^l} = \Gamma^m_{lm}g^{ik} - \Gamma^k_{lm}g^{mi} - \Gamma^i_{lm}g^{mk}. \tag{81,7}$$

С помощью полученных формул можно привести к удобному виду выражение $A^i_{;i}$, являющееся обобщением дивергенции вектора на криволинейные координаты. Поскольку $A^i_{;k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk} A^l$ [см. (80,9)], то

$$A^i_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{li} A^l = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^l \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^l},$$

или окончательно

$$A^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} A^i)}{\partial x^i}. \tag{81,8}$$

Выведем аналогичное выражение для $A^{ik}_{;k}$ и для антисимметричного тензора $A^{ik}$. Из (80,12) имеем

$$A^{ik}_{;k} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} A^{mk} + \Gamma^k_{mk} A^{im}.$$

Но поскольку $A^{mk} = -A^{km}$, то

$$\Gamma^i_{mk} A^{mk} = -\Gamma^i_{km} A^{km} = 0.$$

Подставляя выражение (81,5) для $\Gamma^k_{mk}$, находим, следовательно,

$$A^{ik}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} A^{ik})}{\partial x^k}. \tag{81,9}$$

Пусть теперь $A_{ik}$ — симметричный тензор; определим выражение $A^k_{i;k}$ для его смешанных компонент. Мы имеем

$$A^k_{i;k} = \frac{\partial A^k_i}{\partial x^k} + \Gamma^k_{lk} A^l_i - \Gamma^l_{ik} A^k_l = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (A^k_i \sqrt{-g})}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ki} A^k_l.$$

Последний член здесь равен

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right) A^{kl}.$$

В силу симметрии тензора $A^{kl}$ два члена в скобках взаимно сокращаются и остается

$$A^k_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} A^k_i)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} A^{kl}. \tag{81,10}$$

В декартовых координатах $\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}$ есть антисимметричный тензор. В криволинейных координатах этот тензор есть $A_{i;k} - A_{k;i}$. Однако, с помощью выражений для $A_{i;k}$ и в виду того, что $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$, имеем

$$A_{i;k} - A_{k;i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}. \tag{81,11}$$

Наконец, преобразуем к криволинейным координатам сумму $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{i2}}$ вторых производных от некоторого скаляра $\varphi$. Очевидно, что в криволинейных координатах эта сумма перейдет в $\varphi_{;i}^{;i}$. Но $\varphi_{;i}=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$, так как ковариантное дифференцирование скаляра сводится к обычному дифференцированию. Поднимая индекс $i$, имеем

$$\varphi^{;i}=g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}$$

и с помощью формулы (81,8) находим

$$\varphi_{;i}^{;i}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right). \qquad (81,12)$$

Полезно заметить, что теорема Гаусса для преобразования интеграла от вектора по гиперповерхности в интеграл по 4-объему может быть написана, в виду (81,8), как

$$\oint A^i\sqrt{-g}\,dS_i=\int A_{;i}^i\sqrt{-g}\,d\Omega. \qquad (81,13)$$

## § 82. Движение частицы в гравитационном поле

Движение свободной материальной частицы в специальной теории относительности определяется принципом наименьшего действия:

$$\delta S=-mc\delta\int ds, \qquad (82,1)$$

согласно которому частица движется так, что ее мировая линия является экстремальной между двумя заданными мировыми точками, т. е. в данном случае прямой (в обычном трехмерном пространстве этому соответствует прямолинейное равномерное движение).

Очевидно, что движение частицы в гравитационном поле определяется принципом наименьшего действия в той же форме (82,1), так как гравитационное поле является не чем иным, как изменением метрики 4-пространства, проявляющимся только в изменении выражения $ds$ через $dx^i$. Таким образом, в гравитационном поле частица движется так, что ее мировая точка движется по экстремальной, или, как говорят, по геодезической линии в 4-пространстве $x^0$, $x^1$, $x^2$, $x^3$; поскольку, однако, при наличии гравитационного поля пространство-время неэвклидово, то эта линия уже отнюдь не является прямой.

Мы видели (§ 10), что в специальной теории относительности, т. е. в галилеевой 4-системе координат, уравнения движения свободной частицы есть $\frac{du^i}{ds}=0$, или иначе $du^i=0$, где $u^i=\frac{dx^i}{ds}$ есть 4-скорость. Очевидно, что в криволинейных координатах это уравнение обобщается в уравнение

$$Du^i=0. \qquad (82,2)$$

Из выражения (80,6) для ковариантного дифференциала вектора имеем

$$du^i+\Gamma_{kl}^i u^k dx^l=0.$$

Разделив это уравнение на $ds$, имеем в первом члене $\frac{du^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2}$ и, таким образом, находим:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0. \qquad (82,3)$$

Это и есть искомые уравнения движения. Мы видим, что движение частицы в гравитационном поле определяется величинами $\Gamma^i_{kl}$, т. е. величинами, не имеющими тензорного характера. При $\Gamma^i_{kl} = 0$ (82,3) переходит в обычные уравнения $\frac{d^2x^i}{ds^2} = 0$.

Производная $\frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds}$ есть 4-ускорение частицы. Поэтому мы можем назвать величину $-m\Gamma^i_{kl}u^k u^l$ „4-силой", действующей на частицу в гравитационном поле. Тензор $g_{ik}$ играет при этом роль „потенциалов" гравитационного поля — его производные определяют „напряженность" поля $\Gamma^i_{kl}$.

Уравнение (82,3) можно вывести и непосредственно из принципа наименьшего действия $\delta\int ds = 0$. Имеем [1])

$$\delta ds^2 = 2ds\delta ds = \delta(g_{ik}dx^i dx^k) = dx^i dx^k \delta g_{ik} + 2g_{ik}dx^i \delta dx^k =$$
$$= dx^i dx^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\delta x^l + 2g_{ik}dx^i d\delta x^k.$$

Поэтому

$$\delta S = -mc\int \delta ds = -mc\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\delta x^l + g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{d\delta x^k}{ds}\right\}ds =$$
$$= -mc\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\delta x^l - \frac{d}{ds}\left(g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\right)\delta x^k\right\}ds - mcg_{ik}\frac{dx^i}{ds}\delta x^k\Big| \qquad (82,4)$$

Второй член исчезает, так как на пределах $\delta x^k = 0$. Во втором члене под интегралом заменим индекс $k$ индексом $l$. Тогда мы находим, приравнивая нулю коэффициент при произвольной вариации $\delta x^l$:

$$\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{d}{ds}\left(g_{il}\frac{dx^i}{ds}\right) = \frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{il}\frac{d^2x^i}{ds^2} - \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} = 0.$$

Замечая, что третий член можно написать в виде

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds},$$

и вводя символы Кристоффеля $\Gamma_{l,ik}$ согласно (81,2), получаем

$$g_{il}\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{l,ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0.$$

Умножая на $g^{ml}$ и замечая, что $g^{ml}g_{il} = \delta^m_i$, а $g^{ml}\Gamma_{l,ik} = \Gamma^m_{ik}$, приходим к уравнению (82,3).

---

[1]) Вариацию $\delta$ не смешивать с изменением $\delta$ при параллельном переносе!

Из (82,4) имеем для вариации $\delta S$, рассматривая, как обычно, действительные траектории и один из пределов как переменный, выражение $\delta S = -mcu_i \delta x^i$. Поэтому если мы определим 4-импульс частицы в гравитационном поле попрежнему как производную $\frac{\partial S}{\partial x^i}$, то мы получили бы при нашем определении $g_{ik}$ выражение $p_i = -mcu_i$. Нам, однако, будет удобнее сохранить прежнее выражение $p_i = mcu_i$, так что мы будем ниже определять 4-импульс как

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} = mcu_i \ ^{1)}. \qquad (82,5)$$

При принятом нами определении $g_{ik}$ квадрат 4-скорости равен теперь

$$u_i u^i = \frac{dx_i\, dx^i}{ds^2} = 1,$$

а не $-1$, как мы имели раньше. Поэтому квадрат 4-импульса равен теперь

$$p_i p^i = m^2 c^2. \qquad (82,6)$$

Подставляя сюда $-\frac{\partial S}{\partial x^i}$ вместо $p_i$, находим уравнение Гамильтона-Якоби для частицы в гравитационном поле

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 c^2 = 0. \qquad (82,7)$$

Для распространения светового сигнала уравнение геодезической линии в форме (82,3) не применимо, так как вдоль мировой линии распространения светового луча интервал $ds$, как мы знаем, равен нулю, так что все члены в уравнении (82,3) обращаются в бесконечность. Как известно, направление распространения луча света в геометрической оптике определяется волновым вектором, касательным к лучу. Мы можем поэтому написать четырехмерный волновой вектор в виде $k^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$, где $\lambda$ есть некоторый параметр. В специальной теории относительности, т. е. в эвклидовом пространстве, при распространении света в пустоте волновой вектор не меняется вдоль луча, т. е. $dk^i = 0$ (см. § 54). В гравитационном поле это уравнение, очевидно, переходит в $Dk^i = 0$ или

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kl} k^k k^l = 0 \qquad (82,8)$$

из этих же уравнений определится и параметр $\lambda$).

Абсолютная величина волнового 4-вектора, как мы знаем (см. § 47), равна нулю, т. е.

$$k_i k^i = 0. \qquad (82,9)$$

---

[1]) В связи с тем, что мы пользуемся координатой $x^0$ вместо $x^4$, связь компонент $p_i$ с трехмерным импульсом и энергией в галилеевых координатах отличается от той, которую мы имели раньше. Именно, пространственные и временная компоненты $p^i$ равны $\mathbf{p}$ и $\mathcal{E}/c^2$, а компоненты ковариантного вектора $p_i$ — соответственно, $-\mathbf{p}$ и $\mathcal{E}$.

Подставляя сюда $\frac{\partial\psi}{\partial x^i}$ вместо $k^i$ ($\psi$ — эйконал), находим уравнение эйконала в гравитационном поле в виде

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k}=0. \qquad (82,10)$$

## § 83. Предельный переход

В предельном случае малых скоростей релятивистские уравнения движения частицы в гравитационном поле должны перейти в соответствующие нерелятивистские уравнения. При этом надо иметь в виду, что из предположения о малости скоростей вытекает также условие, что само гравитационное поле должно быть слабым; в противном случае находящаяся в нем частица приобрела бы большую скорость.

Выясним, как связан в этом предельном случае метрический тензор $g_{ik}$, определяющий поле, с нерелятивистским потенциалом $\varphi$ гравитационного поля.

В нерелятивистской механике движение частицы в гравитационном поле определяется функцией Лагранжа (76,1). Мы напишем ее теперь в виде:

$$L=-mc^2+\frac{mv^2}{2}-m\varphi,$$

прибавив постоянную $-mc^2$ (постоянные члены не существенны для функции Лагранжа). Это надо сделать для того, чтобы нерелятивистская функция Лагранжа в отсутствие поля $L=-mc^2+\frac{mv^2}{2}$ была в точности той, в которую переходит соответствующая релятивистская функция $L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ в пределе при $v/c\to 0$.

Нерелятивистское действие $S$ для частицы в гравитационном поле есть, следовательно,

$$S=\int L\,dt=-mc\int\left(c-\frac{v^2}{2c}+\frac{\varphi}{c}\right)dt,$$

или, замечая, что $\mathbf{v}\,dt=d\mathbf{r}$,

$$S=-mc\int\left(c\,dt-\frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{v}}{c}\,d\mathbf{r}+\frac{1}{c}\,\varphi\,dt\right).$$

Сравнивая это с релятивистским действием $S=-mc\int ds$, мы видим, что в рассматриваемом предельном случае $ds$ равно:

$$ds=c\,dt-\frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{v}}{c}\,d\mathbf{r}+\frac{1}{c}\,\varphi\,dt.$$

Возводя в квадрат и опуская члены порядка $v^2/c^2$, находим

$$ds^2=(c^2+2\varphi)\,dt^2-d\mathbf{r}^2. \qquad (83,1)$$

Таким образом, компоненты метрического тензора в предельном случае равны:

$$g_{\alpha\beta}=-\delta_{\alpha\beta},\quad g_{0\alpha}=0,\quad g_{00}=c^2+2\varphi. \qquad (83,2)$$

Что касается величин $\Gamma^i_{kl}$, то с помощью полученных для $g_{ik}$ выражений легко найти, что в предельном случае отличны от нуля только компоненты:

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}. \tag{83,3}$$

## § 84. Уравнения электродинамики при наличии гравитационного поля

Уравнения электромагнитного поля специальной теории относительности легко обобщить так, чтобы они были применимы в любой четырехмерной криволинейной системе координат, т. е. в случае наличия гравитационного поля.

Тензор электромагнитного поля в специальной теории относительности определялся как $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$. Очевидно, что теперь он должен быть соответственно определен как $F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k}$ [1]). Но в силу (81,11)

$$F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \tag{84,1}$$

и поэтому связь $F_{ik}$ с потенциалом $A_k$ не меняется. Вследствие этого первая пара уравнений Максвелла (26,5)

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0 \tag{84,2}$$

тоже сохраняет свой вид.

Для того чтобы написать вторую пару уравнений Максвелла, надо предварительно определить в криволинейных координатах 4-вектор тока. Это мы сделаем в точности аналогично тому, как мы поступали в § 28. Заряд, находящийся в элементе объема $dV = dx^1 dx^2 dx^3$, можно написать в виде $de = \rho\, dV$, где плотность $\rho = \sum_A e_A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A)$ [см. (28,1)]. Умножая $de = \rho\, dV$ с обеих сторон на $dx^i$, имеем

$$de\, dx^i = \rho\, dV\, dx^i = \frac{\rho}{\sqrt{-g}} \frac{dx^i}{dx^0} \sqrt{-g}\, dV\, dx^0.$$

Инвариантный элемент 4-объема есть $\sqrt{-g}\, dV\, dx^0 = \sqrt{-g}\, d\Omega$ (§ 78), так что 4-вектор тока есть

$$j^i = \frac{\rho}{\sqrt{-g}} \frac{dx^i}{dx^0}. \tag{84,3}$$

$\frac{dx^i}{dx^0}$ есть скорость, измеренная при помощи „времени“ $x^0$ $\Big(\frac{dx^i}{dx^0}$ не есть

---

[1]) В галилеевых координатах компоненты $A_i$ связаны теперь со скалярным и векторным потенциалами посредством $A_{1,2,3} = -A^{1,2,3} = A_{x,y,z}$, $A_0 = = c^2 A^0 = -c\varphi$ (так, чтобы стоящий в выражении для действия член $A_i\, dx^i$ имел прежнее значение). Соответственно этому меняется связь компонент $F_{ik}$ с полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

вектор). Компонента $j^0$ 4-вектора тока, помноженная на $\sqrt{-g}$, есть пространственная плотность заряда.

В специальной теории относительности вторая пара уравнений Максвелла (30,2) имеет вид

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}=\frac{4\pi}{c}j^i.$$

В гравитационном поле они соответственно принимают вид

$$F^{ik}_{;k}=\frac{4\pi}{c}j^i,$$

или, согласно (81,9),

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,F^{ik}\right)=\frac{4\pi}{c}j^i. \qquad (84,4)$$

Уравнение непрерывности $\frac{\partial j^i}{\partial x^i}=0$ (29,4) принимает теперь вид

$$j^i_{;i}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,j^i\right)=0 \qquad (84,5)$$

[согласно (81,8)].

Наконец, легко написать уравнения движения заряженной частицы при наличии одновременно гравитационного и электромагнитного полей. Для этого надо варьировать (при заданном поле) ту часть действия, которая зависит от взаимодействия частицы с обоими полями, т. е.

$$-mc\int ds+\frac{e}{c}\int A_k\,dx^k.$$

Проще, однако, написать искомые уравнения движения прямо путем простого обобщения уравнений (21,4) на криволинейные координаты, т. е. написать в них $Du^i$ вместо $du^i$. Таким образом, мы находим

$$mc\frac{Du^i}{ds}=\frac{e}{c}F^i{}_k u^k. \qquad (84,6)$$

## § 85. Постоянное гравитационное поле

Весьма важным частным случаем гравитационных полей являются постоянные гравитационные поля. В постоянном гравитационном поле можно выбрать такую систему отсчета, в которой все величины, в частности, метрический тензор $g_{ik}$, не зависят от временной координаты $x^0$.

Гравитационное поле постоянно, в частности, в том случае, если все тела неподвижны (в системе отсчета, в которой $g_{ik}$ не зависят от $x^0$). Очевидно, что тогда оба направления времени равноценны (т. е. все уравнения не должны меняться при изменении знака у $x^0$). Отсюда следует, что в этом случае все компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора равны нулю, — в противном случае интервал $ds$ изменился бы при замене $x^0$ на $-x^0$. Такого рода гравитационные поля мы будем называть статическими.

Гравитационное поле постоянно также и в том случае, когда тела совершают стационарное движение. Под стационарным мы понимаем здесь такое движение, при котором плотность и скорость материи в каждом элементе пространства постоянны. Примером такого движения является равномерное вращение симметрического тела вокруг своей оси симметрии. В этом случае оба направления времени уже отнюдь не равноценны, — при изменении знака у времени меняется, например, знак угловой скорости вращения. В такого рода гравитационных полях, очевидно, компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора, вообще говоря, не равны нулю. Мы будем называть такие постоянные поля стационарными.

Временную координату $x^0$, выбранную так, чтобы тензор $g_{ik}$ не зависел от $x^0$, называют мировым временем. Необходимо при этом отметить, что выбор мирового времени не является вполне однозначным. Именно, мировое время определено только с точностью до произвольной функции от пространственных координат; очевидно, что при прибавлении такой функции все $g_{ik}$ попрежнему не будут содержать $x^0$. Кроме того $x^0$ можно умножить на произвольную постоянную.

Если мы имеем дело со статическим гравитационным полем, где мы имеем возможность пользоваться системой отсчета, в которой $g_{0\alpha}=0$, то этим условием $x^0$ определяется настолько, что остается лишь возможность умножения его на произвольную постоянную. Если к тому же поле исчезает на бесконечности, то удобно выбрать систему отсчета таким образом, чтобы на бесконечности интервал $ds^2$ приобретал галилееву форму, в частности, чтобы в бесконечности было $g_{00}=c^2$. Этим требованием определяется тогда указанная произвольная постоянная и выбор мирового времени делается однозначным. Если пользоваться системой отсчета, в которой временной координатой является мировое время, то, поскольку, в частности, пространственная метрика не зависит от $x^0$, в такой системе имеет смысл определение расстояния между телами (см. § 79).

Смысл мирового времени заключается в том, что его промежуток между какими-нибудь двумя событиями в некоторой точке пространства равен промежутку мирового времени между любыми другими двумя событиями, соответственно одновременными с первой парой событий, происходящими в любой другой точке пространства. Что касается связи между мировым временем и истинным, то формулу (79,1) можно написать теперь в виде

$$\tau=\frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,x^0, \tag{85,1}$$

применимом к любым конечным промежуткам времени. Одинаковым промежутком мирового времени соответствуют в разных точках пространства различные промежутки собственного времени.

Если скорости всех тел малы, а гравитационное поле слабо, то можно воспользоваться приближенным выражением (83,2), и (85,1) дает

$$\tau=x^0\sqrt{1+\frac{2\varphi}{c^2}},$$

и поскольку $\varphi/c^2\ll 1$, то приближенно

$$\tau=x^0\left(1+\frac{\varphi}{c^2}\right). \tag{85,2}$$

Таким образом, собственное время течет тем медленнее, чем меньше гравитационный потенциал в данной точке постранства, т. е. чем больше его абсолютная величина (ниже будет доказано, что потенциал $\varphi$ отрицателен). Если из двух одинаковых часов одни находились некоторое время в гравитационном поле, то после этого часы, бывшие в поле, окажутся отставшими.

Как уже было выше указано, в статическом гравитационном поле компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора равны нулю. Согласно результатам § 79 это значит, что в таком поле возможна синхронизация часов во всем пространстве. Заметим также, что элемент пространственного расстояния $dl$ (79,5) равен в статическом поле просто

$$dl^2 = -g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta. \tag{85,3}$$

В стационарном поле $g_{0\alpha}$ отличны от нуля и синхронизация часов во всем пространстве невозможна. Поскольку $g_{ik}$ не зависит от $x^0$, то формулу (79,6) для разности значений мирового времени для двух одновременных событий, происходящих в разных точках пространства, можно написать в виде

$$\Delta x^0 = -\int \frac{g_{0\alpha}\,dx^\alpha}{g_{00}}, \tag{85,4}$$

применимом для любых двух точек на линии, вдоль которой производится синхронизация часов. При синхронизации же вдоль замкнутого контура разность значений мирового времени, которая обнаружилась бы по возвращении в исходную точку, равна интегралу

$$\Delta x^0 = -\oint \frac{g_{0\alpha}\,dx^\alpha}{g_{00}}, \tag{85,5}$$

взятому по этому замкнутому контуру.

Может оказаться, что сумма $\frac{1}{g_{00}}g_{0\alpha}\,dx^\alpha$ является полным дифференциалом какой-либо функции координат (постранственных), так что интеграл (85,5) по замкнутому контуру окажется равным нулю, а синхронизация часов возможной. В этом случае появление компонент $g_{0\alpha}$ обусловлено не свойствами самой системы отсчета, а просто неудачным выбором координаты $x^0$, и надлежащим ее выбором можно всегда обратить $g_{0\alpha}$ в нуль.

Рассмотрим распространение лучей света в постоянном гравитационном поле. Мы видели в § 54, что частота света равна производной от эйконала $\psi$ по времени (с обратным знаком). Частота, измеренная в мировом времени $x^0$, есть поэтому $\omega_0 = -\frac{\partial\psi}{\partial x^0}$. Поскольку уравнение эйконала (82,10) в постоянном поле не содержит $x^0$, то частота $\omega_0$ остается постоянной при распространении луча света. Частота же, измеренная в собственном времени, есть $\omega = -\frac{\partial\psi}{\partial\tau}$; эта частота различна в разных точках пространства. В силу соотношения

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial^0 x}\frac{\partial x^0}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\,\frac{c}{\sqrt{g_{00}}}$$

мы имеем

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}}\omega_0. \tag{85,6}$$

В слабом гравитационном поле получаем отсюда приближенно

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right), \tag{85,7}$$

т. е. частота света возрастает в тех местах, где абсолютная величина гравитационного поля больше.

Если луч света, испущенный в точке, где гравитационный потенциал равен $\varphi_1$, имеет (в этой точке) частоту $\omega$, то, придя в точку с потенциалом $\varphi_2$, он будет иметь частоту (измеренную в собственном времени в этой точке), равную $\dfrac{\omega}{1-\frac{\varphi_1}{c^2}}\left(1-\dfrac{\varphi_2}{c^2}\right) = \omega\left(1 + \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\right)$.

Линейчатый спектр, испускаемый какими-либо атомами, находящимися, например, на солнце, выглядит там точно так же, как выглядит на земле спектр, испускаемый находящимися на ней такими же атомами. Если же на земле наблюдается спектр, испускаемый атомами, находящимися на солнце, то, как следует из вышеизложенного, его линии окажутся смещенными по сравнению с линиями такого же спектра, испускаемого на земле. Именно, каждая линия с частотой $\omega$ будет смещена на интервал $\Delta\omega$, определяемый из формулы

$$\Delta\omega = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}, \tag{85,8}$$

где $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — потенциалы гравитационного поля соответственно в месте испускания и в месте наблюдения спектра. Если на земле наблюдается спектр, испускаемый на солнце или звездах, то $|\varphi_1| > |\varphi_2|$ и из (85,8) следует, что $\Delta\omega < 0$, т. е. смещение происходит в сторону меньших частот. Описанное явление называют „красным смещением".

Траекторию луча в статическом гравитационном поле можно определить с помощью принципа Ферма (54,10): $\delta\int k\,dl = 0$. Поскольку в пустоте $k = \omega c$, где $\omega$ — частота, измеренная в данном месте, то мы можем написать $\delta\int\omega\,dl = 0$, или с помощью (85,6),

$$\delta\int\frac{dl}{\sqrt{g_{00}}} = 0. \tag{85,9}$$

Отсюда непосредственно видно, что в гравитационном поле луч распространяется не по кратчайшей линии в пространстве, так как последняя определилась бы уравнением $\delta\int dl = 0$.

При движении в постоянном поле энергия частицы сохраняется. Энергия есть временная компонента 4-импульса $p_k = mcu_k = mcg_{ki}u^i$. В статическом поле $ds^2 = g_{00}\,dx_0{}^2 - dl^2$, и мы имеем для энергии, которую мы обозначим здесь посредством $\mathcal{E}_0$:

$$\mathcal{E}_0 = mcg_{00}\frac{dx^0}{ds} = mcg_{00}\frac{dx^0}{\sqrt{g_{00}dx_0{}^2 - dl^2}}.$$

Введем скорость $v=\frac{dl}{\sqrt{g_{00}}\,dx^0}$ частицы, измеренную в собственном времени, т. е. наблюдателем, находящимся в данном месте. Тогда мы получим для энергии

$$\mathscr{E}_0=\frac{mc\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{85,10}$$

Это есть та величина, которая остается постоянной при движении частицы. Величина же $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, которую можно называть попрежнему „кинетической энергией", при этом отнюдь не постоянна. Можно показать, что выражение (85,10) для энергии остается в силе и в стационарном поле, если только скорость $v$ измерять в собственном времени, определенном по часам, синхронизованным вдоль траектории частицы.

В предельном случае слабого гравитационного поля и малых скоростей находим приближенно из (85,10) с помощью равенства $g_{00}=c^2+2\varphi$:

$$\mathscr{E}_0=mc^2+\frac{mv^2}{2}+m\varphi, \tag{85,11}$$

где $m\varphi$ — нерелятивистская потенциальная энергия частицы в гравитационном поле в согласии с функцией Лагранжа (76,1).

Наконец, выведем условие термодинамического равновесия для макроскопических тел, находящихся в гравитационном поле. Этими условиями являются постоянство вдоль тела его температуры и химического потенциала. Однако, в гравитационном поле следует отличать температуру $T_0$, одинаковую во всех точках находящегося в равновесии тела, от температуры $T$, измеренной наблюдателем, находящимся в данном месте. Температура, как известно, определяется как производная от энергии тела по его энтропии (та и другая отнесены, например, к единице объема). Очевидно, что $T_0$ есть производная от сохраняющейся энергии $\mathscr{E}_0$ тела, а $T$ — от энергии $\mathscr{E}$, измеренной наблюдателем в данном месте. Поскольку энтропия тела является величиной инвариантной (см. § 35), то связь между $T$ и $T_0$ такая же, как и между $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}_0$. Но энергия $\mathscr{E}_0$ равна производной $-\frac{\partial S}{\partial x^0}$ от действия, а энергия $\mathscr{E}$ — производной $-\frac{\partial S}{\partial \tau}$ того же действия по собственному времени в данной точке. Поскольку $\frac{\partial S}{\partial \tau}=\frac{\partial S}{\partial x^0}\frac{\partial x^0}{\partial \tau}=\frac{\partial S}{\partial x^0}\frac{c}{\sqrt{g_{00}}}$, то, следовательно,

$$\mathscr{E}=\frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{g_{00}}}, \tag{85,12}$$

и поэтому температура

$$T=\frac{T_0}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{85,13}$$

Таким образом, при термодинамическом равновесии вдоль тела постоянно произведение $T\sqrt{g_{00}}$.

То же самое относится и к химическому потенциалу тела, который, как известно, определяется как производная от энергии по числу частиц тела при постоянной энтропии. Поскольку число частиц, из которых состоит тело, есть величина неизменная, то для химического потенциала $\zeta$, измеренного в данной точке, имеем, как и для температуры, соотношение

$$\zeta = \frac{\zeta_0}{\sqrt{g_{00}}}, \tag{85,14}$$

где величина $\zeta_0$ постоянна вдоль тела, находящегося в термодинамическом равновесии. В предельном случае малых скоростей $\zeta$ переходит в $mc^2 + \zeta'$, где $\zeta'$ — нерелятивистское выражение для химического потенциала (член $mc^2$ возникает по той причине, что при малых скоростях релятивистское выражение для энергии каждой из частиц тела отличается от нерелятивистского на „энергию покоя" $mc^2$; $m$ — масса отдельной частицы). Если, кроме того, гравитационное поле слабое, то $g_{00} = c^2 + 2\varphi$, и мы имеем

$$\zeta\sqrt{g_{00}} \approx \zeta' + mc^2 + m\varphi.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае вдоль находящегося в термодинамическом равновесии тела постоянна величина

$$\zeta' + m\varphi = \text{const.}, \tag{85,15}$$

результат, известный из нерелятивистской статистики.

## § 86. Вращение

В качестве примера стационарного гравитационного поля рассмотрим равномерно вращающуюся систему отсчета и изучим метрические свойства пространства-времени в такой системе.

Определим интервал $ds$ в рассматриваемой системе отсчета. Для этого произведем преобразование от неподвижной системы к равномерно вращающейся. В неподвижной системе координат $r'$, $\varphi'$, $z'$, $t$ (мы пользуемся цилиндрическими координатами $r'$, $\varphi'$, $z'$) интервал

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr'^2 - r^2d\varphi'^2 - dz'^2.$$

Во вращающейся системе цилиндрические координаты пусть будут $r$, $\varphi$, $z$. Если ось вращения совпадает с осями $Z$ и $Z'$, то имеем $r' = r$, $z' = z$, $\varphi' = \varphi + \Omega t$, где $\Omega$ — угловая скорость вращения. Подставляя это, находим искомое выражение для $ds^2$ во вращающейся системе отсчета:

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2r^2)\,dt^2 - 2\Omega r^2\,d\varphi\,dt - dz^2 - r^2d\varphi^2 - dr^2. \tag{86,1}$$

Компонента $g_{00}$ метрического тензора равна

$$g_{00} = c^2 - \Omega^2r^2. \tag{86,2}$$

Поэтому истинное время, измеренное часами, находящимся в данном месте пространства, связано со „временем" $t$ посредством соотношения (см. § 79):

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2r^2}{c^2}}\,t. \tag{86,3}$$

Далее определим элемент $dl$ пространственного расстояния во вращающейся системе отсчета. Для этого надо подставить значения $g_{ik}$ из (86,1) в общую формулу (79,5). Замечая, что единственная, отличная от нуля компонента вида $g_{0\alpha}$ есть $g_{0r} = \Omega r^2$, легко находим:

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}. \tag{86,4}$$

Это выражение определяет пространственную геометрию во вращающейся системе отсчета. Определим, например, длину окружности (с центром, лежащим на оси вращения). Для этого надо положить $dz = dr = 0$ и проинтегрировать по $d\varphi$ от 0 до $2\pi$; это дает $\dfrac{2\pi r}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}$.
С другой стороны, длина радиуса (получающаяся интегрированием $dl$ при $d\varphi = 0$, $dz = 0$) равна просто $r$. Таким образом, геометрия на вращающемся теле такова, что отношение длины окружности к ее радиусу больше, чем $2\pi$.

Необходимо отметить, что рассмотренной нами в этом параграфе вращающейся системой отсчета можно пользоваться только до расстояний, равных $c/\Omega$. Действительно, из (86,2) видно, что при $r > c/\Omega$ $g_{00}$ делается отрицательным, что недопустимо [см. (79,3)]. Неприменимость вращающейся системы отсчета на больших расстояниях связана с тем, что скорость вращения сделалась бы на них большей, чем скорость света, и потому такая система не может быть осуществлена реальными телами.

Как и во всяком стационарном поле, на вращающемся теле часы не могут быть однозначно синхронизованы во всех точках. Действительно, производя синхронизацию вдоль некоторой замкнутой линии, мы получим, возвратясь в исходную точку, время, отличающееся от первоначального на $-\oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha$, где интеграл берется по рассматриваемому контуру. При подстановке мы получаем

$$\Delta t = \frac{1}{c^2} \oint \frac{\Omega r^2 d\varphi}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}. \tag{86,5}$$

В случае $\Omega r/c \ll 1$, т. е. когда скорость вращения мала по сравнению со скоростью света, эта формула переходит в

$$\Delta t = \frac{\Omega}{c^2} \int r^2 d\varphi = \pm \frac{2\Omega}{c^2} S, \tag{86,6}$$

где $S$ — площадь проекции контура на плоскость, перпендикулярную к оси вращения (знак $+$ или $-$ имеет место соответственно при обходе контура по или против направления вращения). Предположим, что по некоторому замкнутому контуру распространяется луч света. Вычислим с точностью до членов порядка $v/c$ время, которое проходит между отправлением луча света и возвращением его в исходную точку. Скорость света по определению всегда равна $c$, если время синхронизуется вдоль данной замкнутой линии. Поэтому искомое время равно

$$t=\frac{L}{c}\pm\frac{2\Omega}{c^2}S,$$

где $L$ — длина контура. Соответственно этому скорость света, измеренная как отношение $L/t$, оказывается равной

$$c\mp 2\Omega\frac{S}{L}.$$

Эту формулу можно легко вывести, как и формулу для первого приближения эффекта Допплера, и чисто классическим путем.

---

ГЛАВА X

# УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

## § 87. Тензор кривизны

Вернемся опять к понятию параллельного переноса вектора. Как было сказано в § 80, в общем случае неэвклидова пространства бесконечно малый параллельный перенос вектора определяется как перенос, при котором компоненты вектора не меняются в системе координат, декартовой в данном бесконечно малом элементе объема.

Если $x^i=x^i(s)$ есть параметрическое уравнение некоторой кривой ($s$ — длина дуги, отсчитываемая от некоторой точки), то вектор $u^i=\frac{du^i}{ds}$ есть единичный вектор, касательный к кривой. Если рассматриваемая кривая является геодезической, то, как мы видели в § 74, вдоль нее $Du^i=0$ [см. (82,2)]. Это значит, что если вектор $u^i$ подвергнуть параллельному переносу из точки $x^i$ на геодезической линии в точку $x^i+dx^i$ на той же линии, то он совпадет с вектором $u^i+du^i$, касательным к линии в точке $x^i+dx^i$. Таким образом, при передвижении касательной к геодезической линии вдоль этой самой линии она передвигается параллельно самой себе.

Благодаря этому свойству геодезических линий мы можем сказать, что при параллельном переносе любого вектора его составляющие по геодезическим линиям во всех точках пути должны быть неизменны; другими словами, при параллельном переносе вектор должен сохранять все время один и тот же угол с геодезическими линиями.

Весьма существенным является то обстоятельство, что в неэвклидовом пространстве параллельный перенос вектора из одной заданной точки в другую дает разные результаты, если перенос совершается по разным путям. В частности, отсюда следует, что если переносить вектор параллельно самому себе по некоторому замкнутому контуру, то он, возвратившись в первоначальную точку, не совпадет с самим собой.