ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVI. Серия 4 1960

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ ЦЕПОЧКИ

(Обоснование метода Дайсона)

Ф. С. Рофе-Бекетов

(Харьков)

ВВЕДЕНИЕ

Продольные колебания цепочки, состоящей из N упруго связанных масс $m_1, m_2, \ldots m_N$, описываются следующими уравнениями (при свободных концах цепочки):

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= k_1(x_2 - x_1) \\ &\cdots\cdots \\ m_j\ddot{x}_j &= k_j(x_{j+1} - x_j) + k_{j-1}(x_{j-1} - x_j) \\ &\cdots\cdots \\ m_N\ddot{x}_N &= \qquad\qquad k_{N-1}(x_{N-1} - x_N) \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x_j — смещение массы m_j от положения равновесия, k_j — упругая константа взаимодействия частиц j и $j+1$.

Обозначим через $\omega_{N,1}, \omega_{N,2}, \ldots \omega_{N,N}$ квадраты собственных частот колебаний такой цепочки и через $M_N(\mu)$ — функцию распределения (ф. р.) этих величин, т. е.

$$M_N(\mu) = \frac{k}{N} \text{ при } \omega_{N,k} < \mu \leqslant \omega_{N,k+1}. \tag{2}$$

Если величины m_j и k_j — случайные, то и ф. р. $M_N(\mu)$ — тоже случайная. Однако, если длина такой «неупорядоченной» цепочки стремится к бесконечности (т. е. $N \to \infty$), то при некоторых условиях последовательность $M_N(\mu)$ сходится к определённой, уже не случайной, ф. р. $M(\mu)$.

Дайсон [1] приводит метод для нахождения этой предельной ф. р. $M(\mu)$ в случае, если ф. р. вероятностей для элементов цепочки периодически повторяются. Задача эта возникла в термодинамике в связи с определением теплоёмкости тела, состоящего из атомов различного рода. Рассматриваемая цепочка является одномерной моделью такого тела. Кроме того, аналогичные уравнения получаются при рассмотрении электрического тока в цепи, составленной из случайных ёмкостей и индуктивностей.

Метод Дайсона, вкратце, заключается в следующем: вместо ф. р. $M(\mu)$ ищем её преобразование — «характеристическую» функцию

$$\Omega(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \log(z + \omega_{N,k}) = \lim_{N\to\infty} \int_0^\infty \log(z + \mu)\, dM_N(\mu)$$

(для значений логарифма выбираем главную ветвь).

Зная $\Omega(z)$, можно найти $M(\mu)$ по формуле обращения (7) Стильтьеса.

При некоторых условиях оказывается, что

$$\Omega(x) = C + 2\,\overline{\log r},$$

где $\overline{\log r}$ означает среднее значение остатков бесконечной цепной дроби

$$\xi = m_1 + \cfrac{1}{l_1 x + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{l_2 x + \ldots}}} \tag{3}$$

$\left(\text{здесь } \; l_i = \frac{1}{k_i}\right)$.

В силу периодического повторения ф. р. для элементов цепочки, ф. р. вероятностей для остатков цепной дроби ξ тоже будут периодически повторяться. Приравняв ф. р. для двух соответствующих остатков, Дайсон получает для этих ф. р. интегральное уравнение. Найдя ф. р., можно найти $\overline{\log r}$ и, следовательно, $\Omega(x)$ и искомую функцию $M(\mu)$.

Целью настоящей работы является более простой вывод и строгое математическое обоснование метода Дайсона. Работа выполнена под непосредственным руководством профессора В. А. Марченко. Пользуюсь случаем, чтобы еще раз выразить ему свою глубокую благодарность. (Работа была доложена в ХГУ в апреле 1955 г.).

§ 1. Формула обращения

Выведем упомянутую во введении формулу обращения.

Для каждой цепочки из N частиц ($N = 1, 2, \ldots$) строим функцию

$$\Omega_{\mathrm{N}}(z) = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \log(z + \omega_{\mathrm{N},\,k}) = \int_0^\infty \log(z + \mu)\, dM_{\mathrm{N}}(\mu). \tag{4}$$

Применяя в существенном известные рассуждения, докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть дана последовательность неубывающих функций $M_{\mathrm{N}}(\mu)$ $[M_{\mathrm{N}}(0) = 0,\ M_{\mathrm{N}}(\infty) = 1]$, и пусть на бесконечном множестве точек $\mathfrak{M}$ в z-плоскости, имеющем хотя бы одну предельную точку (не на отрицательной полуоси $x \leqslant 0$) существует

$$\Omega(z) = \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \Omega_{\mathrm{N}}(z) \equiv \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \int_0^\infty \log(z + \mu)\, dM_{\mathrm{N}}(\mu). \tag{5}$$

Тогда этот предел $\Omega(z)$ существует и является аналитической функцией во всей плоскости, кроме полуоси $x \leqslant 0$, а последовательность $M_{\mathrm{N}}(\mu)$ сходится к единственной предельной функции $M(\mu)$ во всех точках ее непрерывности, причём

$$\Omega(z) = \int_0^\infty \log(z + \mu)\, dM(\mu) + C, \tag{6}$$

где $C \geqslant 0$. (В частности, если все $\omega_{\mathrm{N},\,k} < \mathrm{const}$, то $C = 0$). Кроме того, имеет место формула обращения Стильтьеса

$$M(\mu) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to+0} \operatorname{Im} \Omega(-\mu + i\varepsilon) \tag{7}$$

во всех точках непрерывности $M(\mu)$.

Доказательство. Используя теорему Хелли, выбираем сходящуюся подпоследовательность $M_{N_j}(\mu) \xrightarrow[\mu \to \infty]{} M(\mu)$. Замечая, что $\log(z+\mu) = \log|z+\mu| + i\arg(z+\mu)$, где $\arg(z+\mu) \xrightarrow[\mu\to\infty]{} 0$, и используя вторую теорему Хелли, получаем для некоторого $z_0 \in \mathfrak{M}$:

$$\Omega(z_0) = \int_0^\infty \log(z_0+\mu)\, dM(\mu) + C, \quad \text{где } C \geqslant 0.$$

Взяв теперь любое z (только не на полуоси $x \leqslant 0$), получим, что для подпоследовательности $M_{N_j}(\mu)$ существует (см. (5)) аналитическая функция $\Omega(z)$ и что

$$\Omega(z) = \Omega(z_0) + \int_0^\infty \log\left(\frac{z+\mu}{z_0+\mu}\right) dM(\mu) =$$

$$= \int_0^\infty \log(z+\mu)\, dM(\mu) + C.$$

То, что вся последовательность $M_N(\mu)$ стремится к $M(\mu)$, легко вытекает из теоремы единственности для аналитических функций и формулы обращения (7), которая следует из (6), так как

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \operatorname{Im}\log(\mu - x + i\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu > x \\ \pi & \text{при } \mu < x. \end{cases}$$

Заметим еще, что $M(0) = 0$, а $M(\infty) = 1$.
Последнее следует из (5), так как при всех $N > N_0$ и $x = 1$ имеем

$$[1 - M_N(\mu)]\log(1+\mu) \leqslant \Omega(1) + \varepsilon.$$

Кроме формулы обращения (7) в работе [1] приведена и другая, в которую входят только значения $\Omega'(x)$ при $x > 0$ (во избежание недоразумений отметим, что наша Ω немного отличается от рассматриваемой там).

§ 2. Характеристическая функция

Итак, отыскание $M(\mu)$ сводится к нахождению характеристической функции

$$\Omega(x) = \lim_{N\to\infty} \log\left[(x+\omega_{N,1})(x+\omega_{N,2}) \ldots (x+\omega_{N,N})\right]^{\frac{1}{N}}, \tag{8}$$

чем мы сейчас и займёмся для случая $x > 0$. Затем можно сделать аналитическое продолжение.

Полагая в системе (1) $x_j = u_j e^{i\lambda t}$ и обозначая $-\lambda^2 = x$, получим:

$$\begin{aligned} m_1 x u_1 &= k_1(u_2 - u_1) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ m_j x u_j &= k_j(u_{j+1} - u_j) + k_{j-1}(u_{j-1} - u_j) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_N x u_N &= \qquad\qquad k_{N-1}(u_{N-1} - u_N). \end{aligned} \tag{9}$$

Начиная с последнего из соотношений (9) и последовательно переходя к предыдущим, выразим все величины u_j через u_N. Получим (ср. [2]):

$$u_j = D_j(x)\, u_N, \quad D_N \equiv 1. \tag{10}$$

Здесь $D_j(x)$ — многочлен степени $N-j$.
Положим

$$k_j(D_j - D_{j+1}) = \widetilde{D}_j \quad \text{и} \quad l_j = \frac{1}{k_j}. \tag{11}$$

Тогда

$$D_j = l_j \widetilde{D}_j + D_{j+1}, \quad \widetilde{D}_j = m_{j+1} x D_{j+1} + \widetilde{D}_{j+1} \tag{12}$$

(последнее равенство следует из (9)).

Первое из уравнений (9) дает условие:

$$m_1 x D_1 + \widetilde{D}_1 = 0, \text{ или } \widetilde{D}_0(x) = 0.$$

Корнями этого уравнения являются взятые с обратным знаком квадраты собственных частот. Значит,

$$\widetilde{D}_0(x) = a(x + \omega_{N,1})(x + \omega_{N,2}) \ldots (x + \omega_{N,N}), \tag{13}$$

где

$$a = m_1 l_1 m_2 l_2 \ldots m_{N-1} l_{N-1} m_N. \tag{14}$$

Используя (12), получим

$$\frac{\widetilde{D}_0}{D_1} = m_1 x + \cfrac{1}{\cfrac{D_1}{\widetilde{D}_1}} = m_1 x + \cfrac{1}{l_1 + \ddots + \cfrac{1}{m_N x}} = x\left\{m_1 + \cfrac{1}{l_1 x + \ddots + \cfrac{1}{m_N}}\right\}.$$

И так как

$$\widetilde{D}_0 = \frac{\widetilde{D}_0}{D_1} \cdot \frac{D_1}{\widetilde{D}_1} \cdot \frac{\widetilde{D}_1}{D_2} \ldots \frac{\widetilde{D}_{N-1}}{D_N} \cdot D_N,$$

где $D_N \equiv 1$,
то

$$\widetilde{D}_0 = x\left(m_1 + \cfrac{1}{l_1 x + \ddots + \cfrac{1}{m_N}}\right)\left(l_1 x + \cfrac{1}{m_2 + \ddots + \cfrac{1}{m_N}}\right) \ldots (m_N). \tag{15}$$

Всего произведение содержит $(2N-1)$ скобку.

Отмечая, что цепочка содержит N частиц, обозначим $\widetilde{D}_0(x)$ и a через $\widetilde{D}_{0N}(x)$ и a_N. Через $r_{k1}^{[N]}$ и $r_{k2}^{[N]}$ будем обозначать отрезки цепной дроби (3):

$$r_{k1}^{[N]} = m_k + \cfrac{1}{l_k x + \ddots + \cfrac{1}{m_N}}; \quad r_{k2}^{[N]} = l_k x + \cfrac{1}{m_{k+1} + \ddots + \cfrac{1}{m_N}}, \tag{16}$$

а через r_{k1} и r_{k2} её остатки:

$$r_{k1} = r_{k1}^{[\infty]}, \quad r_{k2} = r_{k2}^{[\infty]}. \tag{16a}$$

Сопоставляя (7), (13), (14), (15) и (16), получим

$$\Omega(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \frac{\widetilde{D}_{0N}(x)}{a_N} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\left[\sum_{j=1}^{N-1} \log \frac{1}{m_j l_j} + \sum_{j=1}^{N-1} \left(\log r_{j1}^{[N]} + \log r_{j2}^{[N]}\right)\right]. \tag{17}$$

Здесь если существует одна из частей равенства, то существуют и остальные.

В названной выше статье Дайсона молчаливо предполагается, что предел (17) существует и что предельный переход по N в правой части (17) можно делать последовательно, устремляя N к ∞ в первую очередь в стоящих под знаком $\sum$ отрезках $r_j^{[N]}$ цепной дроби $\xi(x)$. В этом случае получим

$$\Omega(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\left[\sum_{j=1}^{N} \log\frac{1}{m_j l_j} + \sum_{j=1}^{N} (\log r_{j1} + \log r_{j2})\right]. \tag{18}$$

Однако этот переход требует особого обоснования, которое будет дано в § 5.

§ 3. Периодическая цепочка

Это — простейший случай, когда справедливы сделанные выше выкладки. Обоснование будет произведено в § 5 сразу для более общего случая. Итак, пусть $m_{j+p} = m_j$, $l_{j+p} = l_j$. Из (18) имеем

$$\Omega(x) = \frac{1}{p}\log\prod_{j=1}^{p}(r_{j1}r_{j2}) + C, \tag{19}$$

где $C = \text{const} > 0$ и поэтому нас не интересует. Дробь ξ (см. (3) удовлетворяет квадратному уравнению

$$\xi = m_1 + \cfrac{1}{l_1 x + \cdots + \cfrac{1}{l_p x + \cfrac{1}{\xi}}}$$

(годится только один корень).

Для нахождения $\prod\limits_{j=1}^{p} r_{j1}r_{j2}$ удобна несложно выводимая формула для периодической дроби, которая при обозначении

$$\xi = b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cdots + \cfrac{1}{b_n + \cfrac{1}{\xi}}}, \quad b_j > 0$$

выглядит так:

$$\prod_{j=1}^{n} r_j = \frac{1}{2}\left\{B_n + A_{n-1} + \sqrt{(B_n + A_{n-1})^2 + 4(-1)^{n+1}}\right\}, \tag{20}$$

где

$$B_0 = 1,\ B_1 = b_1,\ B_j = b_j B_{j-1} + B_{j-2}$$
$$A_0 = 0,\ A_1 = 1,\ A_j = b_j A_{j-1} + A_{j-2}.$$

В частном случае, когда все $m_j = m$, $l_j = l$, имеем

$$\Omega(z) = \log\left\{mlz + 2 + \sqrt{(mlz+2)^2 - 4}\right\} + C,$$

откуда, используя (6), можем получить

$$M(0) = 0,\quad M(\mu) = 1 \quad \text{при } \mu \geq \frac{4}{ml},$$

а при $0 < \mu < \frac{4}{ml}$

$$\frac{dM(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{ml}{\mu(4 - ml\mu)}},$$

что совпадает с известным результатом, который можно получить и элементарно.

§ 4. Цепочка со случайными элементами

Рассмотрим цепочку, у которой m_j и l_j являются *независимыми* случайными величинами с *периодически повторяющимися ф.р.* (для данной цепочки m_j и l_j имеют определенные значения, но нам они не известны, а известны лишь ф.р. вероятностей для этих случайных величин).

При условии, что для m_j, l_j, $\log m_j$, $\log l_j$ существуют средние значения и дисперсии, в § 5 будет оправдан приводимый здесь способ нахождения функции $M(\mu)$. Именно, будет доказано следующее *основное для настоящей работы утверждение:*

Последовательность $M_N(\mu)$ сходится по вероятности к найденной приводимым здесь способом функции $M(\mu)$ в любой точке её непрерывности, а потому и в любом конечном количестве таких точек одновременно.

Это же утверждение справедливо для случая, когда $l_j = l(m_j, m_{j+1})$, т. е. силы взаимодействия определяются частицами, между которыми они действуют. Обоснование метода для этого случая проводится почти без изменений по сравнению с § 5.

Разберём метод Дайсона на конкретных примерах.

I. «Изотопическая смесь». Все m_j — независимые случайные величины с одинаковыми ф.р. $G(t) = P\{m < t\}$, все $l_j = l = \text{const}$.

В этом случае все остатки r_{j1} $(j = 1, 2, \ldots)$ имеют одинаковые ф.р., и все остатки r_{j2} тоже.

$$\xi = m + \frac{1}{lx + \frac{1}{\xi'}}, \tag{21}$$

где ξ и ξ' имеют одинаковые ф.р. $P(t)$.

Приравнивая ф.р. левой и правой частей (21), получим интегральное уравнение для $P(t)$:

$$P(\xi) = \int_0^\infty G\left(\xi - \frac{\xi'}{\xi' lx + 1}\right) dP(\xi') \tag{22}$$

или

$$P(\xi) = G\left(\xi - \frac{1}{lx}\right) - \int_0^\infty P(\xi')\, d_{\xi'} G\left(\xi - \frac{\xi'}{\xi' lx + 1}\right). \tag{23}$$

Если существует ограниченная плотность распределения вероятностей для масс $g(t) = G'(t)$, то ф.р. $P(\xi)$ тоже имеет ограниченную плотность $\rho(\xi) = P'(\xi)$ и вместо (22) имеем

$$\rho(\xi) = \int_0^\infty g\left(\xi - \frac{\xi'}{\xi' lx + 1}\right) \rho(\xi')\, d\xi'. \tag{24}$$

Если же распределение G дискретно, то получается конечно-разностное уравнение.

В § 5 будет доказано существование ф.р. $P(\xi)$ для случайной величины ξ, значит, уравнения (22) — (24) разрешимы. Их решения при надлежащей нормировке единственны в соответствующем классе функций (ограниченной вариации или суммируемых), ибо последовательные итерации для уравнения (22), какую бы ф.р. $F(\xi')$ $(F(0) = 0)$ мы ни взяли за исходную, сходятся к $P(\xi)$, так как наше итерирование даёт ф.р. подходящих дробей дроби ξ, у которых последний элемент имеет распределение F, а эти ф.р. сходятся к $P(\xi)$ (см. § 5, п. 2). Отсюда же видно, что приближенные решения уравнений (22) — (24) можно находить путём итераций.

Итак, пусть $P(\xi)$ найдено из (22) и пронормировано: $P(+0) = 0$, $P(\infty) = 1$. Последовательность $\log r_j$ подчинена закону больших чисел (см. § 5), поэтому (см. (18) $\Omega(x)$ находим как среднее значение логарифма произведения двух любых последовательных остатков дроби (3). Возьмём второй и третий остатки. Обозначая последний через ξ (он имеет ту же ф.р., что и вся дробь), имеем

$$r_{1,2}r_{2,1} = \left(lx + \frac{1}{\xi}\right)\xi = lx\xi + 1,$$

и

$$\Omega(x) = \int_0^\infty \log(lx\xi + 1)\, d_\xi P(\xi;\ x) + C, \tag{25}$$

где $C > 0$. Здесь написано $P(\xi;\ x)$, так как P зависит не только от ξ, но и от x.

Зная $\Omega(x)$, можно найти $M(\mu)$ по формулам обращения.

В работе [1] приведен пример, в котором все вычисления проводятся до конца.

II. Все m_j — снова независимы с одинаковыми ф.р. $G(t)$, а $l_j = l(m_j,\ m_{j+1})$. Тогда вместо уравнений (22), (23) получаем уравнение для условного распределения $P(t\,|\,s) = P\{\xi < t\,|\,m_1 = s\}$:

$$P\left(\xi\,\middle|\,m\right) = \int_0^\infty P\left(\frac{\xi - m}{1 - (\xi - m)\,l\,(m,\ m')\,x}\,\middle|\,m'\right) dG(m'), \tag{26}$$

причем $P(\xi) = \int_0^\infty P(\xi\,|\,m)\, dG(m)$.

§ 5. Математическое обоснование метода Дайсона

Вместо дроби (3) будем для простоты рассматривать дробь

$$\xi = b_1 + \frac{1}{b_2 + \ddots} \tag{27}$$

Здесь $b_j > 0$ — независимые случайные величины с ф.р. $G_j(t) = P\{b_j < t\}$, которые периодически повторяются:

$$G_{j+p}(t) = G_j(t) \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{28}$$

Считаем, что выполняется следующее условие A.

Для величин b_j и $\log b_j$ при каждом j существуют математические ожидания и дисперсии.

Все доказанные для дроби (27) результаты будут иметь место и для дроби (3) при любом $x > 0$.

Лемма 1. Бесконечная цепная дробь ξ (см. 27) сходится вместе со всеми своими остатками почти наверное (т. е. с вероятностью 1).

Доказательство: так как последовательность b_j в силу (А) и (28) подчинена усиленному закону больших чисел, то

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j - b\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0\right\} = 1, \tag{29}$$

где $b = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\infty} \bar{b}_j > 0$. Пусть $0 < \varepsilon < b$.

Тогда (см. (29) с вероятностью 1 существует такое n_0, что при всех $n \geqslant n_0$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j > n(b-\varepsilon) \quad (n = n_0,\ n_0+1,\ \ldots), \tag{30}$$

т. е. с вероятностью 1 ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ расходится и, следовательно, сходится дробь (27) (по известной теореме об условиях сходимости цепной дроби. См., например [3]).

Лемма 2. Для дроби ξ существует ф.р. вероятностей. Значит, ξ (см. 27) является случайной величиной. При этом ф.р. вероятностей для подходящих дробей ξ_n при $n \to \infty$ сходятся к ф.р. для дроби ξ в основном, т. е. во всех точках непрерывности этой ф.р.

Доказательство: обозначим через ξ_n подходящую дробь n-го порядка,

$$\xi_n = b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \ddots + \cfrac{1}{b_n}}, \tag{31}$$

а через $P_n(t)$ — её ф.р. Так как

$$\xi_1 < \xi_3 < \ldots < \xi_{2n-1} < \ldots < \xi < \ldots < \xi_{2m} < \ldots < \xi_4 < \xi_2, \tag{32}$$

то

$$P_{2m}(t) \leqslant P_{2m+2}(t) \leqslant \ldots \leqslant P_{2n+1}(t) \leqslant P_{2n-1}(t). \tag{32a}$$

С другой стороны, при $\varepsilon > 0$

$$P_{2n}(t) + \varepsilon_n \geqslant P_{2n-1}(t-\varepsilon),$$

где

$$\varepsilon_n = P\{\xi_{2n} > \xi_{2n-1} + \varepsilon\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

в силу сходимости дроби ξ.

Поэтому последовательность $P_n(t) \to P(t)$ (в основном), где $P(t)$ — некоторая ф.р. В силу (32) имеет место следующее включение событий:

$$A_t \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \{\xi_{2k} < t\} \subset \{\xi < t\} \subset \prod_{k=1}^{\infty} \{\xi_{2k-1} < t\} \equiv B_t.$$

И так как из предыдущего следует, что для событий A_t и B_t $P\{A_t\} = P\{B_t\} = P(t)$, то, значит, $P(t) = P\{\xi < t\}$, т. е. $P(t)$ есть ф.р. для дроби ξ, что и требовалось доказать.

Лемма 3. При условии A логарифмы остатков цепной дроби (т. е. величины $\log r_j$) имеют средние значения и дисперсии.

Заметим сперва следующее.

$\{\alpha\}$. Если для случайных величин ξ и η существуют $\overline{\log \xi}$ и $\overline{\log \eta}$ (в смысле абсолютной сходимости), то существуют и $\overline{\log \xi\eta}$, $\overline{\log \frac{\xi}{\eta}}$ и $\overline{\log(\xi+\eta)}$. Последнее следует из того, что

$$\frac{1}{2}(\log \xi + \log \eta) < \log(\xi+\eta) < \log(\xi+1) + \log(\eta+1).$$

$\{\beta\}$. Если $P(a) = Q(a)$, $P(b) = Q(b)$, $P(x) \geqslant Q(x)$ и $f(x)$ — неубывающая функция ($a \leqslant x \leqslant b$), то (интегрируя по частям) имеем

$$\int_a^b f(x)\,dP(x) \leqslant \int_a^b f(x)\,dQ(x).$$

Теперь докажем лемму. В силу $\{\alpha\}$ и условия A для ф.р. $P_k(t)$ подходящих дробей существуют $\overline{\log t}$ и $\overline{(\log t)^2}$. Так как $P_2(t) \leqslant P(t) \leqslant \leqslant P_1(t)$, то в силу $\{\beta\}$ для ф.р. $P(t)$ тоже существуют $\overline{\log t}$ и $\overline{(\log t)^2}$, что и требовалось доказать. (Сначала $\{\beta\}$ применяем к интервалу $0 < \delta \leqslant t \leqslant N$, изменяя значения P, P_1 и $P_2(t)$ в точках δ и N так, чтобы они совпали. Затем $\delta \to 0$, $N \to \infty$). Для любого $\log r_j$ доказательство то же самое.

Лемма 4. В формуле (18) имеет место сходимость по вероятности, ибо последовательность (зависимых) случайных величин $\log r_j$, подчинена закону больших чисел.

Доказательство: по теореме С. Н. Бернштейна, если все дисперсии $Dx_j < \text{const}$ и коэффициент корреляции между x_i и x_k $R_{i,k} \underset{|i-k| \to \infty}{\longrightarrow} 0$ равномерно по i и k, то последовательность x_j подчинена закону больших чисел [4, 5].

Для приложимости этой теоремы к нашей цепочке достаточно, в силу (28) и леммы 3, доказать, что

$$\overline{\log \xi \log r_k} - \overline{\log \xi} \cdot \overline{\log r_k} \equiv$$
$$\equiv \int_0^\infty \log r \left\{ \int_0^\infty \log \xi d_\xi \left[P_{1,k}(\xi \mid r) - P(\xi) \right] \right\} dR_k(r) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{33}$$

Здесь $R_k(t)$ — ф.р. для r_k, а $P_{1,k}(\xi \mid r)$ — условная ф.р. дроби ξ при заданном $r_k = r$.

Так как $P_{1,k}(\xi \mid r)$ при любом r_k заключена между $P_{k-1}(\xi)$ и $P_{k+1}(\xi)$ (см. (32)), то $P_{1,k}(\xi \mid r) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} P(\xi)$ независимо от r_k. Разбивая на три части

$$J \equiv \int_0^\infty \log \xi d_\xi \left[P_{1,k}(\xi \mid r) - P(\xi) \right] = \int_0^\delta + \int_\delta^N + \int_N^\infty$$

и используя $\{\beta\}$ из леммы 3 и теорему Хелли, получим, что при любом r $|J| < \varepsilon$, если k достаточно велико. Отсюда следует (33), что и требовалось доказать.

Лемма 5. При условии A (стр. 149) последовательность

$$D_N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\log r_j^{[N]} - \log r_j \right) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

(по вероятности). Это оправдывает переход от (17) к (18) и вместе с леммой 4 даёт, что (*условие* B) при любом $x > 0$

$$\Omega_N(x) = \int_0^\infty \log(x + \mu)\, dM_N(\mu) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \Omega(x) \tag{B}$$

(по вероятности). Здесь $\Omega(x)$ определено по способу § 4.

Доказательство: не ограничивая общности, допустим, что все b_j имеют одинаковые ф.р. $G(t)$. Положим

$$D_N = D_{\mathrm{I}\,N} + D_{\mathrm{II}\,N} + D_{\mathrm{III}\,N},$$

где

$$D_{\mathrm{I}\,N} = \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant N-n \\ \max\{r_j;\ r_j^{[N]}\} \geqslant h}} \left(\log r_j^{[N]} - \log r_j \right)$$

$$D_{\mathrm{II}\,N}=\frac{1}{N}\sum_{j=N-n+1}^{N}(\log r_j^{[N]}-\log r_j)$$

$$D_{\mathrm{III}\,N}=\frac{1}{N}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant N-n\\ \max\{r_j;\ r_j^{[N]}\}<h}}(\log r_j^{[N]}-\log r_j).$$

Рассмотрим $D_{\mathrm{I}\,N}$. Из теории цепных дробей (см., например [3], следует оценка

$$|\xi-\xi_n|<\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} b_{2j}}, \tag{34}$$

где ξ_n — подходящая дробь n порядка для дроби ξ (см. (27)). Из (30) следует существование такого n_0, что при любом k вероятность выполнения одновременно двух неравенств

$$\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} b_{k+2j}}<\varepsilon' \text{ и } \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} b_{k+2j-1}}<\varepsilon'$$

для $n\geqslant n_0$ будет больше, чем $1-\delta$.

Полагая $k=N-n$ и учитывая (34) видим, что при выбранном n вероятность **одновременного** выполнения неравенств

$$|r_j^{[N]}-r_j|<\varepsilon' \text{ при } j=1,\ 2,\ \ldots\ N-n$$

больше, чем $1-\delta$. Считая ε' таким, что $|\log h-\log(h-\varepsilon')|<\varepsilon$, имеем при $n\geqslant n_0$

$$P\{|D_{\mathrm{I}\,N}|<\varepsilon\}>1-\delta. \tag{35}$$

При $N>N_0(n)$ и достаточно малом $h>0$ в силу закона больших чисел

$$P\{|D_{\mathrm{II}\,N}|<\varepsilon\}>1-\delta \tag{36}$$

и

$$P\{|D_{\mathrm{III}\,N}|<\varepsilon\}>1-\delta, \tag{37}$$

Из (35), (36), (37) имеем

$P\{|D_N|<3\varepsilon\}>1-3\delta$, что и требовалось доказать.

Теперь докажем заключительную теорему.

Теорема II. При условии B последовательность $M_N(\mu)$ сходится по вероятности к $M(\mu)$ в каждой точке её непрерывности, где $M(\mu)$ выражается через $\Omega(z)$ по формуле (6) и $\Omega(x)$ является аналитической функцией.

Доказательство. Перенумеруем все положительные рациональные числа: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$. Возьмем последовательности $\varepsilon_k>0$ и $\delta_k>0$ такие, что $\varepsilon_k\to 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\delta_k<\infty$. Затем строим последовательность $N_1<<N_2<\ldots$ так, чтобы при любом $N\geqslant N_j$ было

$$P\left\{\prod_{k=1}^{j}\{|\Omega_N(x_k)-\Omega(x_k)|<\varepsilon_j\}\right\}>1-\delta_j.$$

Тогда при любых $n_k \geqslant N_k$ вероятность одновременной на всех рациональных точках сходимости последовательности $\Omega_{n_k}(x) \underset{k\to\infty}{\to} \Omega(x)$ равна 1. Отсюда по теореме I следует с вероятностью 1, что $\Omega_{n_k}(z) \underset{k\to\infty}{\to} \bar{\Omega}(z)$ во всей плоскости (кроме полуоси $x \leqslant 0$) и что в любой точке μ_0 непрерывности $M(\mu)$ $M_{n_k}(\mu_0) \underset{k\to\infty}{\to} M(\mu_0)$. Здесь $\bar{\Omega}(z)$ — аналитическая функция и $\bar{\Omega}(x) = \Omega(x)$ при $x > 0$, значит, $\Omega(x)$ допускает аналитическое продолжение.

Отсюда видим, рассуждая от противного, что вся последовательность

$$M_N(\mu_0) \underset{N\to\infty}{\to} M(\mu_0)$$

по вероятности, что и требовалось доказать.

Таким образом, хотя элементы цепочки — случайные величины, предельная функция $M(\mu)$ определяется вполне однозначно.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. J. Dyson. The dynamics of a disordered linear chain. Phys. Rev., 92, № 6. 1953, стр. 1331—1338.

2. Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. Гостехиздат, 1950, 338.

3. А. Я. Хинчин. Цепные дроби. Гостехиздат, 1949, гл. I.

4. С. Н. Бернштейн. Теория вероятностей, Гостехиздат, 1946, 193.

5. В. И. Гливенко. Курс теории вероятностей, ГОНТИ, 1939, 199.