

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Курінний Г.Ч., Невмержицька О.М., Шугайло О.О.

Травень-2015

Зміст

1	Алгебрична форма комплексного числа	2
1.1	Означення комплексних чисел	2
1.2	Дії з комплексними числами в алгебраїчній формі	3
1.3	Поле комплексних чисел	3
1.4	Операція спряження	5
2	Приклади інших означень поля комплексних чисел	6
2.1	Приєднання іншої уявної одиниці	6
2.2	Поле комплексних чисел як множина впорядкованих пар дійсних чисел	6
2.3	Поле комплексних чисел як факторкільце кільця многочленів	6
2.4	Поле комплексних чисел як множина матриць	7
3	Комплексна площина	7
3.1	Геометрична інтерпретація комплексних чисел та тригонометрична форма комплексного числа.	7
3.2	Дії з комплексними числами в тригонометричній формі	10
3.3	Добування кореня із комплексного числа	11
3.4	Корені із одиниці	13
4	Задачі, що стосуються комплексних чисел	14
4.1	Задання ліній в комплексній площині	14
4.1.1	Коло	14
4.1.2	Промінь	15
4.1.3	Пряма лінія	16
4.1.4	Еліпс	16
4.1.5	Гіпербола	18
4.1.6	Парабола	18
4.2	Рухи комплексної площини	19
4.2.1	Паралельне перенесення	22
4.2.2	Обертання	22
4.2.3	Осьова симетрія та ковзна симетрія	22

4.3	Задання областей в комплексній площині	23
4.3.1	Внутрішність за зовнішність кола. Кільце	23
4.3.2	Кут	23
4.3.3	Внутрішність та зовнішність еліпса	24
4.3.4	Внутрішність та зовнішність параболи	25
4.3.5	Півплощина та смуга	25
4.4	Використання комплексних чисел в комбінаториці	25
4.5	Косинус та синус кратних дуг	26
4.6	Степені косинуса та синуса	27
5	Розширення функцій дійсного змінного на комплексну площину	28
5.1	Збіжність послідовностей і задання функції степеневим рядом.	29
5.2	Експонента	29
5.3	Синус та косинус комплексного аргумента	30
5.4	Логарифм комплексного аргумента	32
5.5	Образи прямокутної області комплексної площини під дією різних функцій комплексної змінної	32

1 Алгебрична форма комплексного числа

1.1 Означення комплексних чисел

Числа, які використовують для вимірювання довжин, ваги та подібного, і які вивчалися в школі, називаємо дійсними. Їх властивості вважаються відомими із школи. Щоб підкреслити, що з дісні числа можна додавати та множити, є нульове число та одиниця, у кожного дійсного числа є протилежне, а ненульове число має обернене, що додавання та множення асоціативні, що між собою додавання та множення зв'язан дистрибутивними законами, замість словосполучки “множина дійсних чисел” вживається термін “поле дійсних чисел.” Поле дійсних чисел позначається через $\mathbb{R}$.

Комплексними числами називаються вирази (картинки, послідовності,...) вигляду $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. i — символ.

Вирази $2 - 3i$, $0 + 0i$, $-e - \pi i$, $1 + 1i$ є комплексними числами. В інженерних науках, де символ i використовується для позначення сили струму, замість i використовують символ j . Символ i називають уявною одиницею, це перша буква латинського слова, що означає "уявний". Таким чином $2 + 3i$, $-1 + \sqrt{2}i$ — комплексні числа. За домовленістю, замість $0 + bi$ пишемо bi і кажемо, що це число уявне; замість $a + 0i$ пишемо a , і кажемо, що це комплексне число є дійсним; замість $a + 1i$ пишемо $a + i$. Отже замість $2 + 0i$ пишемо 2 , замість $0 - 3i$ пишемо $-3i$. Подібним чином, замість $2 + 1i$ пишемо $2 + i$, замість $0 + 1i$ пишемо i .

Число a назвають *дійсною частиною* комплексного числа $a + bi$ і позначається через $\text{Re}(a + bi)$, число bi називається *уявною частиною* комплексного числа $a + bi$, а

число b називають коефіцієнтом уявної частини і позначається через $\text{Im}(a+bi)$. Дійсною частиною числа $2+3i$ є 2, а коефіцієнтом уявної частини є 3. Отже

$$\text{Re}(a+bi) = a, \quad \text{Im}(a+bi) = b.$$

Також для позначення дійсної частини і коефіцієнта уявної частини використовують, відповідно, $\Re$ (готична буква R) і $\Im$ (готична буква I).

В мовах програмування комплексні числа $z = a+bi$ можуть бути задані як впорядкована пара $z = (a, b)$ дійсних чисел. І тоді a є дійсною частиною комплексного числа z , а b — уявною частиною цього числа.

Два комплексні числа рівні тоді і тільки тоді, коли в них однакові і дійсні і уявні частини:

$$a+bi = c+di \Leftrightarrow a=c \text{ і } b=d.$$

1.2 Дії з комплексними числами в алгебраїчній формі

Комплексні числа можна множити і додавати.

Додавання комплексних чисел здійснюється за правилом

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i.$$

Отже $(5+2i) + (-5-i) = i$.

Комплексні числа можна віднімати: якщо $z_1 = a+bi$ $z_2 = c+di$, то

$$z_1 - z_2 = (a-c) + (b-d)i.$$

При множенні використовуємо рівність $i^2 = -1$. Ця рівність узгоджується із загальним означенням множення комплексних чисел:

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i.$$

Отже $(-4+7i) \cdot (2+5i) = (-8-35) + (-20+14)i = -43-6i$, $(5+6i) \cdot i = -6+5i$.

Якщо число $z = a+bi$ ненульове, то на нього можна ділити:

$$\frac{c+di}{a+bi} = \frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{(ac+bd) + (ad-bc)i}{a^2+b^2} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i.$$

Згідно з введеним правилом ділення:

$$\frac{7-9i}{-3+i} = \frac{(7-9i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \frac{-12+20i}{10} = -1.2+2i.$$

1.3 Поле комплексних чисел

Комплексні числа разом з операціями додавання та множення утворюють поле, тобто операції додавання та множення задовольняють аксіомам: обидві асоціативні —

$$x + (y + z) = (x + y) + z \text{ (асоціативність додавання);}$$

$$x(yz) = (xy)z \text{ (асоціативність множення);}$$

обидві комутативні —

$$x + y = y + x \text{ (комутативність додавання);}$$

$$xy = yx \text{ (комутативність множення);}$$

є нуль —

$$0 = 0 + 0i, \quad 0 + x = x + 0 = x$$

, є одиниця —

$$1 = 1 + 0i, \quad 1x = x1 = x,$$

для кожного елемента $z = a + bi$ є протилежний

$$-z = -a - bi, \quad z + (-z) = (-z) + z = 0,$$

і для ненульового елемента $z = a + bi \neq 0$ є обернений

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}, \quad zz^{-1} = z^{-1}z = 1.$$

Між собою додавання та множення зв'язані дистрибутивним законом $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

При доведенні використовуються відповідні властивості дійсних чисел — вони вважаються відомими.

Приклад доведення дистрибутивного закону:

Нехай $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$, $z_3 = a_3 + b_3i$. Тоді за визначенням додавання та множення комплексних чисел маємо

$$z_2 + z_3 = (a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i, \quad z_1z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i, \quad z_1z_3 = (a_1a_3 - b_1b_3) + (a_1b_3 + a_3b_1)i.$$

Знову, використовуючи означення множення та додавання комплексних чисел, маємо

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (a_1 + b_1i) \cdot ((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i) = \\ &= ((a_1(a_2 + a_3) - b_1 \cdot (b_2 + b_3)) + (a_1 \cdot (b_2 + b_3) + b_1 \cdot (a_2 + a_3))i); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} z_1z_2 + z_1z_3 &= ((a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i) + ((a_1a_3 - b_1b_3) + (a_1b_3 + a_3b_1)i) = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 + a_1a_3 - b_1b_3) + a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_3b_1i. \end{aligned} \quad (2)$$

Далі потрібно порівняти праві частини рівностей (1) та (2). При доведенні того, що вони збігаються, ми розкриваємо дужки, тобто використовуємо властивості дійсних чисел. Доведення дистрибутивності закінчене.

Нагадаємо, що

полем називається непорожня множина з двома операціями — додавання та множення, які мають наступні властивості (задовольняють наступні аксіоми):

- Разом з додаванням множина утворює комутативну групу (отже в ній є нуль),
- Разом з множенням ненульові елементи множини утворюють також комутативну групу (отже серед ненульових елементів є 1),
- Між собою додавання та множення зв'язані дистрибутивним законом.

Піднесення уявної одиниці до натурального степеня (у відповідності до визначення) здійснюється за правилами: для натурального n

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n = 4k, \\ -1, & \text{якщо } n = 4k + 2, \\ i, & \text{якщо } n = 4k + 1, \\ -i, & \text{якщо } n = 4k + 3. \end{cases},$$

зокрема

$$i^2 = -1.$$

Доведення можна провести методом індукції.

1.4 Операція спряження

Якщо $z = a + bi$, то позначаємо

$$\bar{z} = a - bi.$$

Число $\bar{z}$ називається *спряженим до числа z* .

Спряження має властивості:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad (3)$$

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n, \quad (4)$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}, \quad (5)$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad (6)$$

$$\overline{(-z)} = -\bar{z}. \quad (7)$$

А також, якщо $z = a + bi$, і $a^2 + b^2 = 1$, то

$$z^{-1} = \bar{z}. \quad (8)$$

Доведення вказаних властивостей здійснюється обчисленням правої та лівої частин відповідної рівності.

2 Приклади інших означень поля комплексних чисел

Поле комплексних чисел єдине. Коли це стверджують, то мають на увазі, що всі поля комплексних чисел ізоморфні між собою. Нагадаємо, що під ізоморфією двох полів мається на увазі існування взаємно однозначної відповідності, яка узгоджена з операціями.

2.1 Приєднання іншої уявної одиниці

Як виправи можна порекомендувати перевірити, що поле C , одержане з поля дійсних чисел шляхом приєднання умовної одиниці j , яка за визначенням задовольняє умову $j^2 = -j - 1$, ізоморфне побудованому вище.

Наведемо ще три визначення поля комплексних чисел.

2.2 Поле комплексних чисел як множина впорядкованих пар дійсних чисел

За другим визначенням комплексні числа — це впорядковані пари (a, b) дійсних чисел a, b . Ці пари додаються та множаться за правилами

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \quad (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

2.3 Поле комплексних чисел як факторкільце кільця многочленів

За третім визначенням поле комплексних чисел визначається як “факторкільце кільця многочленів за головним ідеалом, що породжений многочленом $x^2 + 1$ ”. Наведемо це визначення.

Береться кільце усіх многочленів з дійсними коефіцієнтами. Воно розбивається на підмножини — класи. Два многочлени f, g належать одному класу в тому і тільки тому випадку, коли для деякого многочлена q можна записати $f - g = (x^2 + 1) \cdot q$ тобто різниця многочленів f та g ділиться на многочлен $x^2 + 1$. Так побудовані класи і є комплексні числа. Класи множаться і додаються наступним чином.

Нехай є два класи z_1 та z_2 . Виберемо в цих класах по одному многочлену $f \in z_1, \quad g \in z_2$. Додавши ці два многочлени один до одного і перемноживши їх ми одержимо ще два многочлени $p = f + g, \quad q = f \cdot g$. Далі шукаємо класи, яким належать побудовані многочлени p, q — нехай $p \in z_3, \quad q \in z_4$. Тепер, за визначенням, буде

$$z_1 z_2 = z_4, \quad z_1 + z_2 = z_3.$$

Доведення коректності третього визначення і доведення ізоморфності поля, побудованого за третім визначенням, полю, що побудоване за першим визначенням, виходить за межі плану лекції.

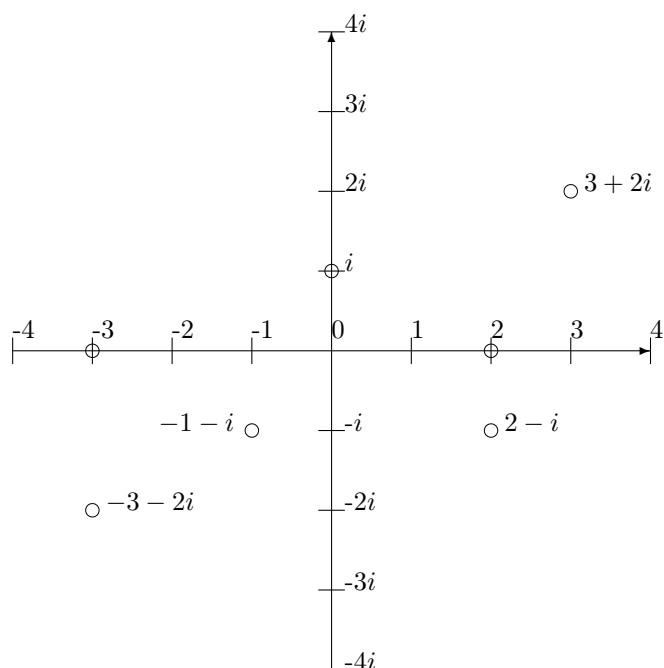


Рис. 1: На комплексній площині зображені точки $3 + 2i$, $-1 - i$, $-3 - 2i$, $2 - i$, i , 2 , -3 .

2.4 Поле комплексних чисел як множина матриць

За четвертим визначенням комплексними числами називають матриці вигляду

$$z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & s \end{pmatrix},$$

які множаться і додаються звичайним для матриць чином.

3 Комплексна площина

3.1 Геометрична інтерпретація комплексних чисел та тригонометрична форма комплексного числа.

Комплексне число $a + bi$ зображають точкою (a, b) площини з прямокутною системою координат (див. рис. 1)

Площина, на якій зображаються комплексні числа, називається *комплексною площиною*.

Відстань $\sqrt{a^2 + b^2}$ від точки $z = a + bi$ комплексної площини до початку координат називають модулем комплексного числа z і позначають $r = |z|$. Таким чином,

$$r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Аргумент φ ненульового комплексного числа $z = a + bi$ — дійсне число, що визначається умовами (див. рис. 1):

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}. \quad (9)$$

Вважається

$$0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (10)$$

Умова (10), як кажуть, “не є догмою”, досить зручно аргумент шукати при обмеженнях

$$-\pi < \varphi \leq \pi. \quad (11)$$

Аргумент комплексного числа z позначається $\operatorname{arg} z$.

Для заданого комплексного числа z множину тих φ , що задовольняють умову (9), позначають через $\operatorname{Arg} z$.

При використанні формул (9) потрібно пам'ятати домовленість про області значень обернених тригонометричних формул:

$$0 \leq \arccos x \leq \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$$

При обмеженнях (10) для знаходження аргумента φ комплексного числа $z = a + bi$ можна використовувати формули

- $\varphi = 0$, якщо $a > 0, b = 0$;
- $\varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ якщо $a > 0, b > 0$;
- $\varphi = \frac{\pi}{2}$ якщо $a = 0, b > 0$;
- $\varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pi - \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi$ якщо $a < 0, b > 0$;
- $\varphi = 2\pi - \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pi - \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi$ якщо $a < 0, b < 0$;
- $\varphi = \pi$ якщо $a < 0, b = 0$;
- $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ якщо $a = 0, b < 0$;
- $\varphi = 2\pi - \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\pi + \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ якщо $a > 0, b < 0$.

При обмеженнях (11) для знаходження аргумента φ комплексного числа $z = a + bi$ можна використовувати формули

- $\varphi = 0$, якщо $a > 0, b = 0$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$, якщо $a = 0, b > 0$; $\varphi = \pi$ якщо $a < 0, b = 0$; $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ якщо $a = 0, b < 0$;
- $\varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ якщо $a > 0, b > 0$;
- $\varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ якщо $a < 0, b > 0$;
- $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi$ якщо $a < 0, b < 0$;
- $\varphi = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ якщо $a > 0, b < 0$.

Розглянемо приклади — знайдемо аргументи φ кількох комплексних чисел.

Приклад 1. Нехай $z = 2 + 2i$. Тоді $|z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$,

$$\cos \varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \operatorname{tg} \varphi = 1. \quad (12)$$

Із рівностей (12) із врахуванням обмеження (10) ми знаходимо

$$\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 2. Нехай $z = 2$. Тоді $|z| = \sqrt{4} = 2$,

$$\cos \varphi = \frac{2}{2} = 1, \sin \varphi = \frac{0}{2} = 0, \operatorname{tg} \varphi = 0. \quad (13)$$

Тут $\varphi = \arccos 1 = \arcsin 0 = \operatorname{arctg} 0 = 0$.

Приклад 3. Нехай $z = 2i$. Тоді $|z| = \sqrt{4} = 2$,

$$\cos \varphi = \frac{0}{2} = 0, \sin \varphi = \frac{2}{2} = 1, \operatorname{tg} \varphi - \text{ не існує.} \quad (14)$$

Тут $\varphi = \arccos 0 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

Приклад 4. Нехай $z = 1 - 2i$, відповідна точка знаходиться у четвертому квадранті.

Тоді $|z| = \sqrt{5}$,

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \operatorname{tg} \varphi = -2. \quad (15)$$

Із рівностей (12) із врахуванням обмеження (10) ми знаходимо

$$\varphi = 2\pi - \frac{2}{\sqrt{5}},$$

а з урахуванням обмежень (11)

$$\varphi = \arcsin \frac{-2}{\sqrt{5}},$$

Ще кілька прикладів

$$|-3 - 5i| = \sqrt{34}, \arg(-3 - 5i) = \operatorname{zrctg} \frac{5}{3} + \pi;$$

$$|-3 + 5i| = \sqrt{34}, \arg(-3 + 5i) = \arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{34}}\right);$$

$$|-5i| = 5, \arg(-5i) = -\frac{\pi}{2};$$

Кожне комплексне число z може бути записане у вигляді

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (16)$$

для деяких дійсних $r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$. Для ненульових чисел такий запис єдиний. А для нульового числа цей запис не використовують.

Запис комплексного числа z у вигляді (16) називається *тригонометричною формою комплексного числа* z .

3.2 Дії з комплексними числами в тригонометричній формі

Якщо

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \quad z_1, z_2 \neq 0,$$

два комплексні числа в тригонометричній формі, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \quad (17)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \quad (18)$$

На заміні останні дві формули (17) (18) потрібно доводити. Перша формула називається формулою множення комплексних чисел у тригонометричній формі, а друга — формулою ділення комплексних чисел у тригонометричній формі. Наведемо текстове формулювання правил множення та ділення комплексних чисел у тригонометричній формі.

Щоб перемножити два комплексні числа, потрібно модулі цих чисел перемножити, а аргументи додати. При діленні комплексних чисел у тригонометричній формі модулі діляться а аргументи віднімаються.

Доведення формули (17), (18) .

Нехай є комплексні числа $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, $z_1, z_2 \neq 0$. Тоді за правилом множення комплексних чисел маємо

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2).$$

Оскільки за відомими із школи тригонометричними формулами

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2); \quad \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2),$$

то формула множення комплексних чисел в тригонометричній формі доведена.

Для доведення формули (18) беремо ті ж числа z_1, z_2 , що і при доведенні формули (17), використовуємо формулу (8)), формулу (17) і пишемо

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \overline{z_2} = (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) = (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2)) = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Комплексні числа можна підносити до натурального степеня за допомогою формули Муавра

$$z_1^n = r_1^n(\cos(n\varphi_1) + i \sin(n\varphi_1)), n \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

При $n = 0$ формула Муавра правильна тому, що $z^0 = 1$ за визначенням для всіх ненульових чисел z .

Для цілих додатніх чисел n формула Муавра доводиться методом повної математичної індукції. Проведемо це доведення.

База індукції (перший крок індуктивного доведення)— перевіряємо те, що формула справджується у випадку, коли степінь дорівнює $n = 1$, — підставляємо у формулу (19) $n = 1$ і одержуємо очевидне правильне співвідношення

$$(r_1(\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)))^1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1))$$

Таким чином база індукції обґрунтована.

Індуктивне припущення (другий крок індуктивного доведення) — припускаємо, що формула Муавра (19) справджується при деякому додатньому цілому n .

Індуктивний перехід (третій крок індуктивного припущення) — використовуючи індуктивне припущення і формулу для множення комплексних чисел у тригонометричній формі доводимо формулу (19) у випадку, коли в ній n замінено на $n + 1$:

$$(r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1))^{n+1} = (r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1))^n (r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1))^1 = (r_1^n(\cos n\varphi_1 + i \sin n\varphi_1))(r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)) = (r_1^{n+1}(\cos((n+1)\varphi_1) + i \sin((n+1)\varphi_1))).$$

Формулу Муавра можна застосовувати для ненульових комплексних чисел z_1 при всіх цілих n — не тільки для натуральних, але і для від’ємних, тому що для від’ємного n і ненульового комплексного числа $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1))$ можна записати

$$\begin{aligned} z_1^n &= (z_1^{-1})^{-n} = (r_1^{-1}(\cos(-\varphi_1) + i \sin(-\varphi_1)))^{-n} = \\ &= r_1^n(\cos((-n)(-\varphi_1)) + i \sin((-n)(-\varphi_1))) = r_1^n(\cos(n\varphi_1) + i \sin(n\varphi_1)) \end{aligned} \quad (20)$$

Кінець доведення формули Муавра.

3.3 Добування кореня із комплексного числа

Наступний текст є відповіддю до екзаменаційного питання “добування кореня n -го степеня із комплексного числа”.

Для заданного комплексного числа

$$a = |a|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$$

множина розв’язків рівняння

$$z^n = a$$

має n різних елементів і позначається через

$$\sqrt[n]{a} = \{z_0, z_2, \dots, z_{n-1}\},$$

де

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (21)$$

Зокрема,

$$\sqrt{1} = \{1, -1, \}; \sqrt{-1} = \{i, -i\}; \sqrt{i} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right);$$

$$\sqrt[3]{1} = \left\{ 1, -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\};$$

$$\sqrt[3]{-1} = \left\{ -1, \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\};$$

Доведення формули (21) розбивається на дві частини. У першій частині ми доводимо, що всі виписані числа є різними коренями n -го степеня, а в другій ми обґрунтовуємо, що інших коренів немає.

У тому, що виписані числа є коренями, ми переконуємося прямою перевіркою з використанням формули Муавра. Оскільки аргументи виписаних комплексних чисел відрізняються менше ніж на 2π , то збігатися косинуси і синуси одночасно не можуть і, таким чином, корені різні.

В другій частині доведення ми беремо довільний корінь $b = |b|(\cos \psi + i \sin \psi)$. Для цього комплексного числа b (за визначенням кореня) повинно бути $b^n = a$, або в тригонометричній формі (з використанням формули Муавра)

$$|b|^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = |a| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Оскільки косинуси і синуси кутів $n\psi, \varphi$ збігаються, то самі кути відрізняються на число, що кратне 2π , тобто при деякому цілому m буде $n\psi - \varphi = m \cdot 2\pi$ і, відповідно,

$$n\psi = \varphi + m \cdot 2\pi, \quad \psi = \frac{\varphi + m \cdot 2\pi}{n}.$$

Далі записуємо ціле число m у вигляді $m = nq + k$, де $k, q \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k < n$. Зробити це дозволяють шкільні знання з арифметики. Далі

$$\psi = \frac{\varphi + m \cdot 2\pi}{n} = \frac{\varphi + (nq + k) \cdot 2\pi}{n} = \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + q \cdot 2\pi.$$

Оскільки кути ψ і $\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}$ відрізняються на величину, що кратна 2π , то синуси і косинуси цих кутів збігаються і число b належить виписаній множині $\sqrt[n]{a}$. Формула (21) для коренів n -го степеня із комплексного числа доведена.

Корені n -го степеня з комплексного числа a розташовуються у вершинах правильного n -кутника, що вписаний у коло радіуса $\sqrt[n]{|a|}$ з центром у початку координат.

]

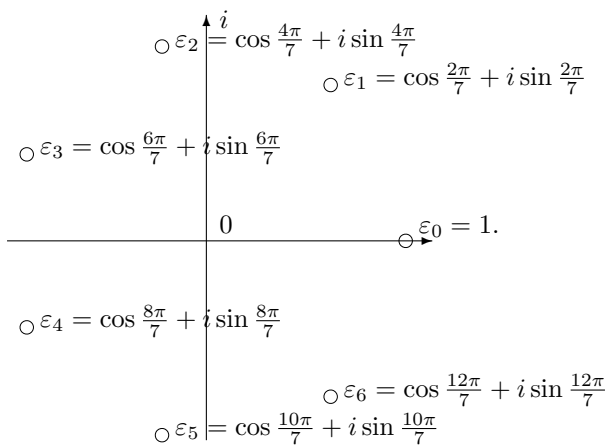


Рис. 2: Зображення коренів 7-го степеня з одиниці на комплексній площині

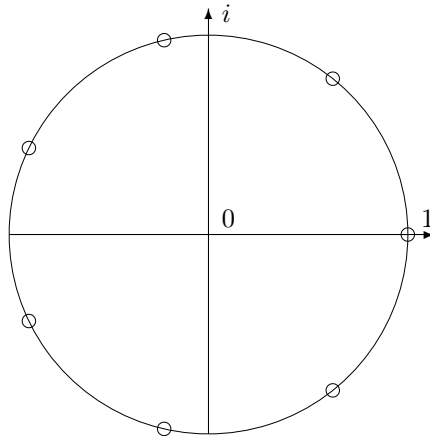


Рис. 3: Корені із одиниці розташовуються на одиничному колі. Одиничне коло в комплексній площині є групою. Корені з одиниці утворюють підгрупу цієї групи.

3.4 Корені із одиниці

Корені n -го степеня із одиниці звичайно позначаються $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$, $\varepsilon_k = \frac{k \cdot 2\pi}{n}$. На рис. 2 зображені на комплексній площині корені із одиниці 7-го степеня.

Корені n -го степеня із одиниці розташовуються на одиничному колі і ділять це коло на n рівних дуг. Поділ кола коренями 7-го степеня зображено на рис. 3

Тому рівняння $z^n = 1$ називають рівнянням поділу кола, а многочлен

$$z^n - 1$$

називається многочленом поділу кола.

Нагадаємо, що

Групою називають непорожню множину з однією асоціативною бінарною операцією, в якій є нейтральний елемент відносно цієї операції, і кожен елемент має обернений.

Позначимо множину коренів n -го степеня через $\text{Root}(n)$. Множина $\text{Root}(n)$ визначається умовою:

$$a \in \text{Root}(n) \Leftrightarrow a^n = 1.$$

Ця множина замкнена відносно операції множення, множення комплексних чисел, тому що

$$a^n = b^n = 1 \Rightarrow (ab)^n = a^n b^n = 1.$$

Множина $\text{Root}(n)$ містить в собі одиницю, оскільки $1^n = 1$.

Також множина $\text{Root}(n)$ замкнена відносно операції знаходження оберненого числа, оскільки

$$a^n = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} = 1.$$

Отже $\text{Root}(n)$ є групою.

Групи, в яких операція названа множенням, називають мультиплікативними. Отже $\text{Root}(n)$ є мультиплікативною групою.

Оскільки множення комплексних чисел комутативне, то група $\text{Root}(n)$ комутативна.

Всі елементи групи $\text{Root}(n)$ є степенями одного елемента $\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$.

$$\text{Root}(n) = \{1 = \varepsilon_1^0, \varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_1^{n-2}, \varepsilon_1^{n-1}\}.$$

Такі групи, тобто групи, в яких всі елементи є степенями одного, називають циклічними.

Отже $\text{Root}(n)$ є циклічною групою.

Всі комплексні числа, що мають модуль 1, утворюють групу, тому що модуль добутку двох комплексних чисел є добутком модулів множині, і модуль одиниці дорівнює одиниці, і $|a^{-1}| = |a|^{-1}$ для $a \in \mathbb{C}$. Всі комплексні числа, що мають модуль 1, утворюють коло одиничного радіуса з центром в початку координат. Тому коло одиничного радіуса з початком координат є групою, неперервною групою.

Якщо G — скінченна циклічна група і $G = \{1, a, a^2, \dots\}$, то такий елемент a називають твірним.

Твірні елементи групи коренів називають первісними коренями з одиниці. Можна сказати, що

Корінь n -го степеня з одиниці називається первісним в тому і тільки тому випадку, коли він не є коренем ніякого меншого степеня.

Необхідною і достатньою умовою того, щоб число ε_k було первісним коренем, є взаємна простота чисел n і k , тобто рівність одиниці найбільшого спільного дільника цих чисел.

4 Задачі, що стосуються комплексних чисел

4.1 Задання ліній в комплексній площині

4.1.1 Коло

Колом називають геометричне місце точок (ГМТ) для яких відстань від заданої точки (ця точка називається центром кола) є сталою величиною (ця величина називається радіусом кола).

В комплексній площині відстань між точками z_1, z_2 дорівнює $|z_2 - z_1|$. Коли потрібно обчислити відстань від довільної точки z до заданої незмінної точки z_0 , то ми обчислимо $|z - z_0|$. Таким чином, рівняння кола радіуса r із центром в точці z_0 має вигляд

$$|z - z_0| = r.$$

Відповідно, коло з центром в точці $3 + 5i$ радіуса 7 має вигляд $|z - (3 + 5i)| = 7$, коло радіуса 3 з центром в точці -2 має вигляд $|z + 2| = 3$, а рівняння $|z + 9 + 10i| = 2$ є рівнянням кола радіуса 2 з центром в точці $-9 - 10i$.

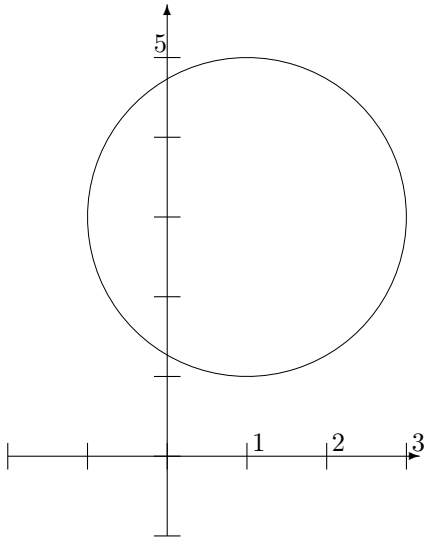


Рис. 4: Коло радіуса 2 з центром в точці $z = 1 + 3i$ задане рівнянням $|z - 1 - 3i| = 2$. Внутрішність цього кола (круг) задана нерівністю $|z - 1 - 3i| < 2$. Область зовні кола задана нерівністю $|z - 1 - 3i| > 2$.

Розглянемо рівняння

$$|(2 - 3i)z + 7 + 8i| = 2.$$

Спочатку перетворимо це рівняння, використовуючи те, що $(2 - 3i)z + 7 + 8i = (2 - 3i)(z - \frac{-7-8i}{2-3i})$:

$$|(2 - 3i)z + 7 + 8i| = |(2 - 3i)| \cdot |z - \frac{-7-8i}{2-3i}| = \sqrt{13} |z - \frac{-7-8i}{2-3i}| = 2.$$

Поділимо останнє рівняння на $\sqrt{13}$:

$$|z - \frac{-7-8i}{2-3i}| = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

А це вже рівняння кола радіуса $\frac{2}{\sqrt{13}}$ із центром в точці

$$\frac{-7-8i}{2-3i} = \frac{(-7-8i)(2+3i)}{13} = \frac{(-7-8i)(2+3i)}{13} = \frac{10-37i}{13}.$$

4.1.2 Промінь

Для заданого числа $0 \leq \varphi < 2\pi$ рівняння

$$\arg z = \varphi$$

є рівнянням променя, що виходить з початку координат і утворює з додатнім напрямком дійсної осі кут φ . Кут тут орієнтований, тобто може бути додатнім і може бути від'ємним, він підраховується від доданого напрямку дійсної осі до променя. Сам початок координат променю не належить.

4.1.3 Пряма лінія

Рівнянням прямої, яка у відповідній прямокутній системі координат має рівняння $y = kx$, в комплексній площині буде

$$\operatorname{tg} \arg z = k.$$

Строго кажучи, в наведене рівняння підставляти 0 замість z не маємо права. Тому наведене рівняння — це рівняння прямої з виокремленим початком координат.

Рівняння

$$\operatorname{tg} \arg(z - z_0) = k.$$

задає два промені, які виходять із z_0 , але саму точку z_0 ці промені не містять. Отже це рівняння прямої з видаленою точкою z_0 .

Горизонтальна пряма, яка знаходиться на відстані 5 від осі OX у верхній півплощині, складається із усіх точок z таких, що $\operatorname{Im} z = 5$, тому запис

$$\operatorname{Im} z = 5$$

є рівнянням цієї прямої.

Вертикальна пряма, яка знаходиться на відстані 5 від осі OX у лівій півплощині, складається із усіх точок z таких, що $\operatorname{Re} z = -5$, тому запис

$$\operatorname{Re} z = -5$$

є рівнянням цієї прямої.

В загальному випадку рівняння горизонтальної прямої, що перетинає вісь OY в точці $y = a$, тобто проходить через точку $z = 0 + ai$, має вигляд

$$\operatorname{Im} z = a.$$

Рівняння вертикальної прямої, що перетинає вісь OX в точці $x = a$, тобто проходить через точку $z = a + 0i$, має вигляд

$$\operatorname{Re} z = a.$$

Можна перевірити, що для двох комплексних чисел $a \neq 0, b$ рівняння

$$\operatorname{Im}(az + b) = 0, \quad \operatorname{Re}(az + b) = 0$$

задають дві взаємно перпендикулярні прямі, які проходять через точку $\frac{-b}{a}$. До того ж, будь-яку пару взаємно перпендикулярних прямих можна задати такою парою рівнянь.

4.1.4 Еліпс

Нехай на площині задані дві різні точки F_1, F_2 і додатне число $2a$, що більше відстані між точками F_1, F_2 . Геометричне місце точок A для яких сума відстаней від A до F_1 та до F_2 дорівнює $2a$ називається еліпсом. Точки F_1, F_2 називаються вогнищевими точками еліпса (фокусами), а число a називається більшою піввіссю цього еліпса.

Із означення еліпса видно, що в комплексній площині рівнянням еліпса із вогнищевими точками z_1, z_2 і більшою піввіссю a буде

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a. \quad (22)$$

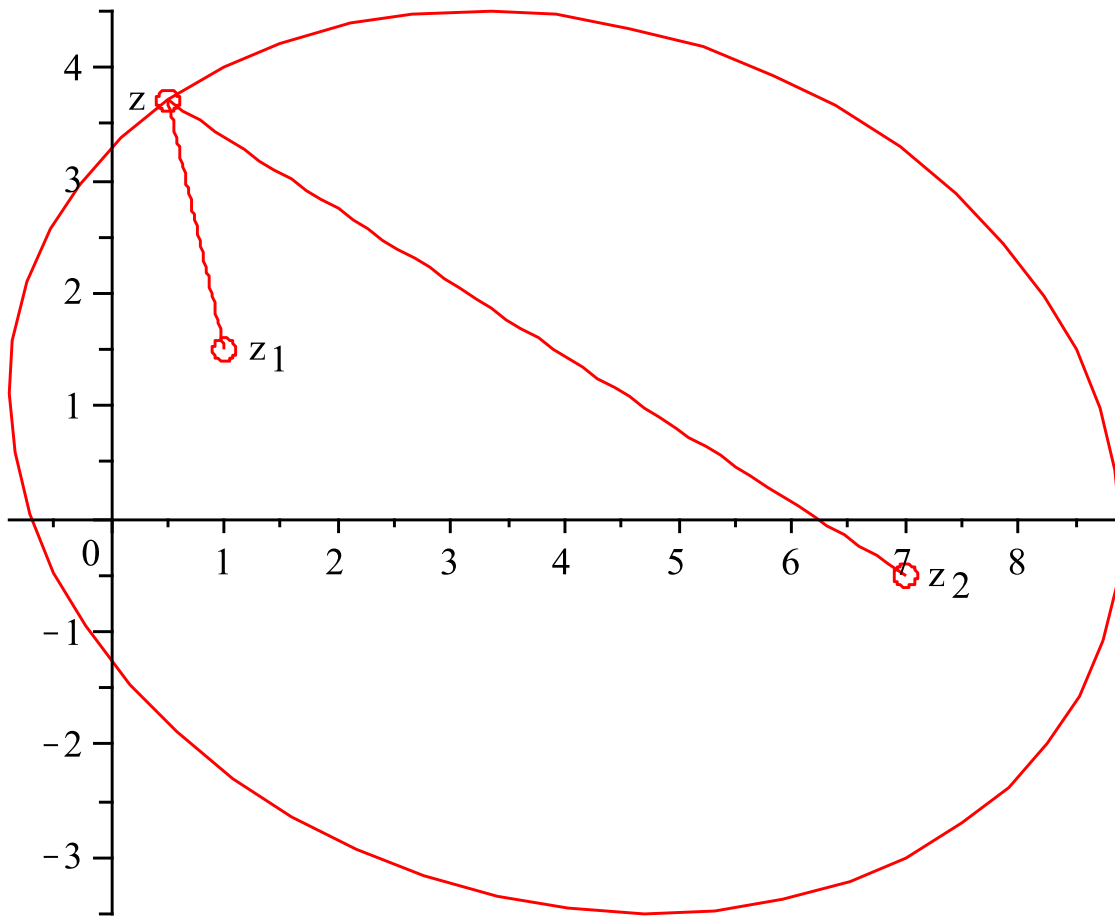


Рис. 5: Еліпс, що має рівняння $|z - 1 - 1.5i| + |z - 5 + 0.5i| = 10$. Тут $z_1 = 1 + 1.5i$ а $z_2 = 5 - 0.5i$.

Так рівнянням еліпса з вогнищевими точками $-1 + 7i, 3 + 9i$ і більшою піввіссю 5 буде

$$|z + 1 - 7i| + |z - 3 - 9i| = 10,$$

а рівнянням еліпса з вогнищевими точками $z_1 = 1 + 1.5i, z_2 = 5 - 0.5i$ буде

$$|z - 1 - 1.5i| + |z - 5 + 0.5i| = 10$$

. Цей еліпс зображений на рис. 5. На рисутку також зображені відрізки, що з'єднують довільну точку еліпса з вогнищевими точками.

4.1.5 Гіпербола

Нехай на площині задані дві різні точки F_1, F_2 і додатне число $2a$, що менше відстані між точками F_1, F_2 . Геометричне місце точок A для яких модуль різниці відстаней від A до F_1 та до F_2 дорівнює $2a$ називається гіперболою. Точки F_1, F_2 називаються вогнищевими точками гіперболи (фокусами), а число a називається піввіссю цього гіперболи.

Із означення гіперболи видно, що в комплексній площині рівнянням гіперболи із вогнищевими точками z_1, z_2 і піввіссю a буде

$$||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a.$$

Гіпербола складається із двох гілок. Одна гілка задається рівнянням

$$|z - z_1| - |z - z_2| = 2a,$$

а друга — рівнянням

$$-|z - z_1| + |z - z_2| = 2a.$$

Так рівнянням гіперболи з вогнищевими точками $-1 + 7i, 3 + 9i$ і піввіссю 2 буде

$$||z + 1 - 7i| - |z - 3 - 9i|| = 4.$$

4.1.6 Парабола

Нехай на площині задана пряма d і точка F . Тоді геометричне місце точок A таких, що відстань від A до d дорівнює відстані від A до F , називається параболою. В такому випадку пряма d називається директрисою а точка F називається вогнищевою точкою (фокусом) цієї параболи.

У комплексній площині легко шукати відстань між двома точками z_1, z_2 — вона дорівнює $|z_1 - z_2|$. Також легко шукати відстань від точки z_1 до прямої d , на якій лежить точка z_2 , у двох випадках, — коли пряма горизонтальна або вертикальна. Коли пряма вертикальна, відстань від z_1 до d дорівнює $|\Re(z_1 - z_2)|$, а коли пряма горизонтальна, відстань від z_1 до d дорівнює $|\Im(z_1 - z_2)|$.

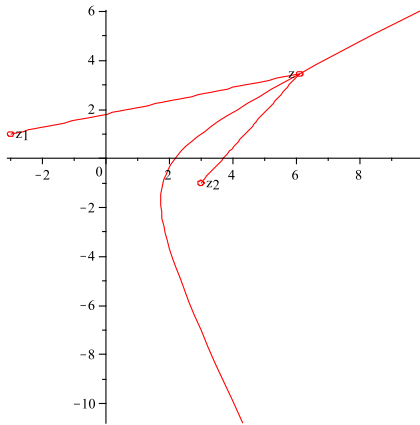


Рис. 6: Гіпербола — права галузка

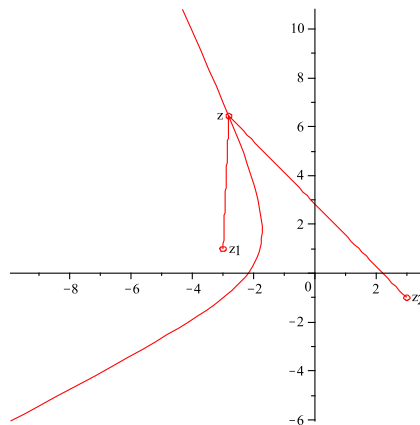


Рис. 7: Гіпербола — ліва галузка

Отже, коли пряма d горизонтальна і на ній лежить точка z_1 , точка z_2 не лежить на прямій, то рівняння параболи з директрисою d і фокусом z_2 має вигляд

$$|\Im(z_1 - z)| = |z_2 - z|.$$

Коли пряма d вертикальна і на ній лежить точка z_1 , точка z_2 не лежить на прямій, то рівняння параболи з директрисою d і фокусом z_2 має вигляд

$$|\Re(z_1 - z)| = |z_2 - z|.$$

Парабола з горизонтальною директрисою $\Im z = -5$ і фокусом $z_2 = 2 + 3i$ має рівняння

$$|\Im(-5i - z)| = |2 + 3i - z|.$$

Парабола з вертикальною директрисою $\Re z = -5$ і фокусом $z_2 = 2 + 3i$ має рівняння

$$|\Re(-5 - z)| = |2 + 3i - z|.$$

4.2 Рухи комплексної площини

Рухом площини називають таке її взаємно однозначне відображення в себе, при якому зберігаються відстані між точками, тобто відстань між точками завжди дорівнює відстані між образами цих точок.

За теоремою Шаля (прийmemo її без доведення), всі рухи площини можна розділити на три типи — обертання, паралельні перенесення та ковзні симетрії. Осьві симетрії, обертання та паралельні перенесення досить ретельно висвітлюються в шкільному курсі. А ковзна симетрія — це композиція (послідовне виконання) осьової симетрії та паралельного перенесення на вектор, що паралельний осі симетрії.

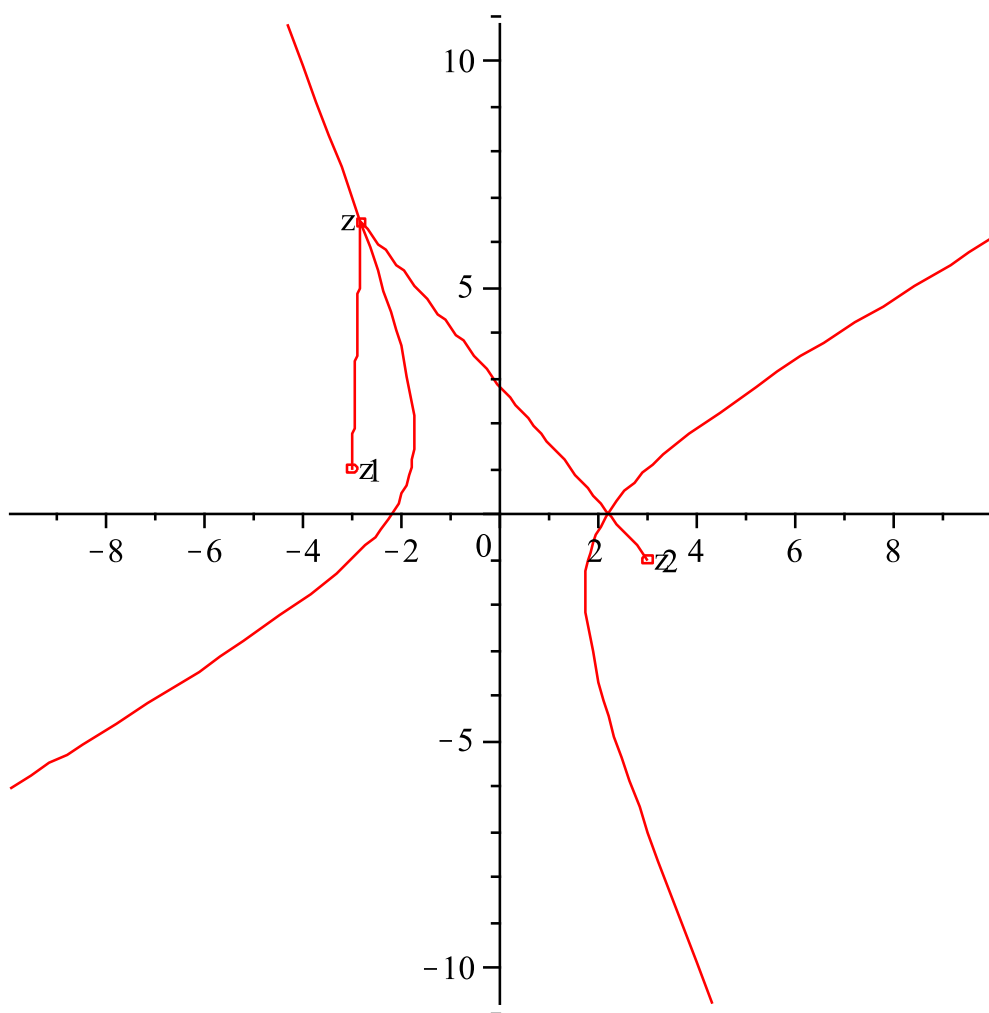


Рис. 8: Гіпербола

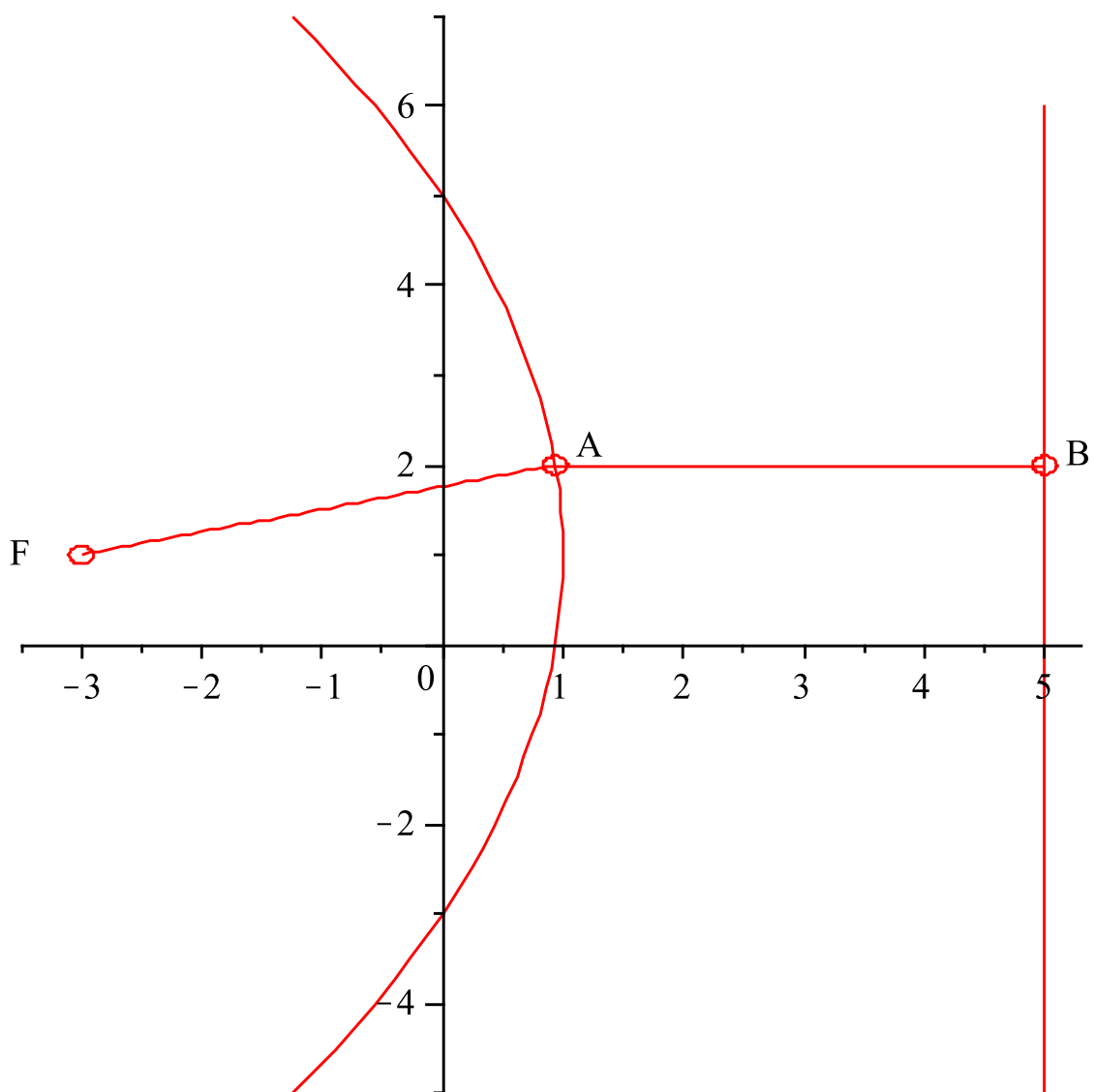


Рис. 9: Парабола. Точка F є вогнищевою точкою параболи, точка A лежить на параболі, а точка B лежить на директрисі. Відстань від F до A і від A до B одна і та ж

4.2.1 Паралельне перенесення

Паралельне перенесення можна задати формулою

$$z \mapsto z + z_0.$$

Тут $z \in \mathbb{C}$ — змінна точка комплексної площини, а z_0 — довільним чином обраний один незмінний (фіксований) елемент поля комплексних чисел. Це паралельне перенесення переводить точку 0 в точку z_0 . Прикладом паралельного перенесення буде

$$z \mapsto z + 9 - 3i.$$

Паралельним перенесенням, яке переводить точку z_1 в точку z_2 буде

$$z \mapsto z + (z_2 - z_1).$$

4.2.2 Обертання

Обертання навколо початку координат (навколо нуля) на кут α можна задати формулою

$$z \mapsto e^{i\alpha} \cdot z = (\cos \alpha + i \sin \alpha)z.$$

Це твердження забезпечується правилом множення комплексних чисел в тригонометричній формі.

Для прикладу, обертання навколо нуля на кут $\frac{\pi}{4}$ можна задати формулою

$$z \mapsto \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)z.$$

Образом точки $15 \cdot (\cos \frac{2\pi}{17} + i \sin \frac{2\pi}{17})$ буде $15 \cdot (\cos(\frac{2\pi}{17} + \frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{2\pi}{17} + \frac{\pi}{4}))$.

Щоб здійснити обертання навколо довільної точки z_0 на кут α , потрібно спочатку перенести точку z_0 паралельним перенесенням в нуль, потім здійснити обертання навколо нуля, а потім нуль повернути в точку z_0 . Отже потрібно здійснити композицію (послідовне виконання) трьох рухів

$$z \mapsto z - z_0, \quad z \mapsto e^{i\alpha} \cdot z, \quad z \mapsto z + z_0.$$

Результатом послідовного виконання вказаних трьох рухів буде

$$z \mapsto e^{i\alpha}(z - z_0) + z_0.$$

4.2.3 Осьова симетрія та ковзна симетрія

Осьова симетрія відносно осі OX може бути задана формулою

$$z \mapsto \bar{z}.$$

Ковзна симетрія відносно осі OX з паралельним перенесенням вздовж осі OX на вектор (комплексне число) $a = a + 0i$ може бути задана формулою

$$z \mapsto \bar{z} + a.$$

Щоб здійснити ковзну симетрію відносно довільної прямої, потрібно паралельним перенесенням перенести пряму так, щоб вона проходила через початок координат, потім повернути площину так, щоб пряма збіглася із віссю OX , потім здійснити ковзну симетрію відносно осі OX , потім здійснити зворотне обертання і, нарешті, паралельне перенесення, що зворотне до початкового.

4.3 Задання областей в комплексній площині

Зміст терміну “область” розкривається в тому розділі математики, який називається “топология”. Тут ми будемо користуватися інтуїтивною уявою про область, відповідно, строгих доведень з використанням точних означень кривих, неперервних кривих, граничних та внутрішніх точок будемо уникати. Будемо користуватися тим, що площа є областю. Пряма розбиває площину на дві області (півплощини) — точки однієї області можна з’єднати відрізком, що не перетинає пряму, а точки із різних півплощин таким відрізком з’єднати неможливо. Парабола розбиває площину на дві області — в одній знаходиться вогнищева точка, а в другій знаходиться директриса. Еліпс ділить площину на дві області — внутрішню, де знаходяться вогнищеві точки, і зовнішню — через зовнішні точки проходять прямі, які не перетинають еліпс. Коло ділить площину на дві області — внутрішню (її називають круг, що обмежений колом) і зовнішню, зовнішність кола.

Із простих областей — кругів, смуг, кутів та подібного за допомогою теоретико-множинних операцій можна отримати більш складні — кільця, внутрішності багатокутників, сектори, сегменти та подібне.

4.3.1 Внутрішність за зовнішність кола. Кільце

Коло радіуса r із центром в точці z_0 має рівняння $|z - z_0| = r$. Внутрішність кола називають кургом. Круг складається із точок, що знаходяться ближче від центра, ніж точки кола. Отже внутрішність кола (круг) можна задати нерівністю

$$|z - z_0| < r.$$

Відповідно, зовнішність цього кола може бути задана нерівністю

$$|z - z_0| > r.$$

Якщо два дійсні додатні числа r_1, r_2 задовольняють умову $0 < r_1 < r_2$, то нерівності

$$r_1 < |z - z_0| < r_2$$

задають кільце із внутрішнім радіусом r_1 і зовнішнім радіусом r_2 .

4.3.2 Кут

Кут визначається двома променями, що виходять із однієї точки (позначимо її z_0), яку називають вершиною кута. Як ми знаємо, промінь, що виходить з точки z_0 під кутом

α має рівняння $\arg(z - z_0) = \alpha$. Відповідно, два промені, що виходять із вершини z_0 , мають рівняння $\arg(z - z_0) = \alpha_1$, $\arg(z - z_0) = \alpha_2$. Припустимо, що

$$0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < 2\pi.$$

Тоді два промені визначають два кути — один задаємо нерівністю

$$\alpha_1 < \arg(z - z_0) < \alpha_2,$$

і другий задаємо нерівністю

$$\alpha_2 < \arg(z - z_0) < \alpha_1 + 2\pi.$$

4.3.3 Внутрішність та зовнішність еліпса

Еліпс із вогнищевими точками z_1, z_2 і піввіссю a має рівняння (22). Відповідно, внутрішню частину еліпса задаємо нерівністю

$$|z - z_1| + |z - z_2| < 2a. \quad (23)$$

а зовнішню частину задаємо нерівністю

$$|z - z_1| + |z - z_2| > 2a. \quad (24)$$

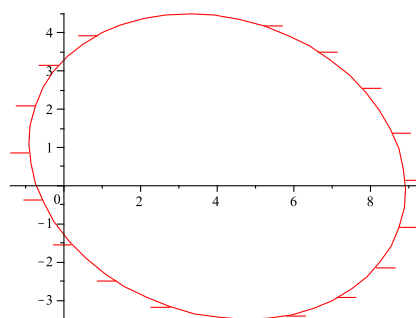
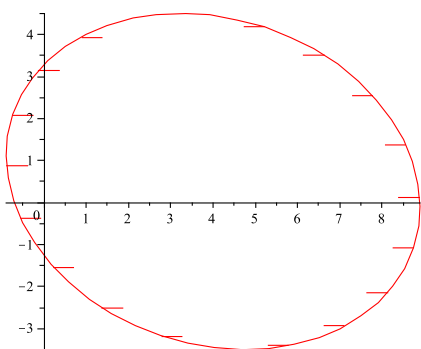


Рис. 10: Внутрішність еліпса задана нерівністю $|z - 1 - 1.5i| + |z - 5 + 0.5i| < 10$

Рис. 11: Зовнішність еліпса, що задана нерівністю $|z - 1 - 1.5i| + |z - 5 + 0.5i| > 10$

4.3.4 Внутрішність та зовнішність параболи

Парабола ділить площину на дві області. В одній частині точки ближчі до вогнищевої точки ніж до директриси, а в другій частині точки ближчі до директриси, ніж до вогнищевої точки. Першу частину називають внутрішньою областю параболи, а другу — зовнішньою областю. Отже, коли є пряма (директриса) і точка (вогнищева точка), то замінивши в рівнянні параболи рівність на одну із нерівностей одержимо задання внутрішньої або зовнішньої області параболи.

4.3.5 Півплощина та смуга

Півплощина, що обмежена вертикальною прямою, може бути задана однією з нерівностей

$$\Re z > a, \quad \Re z < a.$$

Тут $a \in \mathbb{R}$, z — змінне комплексне число. Відповідно, вертикальну смугу можна задати системою нерівностей

$$a_1 < \Re z < a_2$$

для деяких дійсних чисел $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Півплощина, що обмежена горизонтальною прямою, може бути задана однією з нерівностей

$$\Im z > a, \quad \Im z < a.$$

Тут $a \in \mathbb{R}$, z — змінне комплексне число. Відповідно, горизонтальну смугу можна задати системою нерівностей

$$a_1 < \Im z < a_2$$

для деяких дійсних чисел $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Для задання смуги, що обмежена похилими паралельними прямими, потрібно виписати рівняння цих прямих а потім належним чином рівності замінити на нерівності.

Складні області одержуються як перетин чи об'єднання простих областей, — кругів, смуг, кутів та подібного.

4.4 Використання комплексних чисел в комбінаториці

Комплексне число $z = a + bi$ можна піднести до степеня двома різними способами. Перший — за допомогою бінома Ньютона:

$$z^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} bi - C_n^2 a^{n-2} b^2 - C_n^3 a^{n-3} b^3 i + \dots + C_n^n b^n i^n. \quad (25)$$

Другий — за допомогою формули Муавра:

$$z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (26)$$

Оскільки одне і те ж комплексне число z^n записане двома способами, то і дійсна частина і уявна частина у цих чисел одна і та ж. Таким чином, із (25) і (26) одержуємо дві рівності:

$$C_n^0 a^n - C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^4 a^{n-4} b^4 - \dots = r \cos n\varphi;$$

$$C_n^1 a^{n-1} b - C_n^3 a^{n-3} b^3 + C_n^5 a^{n-5} b^5 - \dots = r \sin n\varphi.$$

Змінюючи числа $a, b \in \mathbb{R}$ ми одержимо різні співвідношення для біномних коефіцієнтів C_n^k .

Для прикладу, піднесемо до n -го степеня $1 + i$ двома способами. Одержимо

$$(1 + i)^n = 1 + C_n^1 i - C_n^2 - C_n^3 i + C_n^4 + C_n^5 i + \dots = \sum_{k \geq 0} (-1)^k C_n^{2k} + i \sum_{k \geq 0} (-1)^k C_n^{2k+1};$$

$$(1 + i)^n = (\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}))^n = 2^{\frac{n}{2}} (\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4})$$

Звідси одержуємо дві тотожності для біномних коефіцієнтів:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k C_n^{2k} = n = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}, \quad \sum_{k \geq 0} (-1)^k C_n^{2k+1} = 2^{\frac{n\pi}{4}} \sin \frac{n\pi}{4}$$

4.5 Косинус та синус кратних дуг

Інколи виникає потреба в записі функцій $\sin nx$ та $\cos nx$ у вигляді многочлена (тобто використовувачи лише додавання та множення) від функцій $\sin x$ та $\cos x$. Таке завдання виконується наступним чином. Спочатку записуємо комплексне число

$$z = \cos x + i \sin x,$$

що має модуль 1 і записане в тригонометричній формі. Далі це число підноситься до n -го степеня за допомогою формули Муавра та за допомогою бінома Ньютона. Після цього прирівнюються дісні та уявні частини цих двох піднесенень. Виконаємо цю роботу:

$$z^n = \cos nx + i \sin nx;$$

$$z^n = \sum_{k=0}^n C_n^k i^k \cos^{n-k} x \sin^k x.$$

Звідси

$$\cos(nx) = \Re(z^n) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k} x \sin^{2k} x;$$

$$\sin(nx) = \Im(z^n) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k C_n^{2k+1} \cos^{n-1-2k} x \sin^{2k+1} x.$$

Окремими випадками наведених вище формул є наступні:

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x; & \sin 2x &= 2 \sin x \cos x; \\ \cos 3x &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x; & \sin 3x &= -\sin^3 x + 3 \sin^2 x \cos x; \\ \cos 4x &= \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x; & \sin 4x &= 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x; \\ \sin 5x &= 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x; \\ \cos 5x &= \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x.\end{aligned}$$

4.6 Степені косинуса та синуса

При обчисленні інтегралів використовуються формули перетворення степенів синуса та косинуса у синуси та косинуси кратних дуг.

Якщо

$$|z| = 1, \quad z = \cos x + i \sin x,$$

то

$$z^{-1} = \frac{1}{\cos x + i \sin x} = \cos x - i \sin x = \bar{z}, \quad z + z^{-1} = 2 \cos x, \quad z - z^{-1} = 2i \sin x.$$

Тому

$$\cos^n x = \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^n, \quad (27)$$

і

$$\sin^n x = \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^n \quad (28)$$

Піднесемо праву частину рівності (27) за формулою бінома Ньютона:

$$\cos^n x = \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^n = 2^{-n} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k z^k (z^{-1})^{n-k} \right) = 2^{-n} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k z^{2k-n} \right).$$

Далі скористаємося формулою Муавра, згідно з якою $z^{2k-n} = \cos(2k-n)x + i \sin(2k-n)x$:

$$\cos^n x = 2^{-n} \sum_{k=0}^n C_n^k (\cos(2k-n)x + i \sin(2k-n)x).$$

При додаванні уявні частини доданків справа повинні скоротитися, бо зліва стоїть дійсне число. Тому

$$\cos^n x = 2^{-n} \sum_{k=0}^n C_n^k \cos(2k-n)x. \quad (29)$$

Про запис (29) кажуть як про запис n -го степеня косинуса через косинуси кратних дуг.

Подібне чинять і з формулою (28) — праву частину підносять до n -го степеня за допомогою бінома Ньютона, потім користуються формулою Муавра, і одержують рівність

$$\sin^n x = (2i)^{-n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k (\cos(2k-n)x + i \sin(2k-n)x). \quad (30)$$

Кінцевий вигляд формули для n -го степеня синуса залежить від парності числа n . Якщо n парне число і $n = 2m$ для деякого натурального числа m , то

$$\sin^n x = (-4)^{-m} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \cos(2k-n)x. \quad (31)$$

Якщо ж число n непарне, тобто $n = 2m + 1$ для деякого натурального числа m , то

$$\sin^n x = (-4)^{-m} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \sin(2k-n)x. \quad (32)$$

Про записи (31), (32) кажуть як про записи n -го степеня синуса через косинуси та синуси кратних дуг.

Прикладами застосування одержаних формул є

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \frac{1}{8}(\cos 4x + 4 \cos 2x + 3); \\ \sin^4 x &= \frac{1}{8}(\cos 4x - 4 \cos 2x + 3); \\ \sin^5 x &= \frac{1}{16}(\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x); \\ \cos^5 x &= \frac{1}{16}(\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x). \end{aligned}$$

5 Розширення функцій дійсного змінного на комплексну площину

Якщо функція дійсного аргумента задана формулою, яка використовує лише операції додавання, множення, віднімання та ділення, то таку функцію можна обчислити і від комплексної змінної. Для прикладу, ми можемо обчислити функцію

$$f(z) = \frac{z^2 - 7iz + 3 + 5i}{(3-i)z^3 - 1 - i}$$

коли $z = 2 + 2i$. В складніших випадках використовуються так звані степеневі ряди.

5.1 Збіжність послідовностей і задання функції степеневим рядом.

Нехай задана нескінченна послідовність

$$f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \quad (33)$$

комплексних чисел. Комплексне число a називається межею послідовності f , коли для будь-якого (скільки завгодно малого) дійсного додатнього ε можна вказати такий номер N , що всі елементи a_n з більшими номерами ніж N знаходяться від a ближче ніж на ε , тобто

$$n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Це означення дозволяє розглядати нескінченні суми, так звані степеневі ряди

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = s(x), \quad (34)$$

де $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ — сталі комплексні числа, а x — комплексна змінна.

Під сумою $s(x)$ степеневого ряду (34) розуміють межу, до якої прямує послідовність часткових сум:

$$a_0, a_0 + a_1x, a_0 + a_1x + a_2x^2, \dots, \sum_{k=0}^n a_k x^k, \dots$$

звичайно, коли ця межа існує. Деякі функції дійсної змінної можна розглядати як степеневий ряд. Тоді той же степеневий ряд, але від комплексної змінної буде задавати функцію і від комплексної змінної.

5.2 Експонента

В геометрії важливим числом є відношення довжини кола до його діаметра. Це число виникає природно, часто використовується і має спеціальне позначення — π . При вивченні функцій природно виникає і часто використовується число

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Це число має спеціальне позначення — e і називається натуральним числом Непера. Природність, важливість, зручність роботи з цим числом — все це для тих, хто професійно використовує математику. З точністю до 16 знаків

$$e = 2.78$$

Показникова функція з натуральною основою e називається експонентою і позначається $\exp(x)$. Таким чином,

$$\exp(x) = e^x.$$

“Справжнє” обчислення функції $\exp(x)$ (в мікрокалькуляторі, в комп’ютері ...) з належною точністю здійснюється за допомогою степеневого ряду (прийmemo це на віру)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (35)$$

Логарифм за натуральною основою має спеціальне позначення — $\ln$, таким чином

$$\ln x = \log_e x.$$

Запишем означення функції e^x коли x уявне число, тобто для деякого дійсного y можна записати $x = iy$. Тоді

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!}.$$

У функції e^{iy} легко відділити уявну частину від дійсної:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \frac{1}{6!}y^6 + \dots\right) + i\left(y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \frac{1}{7!}y^7 + \dots\right),$$

або в стислому записі

$$e^{iy} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} y^{2k}\right) + i \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} y^{2k+1}\right). \quad (36)$$

5.3 Синус та косинус комплексного аргумента

Як і для експоненти прийmemo на віру, що синус та косинус обчислюються за допомогою степеневих рядів наступним чином

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (37)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad (38)$$

Порівнюючи рівняння (35), (37), (38) бачимо, що при уявних x , тобто коли $x = iy$ для деякого дійсного y буде двконуватись рівність

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Для комплексних чисел $z = a + bi$ значення

Згідно з цією формулою

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{2\pi i} = 1, \quad e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e^i = \cos 1 + i \sin 1.$$

Скористаємося як відомим тим, що $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$. Ця формула дозволяє обчислити експоненту від комплексного числа, коли є можливість обчислювати експоненту, синус та косинус від дійсного аргумента:

$$\exp(a + bi) = \exp(a) \exp(ib) = \exp(a)(\cos b + i \sin b), \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (39)$$

В загальному випадку, коли комплексне число z має і дійсну і уявну частини, e^z визначають формулою

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a(\cos b + i \sin b). \quad (40)$$

Остання формула (40) дозволяє обчислювати окремо модуль і аргумент $\exp(a + bi)$:

$$|\exp(a + bi)| = \exp(a), \quad \arg \exp(a + bi) = b. \quad (41)$$

Повернемося власне до синуса та косинуса.

Коли аргумент косинуса є уявним числом, то значення косинуса є дійсним числом, оскільки в степеневий ряд входять тільки парні степені змінної. Точніше, коли y є дійсним числом, то

$$\cos(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}). \quad (42)$$

Функцію $\frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$ називають гіперболічним косинусом і позначають $ch(y)$ на пострадянському просторі і $\cosh(y)$ в англійських текстах. Зокрема, позначення $\cosh(y)$ використовують пакети символьних обчислень. Отже

$$\cos(iy) = \cosh(y).$$

В конкретних випадках

$$\begin{aligned} \cos(i) &= \cosh(1) = 1.5308035; & \cos(\pi i) &= \cosh(\pi) = 11.59195328, \\ \cos(-29i) &= \cosh(-29) = 1.965667149^{12}. \end{aligned}$$

Оскільки степеневий ряд синуса містить лише непарні степені змінної, то синус уявного аргумента є уявним числом, точніше

$$\sin(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} = i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Права частина останньої рівності носить назву гіперболічного синуса і позначається sh на пострадянському просторі та $\sinh$ в англійських текстах. В цих позначеннях

$$\sin(iy) = i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = i \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = i \sinh(y).$$

В конкретних випадках

$$\sin(-i) = i \sinh(-1) = -1.175201194; \quad \sinh(\pi i) = i \sinh(\pi) = 11.54873936,$$

$$\sin(-29i) = i \sinh(-29) = 1.965667149^{12}.$$

Якщо комплексне число містить ненульову дійсну і ненульову уявну частини, то косинус та синус обчислюються з використанням формул “косинуса суми” та “синуса суми”:

$$\cos(a + bi) = \cos a \cos(bi) - \sin a \sin(bi), \quad \sin(a + bi) = \sin a \cos(bi) + \cos a \sin(bi).$$

5.4 Логарифм комплексного аргумента

За означенням,

$$a^b = c \Leftrightarrow b = \log_a c.$$

Відповідно

$$e_1^z = z_2 \Leftrightarrow z_1 = \ln z_2. \quad (43)$$

Із формул (40), 43() випливає

$$\ln e^{a+bi} = \ln e^a (\cos b + i \sin b) = a + bi.$$

Для комплексного числа z , що записане в тригонометричній формі $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ вважаємо

$$\ln z = \ln r + i\varphi.$$

Таке визначення натурального логарифма або не має однозначності (коли аргумент ми вибираємо неоднозначно, або не має неперервності — за рахунок періодичності синуса та косинуса.

В конкретних випадках

$$\ln(-2 - 2\sqrt{3}) = 2 \ln 2 + \frac{5\pi}{4}i; \quad \ln(-1) = \pi i; \quad \ln i = \frac{\pi}{2}i.$$

5.5 Образи прямокутної області комплексної площини під дією різних функцій комплексної змінної

Розглянемо прямокутну область $1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, \quad -\pi \leq \operatorname{Im} z \leq \pi$ в комплексній площині (див. рис. 12). В цій області проведені горизонтальні та вертикальні відрізки — координатні лінії, за образами яких ми будемо слідкувати. На рис.13 зображено образ цієї прямокутної області під дією логарифма, на рис.13 зображено образ цієї прямокутної області під дією логарифма, на рис.14 зображено образ цієї прямокутної області під дією експоненти, на рис.15 зображено образ цієї прямокутної області, коли кожна число області піднесене до квадрату.

Рисунки виконав пакет символьних обчислень Maple-11.

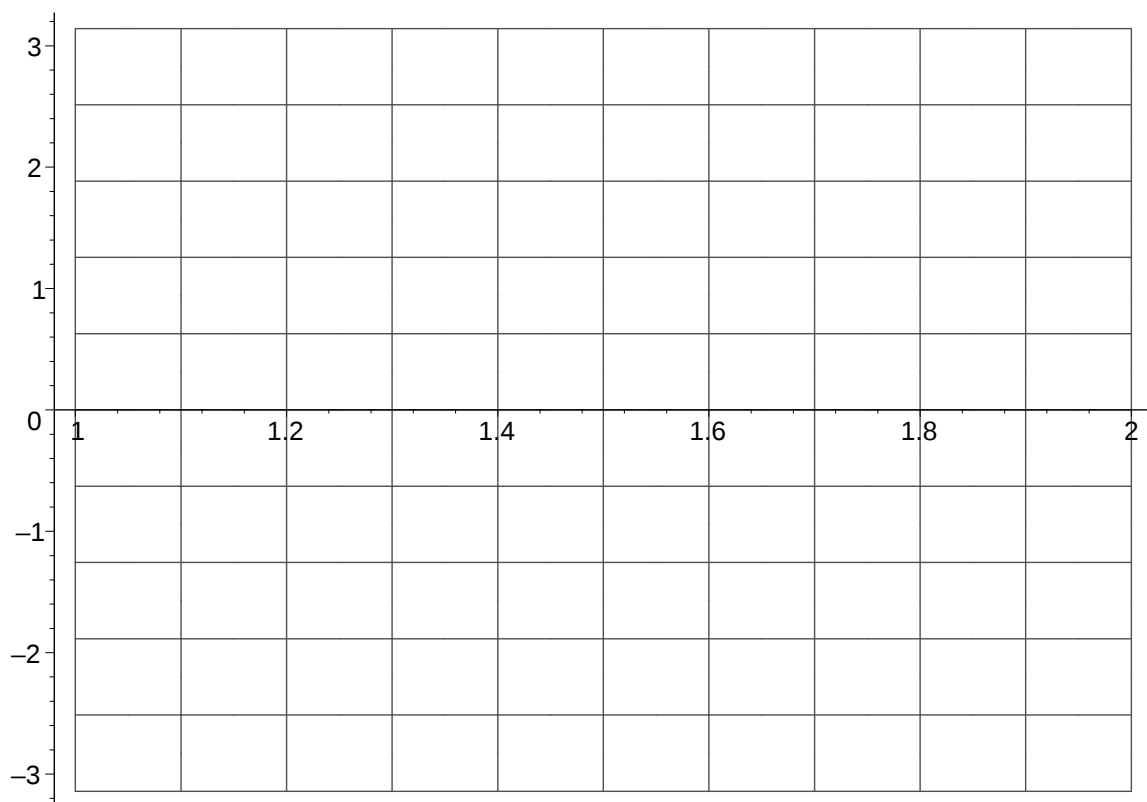


Рис. 12: Зображення на комплексній площині області $1 \leq Re z \leq 2$, $-\pi \leq Im z \leq \pi$ комплексної площини

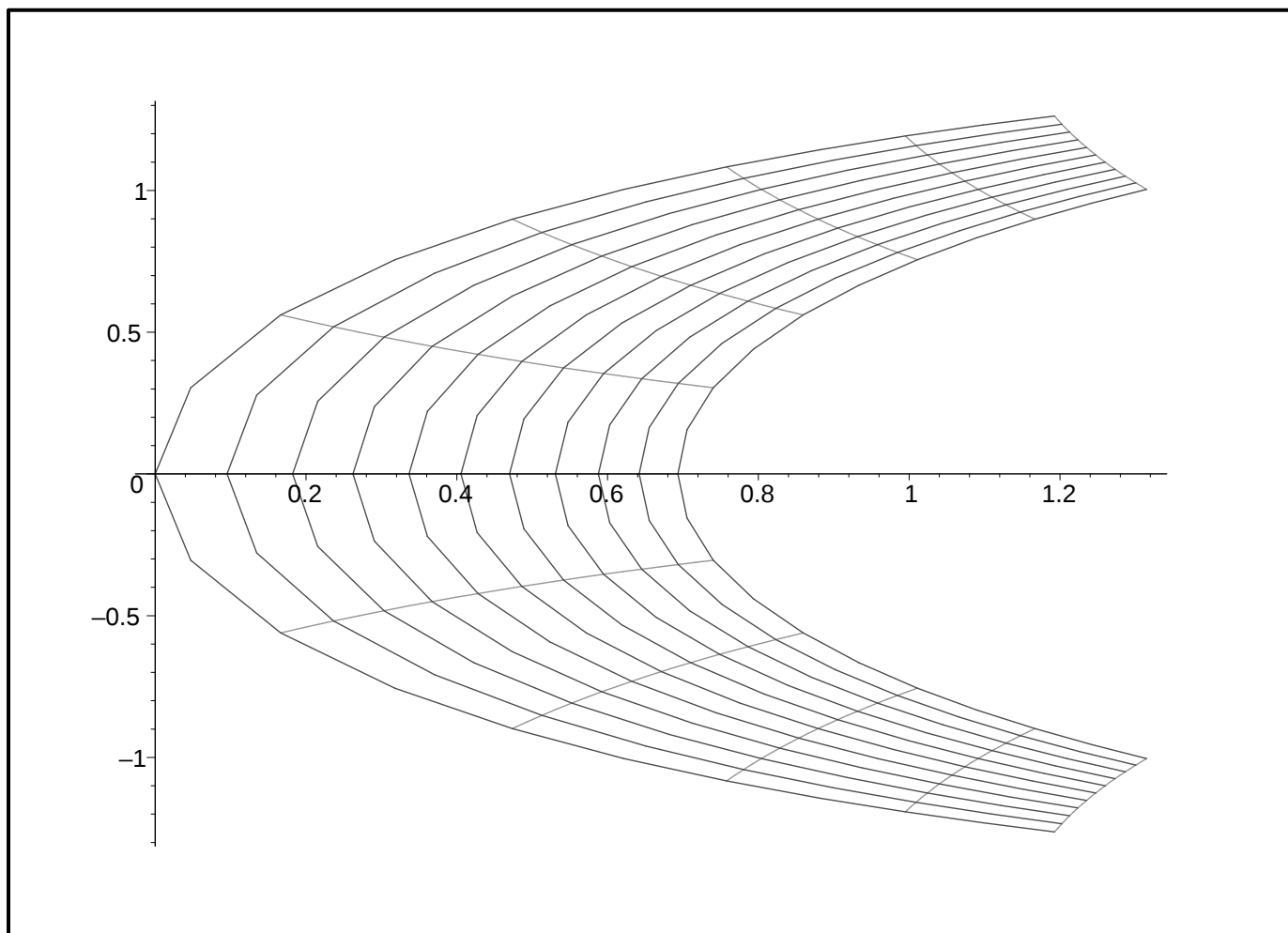


Рис. 13: Зображення на комплексній площині $\ln z$ тих точок z , що лежать в області $1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2$, $-\pi \leq \operatorname{Im} z \leq \pi$ комплексної площини

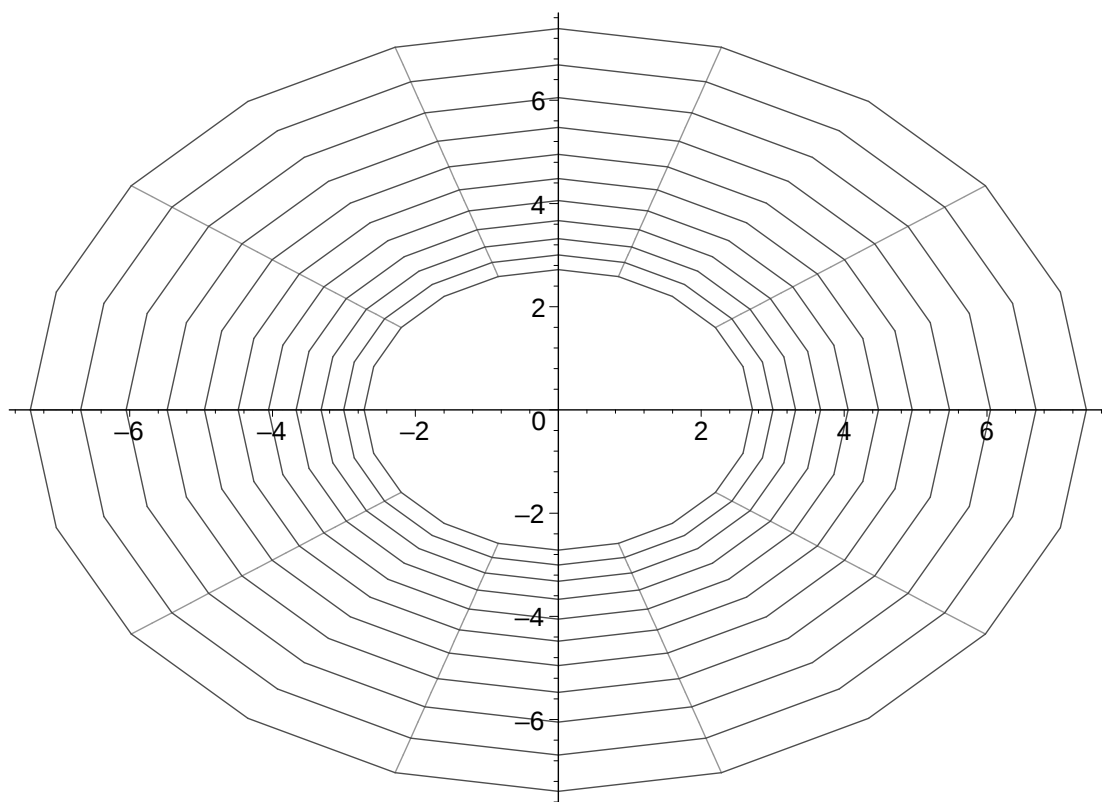


Рис. 14: Зображення на комплексній площині e^z тих точок z , що лежать в області $1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2$, $-\pi \leq \operatorname{Im} z \leq \pi$ комплексної площини

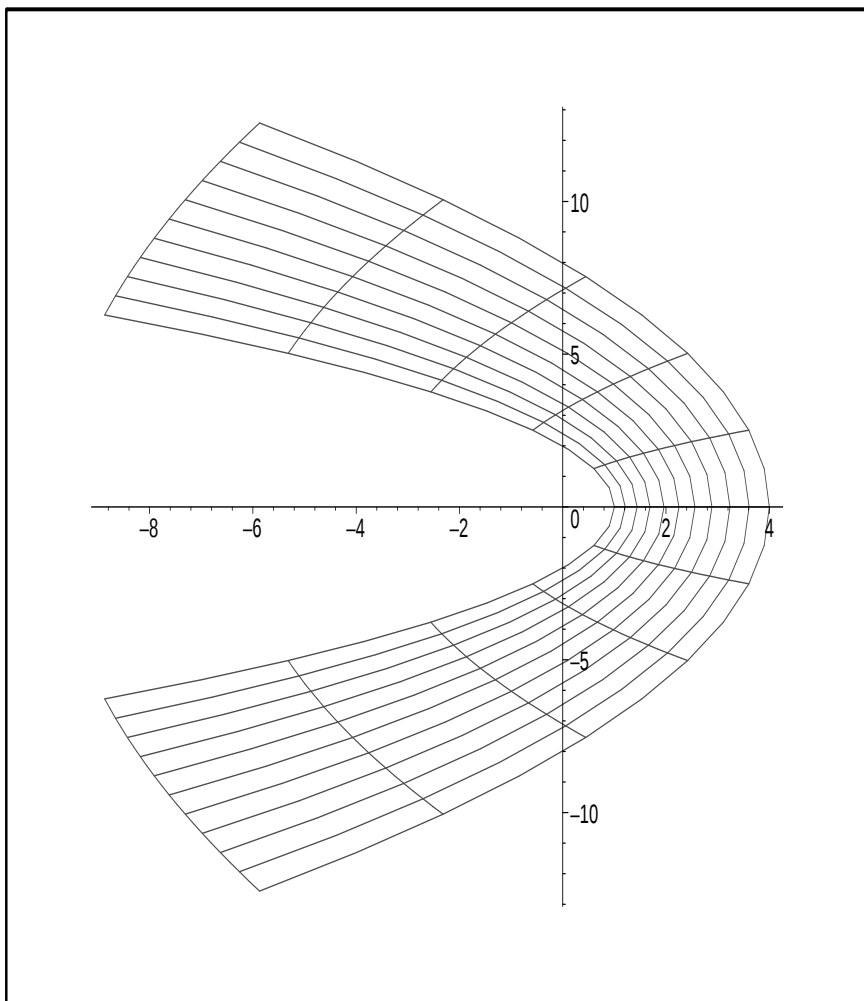


Рис. 15: Зображення на комплексній площині точок z^2 для тих $z \in \mathbb{C}$, що лежать в області $1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2$, $-\pi \leq \operatorname{Im} z \leq \pi$ комплексної площини

Показчик

ГМТ, 14

аргумент

комплексного числа, 8

асоціативність

додавання, 4

множення, 4

біном Ньютона, 25

центр

кола, 14

частина

дійсна, 2

уявне, 2

число

комплексне, 2

дійсна частина, 2

уявна частина, 2

уявне, 2

директриса

параболи, 18

дистрибутивність, 4

ділення

комплексних чисел, 3

додавання

комплексних чисел, 3

експонента, 29

елемент

ненульовий, 5

обернений, 4

протилежний, 4

твірний, 14

еліпс, 16

фокус

еліпса, 16

гіперболи, 18

параболи, 18

форма

комплексного числа

алгебраїчна, 3

тригонометрична, 10

формула

Муавра, 25

гілка

гіперболи, 18

гіпербола, 18

група, 5, 13

циклічна, 13

комутативна, 13

коренів n з одиниці, 14

мультиплікативна, 13

неперервна, 13

коефіцієнт

біномний, 25

уявної частини, 3

коло, 14

композиція

рухів, 22

корінь

первісний, 14

крива, 23

неперервна, 23

круг, 23

кут, 24

межа, 29

послідовності, 29

многочлен

поділу кола, 13

множення

комплексних чисел, 3

модуль

комплексного числа, 8

обертання

комплексної площини, 22

область

в площині, 23

одиниця

уявна, 2

поля комплексних чисел, 2

операція

асоціативна, 13

комутативна, 13

- парабола, 18
- паралельне перенесення, 22
- підгрупа, 13
- півплощина, 25
- піввісь
 - еліпса, 16
 - гіперболи, 18
- площина
 - комплексна, 7
- поле, 5
 - дійсних чисел, 2
 - комплексних чисел, 3
- промінь, 15
- пряма ліній, 16
- радіус
 - кільця
 - внутрішній, 24
 - зовнішній, 24
 - кола, 14
- рівняння
 - еліпса, 16
 - гіперболи, 18
 - кола, 14
 - параболи, 18
 - поділу кола, 13
 - променя, 15
 - прямої, 16
- ряд
 - степеневий, 29
- сектор, 25
- симетрія
 - ковзна, 22
 - осьова, 19, 22
- смуга, 25
- спряження, 5
- сума
 - нескінченна, 29
- теорема
 - Шаля, 19
- точка
 - гранична, 23
 - внутрішня, 23
- вершина

- кута, 23
- віднімання
 - комплексних чисел, 3
- вісь
 - симетрії, 19
- внутрішність
 - кола, 23
 - параболи, 25
 - еліпса, 24
- вогнищева точка
 - еліпса, 16
 - гіперболи, 18
 - параболи, 18
- зовнішність
 - еліпса, 24
 - кола, 23
 - параболи, 25