О движеніи твердаго тѣла въ жидкости.

В. А. Стеклова.

Въ своемъ извѣстномъ мемуарѣ „Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit", помѣщенномъ въ III-мъ томѣ „Mathematische Annalen", Клебшъ изслѣдуетъ условія, при которыхъ уравненія движенія твердаго тѣла въ жидкости

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2\frac{\partial T}{\partial y_3}-x_3\frac{\partial T}{\partial y_2},$$

$$\frac{dx_2}{dt}=x_3\frac{\partial T}{\partial y_1}-x_1\frac{\partial T}{\partial y_3},$$

$$\frac{dx_3}{dt}=x_1\frac{\partial T}{\partial y_2}-x_2\frac{\partial T}{\partial y_1},$$

$$\frac{dy_1}{dt}=x_2\frac{\partial T}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial T}{\partial x_2}+y_2\frac{\partial T}{\partial y_3}-y_3\frac{\partial T}{\partial y_2},$$

$$\frac{dy_2}{dt}=x_3\frac{\partial T}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial T}{\partial x_3}+y_3\frac{\partial T}{\partial y_1}-y_1\frac{\partial T}{\partial y_3},$$

$$\frac{dy_3}{dt}=x_1\frac{\partial T}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial T}{\partial x_1}+y_1\frac{\partial T}{\partial y_2}-y_2\frac{\partial T}{\partial y_1},$$

гдѣ T однородная квадратичная функція шести перемѣнныхъ

$$x_l,\quad y_l\ ^{1)},\qquad (l=1,2,3)$$

допускаютъ, сверхъ трехъ интеграловъ Кирхгофа, четвертый интегралъ подъ видомъ цѣлой однородной функціи второй степени отъ тѣхъ же перемѣнныхъ.

Онъ приходитъ къ заключенію, что такой интегралъ возможенъ только для тѣла, удвоенная живая сила котораго

$$2T=\mathbf{S}a_1x_1^2+\mathbf{S}b_1y_1^2,$$

---

[1]) x_l и y_l означаютъ проекціи на оси координатъ, неизмѣнно связанныхъ съ тѣломъ, вектора и момента производящихъ движеніе импульсовъ.

и гдѣ между постоянными коэффиціентами a_l и b_l $(l=1, 2, 3)$ существуетъ соотношеніе вида

$$\mathbf{S}\frac{a_2 - a_3}{b_1} = 0.$$

Знакъ $\mathbf{S}$ въ этихъ формулахъ обозначаетъ сумму трехъ членовъ, получающихся изъ написаннаго круговой перестановкой значковъ

$$1, 2, 3.$$

Но указанный Клебшемъ случай не единственный.

Дѣйствительно, не трудно убѣдиться также въ справедливости слѣдующаго предложенія:

Если удвоенная живая сила твердаго тѣла въ жидкости

$$2T = \mathbf{S}a_1x_1^2 + 2\sigma\mathbf{S}b_2b_3x_1y_1 + \mathbf{S}b_1y_1^2,$$

гдѣ

$$a_1 = \sigma^2 b_1 (b_2^2 + b_3^2),$$

$$a_2 = \sigma^2 b_2 (b_3^2 + b_1^2),$$

$$a_3 = \sigma^2 b_3 (b_1^2 + b_2^2),$$

а σ нѣкоторая неопредѣленная постоянная, то уравненія движенія допускаютъ четвертый интегралъ вида

$$\sigma^2\mathbf{S}b_1(3b_1 - 2\mathbf{S}b_1)\,x_1^2 + 2\sigma\mathbf{S}b_1x_1y_1 - \mathbf{S}y_1^2 = const.,$$

и рѣшеніе задачи приводится къ квадратурамъ.

Указанный сейчасъ случай существенно отличается отъ случая Клебша и не замѣченъ послѣднимъ.

Недосмотръ Клебша состоитъ въ томъ, что онъ принялъ постоянную, обозначенную имъ въ началѣ изслѣдованія черезъ $\varkappa$, въ дальнѣйшемъ анализѣ равной нулю.

При $\varkappa$ отличномъ отъ нуля получится указанный мною случай.

Случай Клебша и только что указанный суть дѣйствительно единственные, при которыхъ уравненія движенія твердаго тѣла въ жидкости допускаютъ четвертый цѣлый однородный интегралъ второй степени.

Интеграція уравненій въ разсматриваемомъ случаѣ приводитъ, по всей вѣроятности, къ тета-функціямъ отъ двухъ аргументовъ, какъ и въ случаѣ Клебша.