СПЕКТРАЛЬНАЯ МАТРИЦА И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ОСИ $(-\infty, \infty)$

Ф. С. Рофе-Бекетов

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается на оси $(-\infty, \infty)$ уравнение

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (-\infty < x < \infty), \tag{1}$$

с вещественным локально-суммируемым потенциалом $q(x)$. Пусть $\varphi_1(x, \lambda)$, $\varphi_2(x, \lambda)$ — решения этого уравнения, удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi_1(0, \lambda) = 1, \quad \varphi_1'(0, \lambda) = 0, \tag{2}$$

$$\varphi_2(0, \lambda) = 0, \quad \varphi_2'(0, \lambda) = 1. \tag{3}$$

Хорошо известно [1, 2, 3], что каждому уравнению вида (1) отвечает не менее, чем одна неубывающая эрмитова матричная функция $R(\lambda) = \|\rho_{jk}(\lambda)\|$, $(j, k = 1, 2)$, порождающая формулы обращения и равенство Парсеваля, которое для произвольной функции $f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ имеет следующий вид:

$$F_j(\lambda) = \text{l.i.m.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_j(x, \lambda)\,dx \quad (j = 1, 2),$$

(интегралы сходятся в пространстве вектор-функций $L_R^2(-\infty, \infty)$),

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{2} F_j(\lambda)\overline{F_k(\lambda)}\,d\rho_{jk}(\lambda).$$

В то время как обратная задача Штурма—Лиувилля на полуоси $(0, \infty)$ полностью решена и всесторонне исследована в работах И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [4], М. Г. Крейна [5], В. А. Марченко [6]*, обратная задача на всей оси — восстановление уравнения (1) по его спектральной матрице $R(\lambda)$ — исследована значительно менее полно.

Отметим, что используя метод И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [4], обратную задачу на всей оси рассматривал А. Ш. Блох [8]. Приведем основные результаты работы [8]. В этой работе строится для уравнения (1) оператор преобразования, действующий по формуле

$$\varphi_j(x, \lambda) = c_j(x, \lambda) + \int_{-x}^{x} K(x, t)c_j(t, \lambda)\,dt \quad (j = 1, 2), \tag{4}$$

---

* Изложение решения обратной задачи на полуоси с некоторыми упрощениями доказательств содержится в статье [7].

где

$$c_1(x, \lambda) = \cos x\sqrt{\lambda}, \quad c_2(x, \lambda) = \frac{\sin x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}},$$

причем ядро $K(x, y)$ удовлетворяет известному уравнению в частных производных (если $q(x)$ — дифференцируема):

$$K''_{xx}(x, y) - q(x) K(x, y) = K''_{yy}(x, y), \tag{5}$$

и условиям

$$K(x, x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt, \quad K(x, -x) = 0. \tag{6}$$

Для ядра оператора преобразования $K(x, y)$ в [8] приводится интегральное уравнение

$$K(x, y)\operatorname{sign} x + f(x, y) + \int_{-x}^{x} K(x, t) f(t, y)\,dt = 0, \tag{7}$$

где положено

$$f(x, y) = F''_{xy}(x, y),$$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j, k=1}^{2} \left\{\int_0^x c_j(t, \lambda)\,dt\right\}\left\{\int_0^y c_k(t, \lambda)\,dt\right\} d\sigma_{jk}(\lambda). \tag{8}$$

Здесь под матрицей $\|\sigma_{jk}(\lambda)\| \equiv S(\lambda)$ следует понимать

$$S(\lambda) = \begin{cases} R(\lambda) & (\lambda \leqslant 0) \\ R(\lambda) - \frac{1}{\pi}\begin{Vmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\lambda^{3/2} \end{Vmatrix} & (\lambda \geqslant 0). \end{cases} \tag{9}$$

Если заданная неубывающая матричная функция $R(\lambda)$ такова, что: A) $F(x, y)$ — четырежды дифференцируема и B) на некотором конечном интервале оси λ матрица $R(\lambda)$ имеет бесконечное число точек роста, в [8] доказывается однозначная разрешимость интегрального уравнения (7) относительно $K(x, y)$. Этого, однако, недостаточно, чтобы $K(x, y)$ являлось ядром оператора преобразования для некоторой задачи вида (1), так как равенство $K(x, -x) = 0$ условиями A и B не обеспечивается. Этот факт не отмечен в [8].

Таким образом, только если после решения уравнения (7) окажется, что $K(x, -x) = 0$, можно утверждать, что $R(\lambda)$ является спектральной матрицей некоторой задачи вида (1), в противном случае обратная задача для матрицы $R(\lambda)$ неразрешима. Это обстоятельство специфично для обратной задачи на оси, так как условий, аналогичных условиям A и B, вполне достаточно для разрешимости обратной задачи на полуоси. Ниже будет приведено необходимое условие, независимое от условия гладкости $F(x, y)$, которому должны удовлетворять элементы спектральной матрицы *.

Отметим, что обратная задача для конечно-разностного уравнения второго порядка на оси рассмотрена Ю. М. Березанским [9] с помощью предложенного им метода «удвоения».

* Из этого условия видно, что предложенное в работе [18] соотношение, связывающее элементы спектральной матрицы ρ_{11} и ρ_{22}, ошибочно.

§ 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ НА ПОЛУОСИ

Лемма 1. *Пусть $\rho_j(\lambda)$, $j=(1,\ 2)$ — спектральные функции задач:*

$$y''+\{\lambda-q_j(x)\}y=0,\quad 0\leqslant x<\infty, \tag{10}$$

$$y(0)=1,\quad y'(0)=h_j, \tag{11}$$

причем $q_j(x)$ имеет r_j производных. Тогда при любых $\alpha_j>0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$ функция

$$\rho(\lambda)=\alpha_1\rho_1(\lambda)+\alpha_2\rho_2(\lambda)$$

является спектральной функцией некоторой задачи вида

$$y''+\{\lambda-q(x)\}y=0,\quad 0\leqslant x<\infty, \tag{12}$$

$$y(0)=1,\quad y'(0)=h, \tag{13}$$

где

$$h=\alpha_1h_1+\alpha_2h_2 \tag{14}$$

и функция $q(x)$ имеет $r\geqslant\min\{r_1,\ r_2\}$ производных, причем, если числа r_1 и r_2 точные (не заниженные), то знак $>$ может иметь здесь место лишь при $r_1=r_2$.

В случае, когда краевые условия имеют вид

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1 \tag{15}$$

для обоих уравнений, $\rho(\lambda)$ оказывается спектральной функцией задачи с краевыми условиями того же вида (15).

Доказательство немедленно вытекает из теоремы о необходимых и достаточных условиях разрешимости обратной задачи Штурма-Лиувилля на полуоси (см., напр. [7], теорема 1,5.1).

Соотношение (14) следует также из известной асимптотики спектральной функции ([10], [11]) при $\lambda\to+\infty$:

$$\rho(\lambda)-\rho(-\infty)=\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}-h+o(1) \tag{16}$$

Лемма доказана.

Пусть $\omega(x,\ \lambda)$, $\varphi_2(x,\ \lambda)$ — решения уравнения (12) при начальных условиях (13) и соответственно (15). Тогда, как известно, условием

$$\varphi_2(x,\ \lambda)-m(\lambda,\ h)\,\omega(x,\ \lambda)\in L^2(0,\ \infty),\quad \operatorname{Im}\lambda\neq0,$$

определяется характеристическая функция $m(\lambda,\ h)$ задачи (12), (13), однозначно в случае предельной точки Вейля при $x=\infty$ и неоднозначно в случае предельного круга. В этом последнем случае выбор определенной характеристической функции, регулярной при $\operatorname{Im}\lambda\neq0$ и такой, что $m(\bar\lambda)=\overline{m(\lambda)}$, эквивалентен заданию (в обобщенном смысле) краевого условия при $x=\infty$. Допускаются как функции $m(\lambda,\ h)$, отвечающие точкам на предельной окружности (им соответствуют ортогональные разложения единицы), так и функции, отвечающие внутренним точкам предельного круга (им соответствуют обобщенные разложения единицы). При $h=0$ будем писать $m(\lambda,\ 0)=m(\lambda)$, т. е.

$$\varphi_2(x,\ \lambda)-m(\lambda)\,\varphi_1(x,\ \lambda)\in L^2(0,\ \infty),\quad \operatorname{Im}\lambda\neq0,$$

где φ_1, φ_2 заданы условиями (2), (3). Условию $h=\infty$ отвечает характеристическая функция $n(\lambda)$:

$$\varphi_1(x,\ \lambda)+n(\lambda)\,\varphi_2(x,\ \lambda)\in L^2(0,\ \infty),\quad \operatorname{Im}\lambda\neq0.$$

Очевидно,

$$n(\lambda) = -\frac{1}{m(\lambda)}, \tag{17}$$

как в случае предельной точки, так и в случае предельного круга (если $m(\lambda)$ и $n(\lambda)$ отвечают одному и тому же краевому условию при $x=\infty$). Как известно,

$$\operatorname{Im} m(\lambda, h) > 0, \ \operatorname{Im} n(\lambda) > 0 \ \text{при} \ \operatorname{Im}\lambda > 0,$$

т. е. характеристические функции являются функциями класса N. Всякая функция $F(z)$ класса N (см. [12, гл. III] или [13, п. 69]) допускает однозначное представление

$$F(z) = a + bz + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) d\tau(\lambda), \tag{18}$$

где $b \geqslant 0$, $\operatorname{Im} a = 0$, $\tau(\lambda)$ — неубывающая функция, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty.$$

Для характеристических функций в представлении (18) роль $\tau(\lambda)$ играет спектральная функция соответствующей краевой задачи. В частности, для характеристической функции задачи (12), (13) известно (см. [14]) представление

$$m(z, h) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda - z}, \tag{19}$$

где $\rho(\lambda)$ — спектральная функция той же задачи. Это представление следует из (18), если учесть асимптотику спектральной функции (16) при $\lambda \to +\infty$, сходимость ([4], [15]) при любом $x > 0$ интеграла:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{x\sqrt{|\lambda|}} d\rho(\lambda) < \infty \tag{20}$$

и тот известный факт*, что $m(z, h) \to 0$ при $z \to i\infty$. Используя (19) и (16), (20) заключаем, что при $0 < \varepsilon < \arg z < \pi - \varepsilon$, $|z| \to \infty$,

$$m(z, h) = \frac{i}{\sqrt{z}} + \frac{h}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right). \tag{21}$$

При тех же условиях отсюда следует в силу (17), что

$$n(z) = i\sqrt{z} + o(1). \tag{22}$$

Так как при $z \to i\infty$ входящий в правую часть (18) интеграл есть величина $o(z)$, то в силу (22) в представлении (18) для $n(z)$ коэффициент $b=0$. Таким образом, характеристическая функция задачи (12), (15) представима через спектральную функцию той же задачи по формуле

$$n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) d\rho(\lambda) + a, \quad \operatorname{Im} a = 0. \tag{23}$$

---

* Вытекающий из принадлежности $m(z, h)$ «допредельному» кругу $C_b(z)$, $b > 0$, который стягивается к нулю, если $z \to i\infty$.

Лемма 2. *Если $m_1(z, h_1)$ и $m_2(z, h_2)$ — характеристические функции задач* (10), (11), ($j = 1, 2$), *то*

$$m(z, h) = \alpha_1 m_1(z, h_1) + \alpha_2 m_2(z, h_2)$$

при $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ *есть характеристическая функция задачи того же вида* (12), (13) *со спектральной функцией*

$$\rho(\lambda) = \alpha_1 \rho_1(\lambda) + \alpha_2 \rho_2(\lambda),$$

где $\rho_1(\lambda)$, $\rho_2(\lambda)$ — *спектральные функции исходных задач.*

Аналогично, если $n_1(z)$ *и* $n_2(z)$ — *характеристические функции задач для уравнений* (10) ($j = 1, 2$) *с краевым условием типа синуса* (15), *то и*

$$n(z) = \alpha_1 n_1(z) + \alpha_2 n_2(z)$$

есть характеристическая функция задачи с условиями типа синуса (15).

Доказательство вытекает из леммы 1 и из представлений (19), (23) характеристических функций через спектральные функции соответствующих задач и из асимптотики (22).

§ 2. СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ $R(\lambda)$.

Обозначим через $m_1(\lambda) = -\frac{1}{n_1(\lambda)}$ характеристическую функцию для уравнения (1) на полуоси $(-\infty; 0]$, а через $m_2(\lambda) = -\frac{1}{n_2(\lambda)}$ — характеристическую функцию того же уравнения на полуоси $[0, \infty)$ с условиями типа косинуса при $x = 0$. Знак выбираем так, чтобы было $\operatorname{Im} m_j(\lambda) > 0$ при $\operatorname{Im} \lambda > 0$, ($j = 1,2$). Если при $x = -\infty$ или $x = +\infty$ для уравнения (1) имеет место случай предельного круга, то, как и в § 1, краевые условия на соответствующем конце будем определять заданием характеристической функции. Таким образом, в случае предельного круга на обоих концах мы ограничиваемся рассмотрением задач с распадающимися краевыми условиями. При таком ограничении спектральная матрица $R(\lambda)$ не только эрмитова, но и вещественна.

Элементы матрицы $R(\lambda)$, как известно (см., напр., [3]), определяются формулами

$$\rho_{jk}(\mu) - \rho_{jk}(\nu) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\nu}^{\mu} \operatorname{Im} M_{jk}(\lambda + i\varepsilon)\, d\lambda, \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned} M_{11}(\lambda) &= \frac{m_1(\lambda)\, m_2(\lambda)}{m_1(\lambda) + m_2(\lambda)} = -\frac{1}{n_1(\lambda) + n_2(\lambda)}, \\ M_{12}(\lambda) &= M_{21}(\lambda) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2(\lambda) - m_1(\lambda)}{m_1(\lambda) + m_2(\lambda)}, \\ M_{22}(\lambda) &= -\frac{1}{m_1(\lambda) + m_2(\lambda)}. \end{aligned} \tag{25}$$

Из этих формул и из принадлежности характеристических функций классу N следует (см. [16, стр. 207—208] или [17]), что матрица $\| \rho_{jk}(\lambda) \|$ не убывает и $M_{12}(\lambda)$ представима в виде разности двух функций класса N. Кроме того, в силу леммы 2 (§ 1) и (17) из соотношений (25) следует, что $2M_{11}(\lambda)$ и $2M_{22}(\lambda)$ являются характеристическими функциями некоторых задач на полуоси с условиями типа косинуса и соответственно типа синуса при $x=0$. Отсюда вытекает следующая

Теорема 1. *Удвоенные диагональные элементы спектральной матрицы задачи (1): $2\rho_{11}(\lambda)$ и $2\rho_{22}(\lambda)$ являются в то же время спектральными функциями некоторых задач Штурма—Лиувилля на полуоси с краевыми условиями при $x=0$ типа косинуса и соответственно типа синуса (и с потенциалами, гладкость которых не ниже гладкости потенциала $q(x)$ исходной задачи, определяемой без учета разрывов первого рода при $x=0$ для $q(x)$ и его производных). Отсюда непосредственно следует асимптотика при $\lambda\to+\infty$ для диагональных элементов спектральной матрицы $R(\lambda)$ задачи с локально суммируемым потенциалом $q(x)$ (полагаем $R(-\infty)=0$):*

$$\rho_{11}(\lambda)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\lambda}+o(1),$$

$$\rho_{22}(\lambda)=\frac{1}{3\pi}\lambda^{3/2}+o(\lambda). \tag{26}$$

Для $\rho_{12}(\lambda)$ справедливы при $\lambda\to+\infty$ оценки

$$\rho_{12}(\lambda)=o(\sqrt{\lambda}), \tag{27}$$

$$\operatorname{Var}\rho_{12}(\lambda)\Big|_{-\infty}^{\lambda}<\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\lambda+o(\lambda^{3/4}). \tag{28}$$

Доказательство. Формулы (26) получаются умножением на 1/2 известных ([10], [11]) асимптотических формул для спектральных функций задачи на полуоси, оценка (28) следует из неравенства для вариаций при любых $\mu<\nu$:

$$\{\overset{\nu}{\underset{\mu}{V}}\rho_{12}(\lambda)\}^2\leqslant\{\overset{\nu}{\underset{\mu}{V}}\rho_{11}(\lambda)\}\cdot\{\overset{\nu}{\underset{\mu}{V}}\rho_{22}(\lambda)\}, \tag{29}$$

оценка (27) получена из формального соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\,d\rho_{12}(\lambda)=\frac{1}{2}[f(x,\ 0)-f(-x,\ 0)]$$

и из (28) с помощью тауберовой теоремы 4.1 работы [11] (последнее соотношение является строгим в слабом смысле над пространством финитных бесконечно дифференцируемых функций). Отметим, что асимптотику (26) тоже можно получить из соотношений (8), (9) с помощью тауберовых теорем, поэтому теорема 1 верна без предположения о виде краевых условий при $x=\pm\infty$.

Теорема 2. *Если $R(\lambda)=\|\rho_{jk}(\lambda)\|$ — спектральная матрица задачи (1) на оси (с распадающимися краевыми условиями при $x=\pm\infty$, если они необходимы), то для функций $M_{jk}(z)$, построенных по формулам*

$$M_{11}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho_{11}(\lambda)}{\lambda-z},\quad M_{12}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho_{12}(\lambda)}{\lambda-z}, \tag{30}$$

$$M_{22}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)d\rho_{22}(\lambda)+a,$$

где a определено асимптотикой при $z \to i\infty$ для $M_{22}(z)$:

$$M_{22}(z) = \frac{1}{2} i\sqrt{z} + o(1), \tag{31}$$

выполняется соотношение

$$M_{11}(z) M_{22}(z) - M_{12}^2(z) = -\frac{1}{4}, \quad (\operatorname{Im} z \neq 0). \tag{32}$$

Доказательство. Соотношение (32) для функций $M_{jk}(z)$, определенных формулами (25), проверяется непосредственно, а представление (30) функций $M_{jk}(z)$ (25) через элементы спектральной матрицы вытекает из сказанного в §§ 1,2. В частности, выражение (30) для $M_{12}(z)$, следует из оценки (27) и из равенства $M_{12}(i\infty) = 0$, которое вытекает из (25).

§ 3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НА ОСИ

Лемма 3. *Пусть заданы регулярные при $\operatorname{Im} z > 0$ функции $M_{jk}(z)$, $(j, k = 1, 2)$, $M_{12} = M_{21}$ такие, что при любых комплексных числах ζ_1, ζ_2*

$$\operatorname{Im} \sum_{j,k=1}^{2} M_{jk}(z) \zeta_j \bar{\zeta}_k \geqslant 0, \quad (\operatorname{Im} z > 0), \tag{33}$$

и пусть

$$M_{11}(z) M_{22}(z) - M_{12}^2(z) \equiv -a^2, \quad (a = \mathrm{Const} > 0), \tag{34}$$

причем $M_{11}(z) M_{22}(z) \not\equiv 0$.

В этом случае функции $m_1(z)$, $m_2(z)$, определенные равенствами

$$\begin{aligned} m_1(z) &= -\frac{a - M_{12}(z)}{M_{22}(z)} \equiv \frac{M_{11}(z)}{a + M_{12}(z)}, \\ m_2(z) &= -\frac{a + M_{12}(z)}{M_{22}(z)} \equiv \frac{M_{11}(z)}{a - M_{12}(z)}, \end{aligned} \tag{35}$$

являются функциями класса N, а потому существуют неубывающие функции $\rho_1(\lambda)$ и $\rho_2(\lambda)$, определяемые в существенном через $m_1(z)$ и $m_2(z)$ формулой обращения Стилтьеса:

$$\rho_j(\mu) - \rho_j(\nu) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\nu}^{\mu} \operatorname{Im} m_j(\lambda + i\varepsilon)\, d\lambda, \quad (j = 1, 2). \tag{36}$$

Доказательство. Так как в силу (33) $M_{11}(z)$ и $M_{22}(z)$ являются функциями класса N, то из условия $M_{11}(z) M_{22}(z) \not\equiv 0$ следует, что $M_{11}(z) M_{22}(z) \neq 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$, а потому функции $m_1(z)$ и $m_2(z)$ регулярны при $\operatorname{Im} z > 0$ (и, между прочим, видно, что $M_{12}^2(z) \neq a^2$ при $\operatorname{Im} z > 0$). Покажем теперь, что $\operatorname{Im} m_1(z) \geqslant 0$ и $\operatorname{Im} m_2(z) \geqslant 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$. Обозначим $m_1(z) = \xi_1 + i\eta_1$, $m_2(z) = \xi_2 + i\eta_2$. Так как

$$m_1(z) + m_2(z) = -\frac{2a}{M_{22}(z)},$$

то

$$\eta_1(z) + \eta_2(z) \geqslant 0 \quad \text{при } \operatorname{Im} z > 0,$$

и остается показать теперь, что и $\eta_1(z)\eta_2(z) \geqslant 0$ при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Для этого заметим, что в силу (35)

$$M_{11}=2a\frac{m_1m_2}{m_1+m_2},\quad M_{22}=-2a\cdot\frac{1}{m_1+m_2},$$
$$M_{12}=M_{21}=-a\,\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2},$$

и подставим эти выражения в неравенство

$$(\operatorname{Im}M_{11})(\operatorname{Im}M_{22})-(\operatorname{Im}M_{12})^2\geqslant 0,\quad \operatorname{Im}z>0,$$

вытекающее из условия (33). Имеем, отбрасывая положительный множитель,

$$(\eta_1+\eta_2)[(\xi_1^2+\eta_1^2)\eta_2+(\xi_2^2+\eta_2^2)\eta_1]-(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)^2\geqslant 0,$$

откуда следует

$$\eta_1\eta_2[(\xi_1+\xi_2)^2+(\eta_1+\eta_2)^2]\geqslant 0,$$

а потому $\eta_1\eta_2\geqslant 0$ и лемма доказана.

Теорема 3. *Для того, чтобы симметричная вещественная неубывающая матрица-функция* $R(\lambda)=\|\rho_{jk}(\lambda)\|_{j,k=1}^2$ *была спектральной матрицей уравнения (1) на оси* $-\infty<x<\infty$ *с потенциалом* $q(x)$, *имеющим* $r_1\geqslant 0$ *непрерывных производных при* $-\infty<x\leqslant 0$ *и* r_2 *непрерывных производных при* $0\leqslant x<\infty$, *(при* $x=0$ *производные понимаются как односторонние), необходимо и достаточно, чтобы при* $\operatorname{Im}z>0$ *функции* $M_{jk}(z)$, *построенные в соответствии с формулами теоремы 2, удовлетворяли соотношению (32):*

$$M_{11}(z)M_{22}(z)-M_{12}^2(z)=-\frac{1}{4}$$

и чтобы само построение функций $M_{jk}(z)$ *было возможно а также, чтобы однозначно отвечающие функциям* $M_{jk}(z)$ *в силу леммы 3* $\left(\textit{при } a=\frac{1}{2}\right)$ *неубывающие функции* $\rho_1(\lambda)$, $\rho_2(\lambda)$ *были бы спектральными функциями задач Штурма — Лиувилля на полуоси с условиями типа косинуса при* $x=0$ *и с потенциалами, обладающими соответственно* r_1 *и* r_2 *непрерывными производными. (Напомним, что при наличии краевых условий для уравнения (1) при* $x=\pm\infty$, *рассматриваются только распадающиеся условия). При этом по спектральной функции* $\rho_1(\lambda)$ *восстанавливается потенциал на полуоси* $(-\infty, 0]$, *а по* $\rho_2(\lambda)$ *— на полуоси* $[0,\infty)$.

Доказательство вытекает из предыдущего с очевидностью.

Отметим следующую простую теорему.

Теорема 4. *Если спектральная матрица* $R(\lambda)$ *уравнения (1) диагональна, то потенциал* $q(x)$ *— четный, и если при* $x=\pm\infty$ *наложены распадающиеся краевые условия, то они симметричны.*

Доказательство. Если $\rho_{12}(\lambda)=\rho_{21}(\lambda)=0$, то и $M_{12}(z)=M_{21}(z)=0$, а потому в силу формулы (35) с $a=\frac{1}{2}$

$$m_1(z)=m_2(z)=2M_{11}(z),$$

что влечет совпадение спектральных функций $\rho_1(\lambda)$ и $\rho_2(\lambda)$, отвечающих краевым задачам для уравнения (1) соответственно на левой и на правой полуосях, откуда следует четность потенциала и симметричность краевых условий, если таковые имеются при $x=\pm\infty$.

Впрочем, четность $q(x)$ легко доказывается и непосредственно исходя из уравнения (7), без предположения о виде краевых условий на бесконечности. Действительно, если спектральная матрица диагональна, то функция $f(x, y)$ (8) обладает, как легко видеть, свойством $f(x, y) = f(-x, -y)$.

Поэтому из уравнения (7) следует, что $K(x, y) = -K(-x, -y)$, и, в частности, что $K(x, x) = -K(-x, -x)$, а так как

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}K(x, x),$$

то потенциал $q(x)$ является четной функцией.

Замечание. Представляется правдоподобным предположение, что достаточная гладкость функции $F(x, y)$ (8) (например, условие A во введении) совместно с соотношением (32) для построенных по неубывающей эрмитовой матрице $R(\lambda)$ функций $M_{jk}(z)$ обеспечивают разрешимость обратной задачи для заданной матрицы $R(\lambda)$. Во всяком случае, для диагональных матриц $R(\lambda)$ это предположение легко доказывается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Ч. Титчмарш. Разложение по собственным функциям, т. I. Изд-во иностр. лит., М., 1960.
2. Б. М. Левитан. Разложение по собственным функциям. Гостехиздат, М., 1950.
3. Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-во иностр. лит., М., 1958.
4. И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. «Изв. АН СССР сер. матем»., 15 (1951), 309—360.
5. М. Г. Крейн. О переходной функции одномерной краевой задачи второго порядка. ДАН СССР, 88, № 3 (1953), 405—408.
6. В. А. Марченко. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка. ДАН СССР 72, № 3 (1950), 457—460.
7. Б. М. Левитан и М. Г. Гасымов. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам. «Усп. матем. наук», 19, вып. 2 (1964), 3—63.
8. А. Ш. Блох. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной матрице-функции. ДАН СССР 92; № 2 (1953), 209—212.
9. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Изд-во «Наукова думка», К., 1965.
10. Б. М. Левитан. Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, II. «Изв. АН СССР, сер. матем»., 19 (1955), 33—58.
11. В. А. Марченко. Теоремы тауберова типа в спектральном анализе дифференциальных операторов. «Изв. АН СССР, сер. матем»., 19 (1955), 381—422.
12. Н. И. Ахиезер. Классическая проблема моментов. Физматгиз, М., 1961.
13. Н. И. Ахиезер. и И. М. Глазман. Теория линейных операторов. Изд-во «Наука», М., 1966.
14. М. Г. Крейн. Аналог неравенств Чебышева — Маркова в одномерной краевой задаче. ДАН СССР, 89, № 1 (1953), 5—8.
15. В. А. Марченко. О формулах обращения, порождаемых линейным дифференциальным оператором второго порядка. ДАН СССР, 74, № 4 (1950), 657—660.
16. А. В. Штраус. О спектральных функциях дифференциальных операторов. «Изв. АН СССР, сер. матем.» 19 (1955), 201—220.
17. И. С. Кац. Кратность спектра дифференциального оператора второго порядка и разложение по собственным функциям. «Изв. АН СССР, сер. матем.», 27 (1963) 1081—1112.
18. В. Н. Фунтаков. Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных уравнений второго порядка. ДАН СССР, 144. № 3 (1962), 505—508.

Поступила 12 апреля 1966 г.