ЗАПИСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ФАКУЛЬТЕТА ХГУ и ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

1950 Том XXII

РЕГУЛЯРНОСТЬ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

А. В. Погорелов

(Харьков)

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая работа посвящена изучению регулярности выпуклых поверхностей с регулярной метрикой.

Выпуклую поверхность мы будем называть регулярной (k раз диференцируемой), если в окрестности каждой точки на поверхности можно ввести координаты u, v так, что радиус-вектор r (u, v) точки поверхности будет регулярной (k раз диференцируемой) функцией переменных u, v. Если же координаты u, v могут быть введены так, что r (u, v) будет аналитической функцией, то поверхность будем называть аналитической.

Относительно выпуклой поверхности мы будем говорить, что она имеет регулярную (k раз диференцируемую) метрику, если в окрестности каждой её точки могут быть введены координаты u, v так, что коэфициенты квадратичной формы $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ — линейного элемента поверхности будут регулярными (k раз диференцируемыми) функциями переменных u, v. Если же при надлежащем выборе координат E, F и G будут аналитическими функциями, то будем говорить, что метрика поверхности — аналитическая.

Очевидно, если выпуклая поверхность регулярна (k раз диференцируема), то метрика поверхности тоже регулярна (по крайней мере $k-1$ раз диференцируема).

Пусть теперь метрика выпуклой поверхности регулярна. Что можно сказать о регулярности поверхности? Решение этого вопроса представляет значительный интерес для теории поверхностей по следующей причине. А. Д. Александровым разработаны методы, позволяющие при довольно общих условиях строить выпуклую поверхность, изометричную данной, или выпуклую поверхность, реализующую абстрактно заданную выпуклую метрику. Эти методы позволяют решать многие важные вопросы теории поверхностей, которые не под силу классическим методам.

К сожалению, из способа построения поверхности А. Д. Александрова не следует, что поверхность регулярна, даже если метрика, реализуемая этой поверхностью, является аналитической. Поэтому такое решение с точки зрения классической теории поверхностей не вполне удовлетворительно. Лучшим выходом в таком случае было бы доказательство теоремы, позволяющей из условия регулярности метрики поверхности делать достаточно сильные заключения о регулярности самой поверхности. Такая теорема превратила бы метод А. Д. Александрова в метод классической теории поверхностей. Оказывается, такая теорема имеет место.

Теорема 1. Если выпуклая поверхность имеет регулярную, k раз диференцируемую ($k > 4$) метрику и положительную кривизну, то сама поверхность регулярна (по крайней мере $k-1$ раз диференцируема). Если же метрика аналитическая, то и поверхность аналитическая.

Из этой теоремы могут быть получены различные следствия. Например.

Теорема 2. Если F есть k раз диференцируемая поверхность ($k > 5$) с положительной гауссовой кривизной, то все выпуклые поверхности, полученные из F путем изгибания, диференцируемы по крайней мере $k-2$ раза.

На основе теоремы 1 и теоремы о „склеивании" А. Д. Александрова [1] получается

Теорема 3. Если F_1 и F_2 — две изометричные, одинаково ориентированные, выпуклые поверхности с положительной гауссовой кривизной, из коих хотя бы одна k раз диференцируема ($k > 5$), то у каждой точки P_1 поверхности F_1 есть окрестность ω_1, которую непрерывным изгибанием с сохранением $k-2$ кратной диференцируемости можно перевести в соответствующую по изометрии область ω_2 на поверхности F_2.

Применением теоремы А. Д. Александрова о реализуемости в малом выпуклой метрики выпуклой поверхностью получается

Теорема 4. Если метрика, заданная в области G, k раз диференцируема ($k > 4$), то каждая точка области G имеет окрестность, в которой заданную метрику можно реализовать $k-1$ раз диференцируемой поверхностью. Более того, любая реализация этой метрики выпуклой поверхностью $k-1$ раз диференцируема.

Из теоремы 1 и теоремы А. Д. Александрова о существовании замкнутой выпуклой поверхности, реализующей заданную на сфере выпуклую метрику [2], следует

Теорема 5. (Вейль [3]). Аналитическая метрика с положительной гауссовой кривизной, заданная на сфере, реализуема аналитической замкнутой выпуклой поверхностью.

В настоящей работе, кроме перечисленных теорем, получены и другие геометрические результаты, играющие вспомогательную роль, но не лишенные и самостоятельного интереса.

Теорема 6. Пусть F — регулярная выпуклая шапочка с положительной гауссовой кривизной, ограниченная кривой, геодезическая кривизна которой всюду положительна. Тогда могут быть указаны числа $\alpha > 0$ и M, зависящие только от внутренней метрики шапочки (т. е. от коэфициентов E, F, G квадратичной формы ds^2 и их производных), минимума гауссовой кривизны шапочки и минимума геодезической кривизны, ограничивающей шапочку кривой, такие, что углы, образуемые касательными плоскостями шапочки с плоскостью её основания, не превосходят $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, а нормальная кривизна (кривизна нормальных сечений) нигде не превосходит M.

Теорема 7. Пусть F — регулярная шапочка с положительной гауссовой кривизной. Тогда в каждой внутренней точке шапочки может быть указана оценка для нормальной кривизны, зависящая только от внутренней метрики шапочки, расстояния точки до плоскости основания шапочки и наибольшего угла, образуемого касательными плоскостями шапочки с плоскостью её основания.

Некоторый интерес могут представить два результата, касающиеся диференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа.

Теорема 8. Пусть $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ — уравнение в частных производных эллиптического типа, $z(x, y)$ — трижды непрерывно диференцируемое его решение.

Тогда, если F k раз диференцируемая функция по всем аргументам $(k > 2)$, то решение $z(x, y)$ диференцируемо по крайней мере $k+1$ раз[1].

Теорема 9. Пусть $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ — регулярное уравнение эллиптического типа, $z(x, y)$ — его регулярное решение в круге ω_ε $(x^2 + y^2 \leqslant \varepsilon^2)$.

Тогда внутри круга $\omega_{\bar\varepsilon}$ $(\bar\varepsilon < \varepsilon)$ можно указать оценку сверху для производных k-го порядка решения $z(x, y)$ в зависимости только от верхней грани модуля z и её производных до второго порядка в круге ω_ε, нижней грани дискриминанта уравнения $\Delta = F_r F_t - \frac{1}{4} F_s^2$, верхней грани модулей производных функции F до s-го порядка, причем $s = 3$ при $k = 3$ и $s = k - 1$ при $k > 3$.

Теорема 8 позволяет несколько улучшить полученный нами ранее результат о распространении общей теоремы единственности А. Д. Александрова на случай неаналитических поверхностей [4].

Теорема 10. Пусть $\Phi(R_1 + R_2, R_1 \cdot R_2, \bar n)$ — трижды непрерывно диференцируемая функция единичного вектора $\bar n$ и переменных R_1, R_2, определенная для всех $\bar n$ и $R_1, R_2 > 0$, удовлетворяющая условию

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial R_2} > 0.$$

Если для каждой точки трижды непрерывно диференцируемой замкнутой выпуклой поверхности с положительной гауссовой кривизной заданы значения $\varphi(\bar n)$ функции $\Phi(R_1 + R_2, R_1 \cdot R_2, \bar n)$, когда R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности, а n — единичный вектор нормали к ней, то поверхность определяется однозначно с точностью до параллельного переноса.

[1] Теорема и доказательство обобщаются на случай, когда z — функция n аргументов.

Глава I

О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1.

Некоторые сведения об уравнении в частных производных эллиптического типа вида $Ar+2Bs+Ct=Dz$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые предложения, касающиеся уравнений типа, указанного в заголовке настоящего параграфа. Чтобы упростить изложение, некоторые из них мы сформулируем, другие докажем. Все эти результаты принадлежат С. Н. Бернштейну и содержатся в его известной работе [5].

Итак, речь будет итти об уравнении вида

$$Ar+2Bs+Ct=Dz. \tag{1}$$

Относительно этого уравнения мы будем предполагать следующее:

1. Коэфициенты A, B, C, D суть аналитические функции x, y в круге ω $(x^2+y^2\leqslant a^2)$.

2. В упомянутом круге $AC-B^2>0$ (условие эллиптичности), $A>0$ и $D>0$.

Эти предположения относительно уравнения (1) будут сохраняться до конца параграфа. С. Н. Бернштейн доказал, что *при таких предположениях краевая задача для уравнения (1) всегда разрешима для любой аналитической функции, заданной в качестве граничных значений решения.* Более полно, *если $\varphi(s)$ — любая аналитическая функция дуги окружности круга ω, то всегда существует и притом единственная аналитическая функция $z(x, y)$, удовлетворяющая в упомянутом круге уравнению (1) и принимающая на его окружности значения $\varphi(s)$.*

Эту теорему Бернштейн получает из общего предложения, доказанного им для линейных уравнений эллиптического типа, благодаря возможности получения в данном случае априорных оценок для максимума модуля решения и его производных первого порядка. В дальнейшем нам понадобится не только факт существования решения краевой задачи уравнения (1), но и возможность получения указанных выше оценок. В связи с этим мы воспроизведем известное рассуждение Бернштейна, делая незначительные отступления в сторону упрощения, которое оказывается возможным благодаря частному характеру рассматриваемого уравнения.

Начнем с оценки максимума модуля решения $z(x, y)$. Мы утверждаем, что *этот максимум не превосходит максимума модуля функции $\varphi(s)$, заданной на границе круга ω.* Действительно, допустим, что это верно. Тогда максимум модуля $z(x, y)$ достигается в некоторой внутренней точке P. В этой точке для функции z выполняются обычные условия:

$$(z^2)_x=(z^2)_y=0;\ (z^2)_{xx}\leqslant 0,\ (z^2)_{yy}\leqslant 0;\ (z^2)_{xx}(z^2)_{yy}-(z^2)_{xy}{}^2\geqslant 0.$$

В силу эллиптичности уравнения (1) форма

$$A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2$$

положительно определенная. Поэтому выражение

$$A(z^2)_{xx}+2B(z^2)_{xy}+C(z^2)_{yy}+z(Ar+2Bs+Ct)\leqslant 0.$$

Однако из уравнения (1) ясно, что это выражение положительно. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано.

Переходим к оценке верхней грани модулей p и q — первых производных решения z(x, y). Следуя Бернштейну, получим такие оценки сначала на границе круга ω.

Так как производная от z по дуге окружности круга ω ограничена максимумом модуля первой производной функции $\varphi(s)$, то нам достаточно оценить верхнюю грань модуля производной z по радиусу круга. Найдем, например, оценку сверху этой производной (оценка снизу получается аналогично). Для этого введем в наше уравнение функцию u(x, y), связанную с z(x, y) равенством

$$z = -n + \ln u,$$

где n — максимум модуля z в круге ω. Уравнение (1) при этом принимает вид:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = \frac{1}{u}(Au_x^2 + 2Bu_x u_y + Cu_y^2) + D(-n + \ln u). \quad (2)$$

Получение оценки для z_ρ сверху равносильно получению такой оценки для u_ρ.

Так как A, C и $AC - B^2$ в круге ω имеют положительную нижнюю грань, а $u > 0$ и ограничено (поскольку ограничен модуль z), то при достаточно большом m для любых значений u_x и u_y, удовлетворяющих неравенству

$$u_x^2 + u_y^2 > m,$$

правая часть уравнения (2) положительна. Далее, легко указать такое m_1, что если

$$u_\rho > m_1, \text{ то } u_x^2 + u_y^2 > m.$$

Обозначим γ кривую на поверхности, заданной уравнением $z = u(x, y)$, которая проектируется в ограничивающую круг ω окружность. Проведем в произвольной точке S кривой γ касательную плоскость к ней. Пусть $z = v(x, y)$ её уравнение, v_ρ — производная функция v(x, y) вдоль радиуса, идущего в проекцию точки S. Из геометрических соображений ясно, что существует число $m_2 > 0$, зависящее только от максимума модуля функции $\varphi(s)$ и её производных до второго порядка, такое, что если $v_\rho > m_2$, вся кривая γ располагается ниже построенной плоскости, кроме точки S, которая лежит на ней.

Теперь легко видеть, что $u_\rho < 2(m_1 + m_2)$. В самом деле, допустим, что в точке, которая служит проекцией точки S, $u_\rho \geqslant 2(m_1 + m_2)$. Строим в точке S касательную плоскость, для которой $2(m_1 + m_2) > v_\rho > m_1 + m_2$. Она разбивает поверхность $z = u(x, y)$, причем весь край поверхности находится снизу. Поэтому существует плоскость, ей параллельная, касающаяся поверхности в некоторой внутренней точке, причем вся поверхность расположена ниже плоскости. Пусть P — проекция этой точки на плоскость xy. В точке P левая часть уравнения по известной причине не положительна, тогда как правая часть больше нуля, поскольку $u_x^2 + u_y^2 > m$.

Итак, для верхней грани модулей производных решения z(x, y) на границе круга ω может быть указан верхний предел, в зависимости только от верхней грани модулей, коэфициентов уравнения (1), верхней грани модуля функции $\varphi(s)$ и её производных до второго порядка нижней грани A, C и $AC - B^2$.

Теперь, когда получены оценки для модулей производных на границе круга, не трудно получить их и во всем круге. Для этого рассмотрим выражение

$$n = p^2 + q^2.$$

Если его максимум достигается на границе круга, то способ получения оценок ясен. Допустим, что максимум w достигается в точке p внутри круга. Не ограничивая общности, можно предположить, что в этой точке $p = 0$, так как выражение w инвариантно относительно поворота системы координат, а надлежащим поворотом её можно всегда добиться, что p будет равно нулю. Далее, в точке P $w_x = w_y = 0$, и, так как $p = 0$, то это дает $s = t = 0$.

Наконец,

$$Aw_{xx} + 2Bn_{xy} + Cw_{yy} = q(Aq_{xx} + 2Bq_{xy} + Cq_{yy}) \leqslant 0.$$

Разделив уравнение (1) на A и диференцируя его по y, в точке P будем иметь

$$q_{xx} + \frac{2B}{A} q_{xy} + \frac{C}{A} q_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{D}{A} z\right),$$

откуда

$$q(Aq_{xx} + 2Bq_{xy} + Cq_{yy}) = Dq^2 + Aq\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{D}{A}\right).$$

Следовательно, в точке P $q^2 = w$ не превосходит

$$\frac{A^2}{D^2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{D}{A}\right)\right]^2.$$

Таким образом, для уравнения (1) во всем круге ω может быть указан верхний предел модулей производных первого порядка функции z, в зависимости только от верхней грани модулей коэфициентов уравнения их производных первого порядка, нижней грани A, C, $AC - B^2$, верхней грани модуля функции $\varphi(s)$ и её производных до второго порядка.

§ 2.
Другие вспомогательные предложения

Пусть в n-мерной области G задана функция $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ переменных $x_1, x_2, \dots x_n$ [коротко $f(x)$]. Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет в области G условию Гельдера с показателем $\alpha (0 < \alpha < 1)$, если для каждой пары точек x и y в области G выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^\alpha,$$

где $|x - y|$ — расстояние между точками x и y, а C некоторое число, которое мы будем называть постоянной Гельдера.

В дальнейших построениях выбор области G будет **находиться в** нашем распоряжении. Поэтому мы ограничимся рассмотрением **случая**, когда эта область есть n-мерный шар.

Если функция f(x), заданная в n-мерном шаре, **имеет** всюду равномерно ограниченные непрерывные **первые** производные по всем аргументам, то она в этом шаре удовлетворяет условию Гельдера с любым положительным показателем, меньшим единицы.

Действительно:

$$f(x)-f(y)=\sum_{k=1}^{n} f(x_1,\dots x_k, y_{k+1},\dots y_n)-f(x_1,\dots x_{k-1}, y_k\dots y_n).$$

Отсюда

$$|f(x)-f(y)|\leqslant nM|x-y|\leqslant nMd^{1-\alpha}|x-y|^{\alpha},$$

где: M — верхняя грань модулей первых производных функции f,
d — диаметр шара.

Утверждение доказано.

Пусть $f(x)$ — функция, заданная в n-мерном шаре $|x|<a$ с равномерно органиченными и непрерывными производными первого порядка. Пусть, далее, $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)$ и $\varphi_n(\xi)$ n-функций, заданных в двумерной области G, ограниченных по модулю постоянной a и удовлетворяющих в этой области условию Гельдера с показателем α и постоянной Гельдера C.

Тогда функция $F(\xi)=f(\varphi_1,\dots\varphi_n)$ в области G удовлетворяет условию Гельдера с показателем α и постоянной Гельдера, зависящей только от C и верхней грани M — модулей производных функции f по x_k $(k=1,\dots n)$.

В самом деле, подобно предыдущему, легко получаем неравенство:

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M\sum_k |x_k-y_k|.$$

Далее:

$$|\varphi_k(\xi)-\varphi_k(\eta)|\leqslant C|\xi-\eta|^{\alpha}.$$

Отсюда

$$|\bar{f}(\xi)-\bar{f}(\eta)|\leqslant nMC|\xi-\eta|^{\alpha}.$$

Утверждение доказано.

Рассмотрим теперь вопрос об аппроксимации функции f(x), m-е, производные которой удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\alpha(0<\alpha<1)$.

Пусть в n-мерном шаре ω_1 $(|x|\leqslant a)$ задана m раз диференцируемая функция f(x), m-е, производные которой удовлетворяют условию Гельдера с показателем α и постоянной Гельдера C. Пусть, далее, ω — шар с тем же центром, что и ω_1, но радиусом $\frac{a}{2}$. Тогда существует последовательность аналитических функций, $f_k(x)$, сходящихся равномерно с их производными до m-го порядка в шаре ω к функции $f(x)$, причем m-е производные функции $f_k(x)$ удовлетворяют в области ω условию Гельдера с показателем α и постоянной Гельдера, не зависящей от n.

Доказательство. Положим:

$$p_n(x, y) = k_n\left(1 - \frac{|x-y|^2}{4a^2}\right)^n,$$

где k_n — постоянная, выбранная под условием:

$$\int_{\omega_1} p_n(0, y)\,dy = 1 \qquad (dy = dy_1\,dy_2 \ldots dy_n).$$

Функция $p_n(x, y)$ есть, очевидно, многочлен степени $2n$.

Строим теперь $m+1$ раз диференцируемую функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{aligned} &а)\ \varphi(x) = 1 && \text{внутри шара } \bar{\omega}; \\ &б)\ \varphi(x) = 0 && \text{вне шара } \omega_1. \end{aligned}$$

Очевидно, построение такой функции не составляет труда. Положим:

$$\bar{f}(x) = f(x)\,\varphi(x).$$

Функция $\bar{f}(x)$ внутри шара $\bar{\omega}$ совпадает с функцией $f(x)$. Поэтому наше утверждение достаточно доказать для нее.

Рассмотрим последовательность аналитических функций

$$f_n(x) = \int_{\omega_1} \bar{f}(y)\,p_n(x, y)\,dy.$$

Из непрерывности функции $\bar{f}(x)$ следует равномерная сходимость функций $f_n(x)$ к $f(x)$ в области $\bar{\omega}$.

Вычислим производную от $f_n(x)$ по x_k.

$$\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{1}{\Delta x_k}\left(\int_{\omega_1} \bar{f}(y)\,p_n(x+\Delta x, y)\,dy - \int_{\omega_1} \bar{f}(y)\,p_n(x, y)\,dy\right),$$

где

$$\Delta x = (0, \ldots \Delta x_k, \ldots 0).$$

Произведем замену переменных в первом интеграле, полагая

$$y' = y + \Delta x.$$

Тогда выражение под знаком lim примет вид:

$$\frac{1}{\Delta x_k}\left(\int_{\omega_2} \bar{f}(y+\Delta y)\,p_n(x, y)\,dy - \int_{\omega_1} \bar{f}(y)\,p_n(x, y)\,dy\right),$$

где ω_2 — новая область интегрирования — шар ω_1, смещенный на Δx. Последнее выражение удобно представить так:

$$\frac{1}{\Delta x_k}\left\{\int_{\omega_2^1}\bar{f}(y+\Delta x)\,p_n(x,y)\,dy+\int_{\omega_{12}}(f(y+\Delta x)-\bar{f}(y))\,p_n(x,y)\,dy+\right.$$

$$\left.+\int_{\omega_1^2} f(y)\,p_n(x,y)\,dy\right\}.$$

Здесь области ω_2^1, ω_{12} и ω_1^2, имеют следующие значения: ω_2^1 — часть шара ω_2, лежащая вне шара ω_1, ω_1^2 — часть шара ω_1, лежащая вне шара ω_2, наконец, ω_{12} — общая часть шаров ω_1 и ω_2.

Из трех интегралов первый и последний равны нулю, так как $f(y+\Delta x)=0$ в ω_2^1, а $\bar{f}(y)=0$ в ω_1^2. Поэтому

$$\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_k}=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{1}{\Delta x_k}\left(\int_{\omega_{12}}\left(\bar{f}(y+\Delta x)-\bar{f}(y)\right)\,p_n(x,y)\,dy\right)=$$

$$=\int_{\omega_1}\frac{\partial\bar{f}(y)}{\partial x_k}\,p_n(x,y),\ dy.$$

Из непрерывности производных $\frac{\partial\bar{f}(x)}{\partial x_k}$ следует равномерная сходимость функций $\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_k}$ к $\frac{\partial\bar{f}(x)}{\partial x_k}$, т. е. к $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ в области $\bar{\omega}$. Применяя то же рассуждение к первым производным устанавливаем равномерную сходимость вторых производных и т. д. до производных m-го порядка.

То, что m-е производные функций $f_n(x)$ в $\bar{\omega}$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем α и постоянной Гельдера, не зависящей от n, устанавливается так же легко. Пусть, например, $f_n^{(m)}(x)$ — какая-нибудь m-х производная функции $f_n(x)$.

Тогда

$$f_n^{(m)}(x)=\int_{\omega_1}\bar{f}^{(m)}(x)\,p_n(x,y)\,dy.$$

Далее,

$$f_n^{(m)}(x+\Delta x)-f_n^{(m)}(x)=\int_{\omega_{12}}\left(\bar{f}^{(m)}(y+\Delta x)-\bar{f}^{(m)}(y)\right)p_n(x,y)\,dy.$$

Отсюда

$$\left|f_n^{(m)}(x+\Delta x)-f_n^{(m)}(x)\right|\leqslant cvd^{1-\alpha}\left|\Delta x\right|^{\alpha},$$

где v — объем шара ω_1, d — диаметр шара $\bar{\omega}$.

Утверждение доказано полностью.

Этот параграф мы закончим формулировкой одной теоремы Шаудера [6], которой воспользуемся в дальнейшем.

Пусть в ограниченной области G переменных x_1, x_2 рассматривается линейное уравнение в частных производных эллиптического типа

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{dx_1^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=f(x_1, x_2),$$

причем $a_{11}\,a_{22}-a_{12}^2=1$. Пусть, далее, в замкнутой области $\overline{G}$ коэфициенты уравнения a_{ij} и его правая часть $f(x_1, x_2)$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\alpha+\varepsilon\,(0<\alpha<1,\ \varepsilon>0)$ и постоянной Гельдера M.

Тогда, *если вторые производные решения* $u(x, y)$ *удовлетворяют условию Гельдера с показателем* α, *то для верхней грани модулей производных* $u(x, y)$ *первого и второго порядка в области* B, *которая вместе с границей содержится в* G, *и для наименьших постоянных Гельдера вторых производных функции* $u(x, y)$, *относительно области* B *и показателя* α *может быть указан верхний предел, в зависимости только от* M, *максимума модуля* $u(x, y)$ *в* G *и расстояния области* B *до границы области* G.

§ 3.
Регулярность решений уравнений в частных производных эллиптического типа

Основным результатом этого параграфа, как и всей первой главы, является доказательство следующей теоремы.

Пусть $F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$ — уравнение в частных производных эллиптического типа, $z(x, y)$ — его трижды непрерывно диференцируемое решение в области G.

Тогда, если функция F n раз диференцируема по всем аргументам, то функция $z(x, y)$ в области G диференцируема по крайней мере $n+1$ раз.

Доказательство. Вводим в рассмотрение уравнение

$$A\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}=D\zeta, \tag{1}$$

где

$$A=\frac{\partial F}{\partial r},\quad B=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial s},\quad C=\frac{\partial F}{\partial t},$$

$$D=\frac{2\lambda\left(\dfrac{\partial F}{\partial r}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\right)-r\dfrac{\partial F}{\partial p}-s\dfrac{\partial F}{\partial q}-p\dfrac{\partial F}{\partial z}-\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\mu+p+\lambda(x^2+y^2)};$$

постоянные λ и μ выбраны так, что в малом круге ω, целиком лежащем в области G, выполняется неравенство

$$2\lambda\left(\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\partial F}{\partial t}\right)-r\frac{\partial F}{\partial p}-s\frac{\partial F}{\partial q}-p\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial x}>0,$$

$$\mu+p+\lambda(x^2+y^2)>0.$$

A, B, C, D — известные функции от x и y в том смысле, что после формального их выражения через производные F, мы подставляем $z = z(x, y)$ (решение уравнения $F = 0$) и его производные p, q, r, s, t.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функция

$$\zeta = \mu + p + \lambda(x^2 + y^2)$$

удовлетворяет уравнению (1).

Коэфициенты уравнения (1) имеют непрерывные и ограниченные первые производные в круге 2ω, концентричном кругу ω в два раза большего радиуса, так как он, в силу малости круга ω, тоже содержится целиком внутри области G.

Способом, указанным в § 2 настоящей главы, построим последовательность аналитических функций A_n, B_n, C_n, D_n, p_n. Первые четыре функции сходятся равномерно в круге ω и A, B, C, D соответственно вместе с их производной первого порядка, функция p_n сходится равномерно в этом круге к p вместе с производными до второго порядка.

Вводим в рассмотрение уравнение

$$\bar{A}_n \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + 2\bar{B}_n \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} + \bar{C}_n \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = \bar{D}_n\zeta, \tag{2}$$

где

$$\bar{A}_n = \frac{A_n}{\Delta_n}, \ldots \bar{D}_n = \frac{D_n}{\Delta_n}, \quad \Delta_n = \sqrt{A_n C_n - B_n^2}.$$

При достаточно больших n $A_n C_n - B_n^2 > 0$ и $D_n > 0$. Поэтому по теореме С. Н. Бернштейна, цитированной в начале первого параграфа, существует аналитическое решение ζ_n уравнения (2), принимающее на границе круга ω значения p_n. Далее, из предложения об оценках максимума модуля решения и его производных первого порядка, также содержащегося в § 1, следует существование не зависящих от n оценок для $|\zeta_n|$, $\left|\frac{\partial\zeta_n}{\partial x}\right|$ и $\left|\frac{\partial\zeta_n}{\partial y}\right|$ в круге ω.

В самом деле, как показано в § 1, такие оценки могут быть получены в зависимости только от верхней грани модулей коэфициентов уравнения (2), их производных первого порядка, верхней грани величин $\frac{1}{\bar{A}_n}$, $\frac{1}{\bar{C}_n}$, $\frac{1}{\left(\bar{A}_n \bar{C}_n - \bar{B}_n^2\right)}$, верхней грани модуля p_n и её производных до второго порядка. Из свойств сходимости функций $A_n, \ldots D_n$, p_n ясно, что для всех упомянутых величин, начиная с некоторого N, может быть указан верхний предел, не зависящий от n.

Применяя теперь к уравнению (3) теорему Шаудера, приведенную в конце второго параграфа, заключаем, что внутри круга ω_1, содержащегося внутри круга ω, модули вторых производных решения ζ_n равномерно (по n) ограничены, и эти производные удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ в круге ω, с постоянной Гельдера, не зависящей от n. Действительно, оценки для упомянутых величин зависят только от постоянной Гельдера для коэфициентов

$\bar{A}_n$, $\bar{B}_n$, $\bar{C}_n$, правой части уравнения $\zeta_n \bar{D}_n$ и максимума модуля решения ζ_n в круге ω. Но для постоянной Гельдера может быть указано число, годное при всех n, а оценка верхнего предела ζ_n, не зависящая от n, получена ранее.

Последовательность функций ζ_n равностепенно непрерывна в круге ω, а их производные второго порядка в круге ω_1, удовлетворяют условию Гельдера с показателем α и постоянной Гельдера C, не зависящей от n. Поэтому можно выбрать сходящуюся подпоследовательность функций ζ_{n_k}. Предельная функция $\bar{\zeta}$ этой подпоследовательности будет дважды непрерывно диференцируемой во всем круге ω (кроме, может быть, его границы) и в любом круге ω_1, целиком содержащемся в ω, будет удовлетворять условию Гельдера с показателем α. Кроме того функция $\bar{\zeta}$ будет удовлетворять предельному уравнению, т. е. уравнению (1), и, следовательно, в силу единственности решения уравнения (1),

$$\bar{\zeta} = \mu + p + \lambda(x^2 + y^2).$$

Отсюда мы делаем важный вывод, что третьи производные $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ решения уравнения $F = 0$ в круге ω_1 удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\alpha (0 < \alpha < 1)$. Такое же заключение аналогично может быть получено для остальных третьих производных функции z.

Итак, использовав пока только двукратную диференцируемость функции F и троекратную диференцируемость решения, мы показали, что третьи производные в круге ω_1 удовлетворяют условию Гельдера с любым положительным показателем, меньшим единицы. Это дает нам право утверждать, в силу предложений § 2, что функции A_n, B_n, C_n, D_n в круге ω_1 не только обладают непрерывными производными, но что их производные удовлетворяют условию Гельдера с показателем α и постоянной Гельдера, не зависящей от n.

Продиференцируем уравнение (3) по x или y (например, по y). Получим:

$$\bar{A}_n \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \zeta_n}{\partial y}\right) + 2\bar{B}_n \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y}\left(\frac{\partial \zeta_n}{\partial y}\right) + \bar{C}_n \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \zeta_n}{\partial y}\right) = f.$$

Применяя к этому уравнению снова теорему Шаудера и беря в качестве области G круг ω_1, а за область B круг ω_2, содержащийся в ω_1, мы видим, что для вторых производных функций $\frac{\partial \zeta_n}{\partial y}$ в области ω_2, так же как и для наименьших постоянных Гельдера этих производных относительно показателя $\alpha - \varepsilon$, можно указать оценку сверху, не зависящую от n. Отсюда, подобно предыдущему, следует, что функция $z(x, y)$ имеет в круге ω_2 четвертые производные, удовлетворяющие условию Гельдера.

Итак, использовав троекратную диференцируемость функции F, мы доказали четырехкратную диференцируемость решения z. Доказательство существования производных пятого и последующих порядков функции z производится так же, как и для производных четвертого порядка.

Теорема доказана.

Глава II

О ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЕ ВЫПУКЛЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1.

Внешняя кривизна у края выпуклой поверхности

В этой главе будут рассматриваться регулярные выпуклые поверхности. Выпуклую поверхность мы будем называть регулярной (k раз диференцируемой), если в окрестности каждой её точки могут быть введены локальные координаты u, v так, что радиус-вектор точки поверхности $r(u, v)$ будет регулярной (k раз диференцируемой) функцией переменных u, v. Выпуклую поверхность будем называть аналитической, если локальные координаты могут быть введены так, что вектор-функция $r(u, v)$ будет аналитической.

Под внешней кривизной выпуклой поверхности мы понимаем кривизну её нормальных сечений.

В этом параграфе, так же как и в следующих двух, будут рассматриваться в известном смысле простейшие выпуклые поверхности с краем — выпуклые шапочки. Выпуклой шапочкой называется поверхность, которая отрезается от замкнутой выпуклой поверхности плоскостью, и притом так, что отрезанная часть однозначно проектируется на секущую плоскость.

Пусть ω — выпуклая шапочка, удовлетворяющая условиям:

1) шапочка ω пять раз диференцируема;

2) гауссова кривизна шапочки всюду больше $k_0 > 0$;

3) существует пять раз диференцируемая выпуклая поверхность, на которой шапочка ω лежит вместе со своим краем, т. е. шапочка ω может быть регулярно (в смысле пятикратной диференцируемости) продолжена за границу;

4) геодезическая кривизна края шапочки всюду больше $\varkappa_0 > 0$.

Наша ближайшая задача заключается в том, чтобы получить оценки для внешней кривизны шапочки ω и угла наклона касательных плоскостей шапочки к плоскости её основания, в зависимости только от величин, относящихся к внутренней геометрии шапочки.

Введем в пространстве прямоугольные декартовы координаты x, y, z, приняв плоскость основания шапочки ω за плоскость x, y, а положительную полуось z направим так, чтобы шапочка ω была в полупространстве $z < 0$.

Если u и v — координаты на поверхности, то как известно, пространственные координаты x, y, z точки поверхности, рассматриваемые как функции переменных u, v, удовлетворяют диференциальному уравнению в частных производных типа Монжа-Ампера с коэфициентами, зависящими от коэфициентов квадратичной формы ds^2 — линейного элемента поверхности — относительно координатной сети u, v. Мы напомним способ Дарбу [7] для получения этого уравнения и попутно решим вопрос о принадлежности полученного уравнения к эллиптическому типу.

Введем на поверхности шапочки ω полугеодезическую координатную сеть u, v. Тогда линейный элемент поверхности, как известно, имеет вид

$$ds^2 = du^2 + C^2 dv^2.$$

Рассматривая x, y, z как функции u и v, имеем тождественно

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

Отсюда

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 - dz^2.$$

Слева в этом равенстве мы имеем линейный элемент плоскости. Поэтому гауссова кривизна, выраженная через коэфициенты квадратичной формы, стоящей справа, равна нулю. Это и дает для функции $z(u, v)$ искомое уравнение

$$F = r(t+\alpha) - (s-\beta)^2 + \gamma = 0, \qquad (1)$$

где

$$\alpha = C C_u p - \frac{C_v}{C} q, \quad \beta = \frac{C_u}{C} q,$$

$$\gamma = \frac{C_{uu}}{C}(C^2 - C^2 p^2 - q^2).$$

Для того, чтобы решить вопрос об эллиптичности этого уравнения заметим следующее. Так как ограничивающая шапочку кривая регулярна (в силу условия 3, наложенного на шапочку), то кривизна её везде конечна. Далее, так как геодезическая кривизна этой кривой всюду положительна, то никакая плоскость, касательная к шапочке в точке её границы, не перпендикулярна плоскости края шапочки, т. е. плоскости x, y. Это тем более относится к плоскостям, касающимся шапочки в её внутренних точках.

Дискриминант уравнения (1)

$$\Delta = \frac{\partial F}{\partial r} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2 = -\frac{C_{uu}}{C}(C^2 - C^2 p^2 - q^2)$$

представляет собой произведение двух сомножителей, первый из которых есть гауссова кривизна поверхности, а второй является дискриминантом квадратичной формы

$$ds^2 - dz^2 = dx^2 + dy^2.$$

Но отношение дискриминантов форм $dx^2 + dy^2$ и ds^2 равно $\cos^2\vartheta$, где ϑ — угол, образуемый касательной плоскостью шапочки с плоскостью x, y. И так как $\cos^2\vartheta$ нигде не обращается в нуль, то

$$\Delta > 0$$

для всех точек шапочки, включая и её границу. Таким образом, уравнение (1) является эллиптическим.

Переходим к оценке внешней кривизны шапочки ω вдоль её границы. В связи с этим введем на поверхности шапочки полугеодезическую координатную сеть следующим образом. За линию $u = 0$ мы примем границу γ шапочки ω, за координатные линии семейства u примем геодезические перпендикулярные γ, за семейство линий v — их ортогональные траектории. В качестве параметров u и v примем дугу вдоль линии γ и дуги вдоль линий семейства u.

Получение внутренних оценок для внешней кривизны шапочки ω по существу эквивалентно получению внутренних оценок для первых и вторых производных функции z. Поэтому мы будем заниматься получением именно этих оценок.

Во-первых, заметим, что существует число u_0, зависящее только от метрики шапочки и геодезической кривизны граничной кривой γ, такое, что для всех точек, для которых $u \leqslant u_0$, $|p| < 1$ и $|q| < 2$.

Введем на плоскости прямоугольные декартовы координаты u, v и обозначим G бесконечную полосу, ограниченную осью $u = 0$ и прямой $u = u_0$. Определим теперь в полосе G функцию $\zeta(u, v)$ условиями:

1. Функция $\zeta(u, v)$ периодическая по v с периодом l (l — длина ...вой γ);

2. Для $0 \leqslant u \leqslant u_0$ и $0 \leqslant v < l$ $\quad \zeta(u, v) = q$.

Построенная функция ζ равна 0 на оси $u = 0$, а на прямой $u = u_0$ < 2.

Будем интерпретировать функцию ζ как поверхность, которую обо...чим через Ф. Проведем через прямую $u = 0$ плоскость Π_0, образующую ...лоскостью u, v наименьший угол и так, чтобы поверхность Ф была ...сположена под этой плоскостью. Относительно плоскости Π_0 могут ...ть два предположения: либо она упирается в край поверхности Ф, ...торый проектируется на прямую $u = u_0$, либо она касается поверх...сти Ф в некоторой точке. В первом случае при $u = 0$ $\frac{\partial\zeta}{\partial u} < \frac{2}{u_0}$ следовательно, $s < \frac{1}{u_0}$ вдоль границы шапочки ω.

Рассмотрим второй случай. Диференцируя уравнение (1) по v, ...ходим

$$q_{uu}(t + \alpha) + 2q_{uv}(s - \beta) + q_{vv} r + r\alpha_v + 2(s - \beta)\beta_v + \gamma_v + 0. \qquad (2)$$

В точке касания плоскости Π_0 с поверхностью Ф $q_v = t = 0$. ...оэтому в этой точке $a > 0$, так как дискриминант уравнения (1) су...щественно больше нуля. Это дает право выразить r в точке касания ...з уравнения (1) в форме

$$r = \frac{(s - \beta)^2 - \gamma}{\alpha}.$$

Обращаясь теперь к уравнению (2), мы видим, что в точке каса...ния плоскости Π_0 с поверхностью Ф первые три слагаемые дают ...положительное число, так как форма

$$\xi^2(t + \alpha) + 2\xi\eta(s - \beta) + \eta^2 r$$

...оложительно определенная, а точка касания на поверхности Ф ...е может быть гиперболической. Сумму остальных слагаемых урав...нения (2) можно записать в виде

$$\frac{s^3 C C_u + O_2(s)}{\alpha},$$

...де $O_2(s)$ — многочлен второй степени относительно s с коэфициен...тами, модули которых можно без труда оценить сверху через верхнюю ...рань модулей функции $C(u, v)$ и её производных до третьего порядка.

Так как $\alpha > 0$, $C > \frac{1}{2}$, а $C_u < -\varkappa_0$, то при s, большем некоторого ...исла s_0, определяемого только внутренней метрикой поверхности ...геодезической кривизной кривой γ, сумма остальных членов урав...нения (2) тоже отрицательна. Число s_0 и есть тот предел, которого ...аксимум s не может превзойти. Но значения производной s вдоль ...$= 0$ во всяком случае не больше, чем значение её в точке касания, ...оэтому число s_0 служит верхним пределом для s вдоль кривой γ. ...евидно, оценкой вдоль γ снизу для s является $-s_0$.

Оценку производной r на границе шапочки легко получить, если известен нижний предел для $|p|$ вдоль этой границы. Его нетрудно получить из геометрических соображений. Кривая γ в плоскости ограничивает некоторую выпуклую область $\bar{\omega}$. Так как геодезическая кривизна кривой γ на поверхности шапочки везде $\geqslant \varkappa_0$, то её обычная кривизна тоже больше $\varkappa_0$. Поэтому в область $\bar{\omega}$ можно поместить круг $\tilde{\omega}$ радиуса $\frac{1}{\varkappa_0}$. Представим себе, что круг мы удалили из области $\bar{\omega}$. Через полученное отверстие будем вдвигать непрерывно сферу, кривизна которой меньше, чем наименьшая гауссова кривизна шапочки ω. Ни в какой момент эта сфера, очевидно, не может коснуться поверхности шапочки.

Пусть h — расстояние, на которое выступает эта сфера в положении, когда она упирается в окружность круга $\tilde{\omega}$. Построим теперь конус, основанием которого служит основание шапочки, а вершиной — точка, удаленная от плоскости основания на h и проектирующаяся в центр круга $\tilde{\omega}$. Этот конус лежит весь внутри шапочки. Отсюда следует, что его касательные плоскости вдоль γ образуют с плоскостью основания углы большие, чем касательные плоскости шапочки. Это дает возможность взять в качестве нижней грани для $|p|$ число $\frac{2h}{l}$, где l — длина кривой γ.

Переходим к оценке производной r. Вдоль кривой γ $t=0$, $q=0$, $\frac{2h}{l}<|p|<1$. Из уравнения (1) получаем вдоль γ:

$$r=\frac{(s-\beta)^2-\gamma}{C C_u p},$$

так как $C_u \leqslant -\varkappa_0$, $\quad |p|>\frac{2h}{l}$, и для $|s|$ известна внутренняя оценка, то оценка может быть получена и для r.

Оценив вторые производные вдоль γ, легко оценить внутренним образом и $|p|$. В самом деле, в точке P на кривой γ, где достигается максимум модуля p имеем $s=0$, далее, как и в любой точке кривой γ, $q=t=0$, $p<0$.

Подставляя эти значения в уравнение (1), получим:

$$r C C_u p - C C_{uu} p^2 + C C_{uu} = 0.$$

Отсюда получаем оценку для $|p|$:

$$|p|<p_0<1.$$

В этой оценке важно то, что $p_0<1$.

Результаты, полученные в этом параграфе, можно резюмировать следующим образом:

Для первых и вторых производных функции $z(x,y)$ вдоль края шапочки ω могут быть получены оценки верхней грани их модулей, в зависимости только от величин, относящихся к внутренней геометрии шапочки.

§ 2.

Оценка внешней кривизны для всей поверхности

В предыдущем параграфе мы получили внутренние оценки для шней кривизны на границе выпуклой шапочки. Теперь мы получим ого рода оценки для всей шапочки.

Как было отмечено раньше, получение оценок для внешней кривы поверхности равносильно получению оценок для первых и вто- производных функции z. Это довольно очевидно и не нуждается оказательстве. Однако в следующем параграфе нам понадобится ажение для нормальной кривизны поверхности через производные z. Из этого выражения легко следует эквивалентность получения занных выше оценок. Поэтому выражение для кривизны нормальо сечения через производные функции z приводим здесь.

Пусть ω — выпуклая шапочка, удовлетворяющая условиям 1) — 4) дыдущего параграфа, расположенная, как и раньше, относительно моугольной системы координат так, что её основание лежит в плости xy, а сама шапочка — со стороны $z < 0$.

Проведем через точку X шапочки геодезическую γ в направлении, которому нас интересует нормальная кривизна, и геодезическую γ, пендикулярную γ. Нормальная кривизна поверхности в направле- γ совпадает с кривизной геодезической γ. Поэтому достаточно найти следнюю.

Проведем через геодезическую γ цилиндрическую поверхность Ф бразующими параллельными оси z. Легко найти геодезическую криу кривой γ на этой поверхности. В самом деле, обозначая α угол, разуемый касательной к γ с плоскостью xy, будем иметь

$$\frac{dz}{ds} = \sin\alpha, \qquad \frac{d^2z}{ds^2} = \varkappa\cos\alpha,$$

$\varkappa$—геодезическая кривизна кривой γ, а диференцирование выполнено дуге её. Между геодезической кривизной $\varkappa$ и обычной кривизной k_γ ивой γ существует известное соотношение

$$\varkappa = k_\gamma \sin\vartheta,$$

ϑ — угол, образуемый главной нормалью кривой γ (в данном слу- — нормалью поверхности ω) с нормалью к поверхности Ф. Отсюда ходим выражение для нормальной кривизны k_γ в форме

$$k_\gamma = \frac{1}{\cos\alpha\ \sin\vartheta}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}.$$ [1]

Если никакая касательная плоскость шапочки ω вдоль её края не разует с плоскостью её основания (т. е. с плоскостью xy) угла $\frac{\pi}{2}$, ичина $\frac{1}{\cos\alpha\ \sin\vartheta}$ равномерно ограничена для всех точек шапочки. этому ограниченность кривизны k_γ влечет ограниченность производ- z''_γ, что равносильно существованию оценок для первых и вторых

[1] Заметим, что $\cos\alpha\sin\vartheta = \cos\varphi$, где φ — угол, образуемый касательной плостью шапочки с плоскостью её основания.

производных при любом выборе регулярной координатной сети на поверхности.

Наоборот, если координатная сеть регулярна, ограниченность вторых производных влечет ограниченность z''_γ по всем γ и, следовательно, ограниченность k_γ.

В предыдущем параграфе мы нашли внутреннюю оценку для кривизны нормальных сечений шапочки ω вдоль её края. Теперь могут представиться два случая. Либо кривизна в любой внутренней точке шапочки не превосходит M, либо в некоторых точках по некоторым направлениям она больше M. В первом случае в качестве внутренней оценки для нормальной кривизны для всей шапочки можно взять число M.

Рассмотрим второй случай. Так как в некоторых внутренних точках шапочки нормальная кривизна больше M, то максимум её достигается в некоторой внутренней точке. При этом будем различать снова два случая:

1. Точка X_0, в которой достигается максимум нормальной кривизны, омбилическая.

2. Точка X_0 не является омбилической.

В первом случае нормальная кривизна в точке, где достигается максимум, равна $\sqrt{k}$, где k — гауссова кривизна. И в качестве внутренней оценки для нормальной кривизны можно взять число $\sqrt{k_0}$, где k_0 — максимум гауссовой кривизны на шапочке ω.

Во втором случае точка X_0 не омбилическая. Это позволяет ввести в её достаточно малой окрестности координатную сеть u, v из линий кривизны. В качестве параметров u и v примем дуги вдоль координатных линий, проходящих через точку X_0. И назовем $v=0$ то направление, по которому достигается максимум нормальной кривизны.

Согласно выбору параметров u, v вдоль линии $v=0$ $ds^2=du^2$, а вдоль линии $u=0$ $ds^2=dv^2$. Поэтому для коэфициентов квадратичной формы $ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ — линейного элемента поверхности ω в точке $X_0(u=v=0)$ имеем

$$E=G=1,\ F=0,\ E_u=0,\ G_v=0.$$

Выражения для средней и гауссовой кривизны имеют вид [8]:

$$H=\frac{EN+GL}{EG},$$

$$k=\frac{LN}{EG}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right\},$$

где L и N — первый и третий коэфициенты второй фундаментальной формы поверхности.

Простой вид принимают также формулы Кодацци:

$$L_v=\frac{1}{2}E_v\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right),$$

$$N_u=\frac{1}{2}G_u\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right).$$

Обозначим $\varkappa$ и $\bar{\varkappa}$ большую и соответственно меньшую нормальную кривизну в произвольной точке поверхности ω, близкой X_0. Тогда, из приведенных выше формул для выражения средней и гауссовой кривизны легко следует:

$$\varkappa=\frac{L}{E},\ \bar{\varkappa}=\frac{k}{\varkappa}=\frac{N}{G}.$$

После этого из формул Кодацци получаем:

$$\varkappa_v=\frac{1}{2}\frac{E_v}{E}(-\varkappa+\bar{\varkappa}),\ \bar{\varkappa}_u=\frac{1}{2}\frac{G_u}{G}(\varkappa-\bar{\varkappa}).$$

Разрешая эти равенства относительно E_v и G_u, находим:

$$E_v=\frac{2E\varkappa_v}{-\varkappa+\dfrac{k}{\varkappa}},\ G_u=\frac{2G\left(\dfrac{k}{\varkappa}\right)_u}{\varkappa-\dfrac{k}{\varkappa}}. \qquad (*)$$

Найдем теперь выражение кривизны k в точке X_0. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_{(X_0)}=\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{4}E_v^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_{(X_0)}=\frac{1}{2}G_{uu}-\frac{1}{4}G_u^2.$$

Из равенств (*) получаем:

$$E_{vv}=E_v^2+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2\varkappa_v}{-\varkappa+\dfrac{k}{\varkappa}}\right),$$

$$G_{uu}=G_u^2+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{2\left(\dfrac{k}{\varkappa}\right)_u}{\varkappa-\dfrac{k}{\varkappa}}\right). \qquad (**)$$

Так как в точке X_0 $\varkappa$ достигает абсолютного максимума, то в этой точке $\varkappa_u=\varkappa_v=0$, и равенства (**) дадут:

$$E_{vv}=E_v^2+\frac{2\varkappa_{vv}}{-\varkappa+\dfrac{k}{\varkappa}},$$

$$G_{uu}=G_u^2-\frac{2k\dfrac{\varkappa_{uu}}{\varkappa^2}}{\varkappa-\dfrac{k}{\varkappa}}+2\frac{\dfrac{k_{uu}}{\varkappa}}{\varkappa-\dfrac{k}{\varkappa}}.$$

Подставляя найденные величины в формулу для гауссовой кривизны k, получаем в точке x_0:

$$k = -\left(\frac{1}{4}E_v{}^2 + \frac{1}{4}G_u{}^2 + \frac{2\varkappa_{vv}}{-\varkappa + \frac{k}{\varkappa}} - \frac{2k\varkappa_{uu}}{\varkappa^2\left(\varkappa - \frac{k}{\varkappa}\right)}\right) - \frac{2k_{uu}}{\varkappa^2 - k}.$$

Так как в точке X_0 $\varkappa$ достигает максимума, и по предположению этот максимум больше $\sqrt{k}$ (точка X_0 — не омбилическая), то $\varkappa_{uu} \leqslant 0$, $\varkappa_{vv} \leqslant 0$. Поэтому выражение в скобках не отрицательно. И, следовательно,

$$k \leqslant -\frac{2k_{uu}}{\varkappa^2 - k}. \tag{***}$$

В последнее выражение входит вторая производная по дуге линии кривизны $v=0$. Эта производная совпадает со второй производной по дуге геодезической, идущей из точки X_0 по направлению $v=0$, так как упомянутая линия кривизны в точке X_0 имеет нулевую геодезическую кривизну.

Действительно, для геодезической кривизны известно следующее выражение [8, стр. 193]:

$$k_g = \frac{1}{w}\frac{\Gamma}{(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где

$$w = \sqrt{EG - F^2},$$

а

$$\Gamma = w^2(u'v'' - v'u'') + (Eu' + Fv')\left\{(F_u - \frac{1}{2}E_v)u'^2 + G_u u'v' + \frac{1}{2}G_v v'^2\right\} -$$

$$-(Fu' + Gv')\left\{\frac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u'v' + (F_v - \frac{1}{2}G_u)v'^2\right\}.$$

Но, в силу выбора координат в точке X_0 $E_u = G_v = F_u = F_v = 0$, а $E_v = 0$ благодаря тому, что $\varkappa_v = 0$, как это следует из полученного выше равенства:

$$\varkappa_v = \frac{1}{2}\frac{E_v}{E}(-\varkappa + \bar{\varkappa}).$$

Поэтому $\Gamma = 0$, и, следовательно, $k_g = 0$.

Если обозначить λ максимум второй производной гауссовой кривизны по дуге геодезической на всей поверхности по всем геодезическим, из неравенства (***) получим в точке X_0

$$k < \frac{2\lambda}{\varkappa^2 - k}.$$

Отсюда

$$\varkappa < \sqrt{k + \frac{2\lambda}{k}}.$$

Обозначая k_0 и $\bar{k}_0$ максимум и соответственно минимум гауссовой кривизны шапочки ω, получаем для нормальной кривизны в любой точке по любому направлению оценку

$$\varkappa < \sqrt{k_0 + \frac{2\lambda}{k_0}},$$

что и требовалось получить.

Замечание. Из нашего способа получения оценки для нормальной кривизны следует, что в случае замкнутой выпуклой поверхности нормальная кривизна нигде не превосходит величины

$$\sqrt{k_0 + \frac{2\lambda}{k_0}}.$$

§ 3. Оценка внешней кривизны для внутренних точек выпуклой поверхности

В предыдущем параграфе мы получили оценку внешней кривизны для всех точек выпуклой регулярной шапочки ω, удовлетворяющей условиям 1) — 4) первого параграфа. Эта оценка была найдена в зависимости от внутренней метрики шапочки и геодезической кривизны ограничивающей её кривой. Теперь в этом параграфе мы получим оценку внешней кривизны во внутренних точках шапочки в зависимости только от её внутренней метрики, расстояния точки до плоскости края шапочки и наибольшего угла, образуемого касательными плоскостями шапочки с плоскостью её основания. Полученный в этом параграфе результат имеет решающее значение при доказательстве регулярности выпуклых поверхностей с регулярной метрикой.

Пусть, как и ранее, регулярная выпуклая шапочка ω расположена так, что её основание лежит в плоскости xy, а сама шапочка — в полупространстве $z < 0$. Пусть X — произвольная точка шапочки, $r(X)$ — радиус-вектор точки X, $z(X)$ — компонента по оси z вектора $r(X)$. Проведем из точки X произвольную геодезическую γ и обозначим $\varkappa_\gamma(X)$ нормальную кривизну поверхности в точке x в направлении γ.

Вводим в рассмотрение функцию

$$\bar{w}_\gamma(X) = -z\varkappa_\gamma(X).$$

Эта функция непрерывна по X и γ, положительна во всех внутренних точках шапочки и обращается в нуль на её границе. Поэтому она достигает абсолютного максимума в некоторой внутренней точке X_0 шапочки ω для некоторой геодезической γ_0, проходящей через эту точку.

Введем в окрестности точки X_0 на поверхности ω полугеодезические координаты u, v, приняв геодезическую γ_0 за линию $v=0$, перпендикулярную ей геодезическую $\bar{\gamma}_0$ — за линию $u=0$; за семейство линий u примем геодезические перпендикулярные $\bar{\gamma}_0$, а их ортогональные траектории — за линии v; примем дуги геодезических γ_0 и $\bar{\gamma}_0$, отсчитываемые от точки X_0, в качестве параметров u, v.

Линейный элемент поверхности при таком выборе координат имеет вид

$$ds^2 = du^2 + C^2 dv^2.$$

Относительно функции $C=C(u, v)$ важно заметить следующее. Вдоль линии $u=0$, в частности, в точке X_0,

$$C=1, \qquad C_u=C_v=C_{uv}=0, \qquad C_{uu}=-k,$$

где k — гауссова кривизна поверхности.

Как показано в первом параграфе настоящей главы, функция $z(X)$ удовлетворяет уравнению

$$r(t+\alpha)-(s-\beta)^2+\gamma=0, \tag{1}$$

где

$$\alpha=CC_u p-\frac{C_v}{C}q; \qquad \beta=\frac{C_v}{C}q;$$

$$\gamma=-CC_u p^2-\frac{C_{uu}}{C}q^2+CC_{uu}.$$

С помощью функции $\overline{w}_\gamma(X)$ вводим функцию $\overline{w}(X)$ равенством

$$\overline{w}(X)=\overline{w}_{\gamma(X)}(X),$$

где $\gamma(x)$ — геодезическая семейства u, проходящая через точку X.

Функции $\overline{w}(X)$, так же как и функция $\overline{w}_\gamma(X)$, достигает абсолютного максимума в точке X, и эти максимумы совпадают.

Нетрудно получить выражение для $\overline{w}$ через производные функции z. В самом деле, во втором параграфе мы получили выражение для нормальной кривизны $\varkappa_\gamma(X)$ в точке X по направлению геодезической γ в виде

$$\varkappa_\gamma(X)=\frac{z_\gamma''(X)}{\cos\varphi(X)},$$

где $\varphi(X)$ — угол, образуемый касательной плоскостью шапочки в точке X с плоскостью её основания.

Далее, в первом параграфе мы нашли, что

$$1-p^2-\frac{q^2}{C^2}=\cos^2\varphi.$$

Отсюда

$$\overline{w}(X)=\frac{-zr}{\sqrt{1-p^2-\dfrac{q^2}{C^2}}}.$$

Вводим, наконец, в окрестности точки X_0 функцию w равенством

$$w(X)=\frac{-zr}{\sqrt{1-p^2-q^2}}.$$

Так как вдоль кривой $u=0$, $C=1$, $C_u=0$, а $C_{uu}<0$, то в окре-
юсти точки X_0 $C \leqslant 1$, а в самой точке X_0 равно единице. Поэтому $(X)=\overline{w}(X)$ в окрестности точки X_0, но $w(X_0)=\overline{w}(X_0)$. Отсюда сле-
ует, что в точке X_0 функция $w(X)$ достигает максимума. Оценив
личину этого максимума, мы тем самым оценим величину макси-
ума функции $w_\gamma(X)$, откуда и получим интересующую нас оценку
ля внешней кривизны поверхности.

В точке X_0 выражения α, β, γ, входящие в уравнение (1), имеют
начения:

$$\alpha=0, \qquad \beta=0, \qquad \gamma=-k(1-p^2-q^2).$$

оэтому уравнение (1) в точке X_0 принимает вид:

$$rt-s^2=k(1-p^2-q^2). \tag{*}$$

Далее, нормальные кривизны по направлениям u и v в точке X
оответственно равны

$$\varkappa_{(u)}=\frac{r}{\sqrt{1-p^2-q^2}}, \qquad \varkappa_{(v)}=\frac{t}{\sqrt{1-p^2-q^2}}.$$

Но направление u в точке X_0 является направлением, в котором нор-
мальная кривизна максимальна. Поэтому

$$\varkappa_{(u)}\varkappa_{(v)}=k.$$

Подставляя сюда выражения для $\varkappa_{(u)}$ и $\varkappa_{(v)}$, находим в точке X_0

$$rt=k(1-p^2-q^2). \tag{2}$$

Сравнивая это с равенством (*), заключаем, что в точке X_0 $s=0$.

Диференцируя уравнение (1) по u и v, в точке X_0, находим:

$$r_u t+r(t_u+\alpha_u)+\gamma_u=0,$$
$$r_v t+r(t_v+\alpha_v)+\gamma_v=0. \tag{3}$$

Диференцируя, наконец, уравнение (1) по u дважды, получаем в точке X_0:

$$r_{uu}t+r_{vv}r+2r_u(t_u+\alpha_u)+r\alpha_{uu}-2(s_u-\beta_u)^2+\gamma_{uu}=0. \tag{4}$$

Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что функция $w(X)$ в точке X_0 достигает максимума, и, следовательно, в этой точке

$$w_u=w_v=0, \qquad w_{uu}\leqslant 0, \qquad w_{vv}\leqslant 0.$$

Полагая для краткости $1-p^2-q^2=\Delta$, имеем:

$$w=-zr\Delta^{-\frac{1}{2}}.$$

Откуда

$$r=-w\Delta^{\frac{1}{2}}z^{-1}. \tag{**}$$

Диференцируя это равенство по u и v, в точке X_0, находим:

$$r_u=-pr(r\Delta^{-1}+z^{-1}),$$
$$r_v=-qr(t\Delta^{-1}+z^{-1}).$$

Диференцируя равенство (**) дважды по u и дважды по v, после длительного счета, находим для r_{uu} и r_{vv} следующие выражения в точке X_0:

$$r_{uu} = -w_{uu}\Delta^{\frac{1}{2}} z^{-1} - \Delta^{-2} p^2 r^3 - \Delta^{-1} r^3 - \Delta^{-1} r(pr_u + qr_v) + \\ + 2\Delta^{-1} p^2 r^2 z^{-1} - r^2 z^{-1} + 2p^2 rz^{-1};$$

$$r_{vv} = -w_{vv}\Delta^{\frac{1}{2}} z^{-1} - \Delta^{-2} q^2 rt^2 - \Delta^{-1} rt^2 - \Delta^{-1} r(pt_u + qt_v) + \\ + 2\Delta^{-1} q^2 rt z^{-1} - rt z^{-1} + 2q^2 rz^{-2}.$$

Умножая первое равенство на t, а второе на r, и замечая, что $rt = k\Delta$, находим:

$$r_{uu} t = -w_{uu} t\Delta^{\frac{1}{2}} z^{-1} + k\Delta^{-1} p^2 r^2 - \Delta^{-1} r(pr_u t + qr_v t) + \\ + 2kp^2 rz^{-1} - k\Delta rz^{-1} + 2k\Delta p^2 z^{-2};$$

$$r_{vv} r = -w_{vv} k\Delta^{\frac{1}{2}} z^{-1} - k^2 q^2 - k^2 \Delta - \Delta^{-1} r(pt_u r + qt_v r) + \\ + 2kq^2 rz^{-1} - k\Delta rz^{-1} + 2q^2 r^2 z^{-2}.$$

Складывая эти равенства почленно и замечая, что

$$r_u t + rt_u = -r\alpha_u - \gamma_u = k_u \Delta - kpr,$$

$$r_v t + rt_v = -r\alpha_v - \gamma_v = k_v \Delta - 2kqt,$$

находим в точке X_0:

$$r_{uu} t + r_{vv} r = -\Delta^{\frac{1}{2}} z^{-1}(w_{uu} t + w_{vv} r) - kr^2 + \\ + 2q^2 r^2 z^{-2} + O_1(z^{-2}, z^{-1}, rz^{-1}),$$

где $O_1(z^{-2}, z^{-1}, rz^{-1})$ — линейные выражения относительно указанных величин с ограниченными коэфициентами.

Вычисляя теперь остальные слагаемые левой части равенства (4), находим:

$$2r_u(t_u + \alpha_u) = -2pr(r\Delta^{-1} + z^{-1})(t_u + \alpha_u) =$$

$$= -2p(r\Delta^{-1} + z^{-1})(-r_u t - \gamma_u) = 2k\Delta^{-1} p^2 r^2 + O_2(z^{-2}, rz^{-1});$$

$$-2(s_u - \beta_u)^2 = -2(-qr(t\Delta^{-1} + z^{-1}) + kq)^2 = -2q^2 r^2 z^{-2} + O_3(rz^{-1});$$

$$r\alpha_{uu} = -2kr^2 + O_4(r);$$

$$\gamma_{uu} = 2kr^2 - 2k\Delta^{-1} p^2 r^2 + O_5(rz^{-1}).$$

Подставляя теперь найденные выражения в левую часть уравнения (4), получим:

$$-\Delta^{\frac{1}{2}} z^{-1}(w_{uu}t + w_{vv}r) - kr^2 + O(z^{-2}, z^{-1}, z^{-1}r, r) = 0.$$

Первый член этого равенства не положительный, так как $z<0$,

$$w_{uu}\leqslant 0,\quad w_{vv}\leqslant 0,\quad r>0,\quad t>0.$$[1]

Поэтому

$$-kr^2+O(z^{-2}, z^{-1}, z^{-1}r, r)\geqslant 0.$$

Пусть kM — верхняя грань модулей коэфициентов выражения $O(z^{-2}, z^{-1}, z^{-1}r, r)$.

Тогда, тем более

$$-r^2+M(z^{-2}-z^{-1}-rz^{-1}+r+1)\geqslant 0.$$

Отсюда очевидным образом следует существование постоянной N, зависящей только от M, такой, что в точке X_0 будет выполняться неравенство

$$r<N\left(1-\frac{1}{z}\right).$$

Но это значит, что максимум функции $w(X)$ меньше

$$\frac{N(1-z)}{\sqrt{1-p^2-q^2}},$$

и, следовательно, нормальная кривизна

$$\varkappa_\gamma(X)<N\left(1-\frac{1}{z}\right)\frac{1}{\cos\varphi_0},$$

где φ_0 — наибольший угол, образуемый касательными плоскостями шапочки с плоскостью её основания.

Итак, для внутренних точек регулярной выпуклой шапочки может быть указана оценка внешней кривизны, зависящая только от внутренней метрики шапочки, расстояния точки до плоскости основания шапочки и максимального угла, образуемого касательными плоскостями шапочки с плоскостью её основания.

Глава III

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ РЕГУЛЯРНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1.

Метод вспомогательных функций С. Н. Бернштейна

Основные результаты настоящей главы содержатся в §§ 2 и 3, где даны оценки максимума модулей производных регулярного решения уравнения эллиптического типа, начиная с третьего порядка, в зависимости от максимума модуля решения и его производных второго порядка. Получение такого рода оценок возможно с помощью метода вспомогательных функций С. Н. Бернштейна, если несколько модифицировать применяемую им вспомогательную функцию.

[1] То, что t и $r>0$ следует, например, из теоремы Либермана о выпуклости геодезической на выпуклой поверхности [9].

Чтобы упростить дальнейшие рассуждения, в этом параграфе мы изложим в общих чертах сущность метода вспомогательных функций Бернштейна в той части, которая нами используется в следующем параграфе.

Пусть в замкнутом ε — круге ω_ε $x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2$ задано уравнение в частных производных эллиптического типа

$$Ar+2Bs+Ct=D, \tag{1}$$

где A, B, C, D — регулярные функции x, y, z, p, q. Пусть, далее, $z(x, y)$ — решение этого уравнения, относительно которого нам известно, что в круге ω_ε $|z|$, $|p|$ и $|q|\leqslant M$; кроме того, на окружности круга $|r|$, $|s|$ и $|t|\leqslant N$.

С. Н. Бернштейн доказал [5, стр. 141], что могут быть получены оценки для верхней грани модулей производных второго порядка решения $z(x, y)$ во всем круге ω_ε, в зависимости только от верхней грани модулей коэфициентов уравнения и их производных до второго порядка[1], минимума дискриминанта уравнения $AC-B^2$, чисел M и N.

Доказательство Бернштейна заключается в следующем:

Вводим в рассмотрение выражение

$$w=\alpha^2 e^{2\left(\frac{p+M}{\alpha}\right)} e^{2e\left(\frac{p+M}{\alpha}\right)}(Ar^2+2Brs+cs^2),$$

где M — верхняя грань модулей z, p и q в круге ω_ε.

α — некоторое число, которое будет определено позже.

Функция w в замкнутой области ω_ε достигает максимума. Этот максимум достигается либо на окружности круга ω_ε, либо в какой-нибудь внутренней точке. В первом случае мы можем указать число ω_0, в зависимости от величин, содержащихся в формулировке предложения Бернштейна, такое, что максимум ω его не может превзойти. После этого оценки для производных r и s получаются совсем элементарно. Но этот случай для нас не представляет интереса. Для нас важен случай, когда функция w достигает максимума внутри круга ω_ε, случай, который мы рассмотрим подробнее.

Составляем уравнение, которому удовлетворяет функция $p=\frac{\partial z}{\partial x}$. Для этого диференцируем уравнение (1) по x и заменяем r, s, t через производные функции p, согласно равенствам

$$r=p_x, \qquad s=p_y, \qquad t=\frac{D-Ap_x-Bp_y}{C}.$$

В результате получаем уравнение для p:

$$Ap_{xx}+2Bp_{xy}+Cp_{yy}=ap_x^2+2bp_x p_y+cp_y^2+2dp_x+2ep_y+f, \tag{2}$$

где a, b, c, d, e, f, так же как и A, B, C—известные функции от x, y, z, p, q.

Положим теперь

$$p=-M+\alpha\ln\ln u.$$

[1] Это надо понимать так, что после диференцирования коэфициентов по аргументам x, y, z, p, q вместо z, p и q подставляется решение $z(x, y)$ и его производные, а максимум модуля берется по x, y из круга ω_ε.

гда из уравнения (2) для p получаем уравнение для u:

$$Ar_1 + 2Bs_1 + Ct_1 = \frac{1}{u \ln u} \{[A(1 + \ln u) + \alpha a]p_1^2 + $$
$$+ 2[B(1 + \ln u) + \alpha b] p_1 q_1 + [C(1 + \ln u) + \alpha c] q_1^2\} +$$
$$+ 2dp_1 + 2eq_1 + f\frac{u \ln u}{\alpha} = Q_1. \tag{3}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что

$$w = Ap_1^2 + 2Bp_1 s_1 + Cs_1^2.$$

В точке, где w достигает максимума

$$w_x = 0, \qquad w_y = 0.$$

Решая эти уравнения совместно с уравнением (3) относительно r_1, s_1 и t_1, получим:

$$r_1 = \frac{1}{w\Delta}\left\{w(Bp_1 + Cq_1)^2 \frac{1 + \ln n}{u \ln u} + \frac{\alpha g_1}{u \ln n} + h_1 + \frac{l_1 u \ln u}{\alpha}\right\};$$
$$s_1 = -\frac{1}{w\Delta}\left\{w(Bp_1 + Cq_1)(Ap_1 + Bq_1)\frac{1 + \ln u}{u \ln u} + \frac{\alpha g_2}{u \ln u} + h_2 + \frac{l_2 u \ln u}{\alpha}\right\};$$
$$t_1 = \frac{1}{w\Delta}\left\{w(Ap_1 + Bq_1)^2 \frac{1 + \ln u}{u \ln u} + \frac{ag_3}{u \ln u} + h_3 + \frac{l_3 u \ln u}{\alpha}\right\};$$

где $\Delta = AC - B^2$; g_1, g_2, g_3 — многочлены не выше четвертой степени относительно $p_1 q_1$ с данными коэфициентами; h_1, h_2, h_3 не выше третьей степени, l_1, l_2, l_3 — не выше второй степени, и все с данными коэфициентами, зависящими от x, y, z, p, q.

Рассмотрим теперь выражение

$$K(w) = \frac{1}{2}(Aw_{xx} + 2Bw_{xy} + Cw_{yy}).$$

Если предположить, что $A > 0$, а этого всегда можно добиться, умножая исходное уравнение (1) на -1, то в точке, где w достигает максимума, $K(w) \leqslant 0$, так как форма

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$$

положительно определенная, а форма

$$w_{xx}\xi^2 + 2w_{xy}\xi\eta + w_{yy}\eta^2$$

не принимает положительных значений.

Подставляя в $K(w)$ $w = Ap_1^2 + 2Bp_1 q_1 + Cq_1^2$, находим:

$$K(w) = (Ap_1 + Bq_1)(Ap_{1xx} + 2Bp_{1xy} + Cp_{1yy}) +$$
$$+ (Bp_1 + Cq_1)(Aq_{1xx} + 2Bq_{1xy} + Cq_{1yy}) + A(Ar_1^2 + 2Br_1 s_1 + Cs_1^2) +$$
$$+ 2B[Ar_1 s_1 + B(r_1 t_1 + s_1^2) + Cs_1 t_1] + C(As_1^2 + 2Bs_1 t_1 + Ct_1^2) +$$
$$+ H_1 + H_2 + \frac{\alpha}{u \ln u} H_3 + \alpha\frac{1 + \ln u}{(u \ln u)^2} H_4 + \frac{\alpha^2}{(u \ln u)^2} H_5,$$

где H_1 — многочлен первой степени относительно $p_1 r_1$, $p_1 s_1$, $p_1 t_1$, $q_1 r_1$, $q_1 s_1$, $q_1 t_1$; H_2 — многочлен второй степени относительно p_1, q_1; H_3 — многочлен первой степени относительно $p_1^2 r_1$, $p_1^2 s_1$, $p_1^2 t_1$, $p_1 q_1 r_1$, $p_1 q_1 s_1$, $p_1 q_1 t_1$, $q_1^2 r_1$, $q_1^2 s_1$, $q_1^2 t_1$; и наконец, H_4 и H_5 — многочлены четвертой степени относительно p_1 и q_1. Коэфициенты всех этих многочленов — известные функции переменных p_1, q_1, z, x, y.

Диференцируя уравнение (3) по x, находим:

$$Ap_{1xx}+2Bp_{1xy}+Cp_{1yy}=-\frac{1+\ln u+(\ln u)^2}{(u\ln u)^2}p_1 w+\frac{\alpha(1+\ln u)}{(u\ln u)^2}G_1+$$

$$+\frac{\alpha}{u\ln u}G_2+\frac{\alpha^2}{u\ln u}G_3+G_4+\frac{u\ln u}{\alpha}G_5, \qquad (**)$$

где G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 — многочлены с известными коэфициентами: G_1 и G_3 — третьей степени, C_5 — первой степени относительно p_1 и q_1; G_2 — многочлен первой степени относительно $p_1 r_1$, $p_1 s_1$, $p_1 t_1$, $q_1 r_1$, $q_1 s_1$, $q_1 t_1$, p_1^2, $p_1 q_1$, q_1^2; наконец, G_4 многочлен первой степени относительно r_1, s_1, t_1, p_1, q_1.

Точно так же, диференцируя уравнение (3) по g, получим:

$$Aq_{1xx}+2Bq_{1xy}+Cq_{1yy}=-\frac{1+\ln u+(\ln u)^2}{(u\ln u)^2}q_1 w+\frac{\alpha(1+\ln u)}{(u\ln u)^2}G_{(1)}+$$

$$+\frac{\alpha}{u\ln u}G_{(2)}+\frac{\alpha}{(u\ln u)^2}G_{(3)}+G_{(4)}+\frac{u\ln u}{\alpha}G_{(5)}, \qquad (***)$$

где $G_{(1)}$, $G_{(2)}\ldots G_{(5)}$ — многочлены, обладающие свойствами, аналогичными многочленам $G_1, G_2,\ldots G_5$.

Обращаясь теперь к выражению $K(w)$ и замечая, что $AC-B^2=\Delta$ имеет известный нижний предел, отличный от нуля, получим:

$$w^2K=-\frac{1+\ln u+(\ln u)^2}{(u\ln u)^2}w^4+\left(\frac{1+\ln u}{u\ln u}\right)^2 w^4+\alpha\frac{1+\ln u}{(u\ln u)^2}P_6 w+$$

$$+\frac{\alpha^2}{(u\ln u)^2}P_8+\frac{1+\ln u}{u\ln u}P_7+\frac{\alpha}{u\ln u}P'_7+\frac{u\ln u}{\alpha}P'_6+P''_6+\left(\frac{u\ln u}{\alpha}\right)P_4,$$

где P_k и P'_k обозначены многочлены степени k относительно p_1, q_1 с известными коэфициентами.

Совокупность членов восьмой степени в данном выше представлении Kw^2 задается выражением

$$T_8=\frac{w^4}{u^2\ln u}+\alpha\frac{1+\ln u}{(u\ln u)^2}P_6 w+\frac{\alpha^2}{u^2(\ln u)^2}P_8.$$

Так как $\ln u>1$, то можно указать достаточно малое число α, такое, чтобы при $|p_1|$, $|q_1|>1$ было

$$T_8>\frac{1}{2}\frac{w^4}{u^2\ln u}.$$

Пусть α выбрано именно таким образом. Тогда

$$w^2K>\frac{1}{2}\frac{w^4}{u^2\ln u}+T_7.$$

не представляет труда указать число w_0, которого максимум w может превзойти, так как $Kw^2 \leqslant 0$.

После того как найден верхний предел w, легко оцениваются модули r и s, так как r и s связаны с w равенством

$$w = \alpha^2 e^{2\left(\frac{P+M}{\alpha}\right)} e^{2e\left(\frac{P+M}{\alpha}\right)} (Ar^2 + 2Brs + Cs^2).$$

Аналогично рассматривая функцию

$$w = \alpha^2 e^{2\left(\frac{P+M}{\alpha}\right)} e^{2e\left(\frac{P+M}{\alpha}\right)} (As^2 + 2Bst + Ct^2),$$

получаем оценку для производной t.

§ 2.
Оценки третьих производных регулярного решения уравнения эллиптического типа

В предыдущем параграфе мы изложили метод С. Н. Бернштейна, позволяющий найти оценки для вторых производных решения уравнения

$$Ar + 2Bs + Ct = D$$

в круге ω_ε, если известна верхняя грань модуля решения $z(x, y)$, его первых производных в круге ω_ε и вторых производных на границе этого круга. Теперь мы хотим указать оценки для вторых производных во внутренних точках круга ω_ε без использования верхней грани модулей вторых производных на окружности круга.

Вводим в рассмотрение функцию

$$\widetilde{w} = w\lambda,$$

где w — вспомогательная функция Бернштейна (см. предыдущий параграф), а

$$\lambda = (\varepsilon^2 - x^2 - y^2)^2.$$

Функция $\widetilde{w}$ не отрицательна в круге ω_ε, обращается в нуль на его окружности и, следовательно, достигает абсолютного максимума в некоторой внутренней точке P круга ω_ε. В точке P

$$\widetilde{w}_x = w_x \lambda + w\lambda_x = 0; \quad \widetilde{w}_y = w_y \lambda + w\lambda_y = 0.$$

Отсюда

$$w_x = -\frac{\lambda_x}{\lambda} w; \qquad w_y = -\frac{\lambda_y}{\lambda} w.$$

Далее, в этой же точке P по известной причине

$$K(\widetilde{w}) = \frac{1}{2}\left(A\widetilde{w}_{xx} + 2B\widetilde{w}_{xy} + C\widetilde{w}_{yy}\right) \leqslant 0.$$

Преобразуем $K(\widetilde{w})$.

$$K(\widetilde{w}) = \lambda \frac{1}{2}(Aw_{xx} + 2Bw_{xy} + Cw_{yy}) + w\frac{1}{2}(A\lambda_{xx} + 2B\lambda_{xy} + C\lambda_{yy}) +$$

$$+ A\lambda_x w_x + B(\lambda_x w_y + \lambda_y w_x) + C\lambda_y w_y.$$

Заменяя, далее, w_x и w_y найденными их выражениями в точке и замечая, что $\left|\frac{\lambda_x^2}{\lambda}\right|$, $\left|\frac{\lambda_x\lambda_y}{\lambda}\right|$, $\left|\frac{\lambda_y^2}{\lambda}\right|$ ограничены, получим

$$K(\widetilde{w}) = \lambda K(w) + wL,$$

где L — некоторая функция, модуль которой не может превзойти некоторого числа L_0, зависящего от верхней грани модулей коэффициентов A, B, C в круге ω_ε.

Так как $K(\widetilde{w}) \leqslant 0$ в точке p, то в этой точке

$$K(w) - \frac{wL_0}{\lambda} \leqslant 0.$$

Введем в уравнение (1) вместо z новую неизвестную функцию u равенством

$$p = -M + \alpha \ln\ln u,$$

где M — максимум модуля функции z и её первых производных в круге ω_ε. Уравнение для u имеет вид (см. предыдущий параграф)

$$Ar_1 + 2Bs_1 + Ct_1 = Q_1.$$

Найдем вторые производные r_1, s_1, t_1 функции u в точке p, где $\widetilde{w}$ достигает максимума из системы:

$$Ar_1 + 2Bs_1 + Ct_1 = Q_1;$$

$$w_x = -\frac{\lambda_x}{\lambda}w; \qquad w_y = -\frac{\lambda_y}{\lambda}w.$$

Последние два уравнения перепишем так:

$$2\left(Ap_1r_1 + B(r_1q_1 + p_1s_1) + Cq_1s_1\right) = Q_2 - \frac{\lambda_x}{\lambda}w;$$

$$2\left(Ap_1s_1 + B(s_1q_1 + p_1t_1) + Cq_1t_1\right) = Q_3 - \frac{\lambda_y}{\lambda}w.$$

Если в этих уравнениях в их правых частях отбросить $-\frac{\lambda_x}{\lambda}$ и $-\frac{\lambda_y}{\lambda}w$ соответственно, то мы получим в точности такую систему для r_1, s_1, t_1, какая получена С. Н. Бернштейном. Поэтому решение нашей системы можно представить в виде:

$$r_1 = \beta_1 + n_1, \qquad s_1 = \beta_2 + n_2, \qquad t_1 = \beta_3 + n_3,$$

β_1, β_2, β_3 — решения системы Бернштейна, а n_1, n_2, n_3 — решения темы

$$Ar_1 + 2Bs_1 + Ct_1 = 0;$$

$$r_1(Ap_1 + Bq_1) + s_1(Bp_1 + Cq_1) = -\frac{\lambda_x}{\lambda} w;$$

$$s_1(Ap_1 + Bq_1) + t_1(Bp_1 + Cq_1) = -\frac{\lambda_y}{\lambda} w.$$

Решения этой системы имеют вид

$$n_1 = \frac{\lambda_x k_1 + \lambda_y l_1}{\lambda},$$

$$n_2 = \frac{\lambda_x k_2 + \lambda_y l_2}{\lambda},$$

$$n_3 = \frac{\lambda_x k_3 + \lambda_y l_3}{\lambda},$$

k_1, l_1, k_2, l_2, k_3, l_3 — линейные выражения относительно p_1, q_1 с известными коэфициентами.

Теперь мы, следуя идее С. Н. Бернштейна, составим равенства (**), (***), как в предыдущем параграфе, и заменим выражения *), совпадающие с левыми частями равенств (**) и (***) правыми частями. Если бы после такой замены вместо r_1, s_1, t_1 подставить β_2, β_3, то мы получили бы для $K(w)$ точно такое же выражение, и у Бернштейна. Но мы должны подставить вместо r_1, s_1, t_1 — $+n_1$, $\beta_2 + n_2$, $\beta_3 + n_3$. Поэтому наше выражение для $K(w)$ будет отличаться от выражения Бернштейна.

Положим

$$K(w) = K_b(w) + K_n(w),$$

$K_b(w)$ — выражение, полученное Бернштейном, а $K_n(w)$ — та добавка, которая получается из-за того, что вместо β_1, β_2, β_3 в выражение для $K(w)$ мы подставляем $\beta_1 + n_1$, $\beta_2 + n_2$, $\beta_3 + n_3$. Все члены $K(w)$, содержащиеся в $K_n(w)$, входят в выражение

$$(Ap_1 + Bq_1)\left(\frac{\alpha G_2}{u \ln u} + G_4\right) + (Bp_1 + Cq_1)\left(\frac{\alpha G_{(2)}}{u \ln u} + G_{(4)}\right) +$$
$$+ A(Ar_1^2 + 2Br_1s_1 + Cs_1^2) + B\left(Ar_1s_1 + B(r_1t_1 + s_1^2) + Cs_1t_1\right) +$$
$$+ C(As_1^2 + 2Bs_1t_1 + Ct_1^2) + H_1 + \frac{\alpha H_3}{u \ln u}.$$

Если теперь заметить, что β_1, β_2, β_3 при больших w имеют порядок w, а n_1 n_2, n_3 имеют порядок $\frac{1}{\lambda}\sqrt{w}\left(|\lambda_x| + |\lambda_y|\right)$, то нетрудно заключить, что при больших w

$$|K_n(w)| < N\left\{\frac{w^{\frac{3}{2}}}{\lambda}\left(|\lambda_x| + |\lambda_y|\right) + \frac{w}{\lambda^2}\left(|\lambda_x|^2 + |\lambda_y|^2\right)\right\},$$

N — некоторая постоянная, зависящая от верхней грани модулей B, C, D и их производных до 2-го порядка, а также нижней грани величины дискриминанта уравнения $AC - B^2$ в круге ω_ε.

Выберем теперь число α так, как это сделано у Бернштейн Тогда при достаточно больших w

$$K_b(w) > \frac{1}{4}\frac{w^2}{u^2 \ln u}.$$

Но

$$K(w) - \frac{L_0 w}{\lambda} < 0.$$

Поэтому

$$\frac{1}{4}\frac{w^2}{u^2 \ln u} - N\left(\frac{w^{\frac{3}{2}}}{\lambda}\left(|\lambda_x| + |\lambda_y|\right) + \frac{w}{\lambda^2}(\lambda_x^2 + \lambda_y^2)\right) - \frac{wL_0}{\lambda} < 0.$$

Отсюда путем простых **оценок заключаем**, что если w записат в форме

$$\mathbf{w} = \frac{R}{\lambda},$$

то R не может **быть сколь угодно** большим. Наибольшее, этим усл вием определ**яемое, число R и дает** оценку величины

$$\tilde{w} = \lambda w.$$

После того как оценка для w найдена, получение оценок для r и не составляет труда. Оценка для t получается аналогично.

Полученный результат можно сформулировать так:

Модули вторых производных решения уравнения (в точке S круга ω_ε не превосходят

$$\frac{C_0}{\rho(S)},$$

где $\rho(S)$ — расстояние точки S до границы круга, а C_0 - постоянная, зависящая от верхней грани модуля реш ния, его производных первого порядка, верхней гран модулей коэфициентов уравнения и их производны до второго порядка и минимума величины $AC - B^2$ - дискриминанта уравнения.

Рассмотрим теперь случай общего уравнения эллиптического тип

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Диференцируя это уравнение по x, получим:

$$Ap_{xx} + 2Bp_{xy} + Cp_{yy} = D, \qquad (3)$$

где

$$A = F_r, \qquad B = \frac{1}{2}F_s, \qquad C = F_t,$$

$$D = -(F_p r + F_q s + F_r p + F_x).$$

Метод получения оценок для линейного уравнения полносты применим к уравнению (3). Это по отношению к уравнению F = дает следующий результат.

ля производных третьего порядка уравнения эл-
ического типа $F=0$ в каждой внутренней точке
а ω_ε может быть указан верхний предел их модуля,
висимости от расстояния точки до границы круга
ерхней грани модуля решения и его производных
торого порядка, верхней грани модулей производ-
функции F до третьего порядка, нижней грани
криминанта уравнения $F_r F_t - \frac{1}{4} F_s^2$.

§ 3.
Оценки производных четвертого и высших порядков

Изложенный в предыдущем параграфе метод получения оценок третьих производных решения уравнения эллиптического типа $y, z, p, q, r, s, t)=0$ позволяет получить оценки модулей про-ных четвертого и высшего порядков. Несколько лучший резуль- смысле использования степени регулярности функции F полу-ся применением метода Шаудера, основанным на его теореме конец § 2, гл. 1). Этот метод позволяет получить оценки произ-ых любого порядка, если уже известны оценки производных до его порядка включительно. Сущность этого метода заключается едующем.

Пусть

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0 \tag{1}$$

ение в частных производных эллиптического типа $z(x, y)$ — решение. Диференцируем уравнение (1), например, по x. При этом получим уравнение, которому удовлетворяет функция $u=z_x$ вида

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} = D, \tag{2}$$

$$A=F_r,\ B=\frac{1}{2} F_s,\ C=F_t,$$

некоторое выражение, построенное из производных первого по-а функции F и производных решения $z(x, y)$ до второго порядка. Будем рассматривать коэфициенты уравнения (2) как известные кции xy. Тогда по отношению к уравнению (2) мы находимся овиях применимости теоремы Шаудера. В самом деле, мы можем ить постоянную Гельдера относительно показателя α $(0<\alpha<1)$ нормированной правой части уравнения (2) в зависимости только ерхней грани модулей вторых производных функции F и третьих зводных решения $z(x, y)$ в круге ω_ε. Но тогда по теореме дера можно указать оценку постоянной Гельдера для вторых зводных функции u (т. е. третьих производных z) относительно зателя $\alpha' < \alpha$ в круге $\omega_{\bar{\varepsilon}}$, целиком содержащимся в ω_ε.

Итак, зная оценки для третьих производных решения, мы можем ить постоянные Гельдера этих производных относительно любого зателя $\alpha (0<\alpha<1)$ в круге $\omega_{\bar{\varepsilon}} \subset \omega_\varepsilon$, используя при этом двукрат-диференцируемость функции F.

Диференцируя уравнение (2), еще например, по x, мы получим ение такого же вида, как уравнение (2), для функции $v=z_{xx}$, с той лишь разницей, что теперь правая часть будет выражение построенным из вторых производных функции F и третьих произво ных решения $z(x, y)$.

Рассматривая снова коэфициенты полученного уравнения ка известные функции x, y, применяем теорему Шаудера. Использу троекратную диференцируемость функции F и знание оценки постоя ной Гельдера для третьих производных решения, нетрудно указа оценку для постоянной Гельдера нормированной правой части ура нения для v. В зависимости от этой постоянной и максимума моду производной z_{xx} в круге $\omega_{\bar\varepsilon}$ теорема Шаудера позволяет получи оценки для вторых производных функции v (т. е. четвертых произво ных z) и постоянной Гельдера этих производных относительно пок зателя $\alpha'' < \alpha$ в круге $\omega_{\tilde\varepsilon}$, целиком содержащемся в $\omega_{\bar\varepsilon}$.

Так шаг за шагом могут быть получены оценки для производн любого порядка функции $z(x, y)$ и их постоянной Гельдера относ тельно любого показателя $\alpha (0 < \alpha < 1)$. Окончательный результ может быть сформулирован следующим образом:

Пусть $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ — регулярное уравн ние эллиптического типа, $z(x, y)$ — его регулярное р шение в круге $\omega_\varepsilon (k^2 + y^2 \leqslant \varepsilon^2)$.

Тогда внутри круга $\omega_{\bar\varepsilon} (\bar\varepsilon < \varepsilon)$ можно указать оценк для производных k-го порядка решения $z(x, y)$, в зав симости от верхней грани модуля z и его произво ных до второго порядка в круге ω_ε, нижней гран дискриминанта уравнения $F = 0$ верхней грани модуле производных функции F до s-го порядка, причем $s =$ при $k = 3$ и $s = k - 1$ при $k > 3$. Более того, в зависимост от тех же величин могут быть указаны оценки д постоянных Гельдера производных k-го порядка фун ции z для любого показателя $\alpha (0 < \alpha < 1)$.

Глава IV

ВЫПУКЛЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С РЕГУЛЯРНОЙ МЕТРИКОЙ

§ 1.

Выпуклые поверхности с аналитической метрикой.

Основной результат всей работы содержится в следующем пара рафе настоящей главы. Там будет доказана регулярность всех в пуклых поверхностей с регулярной метрикой и положительной гау совой кривизной. Этот параграф играет в известной мере вспомог тельную роль и облегчает доказательство основного предложе следующего параграфа. Здесь мы будем рассматривать выпуклые п верхности с аналитической метрикой. В связи с этим напомним снача определение выпуклой поверхности с аналитической метрикой. От сительно выпуклой поверхности говорят, что она имеет аналитическу метрику, если в окрестности каждой точки поверхности можно ввес локальные координаты, u, v так, что коэфициенты квадратичной фор ds^2 — линейного элемента поверхности — будут аналитическими фун циями этих координат.

Аналитическая поверхность, очевидно, имеет аналитическую ме рику. Действительно, в окрестности каждой точки такой поверхнос можно ввести локальные координаты u, v так, что радиус-вект точки поверхности $r(u, v)$, как функция этих координат, будет анал ской. Коэфициенты квадратичной формы ds^2 известным образом жаются через производные функции $r(u, v)$, а поэтому сами ются аналитическими функциями u, v.

Обратного заключения, т. е. заключения об аналитичности поверх-и на основе аналитичности её метрики, нельзя сделать так просто. тому пока, говоря о поверхности с аналитической метрикой, мы предполагаем аналитичности самой поверхности.

Пусть Ω — выпуклая поверхность с аналитической метрикой и по-ительной гауссовой кривизной. Пусть далее, ω — область на этой ерхности, удовлетворяющая следующим условиям:

1) во всей области ω можно ввести одну аналитическую коорди-ную сеть u, v, т. е. такую сеть, по отношению которой коэфи-енты квадратичной формы ds^2 будут аналитическими функциями u, v;

2) область ω ограничена выпуклой внутренне-аналитической кри- γ с положительной геодезической кривизной[1];

3) внутренний диаметр области ω меньше $\dfrac{\pi}{2\sqrt{\bar{k}}}$, где $\bar{k}$ — максимум уссовой кривизны в области ω.

Относительно выпуклой поверхности ω, обладающей свойствами 2), 3) имеет место следующее важное для доказательства осноӣной оремы предложение:

С у щ е с т в у е т в ы п у к л а я а н а л и т и ч е с к а я ш а п о ч к а $\bar{\omega}$, з о м е т р и ч н а я ω.

Для доказательства этой теоремы заметим прежде всего, что строение аналитической шапочки $\bar{\omega}$ редуцируется к решению крае-й задачи для эллиптического уравнения типа Монжа-Ампера спе-ального вида. Действительно, допустим, шапочка $\bar{\omega}$ уже построена расположена так, что её основание лежит в плоскости xy, а сама апочка со стороны $z \leqslant 0$. Координата $z(u, v)$ точки поверхности, как ыло показано в § 1, гл. II, удовлетворяет уравнению Монжа-Ампера липтического типа. Таким образом, чтобы найти функцию $z(u, v)$, до найти решение этого уравнения, которое для значений u, v, ляющихся координатами точек кривой γ, обращается в нуль. Если ункция $z(u, v)$ найдена, то отыскание остальных компонент вектора (u, v) не составляет труда, по крайней мере всегда выполнимо.

Переходим к доказательству существования аналитической ша-очки $\bar{\omega}$. Введем на поверхности ω полярные геодезические координаты ρ, ϑ, приняв за полюс какую-нибудь внутреннюю точку x_0 бласти ω.[2] Очевидно, это всегда возможно благодаря требованию 3), ложенному на ω.

Построим теперь последовательность областей ω_t $(0 < t \leqslant 1)$ на по-ерхности Ω. Область ω_t получается из ω смещением каждой её точки , $\vartheta)$ в точку $(t - \rho, \vartheta)$. Относительно так построенных областей важно метить то, что каждая из них выпуклая и ограничена аналитическим онтуром с положительной геодезической кривизной. Аналитичность онтура γ_t, ограничивающего область ω_t, очевидна. Поэтому нам остаточно доказать положительность геодезической кривизны.

---

[1] Аналитичность кривой γ надо понимать в том смысле, что координаты u, v чек этой кривой, как функции дуги ее, суть аналитические функции.

[2] Полярные геодезические координаты точки x — это расстояние ρ точки x по одезической, идущей из полюса x_0 в точку x и угол ϑ, образуемый этой геодези-ской с некоторой начальной геодезической, проведенной из полюса.

Рассмотрим два криволинейных треугольника $\triangle$ и $\triangle_t$ на поверхности Ω, образованные двумя близкими геодезическими, идущими из полюса x_0 к дугами кривых γ и γ_t. Обозначим p и p_t полные повороты вдоль контура треугольника $\triangle$ и $\triangle_t$ соответственно, φ и φ_t — их полные кривизны, ψ и ψ_t — суммы углов, s и s_t — длины сторон, противолежащих вершине x_0.

Из способа построения кривой γ ясно, что геодезическая, проведенная из полюса x_0, пересекает все кривые γ_t под одинаковыми углами. Поэтому сумма углов треугольника $\triangle_t$ не зависит от t и равна ψ. Отсюда также благодаря тому, что расстояние каждой точки кривой γ от полюса меньше $\frac{\pi}{2\sqrt{k}}$, следует, что s_t убывает при убывании t, в частности $s_t < s$. Заметим, наконец, что φ_t убывает при убывании t.

Применяя к каждому из треугольников $\triangle$ и $\triangle_t$ теорему Гаусса-Боннэ — Александрова [10], получим:

$$\begin{aligned} p + \varphi &= 2\pi, \\ p_t + \varphi_t &= 2\pi. \end{aligned} \tag{*}$$

Но

$$p_t = \psi_t + \int \varkappa_t(\vartheta)\, ds_t, \qquad p = \psi + \int \varkappa(\vartheta)\, ds,$$

где $\varkappa_t(\vartheta)$ и $\varkappa(\vartheta)$ — геодезические кривизны кривых γ_t и γ в точках пересечения с геодезической направления ϑ, проведенной из полюса, а интегрирование распространяется вдоль сторон треугольников, которые лежат на γ_t и γ соответственно.

Отсюда следует:

$$\frac{1}{s_t}\int \varkappa_t(\vartheta)\, ds_t = \frac{1}{s_t}(2\pi - \varphi_t - \psi_t),$$

$$\frac{1}{s}\int \varkappa(\vartheta)\, ds = \frac{1}{s}(2\pi - \varphi - \psi).$$

Когда стороны треугольников, сходящиеся в вершине x_0, неограниченно приближаются к произвольной геодезической направления ϑ, левые части этих равенств сходятся к $\varkappa_t(\vartheta)$ и $\varkappa(\vartheta)$ соответственно, а правые части всегда удовлетворяют неравенству:

$$\frac{1}{s_t}(2\pi - \varphi_t - \psi_t) > \frac{1}{s}(2\pi - \varphi - \psi),$$

так как

$$\varphi_t < \varphi, \qquad \psi_t = \psi, \qquad \text{а} \qquad s_t < s.$$

Поэтому

$$\varkappa_t(\vartheta) > \varkappa(\vartheta).$$

Что и требовалось доказать.

Если предположить существование аналитической шапочки $\overline{\omega}_{t_0}$, изометричной ω_{t_0}, то в силу теоремы С. Н. Бернштейна [5, стр. 103], о существовании решения краевой задачи для общего уравнения эллиптического типа $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ существует аналитическая шапочка $\overline{\omega}$, изометричная ω.

В самом деле, согласно теореме Бернштейна, для того чтобы авнение эллиптического типа $F=0$ допускало решение, в области G, раниченной аналитическим контуром C, обращающиеся в аналитискую функцию дуги $\varphi(s)$ на контуре C, необходимо и достаточно, обы в данное уравнение мог быть введен параметр t так, чтобы оно ращалось в уравнение $F_t=0$, для которого:

1) при всех $t\,(t_0 \leqslant t \leqslant 1)$ из предположения существования регурного решения, соответствующего тем же краевым условиям, выкала равномерная ограниченность его модуля, как и модулей его стных производных первых двух порядков по x и y;

2) при $t=1$ уравнение $F_t=0$ обращалось в уравнение $f=0$;

3) при $t=t_0$ оно имело очевидное аналитическое решение.

Введем на поверхности ω_t координаты u, v следующим образом. тобразим поверхность ω_t на единичный круг, поставив в соответствие чке (ρ, ϑ) поверхности точку круга с полярными координатами , ϑ, где ρ_ϑ — геодезический радиус точки кривой γ_t, которая лежит координатной геодезической направления ϑ. Введем теперь в плоости единичного круга декартову координатную сеть. В силу уставленного нами соответствия поверхности ω_t и круга декартова сеть , v переходит в некоторую аналитическую координатную сеть на верхности ω_t.

Теперь задача построения аналитической шапочки $\overline{\omega}_t$ эквивалентна шению краевой задачи для уравнения Дарбу в единичном круге нулевыми значениями на его окружности. Эта задача разрешима, к как выполнены условия теоремы С. Н. Бернштейна. Действильно, *первое условие выполняется, так как в §§ 1, 2 гл. II полу*ны внутренние оценки для углов, образуемых касательными плоостями шапочки с плоскостью её основания, и оценки для внешней ривизны; второе условие выполняется очевидным образом; наконец, ретье условие выполняется по предположению. Итак, если существует аналитическая шапочка $\overline{\omega}_{t_0}$, то существует и аналитическая апочка $\overline{\omega}$.

Возьмем теперь сферу радиуса $\frac{1}{\sqrt{k_0}}$, где k_0 гауссова кривизна поерхности Ω в точке x_0. Введем на ней полярные координаты ρ, ϑ. усть

$$ds^2 = d\rho^2 + c^2\,d\vartheta^2$$

$$\widetilde{ds}^2 = d\rho^2 + \widetilde{c}^2\,d\vartheta^2$$

инейные элементы поверхности Ω и сферы соответственно. Расотрим в области ω_t на поверхности Ω метрику M_λ, заданную линейым элементом

$$ds_\lambda^2 = (1-\varkappa)\,ds^2 + \lambda\,\widetilde{ds}^2. \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1).$$

Эта метрика — аналитическая и в области ω_t, по крайней мере и достаточно малом t, имеет положительную гауссову кривизну; одезическая кривизна кривой γ_t в метрике M_λ тоже положительна. ри малом t оба утверждения достаточно очевидны.

Как показал А. Д. Александров, метрика M_λ реализуема на некоторой выпуклой шапочке [2]. Однако не известно, будет ли она аналитической. Вопрос о существовании аналитической шапочки с метрикой M_0 равносилен решению краевой задачи для уравнения Дарбу. Как и ранее, мы этого подробно выполнять не будем: применение общей теоремы С. Н. Бернштейна гарантирует существование аналитической шапочки, реализующей метрику M_0 (т. е. шапочки ω_{t_0}), если существует реализация на аналитической шапочке метрики M_1. Итак, если существует аналитическая шапочка, изометричная области $\tilde{\omega}_{t_0}$ на сфере, то существует и аналитическая шапочка $\tilde{\omega}$.

Область $\tilde{\omega}$ на сфере не выходит за пределы полусферы, полюсом которой является начало полярных координат O. Это следует из условия 3), наложенного на область ω. Проведем в точке O касательную плоскость Π_0 к сфере и спроектируем из центра сферы область $\tilde{\omega}$. При этом в плоскости Π_0 мы получим выпуклую область $\tilde{\omega}^*$.

Пусть $r=\varphi(\vartheta)$ уравнение кривой, ограничивающей эту область в полярных координатах. Рассмотрим последовательность областей $\tilde{\omega}_\mu$ $(0\leqslant\mu\leqslant 1)$ в плоскости Π_0 таких, что область $\tilde{\omega}^*_\mu$ ограничена кривой γ_μ с уравнением в полярных координатах

$$r=\frac{\varphi(\vartheta)}{1-\mu+\mu\varphi(\vartheta)}.$$

Каждая из областей $\tilde{\omega}^*_\mu$ выпуклая, ограниченная аналитической кривой с существенно положительной кривизной. При $\mu=0$ $\tilde{\omega}^*_\mu$ совпадает с $\tilde{\omega}^*$, а при $\mu=1$ она переходит в единичный круг. Спроектируем области $\tilde{\omega}^*_\mu$ на сферу из её центра. При этом мы получим семейство областей $\tilde{\omega}_\mu$ на сфере, причем $\tilde{\omega}_0$ есть не что иное как $\tilde{\omega}$, а $\tilde{\omega}_1$ — сегмент.

Снова применяем общую теорему Бернштейна и заключаем, что существует аналитическая шапочка, изометричная области $\tilde{\omega}$ на сфере, так как теперь выполняются не только первые два условия теоремы Бернштейна, но и третье, ибо область $\tilde{\omega}_1$ есть сферический сегмент меньший полусферы, т. е. выпуклая шапочка.

Утверждение доказано полностью.

§ 2
Регулярность выпуклых поверхностей с регулярной метрикой

Под выпуклой поверхностью с регулярной метрикой мы понимаем такую выпуклую поверхность, на которой в окрестности каждой её точки можно ввести координаты u, v так, что коэфициенты квадратичной формы ds^2 линейного элемента поверхности будут регулярными функциями этих координат. Основной результат этого параграфа, как и всей работы, заключается в доказательстве следующего предложения.

Если выпуклая поверхность имеет регулярную (k раз диференцируемую, $k>4$) метрику и положительную гауссову кривизну, то она регулярна (по крайней мере $k-1$ раз диференцируема).

Доказательство. Пусть Ω — выпуклая поверхность с k раз диференцируемой метрикой и положительной гауссовой кривизной. Введем в окрестности ω произвольной точки x_0 на поверхности координаты так, чтобы коэфициенты E, F, G линейного элемента поверхности

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

были k раз диференцируемые функции переменных u, v.

Отрежем от поверхности Ω плоскостью, параллельной касательной плоскости в точке x_0, маленькую выпуклую шапочку σ так, чтобы выполнялись условия:

1) Вся шапочка с её границей расположена внутри некоторого геодезического треугольника $\triangle$, который в свою очередь содержится внутри окрестности ω точки x_0.

2) Внутренний диаметр шапочки меньше $\dfrac{\pi}{3\sqrt{\bar{k}}}$, где $\bar{k}$ — максимум гауссовой кривизны в упомянутом выше треугольнике $\triangle$.

Зададим теперь в области ω поверхности Ω аналитическую метрику M_n квадратичной формой

$$ds_n^2 = E_n\,du^2 + 2F_n\,du\,dv + G_n\,dv^2,$$

где E_n, F_n, G_n — аналитические функции переменных u, v равномерно с их производными k-го порядка, сходящиеся к E, F, G внутри ε окрестности треугольника $\triangle$ (ε достаточно мало).

Соединим вершины треугольника $\triangle$ кратчайшими относительно метрики M_n. Если n достаточно велико, эти кратчайшие пройдут внутри ε — окрестности треугольника $\triangle$, и полученный при этом криволинейный треугольник $\triangle_n$ будет содержать существенно внутри себя шапочку σ. При большом n метрика M_n — выпуклая. Поэтому, в силу теоремы А. Д. Александрова [2], существует выпуклая поверхность Ω_n, реализующая метрику M_n в области $\triangle_n$.

Между поверхностями $\triangle_n$ и поверхностями Ω_n естественным образом установлено соответствие точек с одинаковыми координатами u, v. Обозначим σ_n область на поверхности Ω_n, соответствующую σ. Построим минимальную выпуклую область σ_n' на поверхности Ω_n, содержащую σ_n. При неограниченном возрастании n можно считать, что поверхности Ω_n сходятся к поверхности изометричной $\triangle$, причем σ_n и σ_n' сходятся к области, изометричной шапочке σ.

Нетрудно построить выпуклую область σ_n'' на Ω_n, ограниченную аналитическим контуром с положительной геодезической кривизной, сколь угодно близкую к σ_n' и, следовательно, сходящуюся при $n \to \infty$ так же, как σ_n и σ_n' к выпуклой поверхности, изометричной σ. Для этого впишем в область σ_n' геодезический полигон с малыми звеньями. Он ограничивает выпуклую многоугольную область. Сгладим вершины полигона малыми геодезическими окружностями. При этом мы получим выпуклую кривую, у которой в каждой точке справа и слева существует ограниченная неотрицательная геодезическая кривизна, и разрыв её непрерывности происходит только в конечном числе точек. Если теперь каждую точку x этой кривой сместить на расстояние $\delta\rho(x_1\ x_n)$ к точке x_n вдоль кратчайшей их соединяющей (x_n — точка на Ω_n, соответствующая точке x_0 на Ω), то кривая перейдет в выпуклую кривую с существенно положительной геодезической кривизной[1]. Обозначим для определенности эту кривую γ_n. Введем на поверхности Ω_n полярные геодезические координаты ρ, ϑ, приняв точку x_n за полюс.

Пусть
$$\rho = \varphi(\vartheta)$$
уравнение кривой γ_n в этих координатах. Функция $\varphi(\vartheta)$ непрерывна, имеет непрерывную первую производную, непрерывную и равномерно ограниченную производную второго порядка всюду, кроме конечного числа точек, в которых происходит разрыв непрерывности первого рода. Как бы мало ни было h, существует аналитическая функция $\bar\varphi(\vartheta)$, удовлетворяющая для всех ϑ условию

$$|\varphi(\vartheta) - \bar\varphi(\vartheta)| < h, \quad |\varphi'(\vartheta) - \bar\varphi'(\vartheta)| < h,$$
$$\min\left(\varphi''^{-}(\vartheta),\ \varphi''^{+}(\vartheta)\right) - h < \bar\varphi''(\vartheta) < \max\left(\varphi''^{-}(\vartheta),\ \varphi''^{+}(\vartheta)\right) + h.$$

Кривая $\bar\gamma_n$ с уравнением
$$\rho = \bar\varphi(\vartheta)$$
аналитическая, сколь угодно близка к кривой γ_n, и имеет существенно-положительную геодезическую кривизну, если достаточно мало h. Теперь в качестве области σ_n'' можно взять область ограниченной кривой $\bar\gamma_n$.

Согласно основному предложению предыдущего параграфа существует аналитическая выпуклая шапочка $\bar\sigma_n$, изометричная σ_n''. Так как последовательность поверхностей σ_n'' при неограниченном возрастании n сходится к выпуклой поверхности, изометричной шапочке σ, то, не ограничивая общности, можно считать, что последовательность шапочек $\bar\sigma_n$ сходится к шапочке $\bar\sigma$, изометричной σ. В силу доказанной автором [11] теоремы об однозначной определенности выпуклых шапочек с ограниченной удельной кривизной, в классе всех выпуклых шапочек $\bar\sigma$ равно σ.

Опишем около точки x_0 на поверхности малый геодезический круг $\varkappa$, целиком расположенный внутри шапочки σ. Ему на поверхности $\bar\sigma_n$ соответствует область $\varkappa_n$. Существуют числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ такие, что при достаточно большом n касательные плоскости шапочки $\bar\sigma_n$ в точках области $\bar\varkappa_n$ образуют с плоскостью основания углы, не превосходящие $\frac{\pi}{2} - \alpha$, а сами области $\varkappa_n$ удаленыот плоскости основания на расстояние, большее β.

Пусть $r(u, v)$ — радиус-вектор точки поверхности σ, а $\bar r_n(u, v)$ — радиус-вектор соответствующей точки поверхности $\bar\sigma_n$. В соответствии с результатами, полученными в § 3, гл. II и §§ 2, 3 гл. III, для

[1] Такое преобразование кривой было подробно рассмотрено в предыдущем параграфе.

модулей производных вектор функции $r_n(u, v)$, до 3-го порядка и постоянных Гельдера этих производных относительно показателя α $(0 < \alpha < 1)$ в области $\varkappa_n$ может быть указана оценка сверху, в зависимости от чисел α, β, верхней грани модулей коэфициентов E_n, F_n, G_n, их производных до 5-го порядка в области $\bar{\sigma}_n$ и минимума гауссовой кривизны. Принимая во внимание характер сходимости функций E_n, F_n, G_n к E, F, G соответственно, замечаем, что для модулей производных вектор-функции $r_n(u, v)$ в области $\bar{\varkappa}_n$ и для постоянных Гельдера этих производных могут быть указаны оценки, не зависящие от n.

Так как шапочки $\bar{\sigma}$ и σ равны, то можно считать, не ограничивая общности, что последовательность функций $r_n(u, v)$ равномерно сходится к $r(u, v)$. Но последовательность функций $r_n(u, v)$ имеет равномерно ограниченные производные третьего порядка, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем $0 < \alpha < 1$ и постоянной Гельдера, не зависящей от n. Поэтому предельная функция $r(u, v)$ должна быть по крайней мере трижды непрерывно диференцируема.

Итак, мы доказали троекратную диференцируемость шапочки в области $\bar{\varkappa}$. Но точка x_0 на поверхности Ω была взята произвольно. Поэтому трижды диференцируемой является вся поверхность Ω. Теперь мы можем сказать, что компоненты вектора $r(u, v)$ удовлетворяют уравнению Монжа-Ампера эллиптического типа $F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$. Коэфициенты этого уравнения содержат вторые производные E, F, G. Поэтому функция F по всем аргументам диференцируема по крайней мере $k-2$ раза. В силу теоремы о регулярности решений уравнений эллиптического типа (§ 2 гл. 1) отсюда следует, что компоненты вектора $r(u, v)$ суть $k-1$ раз диференцируемые функции u_1 v.

Что и требовалось доказать.

Из этого результата как следствие получаем:

Если выпуклая поверхность имеет аналитическую метрику и положительную гауссову кривизну, то она аналитическая.

В самом деле, такая поверхность сколь угодно раз диференцируема. Но, в силу теоремы С. Н. Бернштейна об аналитичности решений аналитических уравнений эллиптического типа, каким в данном случае является уравнение Дарбу, троекратная диференцируемость обеспечивает аналитичность.

§ 3.
Некоторые приложения

А. Теорема Вейля. Говорят, что на единичной сфере ω задана аналитическая метрика с положительной кривизной, если выполняются следующие условия:

1) Задана некоторая система областей $\{G\}$, покрывающих всю сферу, в каждой из которых введена аналитическая координатная сеть, т. е. такая что коэфициенты квадратичной формы ds^2_ω — линейного элемента сферы — суть аналитические функции координат u, v.

2) В каждой области G покрытия $\{G\}$ задана положительно определенная квадратичная форма ds^2_G с аналитическими коэфициентами, причем гауссова кривизна, найденная при помощи коэфициентов этой формы по обычным формулам диференциальной геометрии, положительна.

3) Если две области G_1 и G_2 имеют общую часть, то при переходе от переменных u_1, v_1 (координат в области G_1) к переменным u_2, v_2 (координатам в области G_2) квадратичная форма $ds^2_{G_1}$ переходит в $ds^2_{G_2}$.

Вейлю принадлежит следующая теорема:

Аналитическая метрика с положительной кривизной, заданная на сфере, реализуема некоторой замкнутой выпуклой аналитической поверхностью.

Эту теорему, в связи с данным выше определением задания метрики, надо понимать так:

Существует замкнутая аналитическая поверхность F и топологическое отображение сферы ω на эту поверхность такое, что в каждой области $\bar{G}$ на F ($\bar{G}$ — образ области G покрытия сферы) линейный элемент поверхности задается квадратичной формой ds^2_G.

Доказательство этой теоремы было намечено Вейлем [3], но не доведено до конца. Собственно, Вейль доказал следующее предложение:

Если M(t) — аналитически зависящее от t семейство аналитических метрик с положительной кривизной заданных на сфере и метрика $M(t_0)$ реализуема замкнутой аналитической поверхностью, то реализуемы также все метрики семейства M(t), для которых $(t - t_0)$ достаточно мало.

Доказательство Вейля было завершено Г. Леви [12] благодаря глубокому изучению аналитических уравнений Монжа - Ампера, к рассмотрению которых известным образом сводится проблема построения поверхности с данным линейным элементом.

Другой вариант окончания доказательства Вейля был предложен автором [13].

Теперь, когда доказана аналитичность выпуклых поверхностей с аналитической метрикой и положительной кривизной, теорема Вейля легко следует из теоремы реализуемости А. Д. Александрова [2]. В самом деле, аналитическая метрика с положительной кривизной является выпуклой в смысле А. Д. Александрова. По теореме Александрова существует замкнутая выпуклая поверхность, реализующая заданную на сфере выпуклую метрику. Поверхность F имеет аналитическую метрику и, как доказано в предыдущем параграфе, должна быть аналитической.

Что и требовалось доказать.

Б. Погружение в малом регулярной выпуклой метрики с положительной кривизной. Пусть G — область переменных u, v, в которой задана аналитическая метрика с положительной кривизной линейным элементом

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Дарбу доказал [7], что для достаточно малой окрестности ω произвольной точки (u_0, v_0) может быть построена аналитическая выпуклая поверхность F_ω, реализующая метрику, заданную в области ω, т. е. имеющая линейный элемент ds^2. Автор распространил этот результат на случай, когда заданная метрика не аналитическая, а только известное число раз диференцируемая. Оказалось, что регулярная метрика допускает регулярную реализацию [17]. Теперь этот результат может быть улучшен, а именно:

Если метрика, заданная в области G, k раз диференцируема $(k > 4)$, то каждая точка области G имеет рестность, в которой заданную метрику можно реизовать $k-1$ раз диференцируемой поверхностью. олее того, любая реализация этой метрики выпуклой оверхностью $k-1$ раз диференцируема.

Эта теорема является простым следствием теоремы реализуемости Д. Александрова и теоремы о регулярности выпуклой поверхности регулярной метрикой.

В. Метод склеивания А. Д. Александрова в классиеской теории поверхностей. Мощным средством исследования теории выпуклых поверхностей является так называемый метод склеивания" А. Д. Александрова [15]. Этот метод основан на теореме о склеивании" А. Д. Александрова [1], которая в простейшем случае вух склеиваемых поверхностей состоит в следующем:

Пусть F_1 и F_2 — две выпуклые поверхности, ограниченные кривыми одинаковой длины с ограниченной вариацией поворота. Пусть, алее, между границами поверхностей установлено точечное соответтвие, сохраняющее дуги. Тогда, если сумма поворотов ограничивающих поверхности кривых на любых соответствующих участках не трицательна, то существует замкнутая выпуклая поверхность F, остоящая из двух частей: одной изометричной F_1, другой — F_2, прилыкающих друг к другу соответствующими точками границ.

Благодаря теореме о регулярности выпуклой поверхности с регуярной метрикой теорема „о склеивании" становится средством исслеования классической теории поверхностей, где объектом исследования вляются регулярные поверхности. В самом деле, регулярность поерхностей F_1 и F_2, взятых для склеивания поверхности F, обеспечиает регулярность этой поверхности всюду, кроме точек кривой, соответствующей границам поверхностей F_1 и F_2.

Г. Изгибание регулярных поверхностей. Пусть F выуклая поверхность. Рассматривается вопрос: допускает ли она изгибание, т. е. изометрические преобразования, и какова степень произвола построении поверхности изометричной F? Если поверхность F не амкнутая или бесконечная с полной кривизной меньше 2π, то она, как правило, допускает изгибания. Обычным средством решения этого опроса является теорема Александрова „о склеивании".

Рассмотрим, например, случай, когда F есть выпуклая шапочка. „Подклеивая" к ней любую плоскую область с той же длиной контура, что и у шапочки F, но не конгруентную основанию её, мы получим амкнутую выпуклую поверхность, на которой будет область, изометричная F, но не равная F. Таким образом, выпуклые шапочки допускают изгибания с большой степенью произвола.

Теорема о регулярности выпуклых поверхностей с регулярной метрикой позволяет решать поставленный вопрос в классической постановке, т. е. относительно регулярных изгибаний, так как регулярные выпуклые поверхности не допускают иных изгибаний, кроме регулярных. Более точно, если F есть k раз диференцируемая поверхность ($k>5$) с положительной кривизной, то все выпуклые поверхности, полученные из F путем изгибания диференцируемы по крайней мере $k-2$ раза. Если же F — аналитическая поверхность, то все её изгибания аналитические.

Е. Е. Леви доказал, что если F_1 и F_2 — две изометричные, одинаково ориентированные выпуклые аналитические поверхности с положительной гауссовой кривизной, то каждую достаточно малую окрестность произвольной точки поверхности F_1 можно непрерывным изгибанием, сохраняя аналитичность, перевести в соответствующую по изометрии область поверхности F_1. Эта теорема теперь распространяется на регулярные не аналитические поверхности в такой форме:

Если F_1 и F_2 — две изометричные выпуклые, одинаково ориентированные поверхности с положительной гауссовой кривизной, из коих хотя бы одна k раз диференцируема ($k > 5$), то у каждой точки P_1 поверхности F_1 есть окрестность ω_1, которую непрерывным изгибанием с сохранением $k-2$ кратной диференцируемости можно перевести в соответствующую область ω_2 на поверхности F_2.

Доказательство просто. Построим на F_1 малый геодезический треугольник $\triangle_1$, содержащий точку P_1. Отметим на F_1 шапочку σ_1 содержащую точку P_1 и саму содержащуюся в треугольнике $\triangle_1$. Пусть P_2 — точка и $\triangle_2$ — треугольник на поверхности F_2, соответствующие по изометрии P_1 и $\triangle_1$ соответственно. Строим шапочку на F_2, содержащую точку P_2, расположенную в $\triangle_2$. Я утверждаю, что окрестность ω_1 точки P_1, содержащуюся в σ_1, образ которой по изометрии на F_2 содержится в σ_2, можно непрерывным изгибанием перевести в ω_2.

В самом деле, представим себе три точки, выходящие из P_1, движущиеся непрерывно вдоль кратчайших к вершинам треугольника $\triangle_1$, и одновременно достигающих этих вершин. Пусть к моменту t они занимают положения $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ и $Q_3(t)$. Обозначим $\varkappa_1(t)$ минимальную выпуклую область на F_1, содержащую $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, $Q_3(t)$ и σ_1. Область $\varkappa_1(t)$ изменяется непрерывно. Так как она выпуклая, то существует шапочка $\bar{\varkappa}(t)$ изометричная $\varkappa(t)$. Шапочка $\bar{\varkappa}_1(t)$ изменяется непрерывно и в начальный момент совпадает с шапочкой σ_1, а в конечный с шапочкой $\bar{\triangle}_1$, изометричной $\triangle_1$. При каждом t на $\bar{\varkappa}_1(t)$ есть область, изометричная ω_1, которая при изменении t подвергается непрерывному изгибанию. Проделав то же для поверхности F_2, мы переведем непрерывным изгибанием область ω_2 в область на шапочке $\bar{\triangle}_2$, изометричной $\triangle_2$. Но по доказанной автором теореме об однозначной определенности выпуклых шапочек шапочки $\bar{\triangle}_1$ и $\bar{\triangle}_2$ конгруэнтны, а поэтому конгруэнтны на них области ω_1 и ω_2, как соответствующие по изометрии. Для того, чтобы доказать $k-2$ диференцируемость поверхности ω_1 в любой момент изгибания, достаточно заметить, что метрика поверхностей F_1 и F_2 $k-1$ раз диференцируема, а следовательно все реализующие её поверхности диференцируемы по крайней мере $k-2$ раза.

Д. Распространение общей теоремы единственности А. Д. Александрова на случай не аналитических поверхностей. Автор распространил общую теорему единственности А. Д. Александрова для выпуклых аналитических поверхностей на случай регулярных четырежды непрерывных диференцируемых поверхностей [4]. Теорема о регулярности решений уравнений эллиптического типа § 3 гл. 1 позволяет улучшить этот результат, ослабив условие четырехкратной диференцируемости до требования троекратной диференцируемости. Таким образом, теперь теорема формулируется так:

Пусть $\Phi(R_1 + R_2, R_1 \cdot R_2, \bar{n})$ — трижды непрерывно диференцируемая функция единичного вектора $\bar{n}$ и переменных R_1, R_2, определенная для всех $\bar{n}$ и $R_1, R_2 > 0$, удовлетворяющая условию

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial R_2} > 0.$$

Если для каждой точки трижды непрерывно диференцируемой кнутой поверхности положительной кривизны заданы значения п) функции $\Phi(R_1+R_2,\ R_1 \cdot R_2,\ \bar{n})$, когда R_1 и R_2 — главные радиусы визны поверхности, а n — единичный вектор нормали к ней, то верхность определяется однозначно с точностью до параллельного реноса.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

А. Д. Александров. О склеивании выпуклых поверхностей. ДАН, т. 54, № 2 (1946).

А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гл. VII. Гостехиздат (1948).

Г. Вейль. Об определении замкнутой выпуклой поверхности ее линейным элементом. УМН, т. III, вып. 2 (24), (1948).

А. В. Погорелов. Распространение общей теоремы единственности А. Д. Александрова. *ДАН, т. 62, № 3 (1948)*

С. Н. Бернштейн. Сообщения Харьковского математического общества. 1907, т. XI, стр. 149 и далее..

J. Schauder. Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Zeitschr. B. 38, S. 257.

G. Darboux. Théorie des surfaces, t. 3.

В. Бляшке. Диференциальная геометрия. ОНТИ, 1935, стр. 130.

И. М. Либерман. Геодезические линии на выпуклой поверхности. ДАН, т. 33 (1941).

А. Д. Александров. Кривизна выпуклых поверхностей. ДАН, т. 50 (1945).

А. В. Погорелов. Однозначная определенность выпуклых поверхностей. ДАН, т. 62 (1948).

Г. Леви. Априорные ограничения для решений уравнения Монжа - Ампера УМН, т. III, вып. 2 (24), (1948).

А. В. Погорелов. К доказательству Вейля теоремы о существовании замкнутой аналитической выпуклой поверхности, реализующей заданную на сфере аналитическую метрику с положительной кривизной. УМН, вып. 4 (32), (1949).

А. В. Погорелов. Регулярность выпуклых поверхностей с регулярной метрикой. ДАН, т. 64, № 6, (1949).

А. Д. Александров. Метод „склеивания" в теории поверхностей, ДАН, т. 57, № 9 (1947).
