УДК 517.938

Т. А. АХИЕЗЕР

ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ, СВЯЗАННЫЕ С НЕРАСТЯГИВАЮЩИМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Пусть X — выпуклый компакт в банаховом пространстве, $V: X \to X$ — нерастягивающее отображение, т. е. $\|Vx - Vy\| \leqslant \|x - y\|$ $(x, y \in X)$. Рассмотрим семейство разностных уравнений $x_{n+1} = \alpha x_n + (1-\alpha) V x_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots; 0 \leqslant \alpha < 1)$ **(1)**, являющихся приближениями для дифференциального уравнения: $\dot{x} = Vx - x$ **(2)**. При $\alpha = 0$ система (1) задает последовательность итераций отображения V. Эти итерации могут расходиться. Примером служит поворот V_θ двумерного диска на угол $\theta\,(0 < \theta < 2\pi)$.

В настоящей работе рассматривается итерационный процесс (1) при фиксированном $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$. Устанавливается, что при любой начальной точке x_0 процесс (1) сходится к некоторой неподвижной точке отображения V. Таким образом, итерации (1) при $0 < \alpha < 1$ можно рассматривать как вычислительный метод нахождения неподвижной точки любого нерастягивающего отображения в выпуклом компакте. Впрочем, сходимость этого процесса, по-видимому, может быть весьма медленной (см. ниже оценку (3)).

Заметим прежде всего, что если $\{x_n^{(1)}\}$, $\{x_n^{(2)}\}$ — любые две итерационные последовательности вида (1), то $\|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}\|$ не возрастает. Действительно, $\|x_{n+1}^{(1)} - x_{n+1}^{(2)}\| \leqslant \alpha \|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}\| + (1-\alpha)\|Vx_n^{(1)} - Vx_n^{(2)}\| \leqslant \|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}\|$. Поэтому существует $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}\|$. В частности, если $\{x_n\}$ — траектория, а $\bar{x}$ — неподвижная точка отображения V, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - \bar{x}\|$.

Теорема. *Если V — нерастягивающее отображение, то каждая итерационная последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ вида (1) сходится, причем имеет место оценка* $\|x_{n+1} - x_n\| = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ (3).

Доказательство. Покажем вначале, что из оценки (3) следует сходимость. Пусть $\bar{x}$ — предельная точка последовательности, $\bar{x} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ $(n_k \nearrow \infty)$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k+1} = \alpha\bar{x} + (1-\alpha)V\bar{x}$. Из (3) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$, т. е. $\bar{x}$ — неподвижная точка системы (1). Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - \bar{x}\| = 0$.

Положим $x_{n+1} - x_n = z_n$. Выше было показано, что $\|z_n\|$ не возрастает. Если $z_n = 0$ при некотором n, то итерационная последовательность сходится к неподвижной точке за n шагов. Пусть $z_n \neq 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Требуется доказать, что

$$\|z_n\| \leqslant \frac{Q}{\ln n}\,(Q = \mathrm{const}), \tag{4}$$

начиная с некоторого n.

Для любых $m \geqslant 0$, $n > 0$

$$\frac{z_{m+n}}{\alpha^{m+n}} - \frac{z_m}{\alpha^m} = \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{z_{k+1} - \alpha z_k}{\alpha^{k+1}}.$$

Оценим z_{m+n} с помощью соотношения

$$\left(\frac{1}{\alpha^n} - 1\right) z_{m+n} = z_m - z_{m+n} + \sum_{k=m}^{m+n-1} (z_{k+1} - \alpha z_k) + \\ + \sum_{k=m}^{m+n-1} \left(\frac{1}{\alpha^{k-m+1}} - 1\right)(z_{k+1} - \alpha z_k). \quad (5)$$

Имеем

$$\left\| z_m - z_{m+n} + \sum_{k=m}^{m+n-1} (z_{k+1} - \alpha z_k)\right\| = \left\| (1-\alpha) \sum_{k=m}^{m+n-1} z_k \right\| = \\ = \| (1-\alpha)(x_{m+n} - x_m) \| \leqslant (1-\alpha) c, \quad (6)$$

где $c = \mathrm{const}$ не зависит от m и n. Далее $\| z_{k+1} - \alpha z_k \| = \| (1-\alpha) \times \times (Vx_{k+1} - Vx_k) \| \leqslant (1-\alpha) \| z_k \|$ (7). Из (5) — (7) следует, что

$$\left(\frac{1}{\alpha^n} - 1\right) \| z_{m+n} \| \leqslant (1-\alpha) c + (1-\alpha) \| z_m \| \sum_{k=m}^{m+n-1} \left(\frac{1}{\alpha^{k-m+1}} - 1\right) = \\ = \left(\frac{1}{\alpha^n} - 1\right) \| z_m \| - (1-\alpha)(n \| z_m \| - c).$$

Отсюда $\| z_{m+n} \| < \| z_m \| - \alpha^n (1-\alpha)(n \| z_m \| - c)$ (8). Определим последовательность $\{N_i\}_{i=0}^{\infty}$ рекуррентно: $N_0 = 0$; $N_{i+1} = N_i + n_i$, где $n_i = [b_i]$, $b_i = \frac{c}{a_i} + \frac{1}{1-\alpha} + 1$, $a_i = \| z_{N_i} \|$. Поскольку последовательность $\{a_i\}$ монотонно убывает, то последовательность $\{b_i\}$ монотонно возрастает. В силу (8) $a_{i+1} < a_i - \alpha^{n_i}(1-\alpha)(n_i a_i - c)$. Поскольку $n_i > \frac{c}{a_i} + \frac{1}{1-\alpha}$, то $a_{i+1} < a_i (1 - \alpha^{n_i})$. Отсюда

$$n_i < n_i \frac{a_i - a_{i+1}}{a_i \alpha^{n_i}} < b_i \frac{b_{i+1} - b_i}{b_{i+1} - \frac{1}{1-\alpha} - 1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{b_i} < A \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{b_i} (b_{i+1} - b_i)$$

$(A = \mathrm{const})$.

Суммируя эти оценки, получаем для любого натурального k:

$$N_k = \sum_{i=0}^{k-1} n_i < A \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{b_i} (b_{i+1} - b_i) < A \int_{b_0}^{b_k} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^x dx = \\ = \frac{A}{\ln \alpha^{-1}} \left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{b_k} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{b_0}\right] = B \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{c}{a_k}} + C \quad (B,\ C = \mathrm{const}).$$

Следовательно, последовательность $\{a_k \ln N_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена сверху некоторой константой Q_1.

Возьмем произвольное $Q > Q_1$ и покажем, что оценка (4) выполняется при всех достаточно больших n. Имеем

$$\| z_n \| \leqslant \frac{Q_1}{\ln N_k} (n \geqslant N_k).$$

Далее $\frac{Q_1}{\ln N_k} \leqslant \frac{Q}{\ln n}$ при $n \leqslant N_k^{\frac{Q}{Q_1}}$. Таким образом, при $N_k \leqslant n \leqslant N_k^{\frac{Q}{Q_1}}$ выполняется (4). Поэтому, если $N_{k+1} \leqslant N_k^{\frac{Q}{Q_1}}$, то для всех натуральных n из промежутка $[N_k, N_{k+1}]$ выполняется (4).

Пусть $N_{k+1} > N_k^{\frac{Q}{Q_1}}$, т. е. $n_k > N_k^{\frac{Q}{Q_1}} - N_k$, тогда

$$\frac{c}{a_k} > N_k^{\frac{Q}{Q_1}} - N_k - \frac{1}{1-\alpha} - 1.$$

Для любой постоянной $c_1 > c$ найдется $M > 0$ такое, что при $N > M$ выполняется неравенство

$$N^{\frac{Q}{Q_1}} - N - \frac{1}{1-\alpha} - 1 > \frac{c}{c_1} N^{\frac{Q}{Q_1}}. \tag{9}$$

Таким образом,

$$a_k < c_1 N_k^{\frac{-Q}{Q_1}} = (N_k > M).$$

Зафиксируем k такое, что $N_k > M$ и положим $\lambda = \frac{Q}{c_1}$, $f(\xi) = e^{\lambda\xi}$. Можно считать $\lambda > 1$ ввиду произвола в выборе Q.

Неравенство

$$c_1 N_k^{\frac{-Q}{Q_1}} \leqslant \frac{Q}{\ln n}$$

выполняется при $n \leqslant f(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})$, следовательно, при $N_k \leqslant n \leqslant f(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})$ выполняется (4). Покажем, что (4) выполняется для всех натуральных n из промежутка $[N_k, N_{k+1}]$. В случае, когда $N_{k+1} \leqslant f(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})$ требуемое утверждение доказано.

Пусть $N_{k+1} > f(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})$. Рассмотрим итерации $f^{p+1}(\xi) = f(f^p(\xi))$ ($p = 1, 2, \ldots$). Очевидно, что $f^p(\xi) \nearrow \infty$ при $p \to \infty$ равномерно по $\xi \in [0, \infty)$. Поэтому существует такое p, что

$$f^p(N_k^{\frac{Q}{Q_1}}) < N_{k+1} \leqslant f^{p+1}(N_k^{\frac{Q}{Q_1}}).$$

Тогда

$$\frac{c}{a_k} > f^p(N_k^{\frac{Q}{Q_1}}) - N_k - \frac{1}{1-\alpha} - 1.$$

Из (9) вытекает, что

$$f^p(N_k^{\frac{Q}{Q_1}}) - N_k - \frac{1}{1-\alpha} - 1 > \frac{c}{c_1} f^p(N_k^{\frac{Q}{Q_1}}).$$

Отсюда

$$\|z_n\| \leqslant a_k < \frac{c_1}{f^p(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})} \quad (n \geqslant N_k).$$

Неравенство

$$\frac{c_1}{f^p(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})} \leqslant \frac{Q}{\ln n}$$

выполняется при $n \leqslant f^{p+1}(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})$. Следовательно, при $N_k \leqslant n \leqslant f^{p+1}(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})$ и, в частности, при $N_k \leqslant n \leqslant N_{k+1}$ выполняется (4). Итак, оценка (4) доказана при всех $n \geqslant N_k$.

Поступила в редколлегию 18.09.86