УДК 517.53

А. Э. ЕРЕМЕНКО, Г. М. ЛЕВИН

ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПОЛИНОМА

1. Рассмотрим полином f степени $d \geqslant 2$ и обозначим через f^n ег[о] n-ю итерацию. Результаты теории итераций, используемые в это[й] статье, содержатся в [1, 2].

Корень уравнения $f^n z = z$ называется периодической точкой (с периодом n). Величина $\chi(z) = \frac{1}{n} \log |(f^n)'(z)|$ есть характеристический показатель этой точки. В случае, когда множество Жюлиа полинома f связно, для любой периодической точки z выполняется

$$\chi(z) \leqslant 2 \log d, \tag{1.1}$$

причем эта оценка точна и достигается только в том случае, когда множество Жюлиа — отрезок, а z — его конец [3]. В настоящей работе мы получим оценку для $\chi(z)$ сверху для произвольных полиномов, а также оценку для $\chi(z)$ снизу в случае, когда множество Жюлиа вполне несвязно.

Положим

$$u_f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |f^n(z)|. \tag{1.2}$$

Этот предел существует и является субгармонической функцией в $\boldsymbol{C}$ (стандартное руководство по теории субгармонических функций — книга [4]). Функция u_f неотрицательна и непрерывна в $\boldsymbol{C}$. Она га[р]моническая и положительная в области $D = \{z : f^n z \to \infty,\ n \to \infty\}$, и $u_f(z) = 0$ в $\boldsymbol{C} \setminus D = K$. Имеет место функциональное уравнен[ие]

$$u_f \circ f = d u_f. \tag{1.3}$$

Риссовская мера μ_f функции u_f сосредоточена на множестве Жюли[а] $J = \partial D = \partial K$. Это единственная вероятностная мера в $\boldsymbol{C}$, обладающая следующим свойством: для любого борелевского множества $E \subset \boldsymbol{C}$, на котором функция f однолистна, выполняется

$$d\mu_f(E) = \mu_f(fE). \tag{1.4}$$

Мера μ_f называется уравновешенной мерой или мерой максимальной энтропии.

Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_{d-1}$ — все критические точки (нули производной) полинома f. Положим

$$a = \max\{u(c_j): 1 \leqslant j \leqslant d-1\}, \tag{1.5}$$

$$b = \min\{u(c_j): 1 \leqslant j \leqslant d-1\}. \tag{1.6}$$

Числа a и $в$ являются естественными параметрами, характеризующими степень несвязности множества Жюлиа. $a=0$ тогда и только тогда, когда J связно; с другой стороны, J канторово (вполне несвязно) если $b>0$. Отметим еще связь между числом a и средним характеристическим показателем

$$\chi_f = \int \log|f'|\,d\mu_f.$$

Справедливо

$$\chi_f = \log d + \sum_{j=1}^{d-1} u_j(c_j),$$

поэтому $a \leqslant \chi_f - \log d \leqslant (d-1)a$. В частности, $\chi_f = \log d$ тогда и только тогда, когда $a = 0$, т. е. J связно.

Теорема 1.1. *Если* $f(z) = z^d + c$, $c \in \boldsymbol{C}$, *то*

$$\chi(z) \leqslant (d-1)a + 2\log d \leqslant 2\chi_f \tag{1.7}$$

для любой периодической точки z.

Пусть u — субгармоническая функция, μ — ее риссовская мера, z_0 — некоторая точка, в которой $u(z_0) = 0$. Положим

$$n(r, u, z_0) = \mu(\{z : |z - z_0| \leqslant r\}),\ N(r, u, v_0) = \int_0^r n(t, u, u_0)\frac{dt}{t}.$$

Формула Иенсена с учетом того, что $u(z_0) = 0$ дает

$$N(r, u, z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta.$$

Определим порядок меры μ в точке z_0 следующим образом:

$$\rho = \varliminf_{r\to 0} \frac{\log N(r, u, z_0)}{\log r} = \varliminf_{r\to 0} \frac{\log n(r, u, z_0)}{\log r}.$$

Легко видеть, что порядок меры μ совпадает с величиной

$$\rho(u, z_0) = \varliminf_{r\to 0}(\log \max_\theta u(z_0 + re^{i\theta}))/\log r,$$

поэтому его можно назвать также порядком функции u в точке z.

Теорема 1.2. *Для любого полинома f и любой точки $z_0 \in J$ (* *выполняется*

$$\rho(u_f, z_0) \geqslant \frac{1}{\pi} \operatorname{arcctg} \frac{ad}{\pi},$$

где число a определено формулой (1.5).

Следствие 1.3. *Для любой периодической точки справедлив*

$$\chi(z) \leqslant \frac{\pi \log d}{\operatorname{arcctg} \frac{ad}{\pi}}. \qquad (1.$$

Если $a = 0$, то (1.7) и (1.8) превращаются в точную оценку (1.1). При малых a имеем

$$\frac{\pi \log d}{\operatorname{arcctg} \frac{ad}{\pi}} = 2 \log d + \frac{4ad \log d}{\pi^2} + o(a), \quad a \to 0.$$

Таким образом, при $d \leqslant 8$ неравенство (1.8) дает при малых a лучший результат, чем теорема 1.1.

Для произвольной точки $z_0 \in J$ определим (верхний) характеристический показатель формулой

$$\chi(z_0) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \log |(f^n)'(z_0)|.$$

Напомним, что полином называется гиперболическим, если траектории всех его критических точек притягиваются к притягивающим циклам.

Следствие 1.4. *Если f гиперболический полином, то (1.8 выполняется для любой точки $z \in J(f)$.*

Доказательство теоремы 1.2 использует следующий результат из теории субгармонических функций, представляющий самостоятельный интерес. Положим

$$A(r, u, z_0) = \inf_{\theta} u(z_0 + re^{i\theta}).$$

Теорема 1.5. *Пусть u — субгармоническая функция в окрестности точки z_0,* $u(z_0) = 0$, и порядок функции u в точке z_0 равен ρ. *Тогда*

$$\overline{\lim_{r \to 0}} \frac{A(r, u, z_0)}{n(r, u, z_0)} \geqslant \pi \operatorname{ctg} \pi\rho.$$

Эта теорема навеяна так называемыми «$\cos \pi\rho$ — неравенствами» из теории целых и субгармонических функций (см., например, [5—7]). Ее доказательство представляет собой модификацию рассуждений из [6].

Рассмотрим теперь случай вполне несвязного множества Жюлиа, в котором удается получить равномерную оценку характеристического показателя снизу.

Теорема 1.6. *Пусть a и b заданы формулами (1.5), (1.6) и натуральное число k определяется из условия $a < d^k b \leqslant da$. Тогда*

$$\chi(z) \geqslant \frac{a + d^k (d-2) b}{(d-1)^k} \geqslant (d-1) b \qquad (1.9)$$

для любой периодической точки z.

С л е д с т в и е 1.7. *Хаусдорфова размерность множества Жюлиа удовлетворяет неравенству*

$$\mathrm{HD}(J) \leqslant \frac{(d-1)^k \log d}{a + d^k (d-2) b} \leqslant \frac{\log d}{(d-1) b}.$$

Для семейства функций $f_c(z) = z^d + c$, $c \in \mathbf{C}$, мы докажем в п. 2 следующие асимптотики при $c \to \infty$:

$$a_c = b_c = \frac{1}{d} \log |c| + o(1), \tag{1.10}$$

$$\chi(z) = \frac{d-1}{d} \log |c| + o(1) \tag{1.11}$$

для любой периодической точки $z = z_c$. Отсюда видно, что оценки (1.7) и (1.9) асимптотически точные при $c \to \infty$, а оценка (1.8) в рассматриваемом случае отличается от точной множителем $\log d$.

2. Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.1. Проверим сначала (1.10) и (1.11). Полином f_c имеет единственную $d-1$ кратную критическую точку 0. Поэтому

$$a_c = b_c = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |f_c^n(0)| = \frac{1}{d} \log |c| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{d^{k+1}} \log^+ \left| 1 + \frac{c}{(f_c^k(0))^d} \right|.$$

Устремив c к ∞, приходим к (1.10).

Если $z_1 = z_c$ — периодическая точка периода n, то

$$z_i = z_{i-1}^d + c, \ i = 2, \ \ldots, \ n; \ z_1 = z_n^d + c. \tag{2.1}$$

Отсюда выводим, что $z_i \to \infty$ при $c \to \infty$. Следовательно,

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{c}{z_i^d}\right) = \frac{1}{(z_1 \cdot \ldots \cdot z_n)^{d-1}} \to 0, \ c \to \infty,$$

и поэтому модуль хотя бы одного сомножителя $(1 + c/z_j^d)$, $j = j(c)$, мал. Теперь из (2.1) получаем, что $z_i/z_{i-1} \to 1$, $z_n/z_1 \to 1$, откуда следует, что $|z_i|^d \sim |c|$, $c \to \infty$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Поэтому

$$\left(\prod_{i=1}^{n} |f_c'(z_i)|\right)^{1/n} \sim |c|^{(d-1)/d}, \ c \to \infty$$

что доказывает (1.11).

Закончим доказательство теоремы 1.

Имеем

$$a_c = \lim_{n = \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |f_c^n(0)|.$$

Функция $c \mapsto a_c$ непрерывная [8] и субгармоническая в $\mathbf{C}$. Она равна нулю на множестве $M = \{c : J(f_c) \text{ связно}\}$. Дополнение $U = \overline{\mathbf{C}} \setminus M$ связно (по принципу максимума), и функция a_c положительная и гармоническая в U. Таким образом, da_c — функция Грина области U с полюсом в ∞.

Зафиксируем натуральное число n. Легко видеть, что

$$\chi_n(c) = \max\{\chi(z) : f_c^n z = z\}$$

субгармоническая функция в C. На множестве M в силу (1.1) выполняется $\chi_n(c) \leqslant 2\log d$, а eокрестности ∞ — в силу (1.10) и (1.11) справедливо $\chi_n(c) \leqslant (d-1)a_c + o(1)$.

Применяя принцип гармонической мажоранты к области U, получаем $\chi_n(c) \leqslant 2\log d + (d-1)a_c$, т. е. (1.7).

3. Доказательство теоремы 1.5. Не уменьшая общности, считаем, что $z_0 = 0$. Далее мы можем предполагать, что u субгармоническая в C и выполняется

$$u(z) = O(\log|z|), \quad z \to \infty \tag{3.1}$$

(любая функция, субгармоническая на компакте в C, может быть продолжена в C со свойством (3.1)). Функция (1.2), к которой мы собираемся применить теорему 1.5, уже обладает свойством (3.1)). Из (3.1) и $u(0) = 0$ следует представление

$$u(z) = \int \log\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\mu_\zeta. \tag{3.2}$$

Полагаем $A(r, u) = A(r, u, 0)$, $n(r, u) = n(r, u, 0)$, $N(r, u) = N(r, u, 0)$. Пусть

$$v(z) = \int \log\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\nu_\zeta,$$

где ν — мера, сосредоточенная на отрицательном луче и имеющая считающую функцию $n(r, v) \equiv n(r, u)$. Из неравенств $\log|1 - |u|| \leqslant \leqslant \log|1-u| \leqslant \log(1+|u|)$, $u \in C$ вытекает $A(r, u) \geqslant A(r, v) = v(-r)$. Поэтому теорему достаточно доказать для функции v вместо u. Нам потребуется следующая

Лемма 3.1 (о пиках Пойа). *Пусть Φ — возрастающая функция,* $\Phi(0) = 0$,

$$\rho = \varliminf_{r\to 0} \frac{\log \Phi(r)}{\log r} < \infty.$$

Тогда найдутся последовательности $r_k \to 0$, $\varepsilon_k \to 0$, такие, что

$$\Phi(r) \leqslant \Phi(r_k)\left(\frac{r}{r_k}\right)^\rho (1+\varepsilon_k), \quad \varepsilon_k r_k \leqslant r \leqslant \varepsilon_k^{-1} r_k. \tag{3.3}$$

Если в формулировке заменить $r \to 0$, $r_k \to 0$ на $r \to \infty$, $r_k \to \infty$, а знак неравенства в (3.3) — на противоположный, получится хорошо известное утверждение, часто применяемое в теории целых и мероморфных функций конечного порядка (доказательство см., например, в [9]). Наша формулировка сводится к стандартной при помощи замены $\Psi(r) = 1/\Phi(1/r)$. Полагая в лемме $\Phi(r) = N(r, v)$, найдем последовательность пиков Пойа $r_k \to 0$ таких, что

$$N(r, v) \leqslant N(r_k, v)\left(\frac{r}{r_k}\right)^\rho (1+\varepsilon_k), \quad \varepsilon_k r_k \leqslant r \leqslant \varepsilon_k^{-1} r_k. \tag{3.4}$$

Рассмотрим последовательно ть субгармонических функций

$$v_k(z) = \frac{v(r_k z)}{N(r_k, v)}. \tag{3.5}$$

Очевидно, что

$$v_k(z) = \int \log\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\nu_k, \tag{3.6}$$

где меры ν_k определены так:

$$\nu_k(E) = \frac{\nu(r_k E)}{N(r_k, v)}.$$

Справедливы соотношения

$$n(r, v_k) = \frac{n(rr_k, v)}{N(r_k, v)}, \tag{3.7}$$

$$N(r, v_k) = \frac{N(rr_k, v)}{N(r_k, v)}. \tag{3.8}$$

Применяя оценку $n(r, v_k) \leqslant N(re, v_k)$ и (3.4) получаем, что меры ν_k равномерно ограничены на компактах. Выбирая подпоследовательность, считаем, что $\nu_k \to \nu_0$ (сходимость в пространстве, сопряженном к пространству непрерывных финитных функций).

Тогда $v_k \to w_0$, где $w_0(z) = \int \log\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\nu_0$. Сходимость $v_k \to w_0$ имеет место в среднем по площади на каждом компакте в $\boldsymbol{C}$, а также в среднем по 1 — мере на каждом компакте в $\boldsymbol{R}$. Имеем

$$n(r, v_k) \to n(r, w_0), \quad N(r, v_k) \to N(r, w_0). \tag{3.9}$$

Из (3.4), (3.8) следует, что

$$N(r, w_0) \leqslant r^\rho, \quad 0 \leqslant r < \infty, \quad N(1, w_0) = 1. \tag{3.10}$$

Теорема будет доказана, если мы покажем, что

$$\frac{w_0(-1)}{n(1, w_0)} \geqslant \pi \operatorname{ctg} \pi\rho. \tag{3.11}$$

Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$w_1(re^{i\theta}) = \rho^2 \int_0^\infty \log\left|1 + \frac{re^{i\theta}}{t}\right| t^{\rho-1} dt = \frac{\pi\rho r^\rho}{\sin \pi\rho} \cos \rho\theta, \quad |\theta| \leqslant \pi.$$

(равенство следует из формулы Иенсена). Имеем

$$n(r, w_1) = \rho r^\rho, \tag{3.12}$$

$$N(r, w_1) = r^\rho, \tag{3.13}$$

$$w_1(-1) = \pi\rho \operatorname{ctg} \pi\rho. \tag{3.14}$$

Заметим, что функция $N(r, w_0)$ выпуклая относительно логарифма. Поэтому из (3.10) следует, что $N(r, w_0)$ дифференцируема в точке 1 и

$$n(1, w_0) = \frac{d}{d \log r} N(r, w_0)\Big|_{r=1} = \frac{d(r^\rho)}{d \log r}\Big|_{r=1} = \rho. \tag{3.15}$$

Покажем теперь, что $w_0(-1) \geqslant w_1(-1)$. Обе функции w_0, w_1 гармонические в плоскости, разрезанной по отрицательному лучу. Положим

$$w_j^*(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} w_j(re^{i\varphi}) d\varphi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad j = 0, 1.$$

Легко видеть, что функции w_j^* гармонические в верхней полуплоскости (w_j^* — это тривиальный частный случай * — функций Бернстейна, см., например, [10, 11].

Имеем $w_0^*(r) = w_1^*(r) = 0,\ r > 0,$

$$w_0^*(-r) = N(r,\ w_0) \leqslant r = N(r,\ w_1) = w_1^*(-r),\ r > 0, \tag{3.16}$$

в силу (3.10), (3.13). Отсюда по теореме Фрагмена — Линделефа выводим, что

$$w_0^*(z) \leqslant w_1^*(z),\ \operatorname{Im} z > 0. \tag{3.17}$$

Далее, в силу (3.10), (3.13) выполняется $w_0^*(-1) = w_1^*(-1)$, что вместе с (3.17) дает

$$\left.\frac{\partial w_0^*(e^{i\theta})}{\partial\theta}\right|_{\theta=\pi} \geqslant \left.\frac{\partial w_1^*(e^{i\theta})}{\partial\theta}\right|_{\theta=\pi}.$$

Но $\left.\dfrac{\partial w_j^*(e^{i\theta})}{\partial\theta}\right|_{\theta=\pi} = \dfrac{1}{\pi} w_j(-1)$, таким образом $w_0(-1) \geqslant w_1(-1) = \pi\rho \operatorname{ctg} \pi\rho$, что вместе с (3.15) дает (3.11).

Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 1.2 и следствий 1.3, 1.4. Для доказательства теоремы 1.2 рассмотрим два случая:

а) точка z_0 содержится в неодноточечной связной компоненте множества Жюлиа J. Тогда для субгармонической функции u выполняется $A(r,\ u,\ z_0) \equiv 0$ при достаточно малых r и по теореме 1.5 справедливо $\rho \geqslant \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{\pi} \operatorname{arcctg} \frac{ad}{\pi}$;

б) точка z_0 является связной компонентой множества J. Положим $E_0 = \{z : u(z) \leqslant a\}$. Множество E_0 связно, потому что a — наибольшее критическое значение функции u. Пусть E_k — связная компонента множества $f^{-k}(E_0)$, содержащая точку z_0. Иначе говоря, E_k — связная компонента множества $\{z : u(z) \leqslant ad^{-k}\}$, содержащая точку z_0 (см. (1.3)). Из (1.4) следует, что

$$\mu(E_k) \geqslant d^{-k} \tag{4.1}$$

($\mu(E_0) = 1$, так как $\operatorname{supp} \mu = J \subset E_0$). Поскольку z_0 — связная компонента множества J, справедливо

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k = \{z_0\}. \tag{4.2}$$

Пусть D_r — круг с центром в точке z_0 радиуса $r > 0$, настолько малого, что $C_r = \partial D_r$ пересекает E_0. Пусть $k(r)$ — наименьшее натуральное число такое, что $E_{k(r)} \subset D_r$ (такое число существует в силу (4.2)). Из (4.1) следует

$$\mu(D_r) \geqslant \mu(E_{k(r)}) \geqslant d^{-k}. \tag{4.3}$$

По определению числа $k(r)$ множество $E_{k(r)-1}$ не содержится в D_r. Поскольку $E_{k(r)-1}$ связно и содержит z_0, оно должно пересекать C_r, поэтому

$$A(r,\ u,\ z_0) \leqslant ad^{-k+1}. \tag{4.4}$$

Из (4.3) следует, что $n(r,\ u,\ z_0) \geqslant d^{-k}$. Таким образом, при всех достаточно малых $r > 0$

$$\frac{A(r,\ u,\ z_0)}{n(r,\ u,\ z_0)} \leqslant ad.$$

Применение теоремы 1.5 заканчивает доказательство теоремы 1.2.

Для доказательства следствий нам потребуется

Предложение 4.1. *Пусть $z_0 \in J(f)$, обозначим через $r_n(z_0)$ радиус наибольшего круга с центром в точке $f^n z_0$, в котором существует однозначная ветвь g_n функции f^{-n} со свойством $g_n(f^n z_0) = z_0$. Предположим, что*

$$r(z_0) = \varliminf_{n \to \infty} r_n(z_0) > 0. \tag{4.5}$$

Тогда

$$\rho(u, z_0) = \frac{\log d}{\chi(z_0)}$$

(верхний характеристический показатель $\chi(z_0)$ любой точки $z_0 \in J(f)$ определен в п.1)

Доказательство. Функция g_n однолистна в круге $\{z : |z - f^n z_0| < r(z_0)\}$. Согласно теореме искажения, вдвое меньший круг $\left\{z : |z - f^n z_0| < \frac{1}{2} r(z_0)\right\}$ отображается на овал с ограниченным искажением E_n, причем $t_n = \operatorname{diam} E_n \asymp |(f^n)' z_0|^{-1}$ (знак $\asymp$ означает, что отношение величин ограничено сверху и снизу положительными абсолютными постоянными). Из определения характеристического показателя следует

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{\log t_n}{n} = -\chi(z_0).$$

С другой стороны,

$$\mu(E_n) \asymp d^{-n},$$

$$\frac{\log \mu(E_n)}{n} \to -\log d.$$

Отсюда

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\log t_n}{\log \mu(E_n)} = \frac{\chi(z_0)}{\log d}.$$

Из монотонности функции $n(t, u, z_0)$ и того, что $\log \mu(E_{n+1}) - \log \mu(E_n) = O(1)$, следует

$$\varlimsup_{r \to 0} \frac{\log r}{\log n(r, u, z_0)} = \frac{\chi(z_0)}{\log d}$$

или

$$\rho(u, z_0) = \varliminf_{r \to 0} \frac{\log n(r, u, z_0)}{\log r} = \frac{\log d}{\chi(z_0)}.$$

Заметим теперь, что условие (4.5) выполняется в двух случаях:

а) f — произвольный полином, z_0 — периодическая точка;

б) f — гиперболический полином, $z_0 \in J(f)$ — любая точка.

Таким образом, следствия 1.3, 1.4 вытекают из теоремы 1.2 и предложения 4.1.

5. Доказательство теоремы 1.6 и следствия 1.7.

Мы будем пользоваться методом экстремальных длин [12], модуль семейства кривых Γ будем обозначать через $M(\Gamma) = \lambda(\Gamma)^{-1}$, где

λ — экстремальная длина. Непосредственно из определения модуля вытекает

Лемма 5.1. *Пусть Γ — семейство попарно непересекающихся кривых, заполняющих область U, а $g: U \to g(U)$ — голоморфное отображение с двумя свойствами:*

(i) если $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, то $g(\gamma_1) \cap g(\gamma_2) = \varnothing$; $(ii)\, g: \gamma \to g(\gamma)$ — накрытие степени не больше, чем N.

Тогда $M(\Gamma) \geqslant M(g(\Gamma))/N$.

Занумеруем критические точки $c_1, c_2, \ldots, c_{d-1}$ полинома f таким образом, чтобы $u_1 \geqslant u_2 \geqslant \ldots \geqslant u_{d-1}$, где $u_i = u_f(c_i)$, в частности, $u_1 = a$, $u_{d-1} = b$.

Мы можем предполагать, что $d^l u_i \neq u_j$, $i \neq j$, $l \in Z$. Если мы докажем теорему в этом случае, то общий случай получится в силу непрерывности отображений $(z, f) \mapsto u_f(z)$ и $(z, f) \mapsto \chi(z)$.

Из этого предположения следует, что каждая компонента линии уровня $L(\rho) = \{z : u(z) = \rho\}$ есть либо простая замкнутая вещественно-аналитическая кривая, либо кривая, имеющая форму восьмерки (последняя возможность имеет место при $\rho = u_i d^{-l}$, $l \in Z_+$).

Функция Бетхера [2,8], конформно отображает кольцо $\{z : u_1 < u(z) < du_1\}$ на кольцо $\{z : e^{u_1} < |z| < e^{du_1}\}$, поэтому

$$M(\Gamma_0) = \frac{(d-1)\,u_1}{2\pi}, \tag{5.1}$$

где $\Gamma_0 = \{L(\rho) : u_1 < \rho < du_1\}$.

Пусть $z \in J$ и $n \in N$. Обозначим через $\Gamma_n = \Gamma_n(z)$ множество компонент линий уровня $L(\rho)$, $u_1/d^n < \rho < u_1/d^{n-1}$, охватывающих точку z. Оценим $M(\Gamma_n(z))$ снизу. Заметим, что для любой односвязной области V, ограниченной компонентой линии уровня $L(\rho)$, отображение $f: V \to f(V)$ есть N-листное разветвленное накрытие, где $N-1$ равно числу критических точек функции f в V. Поэтому величины $M(\Gamma_n)$ равны между собой при $n \geqslant k$, где $k \in N$ определяется условием

$$u_1 d^{-k} < u_{d-1} < u_1 d^{-k+1}$$

(т. е. k совпадает с определенным в условии теоремы 1.6).

Семейство Γ_k делится на две части: кривые $\gamma_\rho \subset L_\rho$, охватывающие критическую точку c_{d-1} (если $u_{d-1} < \rho < u_1 d^{-k+1}$), и кривые, не охватывающие критических точек (если $u_1 d^{-k} < \rho < u_{d-1}$). Функция f^k отображает Γ_k на Γ_0. Учитывая (5.1), лемму 5.1 и свойства экстремальных длин, получаем

$$M(\Gamma_k) \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{d^k u_{d-1} - v_1}{(d-1)^{k-1}} + \frac{du_1 - d^k u_{d-1}}{(d-1)^k}\right) \tag{5.2}$$

Пусть теперь z_0 — периодическая точка с периодом m, $\lambda = (f^m)' \times (z_0)$, $\chi(z_0) = \frac{1}{m}\log|\lambda|$,

$$\Gamma = \bigcup_{i=0}^{m-1} \Gamma_{n+i}(z_0). \tag{5.3}$$

Кривые семейства Г разделяют граничные компоненты кольца K, ограниченного некоторыми кривыми $\gamma_1 \subset L(ad^{-n-m})$ и $\gamma_2 \subset L(ad^{-n})$. Поскольку семейства Γ_j попарно не пересекаются, имеем с учетом (5.2)

$$M(K) \geqslant M(\Gamma) \geqslant \frac{m}{2\pi} \frac{a + d^k (d-2) b}{(d-1)^k} \tag{5.4}$$

($M(K)$ — модуль кольца K [12]).

Оценим $M(K)$ сверху. Если n велико, то кольцо K лежит в малой окрестности точки z_0. По теореме Шредера [2] существует голоморфная замена координат в окрестности точки z_0, $\zeta = \psi(z)$, $\psi(z_0) = 0$, линеаризующая преобразование f^m. Положим $K^* = \psi(K)$. Отображение $\zeta \mapsto \lambda^{-1}\zeta$ переводит внешнюю граничную компоненту кольца K^* во внутреннюю. Выбирая в кольце конформную метрику с плотностью $\rho(\zeta) = (2\pi|\zeta|)^{-1}$, получим, что длина замкнутых кривых, разделяющих граничные компоненты, не менее, чем 1, а площадь кольца в этой метрике не более, чем $(2\pi)^{-1} \log|\lambda|$. Поэтому экстремальная длина больше или равна $2\pi(\log|\lambda|)^{-1}$ и

$$M(K) = M(K^*) \leqslant \frac{1}{2\pi} \log|\lambda|.$$

Это соотношение вместе с (5.4) доказывает теорему 1.6.

Чтобы вывести следствие 1.7, заметим, что полином f гиперболический, если $b > 0$. Для вычисления хаусдорфовой размерности множества Жюлиа гиперболического полинома служит термодинамический формализм [13, 14].

Положим

$$P(t) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{z \in \mathrm{Per}_n} |(f^n)'(z)|^{-t}, \quad t \in \boldsymbol{R}, \tag{5.5}$$

где Per_n — множество точек с периодом n. Предел в (5.5) существует и называется давлением. Функция $t \mapsto P(t)$ строго убывает и имеет единственный нуль в точке $t = \mathrm{HD}(J) \geqslant 0$. Из теоремы 1.7 следует, что $|(f^n)'(z)| \geqslant e^{n\chi}$ для любой точки $z \in \mathrm{Per}_n$, где χ удовлетворяет оценке (1.9). Отсюда получаем $P(t) \leqslant \log d - t\chi$, что влечет искомую оценку для $\mathrm{HD}(J)$.

Список литературы: 1. *Brolin H.* Invariant sets under iteration of rational functions // Ark. Mat. 1965. **6**. P. 103—144. 2. *Еременко А. Э., Любич М. Ю.* Динамика аналитических преобразований // Алгебра и анализ. 1989. **1**, вып. 3. С. 1—70. 3. *Еременко А. Э., Левин Г. М.* О периодических точках полиномов // Укр. мат. журн. 1989. 41. № 11. С. 1467—1471. 4. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. М., 1980. 304 с. 5. *Essen M.* The cos πλ-Theorem. Springer — Verlag, 1975. 112 p. 6. *Еременко А. Э., Содин М. Л., Шиа Д. Ф.* О минимуме модуля целой функции на последовательности пиков Пойа // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1986. Вып. 45. С. 26—40. 7. *Островский И. В.* О некоторых асимптотических свойствах целых функций с вещественными отрицательными нулями // Уч. зап. Харьк. ун-та. 1961. **120**. С. 23—32. 8. *Douady A., Hubbard J.* Etude dinamique des polynômes complexes / Publ. Math. d'Orsay. 1984—02, 1985—02. 9. *Drasin D., Shea D.* Polya peaks and oscillation of positive functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. **34**. P. 403—411. 10. *Baern-*

stein A. Proof of Edrei's spread conjecture // Proc. London Math. Soc. 1973. **26**. P. 418—439. 11. *Anderson J. M., Baernstein A.* The size of the set on which a meromorphic function is large // Proc. London Math. Soc. 1978. 36. P. 518—539. 12. *Ahlfors L.* Conformal Invariants. McGraw-Hill, N.—Y., 1973. 157 p. 13. *Bowen R.* Hausdorff dimension of quasi-circles // Publ. Math. IHES. 1979 **50**. P. 259—273. 14. *Ruelle D.* Repellers for real analytic maps // Ergodic theory and Dynamical Systems. 1982. 2 № 1. P. 99—107.