ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXX. Серия 4 1964

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ПРЕДЕЛЬНО-ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Б. Я. Скачек

Данная статья посвящена изучению спектра оператора $-\tilde{\Delta}$, определяемого операцией $-\Delta$ в $L_2(\Omega)$ и нулевыми граничными условиями, в предположении, что Ω есть предельно-цилиндрическая область. Бесконечная область Ω трехмерного эвклидового пространства, ограниченная в цилиндрических координатах поверхностью

$$r = r(\varphi)[1 + \delta(z)] \tag{1}$$
$$(0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ \delta(z) > -1,\ 0 \leqslant z < \infty)$$

и конечной частью плоскости $z = 0$, отсекаемой этой поверхностью, называется предельно-цилиндрической, если

$$\lim_{z \to \infty} \delta(z) = 0. \tag{2}$$

В параграфе 1 с помощью вариационных методов Р. Куранта и принципа расщепления исследуется дискретная часть спектра оператора $-\tilde{\Delta}$. Содержание параграфа 1 представляет собой подробное изложение первой части совместной заметки [5] И. М. Глазмана и автора данной статьи. В параграфе 2 с помощью пробных систем финитных функций (см. [3]) исследуется непрерывная часть спектра оператора $-\tilde{\Delta}$. Данная статья развивает в определенном направлении работы Ф. Реллиха [1] и Д. Джонса [2], впервые применивших методы Р. Куранта к многомерным краевым задачам в бесконечных областях.

§ 1. Дискретная часть спектра

1. Обозначим через α первое собственное значение краевой задачи определяемой двумерной операцией $-\Delta$ в плоской области E_0 и нулевыми краевыми условиями, где E_0 есть область, ограниченная кривой $r = r(\varphi)$.

Нетрудно показать, что число α совпадает с нижней гранью α^* непрерывной части спектра оператора в предельно-цилиндрической области Ω.

Действительно, левее точки α спектр $S(-\tilde{\Delta})$ дискретен (см. [2]), то есть $\alpha \leqslant \alpha^*$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число $h\,(0 < h < 1)$ такое, чтобы при $\delta(z) \equiv -h$ первое собственное значение индуцированной в сечении $z = 0$ задачи равнялось бы $\alpha + \varepsilon$. При этом предельно-цилиндрическая область превращается в цилиндр, и для некоторого $z_0 > 0$ часть C_0 этого цилиндра, расположенная выше плоскости $z = z_0$, будет лежать внутри данной предельно-цилиндрической области. Как известно, число $\alpha + \varepsilon$ является первой точкой непрерывной части спектра оператора $-\tilde{\Delta}$ в $L_2(C_0)$. Но тогда, как следует из [2], будет выполняться неравенство $\alpha^* < \alpha + \varepsilon$, откуда при $\varepsilon \to 0$ получаем $\alpha^* < \alpha$. Итак, доказано, что $\alpha^* = \alpha$.

Далее заметим, что a priori существуют две возможности: либо непрерывной части спектра оператора $-\tilde{\Delta}$ предшествует лишь конечное число его собственных значений, либо ей предшествует бесконечное множество собственных значений. Целью данного параграфа является нахождение условий, которым следует подчинить нефинитное возмущение $\delta(z)$ для обеспечения каждого из этих свойств.

Имеет место следующий аналог известной теоремы А. Кнезера.

Теорема 1 [5]. *Если*

$$\limsup_{z \to \infty} z^2 \delta(z) < \frac{1}{8\alpha}, \tag{3}$$

то левее точки α может оказаться лишь конечное число собственных значений оператора $-\tilde{\Delta}$.

Если

$$\liminf_{z \to \infty} z^2 \delta(z) > \frac{1}{8\alpha}, \tag{4}$$

то часть спектра оператора $-\tilde{\Delta}$, лежащая левее точки α, состоит из бесконечной последовательности собственных значений с единственной предельной точкой $\lambda = \alpha$.

В дальнейшем через $(u, v)_\Omega$ будем обозначать $\iiint\limits_\Omega uv d\Omega$.

2. Докажем вначале теорему 1 в предположении, что имеет место неравенство (3). При этом будем рассматривать вместо области Ω охватывающую ее область Ω_a, образованную пересечением плоскости $z = 0$ и поверхности S_a, заданной уравнением

$$r = r(\varphi)\,[1 + \delta_1(z)],$$

причем

$$\delta_1(z) = \begin{cases} a + \gamma(a - z) & 0 \leqslant z \leqslant a + \dfrac{a - \varepsilon_1}{\gamma} \\ f_1(z) & a + \dfrac{a - \varepsilon_1}{\gamma} < z \leqslant \zeta \\ \dfrac{1 - \varepsilon}{8\alpha z^2} & \zeta < z < \infty, \end{cases}$$

где

$$M = \max\{r(\varphi),\ 1\}, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{4M}, \quad \zeta \geqslant M,$$

a, ε, ε_1 — некоторые положительные числа, $f_1(z)$ — сглаживающая функция. Заметим, что какова бы ни была область Ω, удовлетворяющая (4), всегда можно указать такие a, ε, ε_1, $f_1(z)$, что Ω_a будет охватывать Ω.

Введем новые переменные ξ, η, z_1 по формулам

$$\xi = \frac{x}{1 + \delta_1(z)}, \quad \eta = \frac{y}{1 + \delta_1(z)}, \tag{5}$$

$$z_1 = z.$$

При такой замене Ω_a перейдет в цилиндрическую область D с направляющей $r = r(\varphi)$, ограниченную снизу плоскостью $z = 0$. Далее, положим $u(x, y, z) = v(\xi, \eta, z)$, а $(-\tilde{\Delta} u, u)_{\Omega_a} = \Phi(u) = \Phi_1(v)$.

Заметим, что

$$\Phi_1(v)=\iiint\limits_D\left\{\left[\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)^2\right]\frac{1}{(1+\delta_1)^2}+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2-\right.$$

$$-2\frac{\delta_1'\xi}{1+\delta_1}\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial\xi}-2\frac{\delta_1'\eta}{1+\delta_1}\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial\eta}+2\frac{\delta_1'\xi\eta}{(1+\delta_1)^2}\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial v}{\partial\eta}+$$

$$\left.+\left(\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)^2\frac{\delta_1'\eta^2}{(1+\delta_1)^2}+\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\delta_1'^2\xi^2}{(1+\delta_1)^2}-\alpha v^2\right\}(1+\delta_1)^2\,d\xi d\eta dz.$$

Далее, пусть

$$\delta_2'=|\delta_1'|M,\quad \psi(z)=(1+\delta_1)^2(1-2\delta_2'),$$
$$\beta(z)=1-2\delta_2'-\delta_2|\delta_1'|.$$

С помощью простых алгебраических преобразований получаем следующую оценку для $\Phi_1(v)$:

$$\Phi_1(v)\geqslant\iiint\limits_D\left\{\psi(z)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\beta(z)\left[\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)^2\right]-\alpha v^2(1+\delta_1)^2\right\}d\xi d\eta dz. \quad (6)$$

Рассмотрим оператор L_0, определяемый в $L_2(D)$ операцией

$$l_0(v)=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\psi\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\beta(z)\Delta v-\alpha(1+\delta_1)^2 v$$

и нулевыми граничными условиями. Покажем, что этот оператор имеет лишь конечное число отрицательных собственных значений. В уравнении $l_0(v)=\lambda v$ разделим переменные, полагая $v=\omega(z)\theta(\xi,\eta)$. Получим, что собственные функции оператора L_0 будут иметь вид

$$v_{lm}=\omega_{lm}(z)\theta_m(\xi,\eta),$$

где $\theta_m(\xi,\eta)$ — собственные функции, соответствующие собственным значениям K_m плоской задачи, индуцированной в E_0, а $\omega_{lm}(z)$ есть собственные функции оператора L_m, определяемого в $L_2(0,\infty)$ дифференциальной операцией

$$l_m(\omega)=-(\psi\omega')'+[K_m\beta-\alpha(1+\delta_1)^2]\omega$$

и краевым условием $y(0)=0$. Поэтому число отрицательных собственных значений оператора L_0 равно общему количеству отрицательных собственных значений всех операторов семейства $\{L_m\}_{m=1}^{\infty}$.

Так как функция $\psi(z)$ при $z\geqslant 0$ ограничена снизу положительным числом, то при $m\geqslant m_0$ операторы L_m положительны.

Расщепляя (см. [4]) оператор L_m при $m<m_0$ в точке $z=z_0$ такой, что $\psi(z)\geqslant 1$ при $z\geqslant z_0$, получаем, что число отрицательных собственных значений оператора конечно, если конечно число отрицательных собственных значений оператора $\overset{0}{L}_m$, определяемого в $L_2(z_0,\infty)$ операцией

$$l(\omega)=-\omega''+q_m(z)\omega, \quad (7)$$

где

$$q_m(z)=K_m-\alpha-\frac{1-\delta}{4z^2}+0(z^{-3}).$$

Так как $K_m\geqslant\alpha$, то множество отрицательных собственных значений оператора $\overset{0}{L}_m$ конечно и следовательно оператор L_0 имеет конечное число отрицательных собственных значений. В силу неравенства (6) оператор $-\tilde{\Delta}_a$ в области Ω_a будет иметь конечное число собственных значений.

Таким образом, теорема 1 в случае выполнения неравенства (3) доказана для областей Ω_a. Тем более доказанное свойство будет иметь место для области Ω.

3. Докажем вторую часть теоремы 1. Пусть имеет место (4). Покажем, что в этом случае часть спектра оператора $-\widetilde{\Delta}$, лежащая левее точки α, состоит из бесконечной последовательности собственных значений с единственной предельной точкой $\lambda = \alpha$. Доказательство будем проводить для области Ω_a, лежащей внутри Ω и полученной пересечением плоскости $z = a$ и поверхности S_a, заданной уравнением

$$r = r(\varphi)\,[1 + \delta_1(z)],$$

где теперь

$$\delta_1(z) = \frac{1 + \varepsilon_2}{8\alpha z^2}.$$

Величины a, ε_2 выбираются таким образом, чтобы область Ω_a лежала внутри Ω, что всегда можно сделать, так как Ω удовлетворяет условию (4).

Пусть

$$\delta_2' = |\delta_1'|\,M, \quad \psi_1(z) = (1 + \delta_1)^2\,(1 + 2\delta_2'),$$
$$\beta_1(z) = 1 + 2\delta_2' + \delta_2'\,|\delta'|.$$

Сделаем замену переменных по формулам (5). Положим $u(x, y, z) = v(\xi, \eta, z)$, а $\Phi(u) = \Phi_2(v)$. Повторяя соответствующие выкладки $n°2$, получим, что

$$\Phi_2(v) < \iiint\limits_{D_a} \left\{\psi_1(z)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \beta_1(z)\left[\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2\right] - \alpha v^2\,(1 + \delta)^2\right\} d\xi\, d\eta\, dz. \quad (8)$$

Рассмотрим оператор L_1, определяемый в $L_2(D_a)$ операцией

$$l_1(v) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\psi_1 \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \beta_1(z)\,\Delta v - \alpha\,(1 + \delta)^2 v$$

и нулевыми граничными условиями. Покажем, что этот оператор имеет бесконечное множество отрицательных собственных значений.

Сделав разделение переменных в уравнении $l_1(v) = \lambda v$ и повторяя соответствующие рассуждения $n°2$, получим, что число отрицательных собственных значений оператора L_1 не меньше числа отрицательных собственных значений оператора L_a, определяемого в $L_2(a, \infty)$ дифференциальной операцией (7) и краевым условием $y(a) = 0$, но теперь $q_m(z)$ определяется по формуле

$$q_m = -\frac{1 + \varepsilon}{4z^2 \psi(a)} + 0\left(\frac{1}{z^3}\right).$$

Так как $\lim\limits_{a \to \infty} \psi(a) = 1$, то при достаточно большом a будет справедливо неравенство

$$\frac{1 + \varepsilon}{\psi(a)} > 1,$$

и поэтому оператор L_a, а следовательно, и L_1 будут иметь бесконечное множество отрицательных собственных значений. В силу неравенства (8) оператор $-\widetilde{\Delta}_a$ в области Ω_a будет иметь бесконечное множество собственных значений левее α. Так как $\Omega_a \subset \Omega$, то (см. [2]) и данный оператор $-\widetilde{\Delta}$ в $L_2(\Omega)$ будет иметь левее α бесконечную последовательность собственных значений.

Теорема доказана полностью.

§ 2. Непрерывная часть спектра

1. Перейдем к исследованию непрерывной части спектра оператора $-\tilde{\Delta}$, которую мы обозначим через $C(\tilde{\Delta})$.

Как показано в $n^\circ 1$ параграфа 1, имеет место следующая

Теорема 2. *Нижняя грань непрерывной части спектра оператора $-\tilde{\Delta}$ в предельно-цилиндрической области Ω совпадает с началом α непрерывного спектра предельного цилиндра.*

Заметим, что все дальнейшие теоремы будут справедливы не только для предельно-цилиндрических областей, но и для областей, ограниченных плоскостью $z=0$ и поверхностью (1), в предположении, что, вместо (2), имеет место лишь условие $|\delta(z)|<C$.

Далее, пусть область Ω образована возмущениями цилиндра, которые становятся все более редкими с ростом z. Обозначим через Δ_i интервалы, на которых имеет место тождество $\delta(z)\equiv 0$, а через l_i — их длины. Имеет место следующая

Теорема 3. *Если область Ω такова, что можно выбрать последовательность непересекающихся интервалов Δ_i таких, что $\lim\limits_{i\to\infty} l_i=\infty$, то любая точка интервала $[\alpha, \infty]$ принадлежит $C(\tilde{\Delta})$.*

Пусть $\varphi(t)$ — произвольная фиксированная дважды непрерывно-дифференцируемая финитная функция с основанием $|t|\leqslant 1$, норма и максимум модуля которой равны единице. Далее, обозначим через $\psi(x, y)$ нормированную собственную функцию, соответствующую собственному значению α двумерного лапласиана, действующего в части плоскости $z=0$, ограниченной кривой $r=r(\varphi)$.

Пробные функции определяются формулой

$$u_n=\sqrt{\varepsilon}\, e^{i\sqrt{\lambda-\alpha}z}\varphi[\varepsilon(z-\gamma_n)]\,\psi(x, y), \tag{9}$$

где γ_n выбираются таким образом, чтобы основания финитных функций u_n не пересекались. Легко видеть, что $\|u_n\|=1$. Доказательство теоремы 2 легко получить, повторяя соответствующие рассуждения [3], считая $\varepsilon=\frac{1}{n}$ и взяв в качестве γ_n начало интервала Δ_n.

2. Имеет место также

Теорема 4. *Если область Ω такова, что $|\delta(z)|<A$, $\lim\limits_{z\to\infty}\delta'=\lim\limits_{z\to\infty}\delta''=0$ и при больших z имеет место неравенство $1+\delta(z)\geqslant\delta_0>0$, то любая точка полуоси $\left[\frac{\alpha}{\delta_0^2}, \infty\right)$ принадлежит $C(\tilde{\Delta})$.*

Заметим, что в случае предельно-цилиндрической области можно взять $\delta_0=1$ и поэтому в этом случае любая точка интервала $[\alpha, \infty)$ принадлежит $C(\tilde{\Delta})$.

Сделаем замену переменных по формулам (5). Как мы уже отмечали, область Ω перейдет в цилиндрическую область с направляющей $r=r(\varphi)$. Проделав нужные вычисления, получим, что

$$\Delta u+\lambda u=\frac{1}{(1+\delta)^2}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}\right]+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\rho(\delta', \delta'')+\lambda v, \tag{10}$$

причем в функцию $\rho(\delta', \delta'')$ входит лишь конечное число слагаемых, имеющих вид $\omega_k(\xi, \eta, z)\,\delta'$ и $\omega_k(\xi, \eta, z)\,\delta''$, где ω_k — некоторые функции.

Пробные функции будут выбираться таким образом, что при фиксированном λ будет иметь место неравенство $|\omega_k(\xi, \eta, z)|<C$, где C —

некоторая постоянная, не зависящая от ξ, η, z, а также от номера пробной функции. Поэтому при выполнении условий

$$|\delta'| < \varepsilon_1, \quad |\delta''| < \varepsilon_1 \tag{11}$$

будет иметь место

$$\rho(\delta', \delta'') < \varepsilon, \tag{12}$$

причем

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \varepsilon = 0. \tag{13}$$

Пусть $g(\xi, \eta)$ — нормированная собственная функция, соответствующая собственному значению оператора, определяемого двумерной операцией Лапласа в плоской области, ограниченной кривой $r = r(\varphi)$ и нулевыми краевыми условиями. Полагая $u_n(x, y, z) = v_n(\xi, \eta, z) = \psi_n(z)\, g(\xi, \eta)$ и подставляя v_n в (10), получаем, что

$$\Delta u_n + \lambda u_n = \rho(\delta', \delta'') + g(\xi, \eta)\left\{\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial z^2} + \lambda\left[1 - \frac{\alpha}{(1+\delta)^2 \lambda}\right]\psi_n\right\}, \tag{15}$$

так как

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial \eta^2} = -\alpha v_n.$$

В дифференциальном выражении

$$l(\psi_n) = \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial z^2} + \lambda\left[1 - \frac{\alpha}{(1+\delta)^2}\right]\psi_n$$

перейдем к новой функции $\bar{\psi}_n$ и новой независимой переменной t по формулам

$$\bar{\psi}_n = \sqrt[4]{1 - \frac{\alpha}{(1+\delta)^2 \lambda}}\, \psi_n, \quad t = \int_0^z \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\lambda(1+\delta)^2}}\, dz.$$

Это преобразование приводится, например, в [6]. Заметим, что t монотонно меняется от нуля до ∞ при увеличении z от нуля до бесконечности при $\lambda > \frac{\alpha}{\delta_0^2}$.

После соответствующих преобразований получаем, что

$$l(\psi_n) = \left[1 - \frac{\alpha}{(1+\delta_1)^2}\right]^{3/4}\left[\frac{\partial^2 \bar{\psi}_n}{\partial t^2} + \lambda \bar{\psi}_n - r(t)\, \bar{\psi}_n\right], \tag{16}$$

где

$$\delta_1(t) = \delta(z), \quad r(t) = r_1(z) = 0(\delta', \delta''). \tag{17}$$

Из (15) и (16) получаем, что

$$\Delta u_n + \lambda u_n = \left[1 - \frac{\alpha}{(1+\delta_1)^2}\right]^{3/4}\left[\frac{\partial^2 \bar{\psi}_n}{\partial t^2} + \lambda \bar{\psi}_n - r(t)\, \bar{\psi}_n\right] g(\xi, \eta) + \rho(\delta', \delta'').$$

Заметим, что при $\lambda > \frac{\alpha}{\delta_0^2}$ имеем

$$\sqrt[3]{\left[1 - \frac{\alpha}{(1+\delta)^2 \lambda}\right]^4} = \gamma_\lambda > 0,$$

причем

$$\lim_{\lambda \to \infty} \gamma_\lambda = 1.$$

Далее, так как $\| g(\xi, \eta) \| = 1$ и

$$1 - \frac{\alpha}{\lambda (1 + \delta_1)^2} < C,$$

где C — постоянная, не зависящая от λ и t, то

$$\| \Delta u_n + \lambda u_n \| \leqslant C \left\| \frac{\partial^2 \bar{\psi}_n}{\partial t^2} + \lambda \bar{\psi}_n \right\| + C \| r \psi_n \| + \| \rho (\delta', \delta'') \|. \tag{18}$$

Определим $\bar{\psi}_n (t)$ по формулам (9), полагая при этом $\alpha = 0$ и $\psi (x, y) \equiv 1$. При таком выборе $\bar{\psi}_n$ будет

$$\int_0^\infty \bar{\psi}_n^2 (z) \, dz > \frac{1}{\gamma_\lambda}$$

и, следовательно,

$$\| u_n \| > \frac{1}{\sqrt{\gamma_\lambda}}. \tag{19}$$

Кроме того, имеют место условия (12), (13), поэтому, учитывая (17) и (19), получаем, что, выбирая достаточно малым ε_1, будем иметь неравенство

$$\| \rho (\delta', \delta'') \| + \| r \bar{\psi}_n \| < \varepsilon_2 \| u_n \|, \tag{20}$$

где ε_2 — любое положительное число.

Подставляя $\bar{\psi}_n$ в правую часть (18) и учитывая (20), получим, что

$$\| \Delta u_n + \lambda u_n \| < \varepsilon_3 \| u_n \|,$$

где ε_3 — любое положительное число.

Теорема доказана.

3. Можно показать, что в случае предельно-цилиндрической области, лакуны в спектре не превосходят некоторой постоянной, зависящей только от сечения E_0 предельного цилиндра. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 5. *Если область Ω содержит бесконечный цилиндр с образующими, параллельными одной из осей координат, то лакуны спектра не превосходят некоторой постоянной, зависящей лишь от поперечного сечения цилиндра.*

Не нарушая общности рассуждений, предположим, что образующая цилиндра параллельна оси z. Далее, пусть $\psi (x, y)$ — произвольная, нормированная функция, непрерывная вместе со вторыми производными включительно и обращающаяся в нуль на границе плоской области E, полученной сечением цилиндра плоскостью $z = \text{const}$. Множество всех таких функций обозначим через N.

Пробные функции u_n определим по формуле (9), полагая в (9) $\alpha = 0$ и беря в качестве ψ функцию из N. Далее имеем

$$\Delta u_n + \lambda u_n = 2 \sqrt{\lambda} \varepsilon \varphi_t' \psi + \varphi \Delta \psi, \tag{21}$$

где $t = \varepsilon (z - \gamma_n)$.

Из (21), в силу того, что φ_t', φ и $\Delta \psi$ не зависят от ε и n, получаем неравенство

$$\| \Delta u_n + \lambda u_n \| < C + \varepsilon_1, \tag{22}$$

где ε_1 — сколь угодно малое, положительное число, а

$$C = \inf_{\psi \in N} \| \Delta \psi \|.$$

Из (22) видно, что длины лакун не превосходят C, но C зависит только от области E. Теорема доказана.

Заметим, что теорема 3 справедлива также при естественных граничных условиях на поверхности области Ω, а теорема 5 при любых регулярных граничных условиях.

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность И. М. Глазману за постановку задачи и помощь при выполнении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Rellich. Das Eigenwerthproblem von $\Delta u + \lambda u = 0$ in Halbröhren. Studies and Essays presented to R. Courant. N. Y. 329—344 (1948).

2. D. S. Jones. The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary Conditions are given on semiinfinite domains. Proc. Cambridg. Philos. Soc., 49, 668—684 (1953).

3. И. М. Глазман. О характере спектра многомерных сингулярных краевых задач. «Докл. АН СССР», 87, 171—174 (1952).

4. И. М. Глазман. О спектре линейных дифференциальных операторов. «Докл. АН СССР», 80, 153—156 (1951).

5. И. М. Глазман и Б. Я. Скачек. О дискретной части спектра лапласина в предельно-цилиндрических областях. «Докл. АН СССР», 147, 760—763 (1962).

6. Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики, том 1, (1951).