

Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

I. Линейные колебания

Учебно-методическое пособие

Харьков – 2013

УДК 534.014.1(075.8)

ББК 22.21я73

М 18

Рецензенты:

Е. С. Сыркин – доктор физ.-мат. наук, вед. научн. сотр. ФТИНТ НАН Украины, профессор кафедры общей и экспериментальной физики Харьковского национального университета «ХПИ»;

А. М. Ермолаев – доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры теоретической физики имени академика И. М. Лифшица Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.

*Утверждено к печати решением Научно-методического совета
Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина
(протокол № 6 от 17.05.2013 г.)*

М 18 **Малые** колебания. I. Линейные колебания : учебно-методическое пособие / [А. С. Ковалев, Е. В. Езерская, З. А. Майзелис, Т. С. Чебанова]. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2013. – 112 с.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для студентов физических специальностей, изучающих теоретическую механику, и содержит примеры и задачи, решение которых способствует более глубокому пониманию физических идей механики, развитию необходимых практических навыков в решении задач теории линейных колебаний.

УДК 534.014.1(075.8)

ББК 22.21я73

© Харьковский национальный университет
имени В. Н. Каразина, 2013

© Ковалев А. С., Езерская Е. В.,
Майзелис З. А., Чебанова Т. С., 2013

© Дончик И. Н., макет обложки, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	4
1. Линейные колебания систем с одной степенью свободы.....	6
1.1. Частоты линейных колебаний.....	6
1.2. Дополнения к разделу 1.....	10
1.3. Задачи к разделу 1.....	19
1.4. Задачи для домашних заданий к разделу 1.....	21
2. Линейные колебания систем с несколькими степенями свободы... ..	24
2.1. Линейные колебания в системе с двумя степенями свободы	24
2.1.1. Два линейных взаимодействующих осциллятора.....	24
2.1.2. Произвольная линейная система с двумя степенями свободы.....	28
2.1.3. Дополнения к разделу 2.1.....	34
2.1.4. Задачи к разделу 2.1.....	63
2.1.5. Задачи для домашних заданий к разделу 2.1.....	71
2.2. Динамика линейной системы со многими степенями свободы	72
2.2.1. Дополнения к разделу 2.2.....	78
2.2.2. Задача к разделу 2.2.....	81
2.2.3. Задачи для домашних заданий к разделу 2.2.....	81
2.3. Динамика линейных одномерных цепочек.....	82
2.3.1. Однородные линейные цепочки.....	82
2.3.2. Линейные цепочки с дефектами. Локальные колебания... ..	89
2.3.3. Многоатомные линейные цепочки.....	94
2.3.4. Дополнения к разделу 2.3.....	97
2.3.5. Задачи для домашних заданий к разделу 2.3.....	106
Использованная литература.....	109

ПРЕДИСЛОВИЕ

Тема «Малые колебания» занимает особое место в курсе теоретической механики. Этот раздел механики наиболее тесно связан с проблемами физики твердого тела, поскольку многие задачи динамики упругих систем, кристаллической решетки, магнитоупорядоченных и оптических сред сводятся к исследованию простых колебательных моделей. В некоторых случаях (пространственно однородное колебание кристаллической решетки или однородная прецессия намагниченности в магнетике) можно ограничиться рассмотрением простых моделей с одной степенью свободы. В других случаях необходимо учитывать наличие нескольких степеней свободы в рамках конечномерных динамических моделей и даже исследовать системы с бесконечным числом переменных. Наличие многих степеней свободы усложняет теоретический анализ даже в случае линейных колебаний, а учет слабых ангармонизмов приводит к появлению принципиально новых свойств колебательного движения. Основную трудность в освоении этого материала представляют применяемые в теории математические методы. Учебники по классической механике (например, «Механика» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, [1]), как правило, содержат в качестве примеров физически важные, но достаточно сложные задачи. С другой стороны, в сборниках задач по механике (например, «Сборник задач по классической механике» Г. Л. Коткина и В. Г. Сербо, [15]) приведено большое количество примеров, но они не сопровождаются развернутыми комментариями и сведениями о соответствующих проблемах. Это усложняет самостоятельную работу студентов. Настоящее учебно-методическое пособие призвано в какой-то мере восполнить этот пробел. Часть задач сопровождается подробными решениями и пояснениями. Имеется также материал для самостоятельных и контрольных работ, индивидуальных расчетных заданий, домашних заданий.

Предлагаемое пособие состоит из трех частей. В первой части, предлагаемой читателям, будут рассмотрены линейные колебания с одной степенью свободы, с двумя степенями свободы и со многими степенями свободы. Каждый раздел содержит дополнения, которые не являются

просто разбором сложных задач с комментариями. Эти части так же важны, как и основной текст разделов, но вынесены отдельно, чтобы не загромождать основной текст. К каждому разделу предлагаются задачи для самостоятельного решения (к ним даны только ответы) и задачи для домашних заданий (без ответов).

Во второй части пособия предполагается рассмотреть слабо ангармонические колебания, а именно, слабо нелинейные колебания систем с одной степенью свободы, слабо нелинейные колебания систем с двумя степенями свободы, два связанных осциллятора Дюффинга, два связанных нелинейных ротатора, системы с нелинейным межчастичным взаимодействием. Третью часть планируется посвятить существенно нелинейным колебаниям: качественному исследованию существенно нелинейных колебаний, точным решениям, описывающим колебания нелинейных систем, эллиптическим функциям Якоби, а также влиянию диссипации и внешних полей на линейные и нелинейные колебания.

Прежде всего, надо определить термины «малые колебания» и «колебания с малой амплитудой». Малость амплитуды подразумевает малое изменение динамической переменной (например, смещения частицы из положения равновесия) относительно некоторого характерного значения (см. задачи 1.2 и 1.3). Этот параметр появляется только при учете нелинейности в системе. В частности, в случае математического маятника малость угла отклонения φ маятника от положения равновесия означает выполнение неравенства $\varphi \ll \pi$. При выполнении подобных неравенств динамические уравнения, описывающие систему, могут быть линеаризованы. (В общем случае это не всегда возможно: см. задачу 1.4). Линейность уравнений существенно упрощает их решение, но при этом «за рамками» остается вопрос о масштабах амплитуд, при которых применимо то или иное линейное уравнение.

ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

1.1. ЧАСТОТЫ ЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Нет ничего проще и ничего важнее в физике, чем задача о линейном осцилляторе. Однако эта задача имеет не только академический интерес.

Во многих случаях, например при резонансных исследованиях твердых тел, они помещаются во внешние однородные поля. При этом динамика всех частиц одинакова и проблема сводится к рассмотрению системы с одной степенью свободы. В простом случае одномерного движения частицы в декартовых координатах функция Лагранжа системы (с одной степенью свободы) имеет вид :

$$L = \frac{M\dot{X}^2}{2} - U(X), \quad (1.1)$$

где M – масса материальной точки. Подчеркнем, что вид этого лагранжиана не постулируется, а вытекает из общих принципов механики (из однородности и изотропии нашего пространства и принципа относительности Галилея).

При переходе к обобщенной координате $X = X(q)$ лагранжиан (1.1) преобразуется к виду:

$$L = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - U(q). \quad (1.2)$$

Напомним, что преобразование $X = X(q)$, которое затрагивает только координаты, называется *точечным преобразованием*.

Рассматривая частный случай колебательного движения, мы считаем что потенциальная энергия $U(q)$ имеет минимум при $q = q_0$, т. е. $U'(q_0) = 0$; $U''(q_0) > 0$. (Но при этом предполагается, что $a(q_0) > 0$, см. задачу 1.6).

В общем случае лагранжиан имеет более сложную структуру, он не следует из лагранжиана материальной точки в декартовых координатах и может рассматриваться как «феноменологический лагранжиан», соответствующий тем или иным динамическим уравнениям (см. задачу).

Введем малые отклонения $x = q - q_0$ обобщенной координаты q от положения равновесия (минимума $U(q_0)$) и ограничимся квадратичными по x слагаемыми в разложении потенциальной энергии:

$$U(q) \approx U(q_0) + \frac{1}{2}U''(q_0)(q - q_0)^2. \quad (1.3)$$

В рамках линейного приближения необходимо оставить в кинетической энергии лишь квадратичные по q и \dot{q} слагаемые. Вводя «эффективную массу» $m = a(q_0)$, которая совпадает с массой M только в том случае, если x – декартова координата, и параметр $k = U''(q_0) > 0$, перепишем функцию Лагранжа в следующем виде:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \quad (1.4)$$

Уравнение движения, соответствующее функции Лагранжа (1.4), принимает вид:

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (1.5)$$

Ортонормированным базисом решений этого уравнения являются гармонические функции

$$x_1 = \sin \omega_0 t \text{ и } x_2 = \cos \omega_0 t, \quad (1.6)$$

а частота гармонических колебаний (собственная частота осциллятора)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.7)$$

Общее решение уравнения (1.5) имеет вид:

$$x = a \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (1.8)$$

где a – амплитуда колебания и φ – его фаза. Колебание является изохронным (его частота постоянна), а амплитуда не зависит от частоты, как следствие консервативности системы – сохранения ее энергии

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2}. \quad (1.9)$$

Вместо решений (1.6) и (1.8) можно формально использовать комплексные величины

$$x_{1,2} = \exp(\pm i\omega_0 t), \quad (1.10)$$

поскольку зависимость координаты колеблющейся системы от времени часто оказывается удобным представлять в виде вещественной части комплексного выражения

$$x = \operatorname{Re}\{Ae^{i\omega_0 t}\}, \quad (1.11)$$

где A – комплексная постоянная. Если выбрать ее в виде

$$A = ae^{i\varphi}, \quad (1.12)$$

мы получим

$$x = a \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (1.13)$$

Ниже мы увидим, что в некоторых комплексных моделях, описывающих вращение нелинейных ротаторов или магнитных моментов, комплексное представление динамических переменных является простым и естественным.

Уравнение динамики гармонического осциллятора второго порядка (1.5) можно переписать в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка (уравнений Гамильтона) для координаты и импульса $p = m\dot{x}$:

$$\dot{x} = \frac{p}{m}; \quad (1.14)$$

$$\dot{p} = -kx, \quad (1.15)$$

которые в подходе Гамильтона записываются в виде

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad (1.16)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (1.17)$$

с гамильтонианом $H = p^2/2m + kx^2/2$. Динамика системы в рамках уравнений Гамильтона допускает простую и наглядную интерпретацию на так называемой «фазовой плоскости», где отложены координата и импульс системы с одной степенью свободы. Для рассматриваемой простой системы картинка на фазовой плоскости (т. н. «фазовый портрет») выглядит так (рис. 1.1).

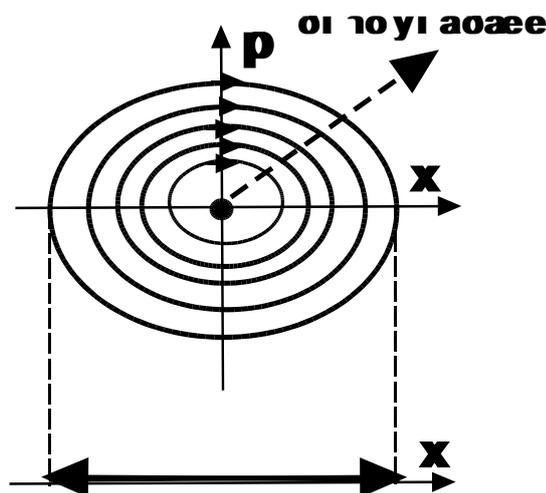


Рис. 1.1

На фазовом портрете «изображающая точка» движется по эллипсам, размер которых растет с ростом энергии колебания и которые отхватывают особую точку (точку остановки). В данном случае эта точка называется особой точкой типа «центр». Проекция движения изображающей точки в фазовом пространстве на обычное пространство (иногда называемое «конфигурационным пространством») описывает колебательное движение материальной точки и приведена внизу на рис 1.1.

В заключение обсудим еще один взгляд на малые колебания. Введем вместо двух вещественных переменных (координаты и импульса) в (1.14), (1.15) комплексную функцию

$$\psi = \sqrt{m\omega_0} x + \frac{ip}{\sqrt{m\omega_0}}. \quad (1.18)$$

Эта функция и комплексно сопряженная ей $\bar{\psi}$ являются классическими аналогами квантовых операторов рождения и уничтожения квантовых возбуждений. В терминах введенной комплексной функции ψ уравнение колебания линейного осциллятора выглядит совсем просто:

$$i\dot{\psi} = \omega_0\psi. \quad (1.19)$$

В качестве упражнения убедитесь, что если рассматривать величины ψ и $\bar{\psi}$ как обобщенные координаты, то уравнение (1.19) и сопряженное ему являются уравнениями Эйлера – Лагранжа для следующего лагранжиана:

$$L = \frac{i}{2}(\dot{\psi}\bar{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\psi) - \omega_0\psi\bar{\psi}. \quad (1.20)$$

Как следующее упражнение, по общим правилам механики найдите интеграл движения «энергия», соответствующий лагранжиану (1.20):

$$E = \omega_0\psi\bar{\psi}. \quad (1.21)$$

Как видите, здесь теряется простое разделение на кинетическую и потенциальную энергии.

В заключение хотим обратить особое внимание на уравнение (1.19).

В данном разделе методического пособия оно просто следует из уравнения колебания линейного осциллятора. Позже вы убедитесь, что это уравнение имеет более глубокий смысл. Оно связано с уравнением вращения симметрического волчка (уравнением Эйлера) и уравнением динамики магнитного момента (уравнением Ландау – Лифшица). Многие сложные проблемы механики легко решаются в рамках простых нелинейных и неконсервативных обобщений этого уравнения.

Переходим к решению некоторых стандартных задач, касающихся теории линейных колебаний. Часть задач, собранных в Дополнении, сопровождаются комментариями, а опыт показывает, что иногда комментарии важнее и интереснее самого первоисточника.

1.2. ДОПОЛНЕНИЯ К РАЗДЕЛУ 1

1.1. Найти частоты малых колебаний системы, если ее функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}.$$

Решение. В данном случае потенциальная энергия уже приведена к надлежащему виду (1.4), так что собственная частота осциллятора равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

1.2. Найти частоты малых колебаний системы и условие малоамплитудности колебаний, если ее функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + \frac{\alpha x^4}{4}.$$

Решение. График потенциальной энергии

$$U = \frac{kx^2}{2} - \frac{\alpha x^4}{4}$$

имеет вид, изображенный на рис. 1.2. Как и в предыдущей задаче, частота малых колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Из рисунка видно, что в системе имеется характерный масштаб амплитуд колебаний:

$$x_0 = \sqrt{\frac{k}{\alpha}}.$$

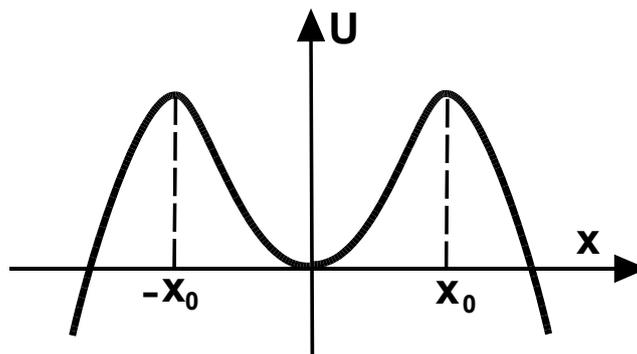


Рис. 1.2

Поэтому условие малоамплитудности колебаний имеет вид:

$$x \ll \sqrt{\frac{k}{\alpha}}.$$

1.3. Найти частоты малых колебаний и условие их малоамплитудности, если функция Лангранжа имеет вид:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{U_0}{\operatorname{ch}(x/l)}.$$

Решение. В данной задаче график потенциальной энергии имеет следующий вид (рис. 1.3).

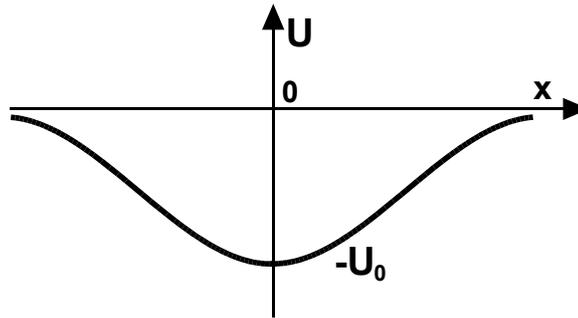


Рис. 1.3

Заметим, что это – необычный потенциал. В квантовой механике вы столкнетесь с близкими (так называемыми баргмановскими) безотражательными потенциалами.

Раскладываем функцию $\operatorname{sech}\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{x}{l}\right)}$ в ряд по степеням малых

смещений $\frac{x}{l}$:

$$U \approx U_0 - \frac{1}{2}U_0\left(\frac{x}{l}\right)^2 = U_0 - \frac{kx^2}{2},$$

где $k = \frac{U_0}{l^2}$. Таким образом, частота малых колебаний равна $\omega = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{U_0}{m}}$.

На графике (рис. 1.3) не видно каких-то характерных значений амплитуд колебаний, но очевидно, что это l , поскольку разложение потенциальной энергии происходит по степеням x/l . Следовательно, необходимым является условие $x/l \ll 1$. Ему можно придать более простой вид в терминах энергии колебания: $(E + U_0)/U_0 \ll 1$.

1.4. Рассмотрите малые колебания точки с массой m , способной двигаться по прямой и прикрепленной к пружине, другой конец которой закреплен в точке A (рис. 1.4) на расстоянии l_0 от прямой. В положении равновесия ($x = 0$) пружина не натянута.

Решение. Постановка задачи приведена на рис. 1.4. Предполагая выполнение закона Гука для пружины, представим ее потенциальную энергию в виде

$$U = \frac{k(l - l_0)^2}{2}. \quad (1.22)$$

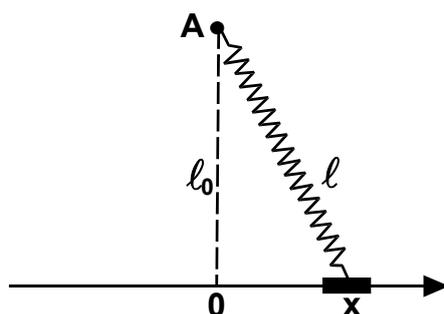


Рис. 1.4

Подставляя выражение для длины пружины $l = \sqrt{l_0^2 + x^2}$ в (1.22), получаем функцию Лагранжа:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k\left(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0\right)^2}{2}.$$

Раскладывая потенциальную энергию в ряд Тейлора по величине $x/l_0 \ll 1$ (условие малоамплитудности колебания), приходим к выражению

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^4}{8l_0^2}.$$

Таким образом, в данной системе линейные колебания отсутствуют. Обратим внимание на то, что хотя использовалось гармоническое приближение для энергии пружины, уравнение колебаний

$$m\ddot{x} + \frac{kx^3}{4l_0^2} = 0$$

оказалось нелинейным. Это – так называемая «геометрическая нелинейность».

1.5. Рассмотрите задачу **1.4** в случае, когда в состоянии равновесия ($x = 0$) пружина растянута и имеет длину $l_1 > l_0$.

Решение. В данной задаче $l = \sqrt{l_1^2 + x^2}$ и функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k\left(\sqrt{l_1^2 + x^2} - l_0\right)^2}{2}.$$

Разложение потенциальной энергии в ряд Тейлора теперь дает

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{2} \left(\frac{l_1 - l_0}{l_1} \right) x^2.$$

Таким образом, частота малых колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{l_1 - l_0}{l_1}}$$

и обращается в ноль в пределе $l_1 \rightarrow l_0$ (исходно не растянута пружина).

1.6. Найти частоту малых колебаний системы с лагранжианом

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2x} - \frac{x^2 + 1}{2x}.$$

Решение. График потенциальной энергии

$$U(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$$

приведен на рис. 1.5.

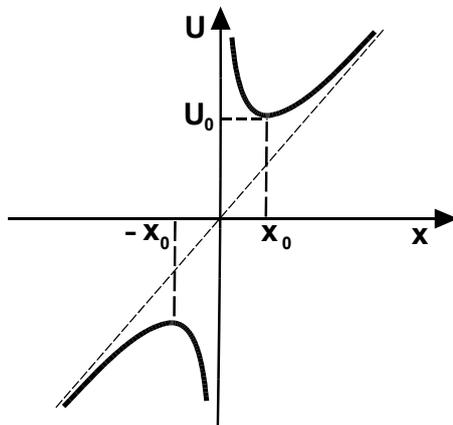


Рис. 1.5

Малые колебания происходят вблизи координаты x_0 , которая находится из условия

$$U'(x)\Big|_{x=x_0} = \frac{x^2 - 1}{2x^2} = 0,$$

что дает $x_0 = 1$ и $U_0 = U(x_0) = 1$. Разложение потенциальной энергии вблизи минимума имеет вид:

$$U(x) \approx U_0 + \frac{1}{2}U''\Big|_{x=x_0} (x - x_0)^2 = U_0 + \frac{k}{2}(x - x_0)^2, \text{ где } k = U''\Big|_{x=1} = 1.$$

В кинетической энергии в основном приближении координату x надо положить равной ее значению в точке минимума потенциальной энергии: $x = x_0 = 1$. При этом эффективная масса равна $m = 1$. Таким образом, частота малых колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1.$$

Обратим внимание на наличие в этой системе еще одного экстремума потенциальной энергии при $x_0 = -1$. В этой точке $U'' < 0$, т. е. $k < 0$. Но не надо подходить к этому обстоятельству формально. Эффективная масса частицы в этой точке также отрицательна ($m = -1$) и частица совершает колебательные движения вблизи точки $x_0 = -1$, но с отрицательной энергией. Полный фазовый портрет системы, т. е. фазовые траектории при $E > 1$ и $E < 1$ приведены на рис. 1.6.

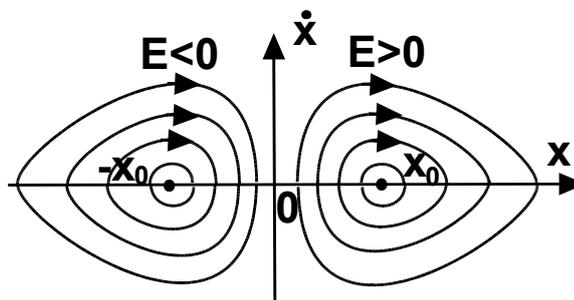


Рис. 1.6

Из фазового портрета видно, что возможны два типа малых колебаний относительно координаты x_0 и координаты $-x_0$.

1.7. Найти частоту малых колебаний математического маятника с потенциальной энергией

$$U = U_0(1 - \cos \phi),$$

где ϕ – угол отклонения маятника из состояния равновесия и $U_0 = mgl$, где l – длина подвеса.

Решение. Пример математического маятника очень важен в физике, поэтому на нем стоит остановиться подробнее. Геометрия задачи изображена на рис. 1.7. Из самого рис. 1.7 видно, насколько разнообразна динамика такой системы. При малых отклонениях из положения равновесия $\phi \ll 1$ мы имеем линейные колебания, при $\phi = \pi/2$ маятник находится в неустойчивом положении, при больших энергиях маятник вращается вокруг точки подвеса.

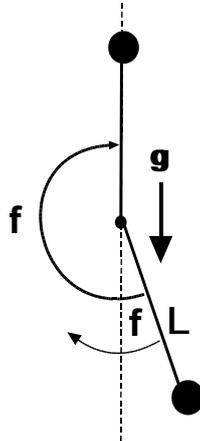


Рис. 1.7

Функция Лагранжа математического маятника имеет вид:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 - mgl(1 - \cos \phi),$$

где l – длина подвеса. Вблизи устойчивого положения равновесия $\phi = 0$ имеем

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}mgl\phi^2.$$

Таким образом, частота линейных колебаний равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Заметьте, что масса частицы не вошла в ответ, поскольку *инерционная масса в кинетической энергии совпадает с гравитационной массой в потенциальной энергии.*

1.8. Найти частоту малых колебаний система с лагранжианом

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} + \sin x.$$

Решение. Эта задача близка к предыдущей, но теперь потенциальная энергия $U = -\sin x$ имеет минимумы в точках $x = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$,

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (Пример физической системы с дискретно вырожденным основным состоянием). Вводя малые отклонения из положения равновесия $x = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$, получаем

$$L = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2.$$

Таким образом, частота малых колебаний равна единице $\omega = 1$.

1.9. Рассмотреть малые колебания частицы с функцией Лагранжа

$$L = \dot{x}^2 - x^2 e^x.$$

Решение. При решении этой и последующих задач можно поступать формально:

1) рассмотреть потенциальную энергию (в данном случае она равна $U = x^2 e^x$);

2) вычислить первую производную от потенциальной энергии ($U' = 2x e^x + x^2 e^x$);

3) приравнять ее нулю для нахождения экстремумов $U' = 0$, что дает два решения $x_0 = 0$ и $x_1 = -2$;

4) вычислить вторую производную в экстремальных точках $U = (2 + 4x + x^2) e^x$. В данном случае $U''(x_0) = 2 > 0$ и $U''(x_1) = -2 < 0$.

Точке $x_0 = 0$ соответствует минимум потенциальной энергии и малые линейные колебания, а точке $x_1 = -2$ отвечает локальный максимум потенциальной энергии, т. е. неустойчивое положение равновесия. Таким образом, в данном примере $k = 2$ и масса $m = 2$, а частота малых колебаний равна $\omega = \sqrt{k/m} = 1$. Но лучше не подходить к решению задач

формально, а нарисовать график потенциальной энергии, чтобы представить всю возможную динамику системы. В данном случае график потенциальной энергии выглядит следующим образом (рис. 1.8).

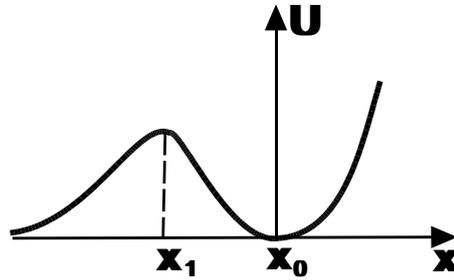


Рис. 1.8

1.10. Рассмотреть случай следующего лагранжиана:

$$L = \frac{\dot{x}^2}{x} - \frac{x}{\ln x}.$$

Решение. Потенциальная энергия равна $U = \frac{x}{\ln x}$. При этом

$$U' = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}.$$

Из условия $U' = 0$ находим точку минимума потенциальной энергии $x_0 = e$. В этой точке потенциальная энергия равна

$$U(x_0) = e.$$

Вторая производная $U'' = -\frac{1}{x(\ln x)^2} + \frac{2}{x(\ln x)^3}$ и в точке минимума $U''(x_0) = \frac{1}{e}$. Поэтому функция Лагранжа вблизи минимума

потенциальной энергии приближенно равна

$$L \approx \left(\frac{2}{e}\right) \frac{\dot{x}^2}{2} - \left(\frac{1}{e}\right) \frac{(x - x_0)^2}{2}.$$

Таким образом, эффективная масса равна $m = \frac{2}{e}$ и эффективная

упругая константа равна $k = \frac{1}{e}$. Частота малых колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

1.3. ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛУ 1

Задачи 1.11–1.45 предлагаются для самостоятельного решения. К ним приведены только ответы.

В задачах 1.11–1.45 требуется найти частоты малых колебаний системы, если ее функция Лагранжа имеет следующий вид.

$$1.11. L = \operatorname{ch} x \cdot (\dot{x}^2 - 1). \text{ Ответ: } \omega = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$1.12. L = \frac{1}{2(x+2)^2} \dot{x}^2 - x + \ln(1+x). \text{ Ответ: } \omega = 2.$$

$$1.13. L = \frac{x \ln^2 x}{2} \dot{x}^2 - x \ln x. \text{ Ответ: } \omega = e.$$

$$1.14. L = \frac{x \dot{x}^2}{2} - x \ln^2 x. \text{ Ответ: } \omega = \sqrt{2}.$$

$$1.15. L = \frac{x^2 \dot{x}^2}{2} - x \ln x. \text{ Ответ: } \omega = e^{3/2}.$$

$$1.16. L = \frac{(x+2) \dot{x}^2}{2} - x e^x. \text{ Ответ: } \omega = e^{-1/2}.$$

$$1.17. L = \frac{(x+3) \dot{x}^2}{2} - x^2 e^{-x}. \text{ Ответ: } \omega = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$1.18. L = \frac{e^x \dot{x}^2}{2} - \frac{e^x}{2x}. \text{ Ответ: } \omega = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$1.19. L = \frac{\ln x}{2} \dot{x}^2 + \frac{\ln x}{x}. \text{ Ответ: } \omega = e^{-3/2}.$$

$$1.20. L = \frac{(x-1)^2}{2} \dot{x}^2 - x^3 + 3x^2. \text{ Ответ: } \omega = \sqrt{6}.$$

$$1.21. L = \frac{x \dot{x}^2}{2} - \frac{x}{\ln x}. \text{ Ответ: } \omega = e^{-1}.$$

$$1.22. L = (x+1) \dot{x}^2 - 3x^2 + \frac{x^4}{4}. \text{ Ответ: } \omega = \sqrt{3}.$$

$$1.23. L = \frac{\dot{x}^2}{(x+1)} - \frac{x^4 + 3}{x}. \text{ Ответ: } \omega = 2\sqrt{3}.$$

$$1.24. L = \frac{\dot{x}^2}{x^2 + 3x + 2} - x^2 - \frac{2}{x}. \text{ Ответ: } \omega = 3\sqrt{2}.$$

- 1.25. $L = (x^2 + 1)\dot{x}^2 + \frac{1}{x^2 + 3}$. Ответ: $\omega = \frac{1}{3}$.
- 1.26. $L = \frac{\dot{x}^2}{(x^2 + 2)^2} + \frac{1}{x^2 - 4}$. Ответ: $\omega = \frac{1}{2}$.
- 1.27. $L = \frac{\dot{x}^2}{x + 3} - \frac{x}{x^2 + 4}$. Ответ: $\omega = 2^{-5/2}$.
- 1.28. $L = \frac{\dot{x}^2}{(x + 1)^2} - \frac{3x^4 + 1}{x^3}$. Ответ: $\omega = 2\sqrt{6}$.
- 1.29. $L = \frac{e^{-2x}\dot{x}^2}{2} + xe^{-x}$. Ответ: $\omega = e^{1/2}$.
- 1.30. $L = e^x\dot{x}^2 + e^{8x-x^2-14}$. Ответ: $\omega = e^{-1}$.
- 1.31. $L = \frac{\dot{x}^2}{(x + 4)^2} + (x^2 + 2)e^{-x^2}$. Ответ: $\omega = 4$.
- 1.32. $L = \frac{\dot{x}^2}{(\ln x)^2} + \frac{\ln x}{x}$. Ответ: $\omega = \frac{1}{\sqrt{2e^3}}$.
- 1.33. $L = \frac{\dot{x}^2}{(x + 2)^2 + 1} - x \operatorname{arctg} x$. Ответ: $\omega = \sqrt{5}$.
- 1.34. $L = \frac{e^{-2x}\dot{x}^2}{x} - e^{-2x} + e^{-x}$. Ответ: $\omega = (\ln 2)^{1/2}$.
- 1.35. $L = \ln x \cdot \dot{x}^2 - \frac{x^2}{\ln x}$. Ответ: $\omega = 2\sqrt{2}$.
- 1.36. $L = \frac{2\dot{x}^2}{e^{x^2+5}} - (e^x + e^{-x} - 2\cos x)$. Ответ: $\omega = e^{5/2}$.
- 1.37. $L = (x^2 - 3)\dot{x}^2 + x^2e^{-x}$. Ответ: $\omega = e^{-1}$.
- 1.38. $L = (x - 1)^2\dot{x}^2 - \frac{x^2}{a^2 + x^2}$. Ответ: $\omega = \frac{1}{a}$.
- 1.39. $L = e^{-2x}\dot{x}^2 - e^{2x^2+4x+5}$. Ответ: $\omega = \sqrt{2e}$.
- 1.40. $L = \frac{\dot{x}^2}{4\sqrt{x+12}} - x\sqrt{x+12}$. Ответ: $\omega = \sqrt{3}$.
- 1.41. $L = \frac{e^x\dot{x}^2}{2} - \operatorname{tg}^2 x$. Ответ: $\omega = \sqrt{2}$.

1.42. $L = (x^2 + 1)^2 \dot{x}^2 + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. Ответ: $\omega = 1$.

1.43. $L = (e^x + 1)\dot{x}^2 - (e^{-x} - 1)^2$. Ответ: $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.44. $L = \operatorname{ch} x \dot{x}^2 - \operatorname{th}^2 x$. Ответ: $\omega = 1$.

1.45. $L = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \dot{x}^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$. Ответ: $\omega = 1$.

1.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ 1

Выше в Дополнениях были представлены образцы задач с подробным разбором решений, а также задачи, для которых приведены только ответы. Ниже – несколько задач, решить которые предлагаем читателям.

1.46. Частица с массой $m = 2$ находится в поле $U = 3 \cos 2x + \alpha x$. Найти область допустимых значений параметра α , при которых возможны колебания частицы, и зависимость частоты этих колебаний от параметра α .

1.47. Частица с массой $m = 2$ находится в поле $U = 3 \cos 2x + \beta x^2$. Считая параметр β малым, оценить количество различных возможных колебаний системы. Найти частоту колебания, средняя координата которого близка к значению $\bar{x} \approx \pi$, и ее зависимость от параметра β .

1.48. Частица с массой $m = 2$ находится в поле $U = 3 \cos 2x + \beta x^2$. Найти критическое значение параметра β , при котором становятся возможными колебания частицы вблизи точки $x = 0$. Найти зависимость частоты этих колебаний от параметра β .

1.49. Частица с массой $m = 2$ находится в поле $U = x^2 + 2x + 2 / (x + 1)$. Найти положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получить малые поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

1.50. Частица с массой $m = 2$ находится в поле $U = x^2 + 2x + 2 / (x - 1)$. Найти положения равновесия частицы, а также периоды малых колебаний вблизи них.

1.51. Частица с массой $m = 2$ находится в поле $U = x + 8 / (x + 2)^4$. Найти положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получить малые поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

1.52. Бусинка с массой может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости, геометрия которой в полярных координатах (r, ϕ) описывается функцией $r = r(\phi)$. Бусинка прикрепена к пружине с жесткостью k , другой конец которой закреплен в начале координат (рис. 1.8). Длина пружины в нерастянутом состоянии равна l_0 . Найти функцию Лагранжа такой системы, написать уравнение, задающее возможные положения равновесия бусинки ϕ_n и выразить частоты малых колебаний бусинки вблизи этих положений равновесия через параметры функции $r = r(\phi)$.

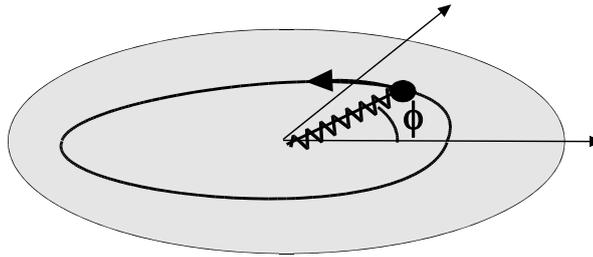


Рис. 1.9

1.53. Найти условие, при котором в предыдущей задаче возможны малоамплитудные колебания бусинки вблизи точки ϕ , с ненулевой частотой.

1.54. Бусинка, имеющая заряд q и массу m , может скользить без трения вдоль прямолинейной спицы. На расстоянии a от спицы находится заряд $-3q$. Найти период малых колебаний бусинки.

1.55. Бусинка с зарядом q и массой m может без трения скользить по проволочному кольцу радиуса R . В одной из точек кольца находится заряд $2q$ с фиксированной координатой. Найти период малых колебаний бусинки.

1.56. Бусинка с зарядом q и массой m может без трения скользить по плоскому проволочному кольцу радиуса R . В этой же плоскости на расстоянии $a < R$ от центра кольца находится фиксированный заряд q . Найти частоту малых колебаний бусинки.

1.57. Решить ту же задачу, но в случае, когда фиксированный заряд внутри кольца имеет противоположный знак $-q$.

1.58. Решить ту же задачу в случае, когда бусинка свободно перемещается вдоль проволоки в виде эллипса, а дополнительный заряд находится в одном из фокусов эллипса.

1.59. Найти частоты всех возможных малых колебаний бусинки вдоль проволоки в горизонтальной плоскости, форма которой в полярных координатах описывается формулой $r(\phi) = 1 - \phi^2 / 2 + \phi^4 / 4$. Считать, что

жесткость пружинки, связывающей бусинку с центром координат, равна k и в нерастянутом состоянии длина пружинки равна $l_0 = 1$.

1.60. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = (x - 1)^n \dot{x}^2 - \frac{x^2}{x^2 + 4}$ с целочисленными значениями параметра n .

Найти условия существования малых колебаний и их частоту.

1.61. Частица с массой $m = 1$ находится в поле $U = x + \frac{1}{2(x+1)^2}$.

Нарисовать график потенциальной энергии, найти положение равновесия частицы и период малых колебаний вблизи него. Учесть в потенциальной энергии добавку $\delta U = \alpha x^2 / 2$ с $\alpha \ll 1$. Вычислить поправки к найденным величинам и проанализировать изменение систематики возможных колебаний частицы, предварительно построив график потенциальной энергии с учетом указанной поправки.

ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

2.2. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

2.1.1. Два линейных взаимодействующих осциллятора

Перейдем к рассмотрению динамики двух связанных линейных осцилляторов. Для простоты будем считать осцилляторы идентичными. Постановка задачи изображена на рис. 2.1.

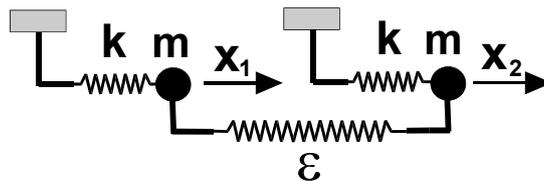


Рис. 2.1

Две частицы с одинаковой массой m закреплены пружинами с константами упругости k , соединены между собой пружиной с упругой константой ε и колеблются в горизонтальном направлении вдоль оси x . Здесь x_1 и x_2 – смещения частиц из положения равновесия. Функция Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{k}{2} x_1^2 - \frac{k}{2} x_2^2 - \frac{\varepsilon}{2} (x_1 - x_2)^2. \quad (2.1)$$

В случае двух степеней свободы фазовое пространство четырехмерно и не допускает наглядной интерпретации динамики системы. Но можно рассмотреть потенциальную энергию как функцию двух координат частиц (так называемую поверхность потенциальной энергии – ППЭ):

$$U = \frac{k}{2} x_1^2 + \frac{k}{2} x_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} (x_1 - x_2)^2. \quad (2.2)$$

Для рассмотренного случая она имеет вид, изображенный на рис. 2.2. (Здесь же изображены линии уровня постоянной потенциальной энергии).

Движение двух частиц в одном направлении можно представить как двумерное движение одной частицы по ППЭ.

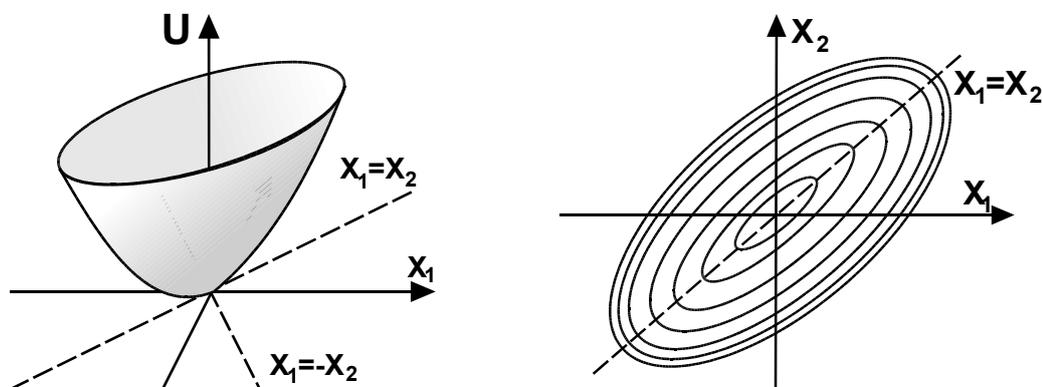


Рис. 2.2

Из вышеприведенного выражения для потенциальной энергии видно, что она положительна при любых значениях x_1 и x_2 , т. е. является *положительно определенной квадратичной формой*. (Кинетическая энергия также является положительно определенной квадратичной формой).

Система динамических уравнений, соответствующая лагранжиану (2.1), имеет вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 + \varepsilon(x_1 - x_2) = 0; \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 + \varepsilon(x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Ищем решение, например, в виде $x_i = a_i \sin \omega t$, $i = 1, 2$ и после подстановки в (2.3) получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (-\omega^2 m + k + \varepsilon)a_1 - \varepsilon a_2 = 0; \\ -\varepsilon a_1 + (-\omega^2 m + k + \varepsilon)a_2 = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

которую можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 - \varepsilon / m & \varepsilon / m \\ \varepsilon / m & \omega^2 - \omega_1^2 - \varepsilon / m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.5)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – собственная частота каждого осциллятора при отсутствии их взаимодействия ($\varepsilon = 0$). Нетривиальные решения $a_i \neq 0$ существуют, если детерминант в (2.5) равен нулю, что дает

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{2\varepsilon}{m}\right) = 0. \quad (2.6)$$

Это уравнение имеет два решения, каждому из которых отвечает вполне определенное соотношение амплитуд колебания каждого из осцилляторов:

$$(1) \quad \omega_1 = \omega_0; \quad a_1 = a_2 = a; \quad (2.7)$$

$$(2) \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2\varepsilon}{m}}; \quad a_1 = -a_2 = b. \quad (2.8)$$

Эти два решения называются нормальными колебаниями, или *нормальными модами* системы. Совокупность допустимых частот называется *частотным спектром*. (В рассмотренном примере спектр состоит только из двух частот). В каждой моде обе частицы колеблются с одной частотой, амплитуда моды произвольна, но соотношение амплитуд отдельных осцилляторов вполне определенное. В первом решении (синфазном) осцилляторы колеблются в фазе ($a_1 = a_2$), но с произвольной амплитудой a . Во втором решении (противофазном) частицы колеблются в противофазе $a_1 = -a_2$ с произвольной амплитудой b .

Переход к нормальным модам соответствует переходу к новым координатам

$$\begin{cases} u = x_1 + x_2; \\ v = x_1 - x_2, \end{cases} \quad (2.9)$$

в терминах которых исходные уравнения переписутся в виде

$$\begin{cases} m\ddot{u} + ku = 0; \\ m\ddot{v} + (k + 2\varepsilon)v = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Уравнения (2.10) описывают два независимых эффективных осциллятора с разными частотами. (Переход к таким координатам соответствует повороту плоскости (x_1, x_2) на угол $\pi / 2$).

Общее решение представляет собой линейную комбинацию двух нормальных мод:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \quad (2.11)$$

В этой формуле учтено, что фазы колебаний в нормальных модах, вообще говоря, разные.

Лагранжиану (2.1) соответствует полная энергия

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{k}{2} x_1^2 + \frac{k}{2} x_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} (x_1 - x_2)^2, \quad (2.12)$$

которая является интегралом движения. Но рассмотренная линейная система с двумя степенями свободы обладает на самом деле двумя независимыми интегралами движения, в качестве которых можно выбрать энергии двух нормальных мод:

$$E^{(1)} = \frac{m}{2} \dot{u}^2 + \frac{m\omega_1^2}{2} u^2, \quad E^{(2)} = \frac{m}{2} \dot{v}^2 + \frac{m\omega_2^2}{2} v^2. \quad (2.13)$$

Эти величины сохраняются со временем, в то время как энергии отдельных осцилляторов не сохраняются.

Рассмотрим случай слабозаимодействующих осцилляторов с $\varepsilon \ll k$ и введем «приближенную энергию» каждого осциллятора:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{m}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} x_1^2; \\ E_2 = \frac{m}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} x_2^2. \end{cases} \quad (2.14)$$

Подставим общее решение (2.11) в выражения для этих энергий в простом случае $\alpha_i = 0$ и учтем, что при $\varepsilon \ll k$ имеем $\omega_2 \approx \omega_0 + \varepsilon / m\omega_0$. Тогда в основном по ε приближении

$$E_{1,2} \approx \frac{m\omega_0^2}{2}(a^2 + b^2) \pm m\omega_0^2 ab \cos\left(\frac{\varepsilon t}{m\omega_0}\right) + O(\varepsilon). \quad (2.15)$$

Таким образом, в системе происходит медленная (с частотой $\Omega \approx \omega_0 \frac{\varepsilon}{k} \ll \omega_0$) перекачка энергии между осцилляторами (см. рис. 2.3).

Полная перекачка возможна только в случае $a = b$.

Физическая причина этого заключается в следующем. Представим уравнения (2.3) в виде

$$m\ddot{x}_i + (k + \varepsilon)x_i = \varepsilon x_j. \quad (2.16)$$

Из (2.16) видно, что каждый из осцилляторов действует на другой как вынуждающая сила на частоте, близкой к собственной частоте. Это явление называется явлением внутреннего резонанса.

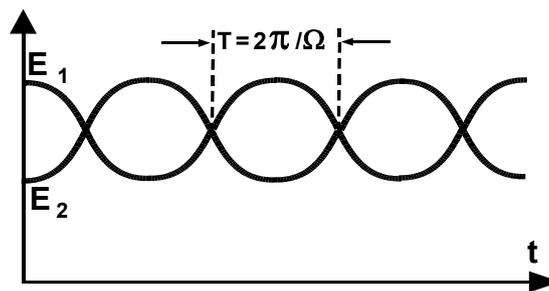


Рис. 2.3

Важным свойством колебания двух идентичных осцилляторов есть то, что при усреднении по периоду $T = 2\pi / \Omega$ энергии двух осцилляторов в среднем равны, т. е. происходит равномерное распределение энергии между частицами.

2.1.2. Произвольная линейная система с двумя степенями свободы

Рассмотрим обобщение изученной выше задачи на случай произвольной линейной консервативной системы с двумя степенями свободы, соответствующими обобщенным координатам q_1 и q_2 . Интересуясь колебательными движениями, предположим, что потенциальная энергия имеет минимум в точке $q_1 = q_{10}$, $q_2 = q_{20}$. Разлагая потенциальную энергию в ряд Тейлора по малым отклонениям $x_i = q_i - q_{i0}$ с точностью до членов второго порядка, находим приближенное выражение для нее:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^2 \frac{k_{ik} x_i x_k}{2}; \quad k_{ik} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k} \right)_{q_0}. \quad (2.17)$$

Чтобы равновесие было устойчивым, должно быть выполнено неравенство

$$U(x) - U(0) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^2 \frac{k_{ik} x_i x_k}{2} > 0, \quad (2.18)$$

т. е. квадратичная форма $E = T + U$ для полной энергии должна быть положительно определенной. Условие устойчивости легко получить, переписав выражение для потенциальной энергии в виде

$$\frac{1}{2} (k_{11} x_1^2 + 2k_{12} x_1 x_2 + k_{22} x_2^2) = \frac{k_{11}}{2} \left(x_1 + \frac{k_{12}}{k_{11}} x_2 \right)^2 + \frac{1}{2k_{11}} (k_{11} k_{22} - k_{12}^2) x_2^2 > 0.$$

Это выражение остается положительным при всех значениях $x_{1,2} \neq 0$, если коэффициенты при обоих квадратичных относительно x_1, x_2 выражениях больше нуля:

$$k_{11} > 0, \quad k_{11} k_{22} - k_{12}^2 = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} > 0. \quad (2.19)$$

Второе условие в (2.19) соответствует положительности римановой кривизны двумерной поверхности, т. е. двумерному минимуму или максимуму ППЭ. Первое условие в (2.19) выделяет минимум среди экстремумов.

Кинетическая энергия в общем случае системы с двумя степенями свободы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^2 a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k. \quad (2.20)$$

Полагая в коэффициентах $a_{ik}(q)$ координаты $q_i = q_{i0}$ и вводя обозначения $a_{ik}(q_0) = m_{ik}$, получим кинетическую энергию в виде положительно определенной квадратичной формы от обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^2 m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k. \quad (2.21)$$

Коэффициенты m_{ik} , как и k_{ik} , также всегда можно считать симметричными относительно перестановки индексов $m_{ik} = m_{ki}$, поскольку кинетическая и потенциальная энергии являются скалярами, а тензоры $\dot{x}_i \dot{x}_k$ и $x_i x_k$ – симметричны. Здесь положительность квадратичной формы автоматически обеспечена исходным выражением для кинетической энергии, записанным в декартовых координатах.

Таким образом, функция Лагранжа системы принимает вид:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^2 m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^2 k_{ik} x_i x_k. \quad (2.22)$$

Отсюда следуют уравнения движения (уравнения Эйлера – Лагранжа):

$$\begin{cases} m_{11} \ddot{x}_1 + m_{12} \ddot{x}_2 + k_{11} x_1 + k_{12} x_2 = 0; \\ m_{21} \ddot{x}_1 + m_{22} \ddot{x}_2 + k_{21} x_1 + k_{22} x_2 = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Частные решения системы (2.23) следует искать в виде

$$x_j = A_j e^{i\omega t}; \quad j = 1, 2. \quad (2.24)$$

Здесь A_j – постоянные, но пока не определенные коэффициенты. От решений (2.24), конечно, нужно взять действительную часть. Подставляя (2.24) в (2.23) и сокращая на $e^{i\omega t}$, получим алгебраические уравнения, связывающие между собой коэффициенты A_j :

$$\begin{cases} (k_{11} - \omega^2 m_{11}) A_1 + (k_{12} - \omega^2 m_{12}) A_2 = 0; \\ (k_{12} - \omega^2 m_{12}) A_1 + (k_{22} - \omega^2 m_{22}) A_2 = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Как известно, система линейных однородных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами имеет нетривиальные (отличные от нуля) решения, если равен нулю определитель, составленный из коэффициентов этих уравнений:

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} - \omega^2 m_{12} \\ k_{12} - \omega^2 m_{12} & k_{22} - \omega^2 m_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.26)$$

Уравнение (2.26) называется *характеристическим* и служит для определения *собственных частот* ω . Это уравнение второй степени относительно ω^2 :

$$(m_{11}m_{22} - m_{12}^2)\omega^4 - (k_{11}m_{22} + k_{22}m_{11} - 2k_{12}m_{12})\omega^2 + (k_{11}k_{22} - k_{12}^2) = 0. \quad (2.27)$$

Покажем, что уравнение (2.27) имеет только положительные корни ω^2 , соответствующие действительным значениям частот (т. е. колебаниям). Рассмотрим функцию

$$f(\omega^2) = (k_{11} - \omega^2 m_{11})(k_{22} - \omega^2 m_{22}) - (k_{12} - \omega^2 m_{12})^2. \quad (2.28)$$

Она представляет собой квадратичную параболу относительно ω^2 . При этом $f(0) = k_{11}k_{22} - k_{12}^2 > 0$ и $f(\omega^2 \rightarrow +\infty) \rightarrow +\infty$. Поскольку при $\omega^2 = k_{11} / m_{11} > 0$ и $\omega^2 = k_{22} / m_{22} > 0$ величина f в (2.28) отрицательна, то оба корня характеристического уравнения ω_1^2 и ω_2^2 положительны. Сама величина ω имеет четыре значения, попарно равные по абсолютной величине. Если брать решение в виде (2.24), то достаточно использовать только положительные значения ω .

Как и в разделе 2.1.1, каждому значению ω_i^2 соответствует нормальная мода колебаний. Амплитуда каждой моды произвольна, но соотношение амплитуд колебаний обобщенных координат в ней вполне определенное.

В случае двух переменных речь идет об отношении

$$\zeta_i = A_2^{(i)} / A_1^{(i)}; \quad i = 1, 2, \quad (2.29)$$

где индекс i нумерует моды. Это отношение равно отношению алгебраических дополнений элементов первой строки определителя (2.26), т. е.

$$\frac{A_2^{(i)}}{A_1^{(i)}} = -\frac{k_{12} - \omega_i^2 m_{12}}{k_{22} - \omega_i^2 m_{22}}; \quad i = 1, 2, \quad (2.30)$$

что, впрочем, сразу следует из второго уравнения в формулах (2.25) для амплитуд.

Каждая из двух частот ω_1^2, ω_2^2 определяет одно частное решение системы (одно нормальное колебание). Общее решение системы двух

линейных однородных дифференциальных уравнений есть сумма двух частных решений

$$x_i = A_i^{(1)} e^{i\omega_1 t} + A_i^{(2)} e^{i\omega_2 t}. \quad (2.31)$$

Если ввести обозначения

$$\theta_1 = A_1^{(1)} e^{i\omega_1 t}; \quad \theta_2 = A_1^{(2)} e^{i\omega_2 t}, \quad (2.32)$$

то формулы (2.31) примут вид соотношений

$$\begin{cases} x_1 = \theta_1 + \theta_2; \\ x_2 = \zeta_1 \theta_1 + \zeta_2 \theta_2 \end{cases} \quad (2.33)$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix} \theta_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \theta_2, \quad (2.34)$$

которые определяют формулы перехода от исходных обобщенных координат (x_1, x_2) к новым координатам (θ_1, θ_2) , удовлетворяющим уравнениям

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_1^2 \theta_1 = 0; \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 = 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

Каждое из этих уравнений может быть получено из функции Лагранжа

$$L_{1,2} = \frac{m_{1,2}}{2} (\dot{\theta}_{1,2}^2 - \omega_{1,2}^2 \theta_{1,2}^2), \quad (2.36)$$

которая описывает гармоническое колебание системы с одной степенью свободы. Здесь $m_{1,2}$ – положительные постоянные.

Таким образом, в переменных (θ_1, θ_2) задача о связанных колебаниях с двумя степенями свободы свелась к задаче о независимых колебаниях двух линейных гармонических независимых осцилляторов. Каждый такой гармонический осциллятор описывается соответствующей координатой θ_k , которая и представляет *нормальную координату*. Поэтому каждая исходная обобщенная координата представляется как сумма изменяющихся по закону

гармонических колебаний нормальных координат, независимых друг от друга. Обычно частоты колебаний несоизмеримы. Тогда сумма выражений, в которые входят несоизмеримые частоты, – это двоякопериодическая функция времени.

Нормальные координаты можно выразить через исходные обобщенные координаты:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{\zeta_2 x_1 - x_2}{\zeta_2 - \zeta_1}; \\ \theta_2 &= \frac{\zeta_1 x_1 - x_2}{\zeta_1 - \zeta_2}.\end{aligned}\tag{2.37}$$

Эти формулы обобщают формулы (2.9) из раздела 2.1.1 на общий случай системы с двумя степенями свободы. Из них, в частности, видно, что при определенном выборе начальных условий можно возбудить лишь одну моду.

Если, например, взять в момент $t = 0$ координаты и скорости в таком отношении, что $\zeta_2 x_1 - x_2 = 0$ и $\zeta_2 \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 0$, то колебание с частотой ω_1 не будет происходить вовсе (возбудится только вторая нормальная мода).

Обычно нормальные координаты выбирают таким образом, чтобы коэффициенты при квадратах скоростей в функции Лагранжа были равны $1/2$. Для этого достаточно определить нормальные координаты равенствами

$$\Theta_{1,2} = \sqrt{m_{1,2}} \theta_{1,2}.\tag{2.38}$$

Тогда функция Лагранжа примет вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\dot{\Theta}_i^2 - \omega_i^2 \Theta_i^2),\tag{2.39}$$

а соответствующая полная энергия приводится к форме

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\dot{\Theta}_i^2 + \omega_i^2 \Theta_i^2).\tag{2.40}$$

Благодаря нормальным координатам рассмотрение задач о колебаниях значительно упрощается, так как линейный гармонический осциллятор является во многих отношениях одной из простейших механических систем.

2.1.3. Дополнения к разделу 2.1

2.1.1. Точки подвеса двух одинаковых математических маятников (А, В) длины l и массы m находятся на расстоянии a друг от друга и расположены на одной горизонтали. Сами массы соединены между собой пружиной жесткости k и длины a в ненапряженном состоянии (см. рис. 2.4). Исследовать плоские малые колебания связанных маятников.

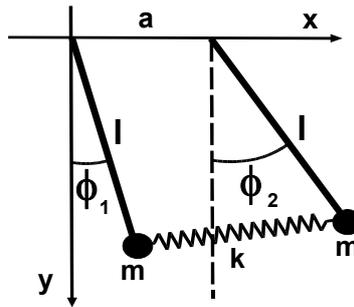


Рис. 2.4

Решение. При плоском движении данная система обладает двумя степенями свободы, так как наличие пружинки означает не наложение связи на систему, а введение взаимодействия между материальными точками. Выберем систему координат как показано на рис. 2.4, а в качестве независимых координат возьмем ϕ_1 и ϕ_2 углы отклонения каждого маятника от положения устойчивого равновесия: $\phi_1^{(0)} = \phi_2^{(0)} = 0$. Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2). \quad (2.41)$$

Потенциальная энергия складывается из энергии упругой деформации пружины $k(\Delta l)^2/2$ и из потенциальной энергии обоих маятников в поле тяжести. Для малых колебаний (линейных по ϕ_1 и ϕ_2) в выражении для потенциальной энергии нужно ограничиться членами второго порядка малости по ϕ_1, ϕ_2 . При этом удлинение пружины

$$\Delta l = AB - a = (y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2 - a \quad (2.42)$$

нужно, очевидно, найти с точностью до *линейных* членов. Оценим отдельные слагаемые:

$$y_B - y_A = l(\cos \phi_2 - \cos \phi_1) \approx \frac{l}{2}(\phi_1^2 - \phi_2^2) \approx 0; \quad \sim O(\phi^2) \ll \phi;$$

$$x_B - x_A = l(\sin \phi_2 - \sin \phi_1) \approx \frac{l}{2}(\phi_2 - \phi_1) + a.$$

Тогда $\Delta l \approx l(\phi_2 - \phi_1)$, а упругая энергия

$$U_{elastic} = \frac{1}{2}kl^2(\phi_2 - \phi_1)^2, \quad (2.43)$$

то есть в данном случае можно пренебречь вертикальной составляющей удлинения пружины.

С той же точностью для потенциальной энергии обоих маятников в поле тяжести получим выражение:

$$U_{gravity} = -mgl(\cos \phi_1 + \cos \phi_2) \approx -2mgl + \frac{mgl}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2). \quad (2.44)$$

Функция Лагранжа, построенная по (2.41), (2.42), (2.43), имеет вид:

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2) - \frac{1}{2}[(mgl + kl^2)(\phi_1^2 + \phi_2^2) - 2kl^2\phi_1\phi_2]. \quad (2.45)$$

Выпишем из лагранжиана (2.45) коэффициенты m_{ik} и k_{ik} :

$$\begin{aligned} m_{11} = m_{22} = ml^2; \quad m_{12} = m_{21} = 0; \\ k_{11} = k_{22} = mgl + kl^2; \quad k_{12} = k_{21} = -kl^2. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Линейные уравнения движения с учетом (2.46) принимают вид:

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_1 + (\omega_0^2 + \Omega^2)\phi_1 - \Omega^2\phi_2 = 0; \\ \ddot{\phi}_2 + (\omega_0^2 + \Omega^2)\phi_2 - \Omega^2\phi_1 = 0, \end{cases} \quad (2.47)$$

где частота $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ совпадает с частотой отдельного изолированного маятника, а $\Omega^2 = \frac{k}{m}$. Решение (2.47) ищем в виде

$$\phi_i = A_i e^{i\omega t}; \quad i = 1, 2. \quad (2.48)$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.49)$$

Решая характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.50)$$

находим собственные частоты:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}; \\ \omega_2^2 = \omega_0^2 = \frac{g}{l}. \end{cases} \quad (2.51)$$

Общее решение уравнений движения в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} \phi_1(t) = \operatorname{Re} \left[A_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} + A_1^{(2)} e^{i\omega_2 t} \right] = a \cos(\omega_1 t + \alpha) + b \cos(\omega_2 t + \beta); \\ \phi_2(t) = \operatorname{Re} \left[-A_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} + A_1^{(2)} e^{i\omega_2 t} \right] = -a \cos(\omega_1 t + \alpha) - b \cos(\omega_2 t + \beta). \end{cases} \quad (2.52)$$

Теперь можно ввести нормальные координаты:

$$\begin{cases} \theta_1 = \operatorname{Re} \left(A_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} l \sqrt{2m} \right); \\ \theta_2 = \operatorname{Re} \left(A_1^{(2)} e^{i\omega_2 t} l \sqrt{2m} \right). \end{cases} \quad (2.53)$$

Тогда

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{1}{l\sqrt{2m}} (\theta_1 + \theta_2); \\ \phi_2 = \frac{1}{l\sqrt{2m}} (-\theta_1 + \theta_2), \end{cases} \quad (2.54)$$

а функция Лагранжа имеет вид (2.36).

Симметричное (синфазное) главное колебание (ω_1, θ_1) реализуется, если начальные отклонения обоих маятников и их начальные скорости равны между собой (рис. 2.5а), т. е.

$$\begin{cases} \phi_1(0) = \phi_2(0) = \phi_0; \\ \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = \dot{\phi}_0. \end{cases} \quad (2.55)$$

Из формул (2.52) с учетом начальных условий (2.55) получим

$$\phi_1(t) = \phi_2(t) = \left(\phi_0^2 + \frac{\dot{\phi}_0^2}{\omega_2^2} \right)^{1/2} \cos \left[\omega_1 t - \arctg \left(\frac{\dot{\phi}_0}{\omega_2 \phi_0} \right) \right]. \quad (2.56)$$

Антисимметричное (антифазное) главное колебание (ω_2, θ_2) осуществляется, когда начальные отклонения обоих маятников и их начальные скорости равны между собой по абсолютной величине, но противоположны по знаку (рис. 2.5б):

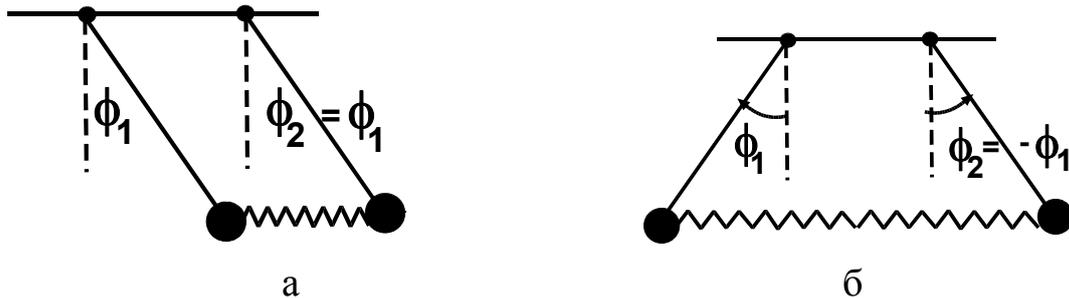


Рис. 2.5

$$\begin{cases} \phi_1(0) = -\phi_2(0) = \phi_0; \\ \dot{\phi}_1(0) = -\dot{\phi}_2(0) = \dot{\phi}_0. \end{cases} \quad (2.57)$$

При начальных условиях (2.57) получаем

$$-\phi_1(t) = \phi_2(t) = - \left(\phi_0^2 + \frac{\dot{\phi}_0^2}{\omega_1^2} \right)^{1/2} \cos \left[\omega_2 t - \arctg \left(\frac{\dot{\phi}_0}{\omega_1 \phi_0} \right) \right]. \quad (2.58)$$

Зададим теперь начальные условия следующего вида:

$$\begin{cases} \phi_1(0) = \phi_0; \phi_2(0) = 0; \\ \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0, \end{cases} \quad (2.59)$$

т. е. первый маятник отклонен на угол ϕ_0 , второй маятник находится в равновесии, а начальные скорости обоих маятников равны нулю. Общее решение (2.52) при начальных условиях (2.59) примет вид:

$$\begin{cases} \phi_1(t) = \frac{\phi_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t); \\ \phi_2(t) = \frac{\phi_0}{2} (-\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t). \end{cases} \quad (2.60)$$

Рассмотрим случай слабой связи между маятниками. Если $\omega_0 \gg \Omega$, то решение (2.52) описывает почти гармоническое колебание. Чтобы показать это, запишем (2.52) в виде

$$\begin{cases} \phi_1(t) = \phi_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right); \\ \phi_2(t) = \phi_0 \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right). \end{cases} \quad (2.61)$$

Подставим в (2.61) приближенные значения собственных частот

$$\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \approx \omega_0; \quad \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \approx \frac{\Omega^2}{2\omega_0}. \quad (2.62)$$

Получим

$$\begin{cases} \phi_1(t) = \phi_0 \cos\left(\frac{\Omega^2}{2\omega_0}t\right) \cdot \cos(\omega_0 t); \\ \phi_2(t) = \phi_0 \sin\left(\frac{\Omega^2}{2\omega_0}t\right) \cdot \sin(\omega_0 t). \end{cases} \quad (2.63)$$

Обсудим полученный результат. Так как $\frac{\Omega^2}{2\omega_0} \ll \omega_0$, то первые

сомножители в скобках в решении (2.63) являются функциями, медленно меняющимися со временем, и все решение представляет собой гармоническое колебание с частотой ω_0 , но периодически меняющейся амплитудой, хотя и с большим периодом. В начальный момент амплитуда первого маятника имеет максимальное значение, равное ϕ_0 , а амплитуда второго маятника равна нулю. Амплитуда первого маятника убывает, а второго возрастает, и в момент $t_1 = \frac{\pi\omega_0}{\Omega^2} = \frac{1}{4}T$ колебания первого маятника прекращаются (амплитуда их становится равной нулю); амплитуда же второго маятника в этот момент максимальна и равна ϕ_0 . Далее процесс повторяется в обратном порядке, то есть происходит непрерывный обмен энергией колебаний между маятниками. Это явление называется *биениями*. Оно уже рассматривалось на с. 31 (два слабо связанных осциллятора) и графически изображено на рис. 2.6.

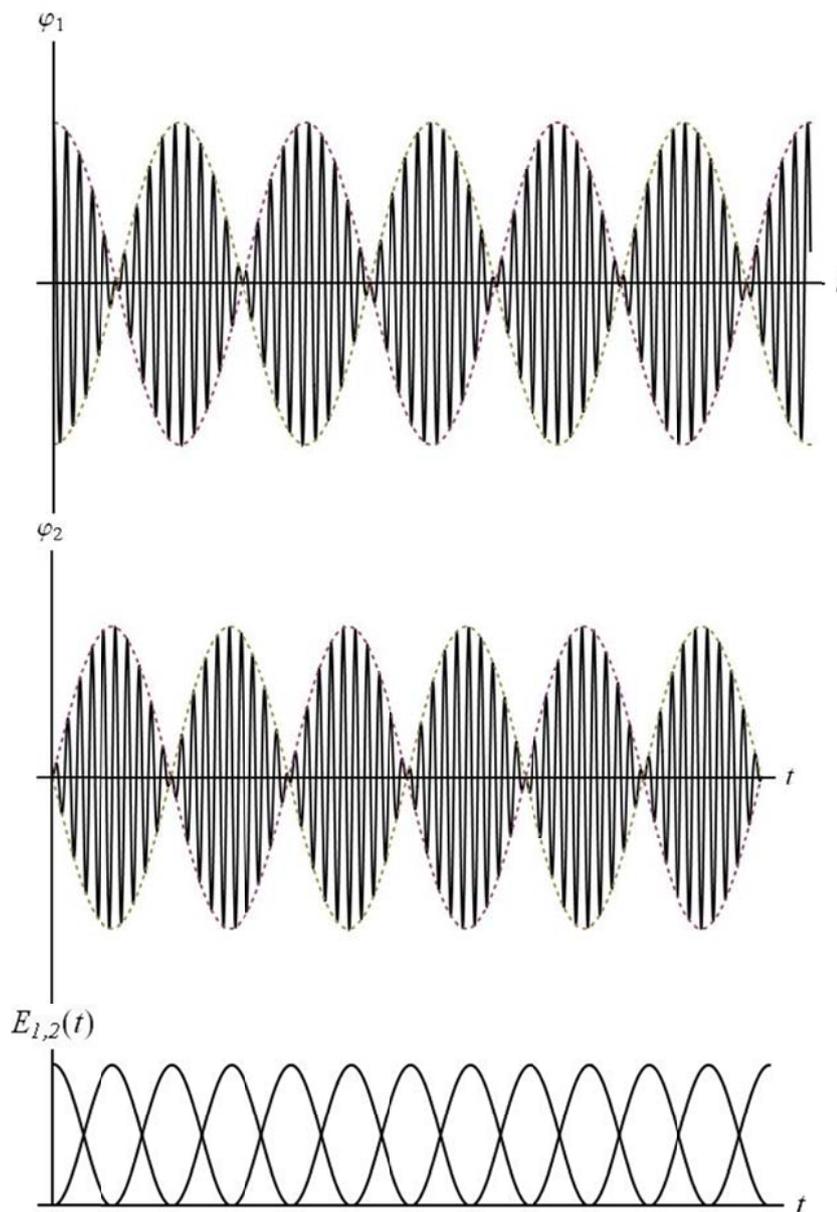


Рис. 2.6

А Найдем среднюю за период $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ полную энергию первого маятника. Поскольку величина $\phi_0 \cos\left(\frac{\Omega^2}{2\omega_0} t\right)$ практически постоянна в течение одного цикла колебаний с высокой частотой ω_0 , то

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \overline{\frac{ml^2 \dot{\phi}_1^2}{2} + (mgl + kl^2) \phi_1^2} \approx \frac{kl^2}{2} \left(\overline{\dot{\phi}_1^2 + \omega_0^2 \phi_1^2} \right) = \\
 &= \frac{kl^2 \omega_0^2 \phi_0^2}{2} \cos^2\left(\frac{\Omega^2}{2\omega_0} t\right).
 \end{aligned}
 \tag{2.64}$$

аналогично для второго маятника

$$E_2 = \frac{kl^2\omega_0^2\phi_0^2}{2} \sin^2\left(\frac{\Omega^2}{2\omega_0}t\right). \quad (2.65)$$

Следовательно, полная энергия системы двух слабо связанных маятников

$$E = E_1 + E_2 = \frac{kl^2\omega_0^2\phi_0^2}{2}. \quad (2.66)$$

Таким образом, имеем:

$$E_1 = \frac{E}{2} \left(1 + \cos\frac{\Omega^2}{\omega_0}t\right); \quad E_2 = \frac{E}{2} \left(1 - \cos\frac{\Omega^2}{\omega_0}t\right). \quad (2.67)$$

В рассмотренном случае равенства масс и длин подвеса обмен энергией является полным; маятники настроены в резонанс. Если же маятники не одинаковы, то обмен энергией будет неполным.

Отметим, что обмен энергией не будет иметь места только в тех случаях, когда реализуется только одно из нормальных колебаний (симметричное или антисимметричное), поскольку нормальные моды являются независимыми. Метод решения данной задачи применим к решению ряда задач о колебаниях немеханических систем; например, задача об индуктивно связанных электрических контурах решается в полной аналогии с данным примером.

2.1.2. Рассмотрим колебания двух (одинаковых) связанных математических маятников, если точки их подвеса находятся на расстоянии a , в равновесии расстояние между самими маятниками совпадает с a , но связывающая их пружина закреплена на стержнях подвеса на расстоянии $b < l$ от точек подвеса.

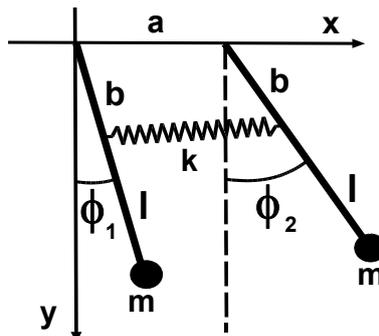


Рис. 2.7

Решение. Для решения этой задачи можно воспользоваться приближенным квадратичным гамильтонианом из предыдущего примера, заменив в упругом слагаемом полную длину подвеса l на расстояние от точек подвеса до места закрепления пружины b :

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2) - \frac{mgl}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{kb^2}{2}(\phi_2 - \phi_1)^2.$$

При этом характеристическое уравнение изменится следующим образом

$$\left(\omega^2 - \frac{g}{l}\right)\left(\omega^2 - \frac{g}{l} - 2\frac{k}{m}\left(\frac{b}{l}\right)^2\right) = 0.$$

Таким образом, частота синфазных колебаний остается равной ω_0 , а частота противофазных колебаний уменьшается и равна $\Omega^2(b/l)^2$.

2.1.3. Рассмотреть колебания двух связанных линейных осцилляторов (рис. 2.8) с разными массами и разными упругими константами.

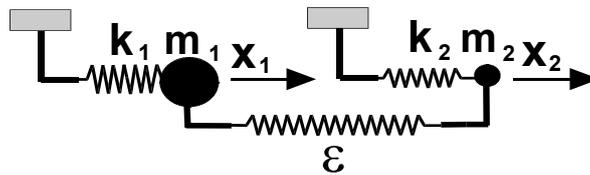


Рис. 2.8

Решение. Рассмотрим вначале простой случай, когда связанные линейные осцилляторы различаются только массами и $m_1 = M > m_2 = m$. В этом случае лагранжиан системы записывается так:

$$L = \frac{M}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{\varepsilon}{2}(x_1 - x_2)^2.$$

Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 + kx_1 + \varepsilon(x_1 - x_2) = 0; \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 + \varepsilon(x_2 - x_1) = 0. \end{cases}$$

Алгебраические уравнения для амплитуд колебаний сводятся к системе

$$\begin{cases} (M\omega^2 - k - \varepsilon)a_1 + \varepsilon a_2 = 0; \\ (m\omega^2 - k - \varepsilon)a_2 + \varepsilon a_1 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы сразу следует, что

$$(M - m)\omega^2 = \varepsilon(a_1^2 - a_2^2) / a_1 a_2.$$

Следовательно, в синфазном колебании с $sign(x_1) = sign(x_2)$ имеем $x_1 > x_2$, т. е. тяжелый осциллятор колеблется с большей амплитудой, чем легкий. В противофазном колебании с $sign(x_1) = -sign(x_2)$, наоборот, $x_1 < x_2$ и легкая частица колеблется с большей амплитудой, чем тяжелая.

Характеристическое уравнение для определения частот нормальных мод

$$(M\omega^2 - k - \varepsilon)(m\omega^2 - k - \varepsilon) - \varepsilon^2 = 0$$

имеет два решения:

$$\omega_{2,1}^2 = \frac{k + \varepsilon}{\mu} \pm \sqrt{\left(\frac{k + \varepsilon}{\mu}\right)^2 - \frac{k(k + 2\varepsilon)}{mM}},$$

где $\mu = 2mM / (m + M)$ – приведенная масса.

В пределе большого различия масс $M \gg m$ частота антифазных колебаний равняется $\omega_2^2 \approx \omega_0^2 + \varepsilon/m$, а частота синфазных колебаний равняется $\omega_1^2 \approx \omega_0^2 \frac{k + 2\varepsilon}{k + \varepsilon} \frac{m}{M}$. Обе частоты уменьшаются по сравнению с соответствующими частотами в случае равных масс $\omega_2^2 \approx \omega_0^2 + 2\varepsilon/m$ и $\omega_1^2 \approx \omega_0^2 = k/m$, но понижение частоты синфазных колебаний существенней (смотри ниже задачу о колебании тяжелой примеси в линейной цепочке).

В случае различных упругих констант лагранжиан системы преобразуется следующим образом:

$$L = \frac{M}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{K}{2} x_1^2 - \frac{k}{2} x_2^2 - \frac{\varepsilon}{2} (x_1 - x_2)^2,$$

а характеристическое уравнение принимает вид:

$$(M\omega^2 - K - \varepsilon)(m\omega^2 - k - \varepsilon) - \varepsilon^2 = 0.$$

Корни этого уравнения, соответствующие синфазным и противофазным колебаниям, равны

$$\omega^2 = \frac{1}{2Mt} \left\{ \left[(k + \varepsilon)M + (K + \varepsilon)t \right] \mp \sqrt{\left[(k + \varepsilon)M - (K + \varepsilon)t \right]^2 + 4Mt\varepsilon^2} \right\}.$$

Формула упрощается в пределе равных масс $t = M$:

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left[K + k + 2\varepsilon \mp \sqrt{(K - k)^2 + 4\varepsilon^2} \right].$$

При большом различии упругих констант ($K \gg k$) в противофазных колебаниях с частотой $\omega_2^2 \approx K / M$ колеблется фактически один первый осциллятор с амплитудой $a_1 \approx -a_2 Kt / \varepsilon M \gg a_2$. В синфазной моде с частотой $\omega_1^2 \approx (k + \varepsilon) / t$ колеблется в основном второй осциллятор с амплитудой $a_2 \approx a_1 K / \varepsilon \gg a_1$.

2.1.4. Рассмотреть малые вертикальные колебания двух различных линейно связанных частиц (см. рис. 2.9). Силой тяжести пренебречь.

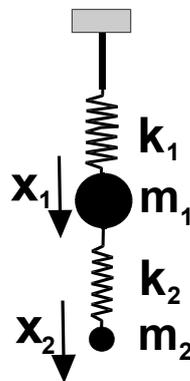


Рис. 2.9

Решение. Функция Лагранжа системы и уравнения движения имеет вид:

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{k_1}{2} x_1^2 + \frac{k_2}{2} (x_1 + x_2)^2;$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0. \end{cases}$$

Легко находится характеристическое уравнение

$$(m_1\omega^2 - k_1 - k_2)(m_2\omega^2 - k_2) - k_2^2 = 0$$

и частоты нормальных колебаний

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{k_2}{m_2} \right) + \frac{k_1}{m_1} \frac{k_2}{m_2} = 0.$$

Например, в случае большой разницы масс ($m_2 \ll m_1$) частота синфазных колебаний равна $\omega_1^2 \approx k_1/m_1$ и амплитуды осцилляторов практически равны, т. е. ответ свелся к динамике одного первого осциллятора. В противофазной моде $a_1 \approx -(m_2/m_1)a_2 \ll a_2$ и частота равна $\omega_2^2 \approx k_2/m_2$: первая тяжелая частица почти неподвижна, а легкая колеблется, как изолированный осциллятор.

2.1.5. Описать малые колебания двойного плоского маятника (рис 2.10).

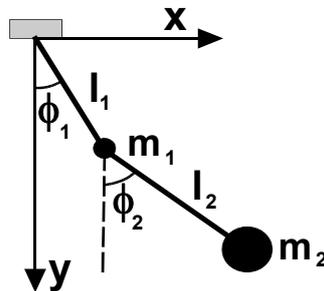


Рис. 2.10

Решение. Функция Лагранжа двойного плоского маятника (см. рис. 2.10) имеет вид:

$$L = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_1gy_1 + m_2gy_2. \quad (2.68)$$

После подстановки $x_1 = l_1 \sin \phi_1$; $x_2 = l_1 \sin \phi_1 + l_2 \sin \phi_2$; $y_1 = l_1 \cos \phi_1$; $y_2 = l_1 \cos \phi_1 + l_2 \cos \phi_2$ лагранжиан (2.68) сводится к выражению

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \phi_1 + m_2 l_2 \cos \phi_2. \quad (2.69)$$

Если ограничиться малыми колебаниями, то надо считать, что отклонения ϕ_1 и ϕ_2 близки к нулю, то есть маятник колеблется с малым размахом вблизи вертикали. Тогда в выражение для кинетической энергии в лагранжиане (2.69) следует подставить равновесные значения углов отклонения

$$\phi_1^{(0)} = \phi_2^{(0)} = 0; \quad \cos(\phi_1^{(0)} - \phi_2^{(0)}) = 1.$$

Формулу потенциальной энергии надо упростить, используя разложения $\cos \phi_1$ и $\cos \phi_2$ в ряд Тейлора вблизи $\phi_1^{(0)} = 0, \phi_2^{(0)} = 0$ до квадратных членов включительно, то есть заменить в лагранжиане (2.69) $\cos \phi_1$ и $\cos \phi_2$ на

$$\cos \phi_1 \approx 1 - \frac{\phi_1^2}{2}; \quad \cos \phi_2 \approx 1 - \frac{\phi_2^2}{2}.$$

Отбрасывая постоянные члены, получаем функцию Лагранжа малых колебаний двойного математического маятника в виде

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 - \frac{m_1 + m_2}{2} l_1 g \phi_1^2 - \frac{m_2}{2} l_2 g \phi_2^2. \quad (2.70)$$

Сравнивая это выражение с общим видом лагранжиана системы с двумя степенями свободы (2.22), получаем значения коэффициентов m_{ik} и k_{ik} для случая двойного маятника:

$$\begin{aligned} m_{11} &= (m_1 + m_2) l_1^2; & m_{22} &= m_2 l_2^2; & m_{12} &= m_2 l_1 l_2; \\ k_{11} &= (m_1 + m_2) l_1 g; & k_{22} &= m_2 l_2 g; & k_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение при этом имеет вид:

$$\omega^4 m_1 l_1 l_2 - \omega^2 M L g + M g^2 = 0, \quad (2.71)$$

где $M = m_1 + m_2$ и $L = l_1 + l_2$. Поэтому частоты нормальных мод равны

$$\omega_{1,2}^2 = g \frac{M}{m_1} \frac{1}{2l_1 l_2} \left(l_1 + l_2 \pm \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - 4 \frac{m_1}{M} l_1 l_2} \right). \quad (2.72)$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи. Для двух идентичных маятников с $l_1 = l_2 = l$ и $m_1 = m_2 = m$ из общей формулы для частот (2.72) имеем

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 (2 \pm \sqrt{2}), \quad (2.73)$$

где $\omega_0^2 = g/l$ соответствует частоте одного изолированного осциллятора. Если массы осцилляторов сильно различаются $m_2 \gg m_1$ при $l_1 = l_2 = l$, то частоты нормальных колебаний равны

$$\omega_1^2 \approx \frac{1}{2} \omega_0^2; \quad \omega_2^2 \approx \omega_0^2 \frac{2m_2}{m_1}. \quad (2.74)$$

Чтобы понять характер колебаний осцилляторов в двух модах воспользуемся формулой (2.30). Подставляя в нее выражения для частот и коэффициентов, получим в основном приближении

$$\begin{cases} \phi_2^{(1)} = \phi_1^{(1)}; \\ \phi_2^{(2)} = -\phi_1^{(2)}. \end{cases} \quad (2.75)$$

Таким образом, первая мода ($\phi_2^{(1)} = \phi_1^{(1)}$) соответствует синфазным колебаниям, при которых оба маятника колеблются как целое (рис. 2.11а). Вторая мода ($\phi_2^{(2)} = -\phi_1^{(2)}$) отвечает противофазным колебаниям (рис. 2.11б).

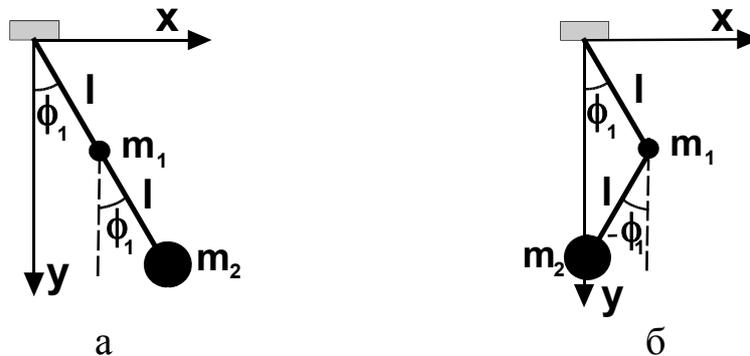


Рис. 2.11

В этом случае тяжелая частица остается неподвижной, а легкая колеблется около вертикальной оси.

2.1.6. Описать малые колебания плоского маятника, массивная точка подвеса которого может свободно перемещаться вдоль горизонтальной прямой (рис. 2.12).

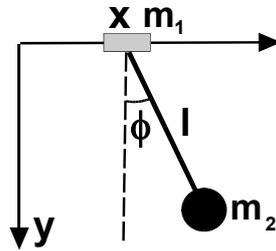


Рис. 2.12

Решение. Декартовы координаты точки подвеса – $(x, 0)$, а самого маятника – $(x + l \sin \varphi, l \cos \varphi)$, поэтому функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l \cos \varphi \dot{x} \dot{\varphi} + m_2 g l \cos \varphi.$$

Ограничиваясь в лагранжиане квадратичным по $x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi} \ll 1$ приближением

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} - \frac{m_2 g l}{2} \varphi^2,$$

получаем уравнения движения:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} = 0; \\ m_2 l \ddot{x} + m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 g l \varphi = 0. \end{cases}$$

Одно из решений имеет нулевую частоту. Это – та к называемая *сдвиговая мода*. Для нее из второго уравнения следует, что в этом решении $\varphi = 0$. Из формы лагранжиана видно, что координата x является циклической и сохраняется соответствующий импульс $\partial L / \partial \dot{x} = (m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 g l \dot{\varphi} = 0$. Следовательно, $\dot{x} = const$ и система с вертикально висящим маятником как целое перемещается с постоянной скоростью. Второй нормальной моде отвечает частота

$$\omega^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}$$

и соотношение смещений

$$l\phi = -\frac{m_1 + m_2}{m_2}x.$$

При $m_1 \gg m_2$ точка подвеса неподвижна и маятник колеблется с обычной частотой $\omega^2 \approx \omega_0^2 = g/l$. В противоположном пределе $m_1 \ll m_2$ частота $\omega \gg \omega_0$ и $l\phi + x = 0$. Но поскольку $l\phi + x = x_2$ есть декартова координата точки с массой m_2 , то сам маятник остается неподвижным, а колеблется только точка подвеса. Наконец, при $m_1 = m_2$ имеем $l\phi + x = x_2 = -x$: маятник и точка подвеса колеблются в противофазе с одинаковой амплитудой.

2.1.7. Описать малые колебания плоского маятника, соединенного с точкой подвеса пружиной, имеющей в нерастянутом состоянии длину l_0 (рис. 2.13).

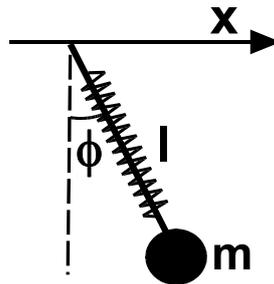


Рис. 2.13

Решение. Кинетическая энергия равна $T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$, а потенциальная энергия равна $U = k(l - l_0)^2/2 - mgl \cos \phi$. В качестве обобщенных координат удобно выбрать величины $l(t)$ и $\phi(t)$, в терминах которых лагранжиан имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{l}^2 + l^2\dot{\phi}^2) - \frac{k}{2}(l - l_0)^2 + mgl \cos \phi.$$

Для описания линейных колебаний в лагранжиане необходимо оставить только слагаемые, квадратичные по $\lambda = l - l_0$, ϕ , и их временным производным. При этом он сводится к выражению

$$L \approx \frac{m}{2}(\dot{\lambda}^2 + l_0^2 \dot{\phi}^2) - \frac{k}{2}\lambda^2 + mg\lambda - \frac{mgl_0}{2}\phi^2.$$

Мы видим, что в линейном приближении две степени свободы не «зацепляются», поэтому частоты двух нормальных мод равны $\omega_1^2 = l/g$ и $\omega_2^2 = k/m$ для колебаний маятника и колебаний пружины соответственно.

2.1.8. Найти частоты малых колебаний заряженного математического маятника (с зарядом e), который колеблется в двух направлениях и находится в поле силы тяжести и в перпендикулярном ему внешнем электрическом поле E (рис. 2.14).

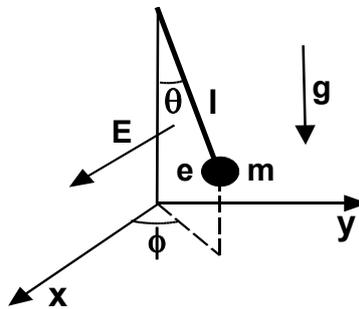


Рис.2. 14

Решение. В данном примере функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + mgl \cos \theta + eEl \sin \theta \cos \phi,$$

и в основном состоянии маятник отклонен от вертикальной оси на угол $\theta_0 = \arctg(eE/mg)$. Уравнения колебаний с произвольной амплитудой

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 + \omega_0^2 \sin \theta - \operatorname{tg} \theta_0 \cos \theta \cos \phi = 0; \\ \frac{d}{dt}(\sin^2 \theta \dot{\phi}) + \frac{eE}{ml} \sin \theta \sin \phi = 0, \end{cases}$$

где $\omega_0^2 = g/l$ – частота плоских колебаний в отсутствии электрического поля, необходимо линеаризовать по малым отклонениям $\phi \ll 1$ и $\theta - \theta_0 = \psi \ll 1$. При этом уравнения для двух переменных разделяются:

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \sqrt{1 + (eE/mg)^2} \phi = 0; \quad \ddot{\psi} + \omega_0^2 \sqrt{1 + (eE/mg)^2} \psi = 0.$$

Мы снова сталкиваемся с системой с вырожденными частотами нормальных мод $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_0^2 \sqrt{1 + (eE/mg)^2}$.

2.19. Рассмотреть ту же задачу в отсутствии внешнего электрического поля (рис. 2.15).

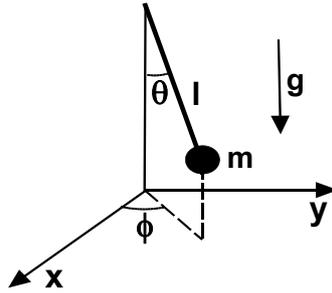


Рис. 2.15

Решение. В этом случае функция Лагранжа упрощается:

$$L = \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + mgl \cos \theta.$$

Теперь обобщенная координата ϕ становится циклической и соответствующий обобщенный импульс сохраняется: $\dot{\phi} = \Omega$. Т. е маятник вращается вокруг точки подвеса с частотой (угловой скоростью) $\dot{\phi} = \Omega$. Второе уравнение Лагранжа (для переменной θ) имеет вид:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta - \Omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0,$$

где $\omega_0^2 = g/l$. При малых частотах вращения маятника $\Omega < \omega_0$ он кроме вращательного движения совершает малые колебания вблизи основного состояния с частотой $\nu = \sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2}$. При $\Omega > \omega_0$ основное состояние меняется: маятник вращается и одновременно колеблется, но уже около состояния с $\theta = \theta_0 = \arccos(\omega_0 / \Omega)^2$. Вводя малые отклонения от этого угла $\varepsilon = \theta - \theta_0$ и линеаризуя уравнение относительно $\varepsilon \ll 1$, получаем

$$\ddot{\varepsilon} + \varepsilon (\Omega^4 - \omega_0^4) / \Omega^2 = 0.$$

С ростом частоты вращения частота колебаний (частота нутации) возрастает, а угол отклонения маятника от вертикали стремится к величине $\theta_0 = \pi/2$.

Таким образом, в данной задаче решение является двухчастотным, но частоты однозначно связаны друг с другом: $\nu^2 + \Omega^2 = \omega_0^2$.

2.1.10. Описать малоамплитудную динамику двух связанных магнитных моментов в ферромагнетике с анизотропией типа оси легкого намагничивания (рис. 2.16).

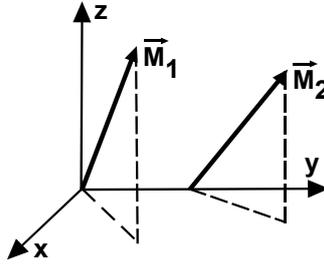


Рис. 2.16

Считая магнитные моменты классическими векторами, можно воспользоваться уравнениями Ландау – Лифшица:

$$\dot{\vec{M}}_i = \left[\vec{M}_i, \frac{\partial H}{\partial \vec{M}_i} \right], \quad i = 1, 2, \quad (2.76)$$

в которых гамильтониан H в случае легкоосного ферромагнетика имеет вид:

$$H = -J(\vec{M}_1, \vec{M}_2) - \frac{\beta}{2}(\vec{M}_1, \vec{n}_z)^2 - \frac{\beta}{2}(\vec{M}_2, \vec{n}_z)^2, \quad (2.77)$$

где $J > 0$ – константа обменного взаимодействия и $\beta > 0$ – константа одноосной анизотропии.

Решение. Уравнения Ландау – Лифшица (2.76) для двух связанных магнитных моментов приобретают вид:

$$\begin{cases} \dot{\vec{M}}_1 = -J[\vec{M}_1, \vec{M}_2] - \beta\vec{M}_1, \vec{n}_z; \\ \dot{\vec{M}}_2 = -J[\vec{M}_2, \vec{M}_1] - \beta\vec{M}_2, \vec{n}_z. \end{cases} \quad (2.78)$$

Длина каждого магнитного момента сохраняется: $|\vec{M}_1| = |\vec{M}_2| = M_0$.

Поэтому уравнения можно записать только для двух компонент моментов: M_i^x и M_i^y . Удобно вместо них ввести комплексные величины

$$\psi_i = M_i^x + iM_i^y, \quad (2.79)$$

которые являются классическим аналогом квантовых операторов рождения и уничтожения магнонов. В терминах этих величин уравнения динамики магнитных моментов принимают вид:

$$\begin{cases} i\dot{\psi}_1 = -\beta\psi_1 M_1^z - J(\psi_1 M_2^z - \psi_2 M_1^z); \\ i\dot{\psi}_2 = -\beta\psi_2 M_2^z - J(\psi_2 M_1^z - \psi_1 M_2^z), \end{cases} \quad (2.80)$$

где $M_i^z = \sqrt{M_0^2 - |\psi_i|^2}$. Малым колебаниям соответствуют малые отклонения вращающихся магнитных моментов от оси z . В основном приближении можно положить $M_i^z \approx M_0$. При этом получается система двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} i\dot{\psi}_1 = -(J + \beta)\psi_1 M_0 + J\psi_2 M_0; \\ i\dot{\psi}_2 = -(J + \beta)\psi_2 M_0 + J\psi_1 M_0. \end{cases} \quad (2.81)$$

Линейные колебания системы имеют вид $\psi_i = a_i \exp(i\omega t)$, а амплитуды удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} \omega - (J + \beta)M_0 & JM_0 \\ JM_0 & \omega - (J + \beta)M_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.82)$$

В отличие от рассмотренных ранее связанных линейных осцилляторов, в данном случае характеристическое уравнение зависит не от квадратов частот, а от самих частот. Это – специфика магнитных систем. Двум нормальным модам отвечают частоты

$$\begin{cases} \omega_1 = \beta M_0; \\ \omega_2 = (2J + \beta)M_0. \end{cases} \quad (2.83)$$

Частоте ω_1 соответствуют «синфазные колебания» – вращение двух магнитных моментов в фазе, а частоте ω_2 – «противофазные колебания» – синфазное вращение моментов, но со сдвигом фазы на π (см. рис. 2.17).

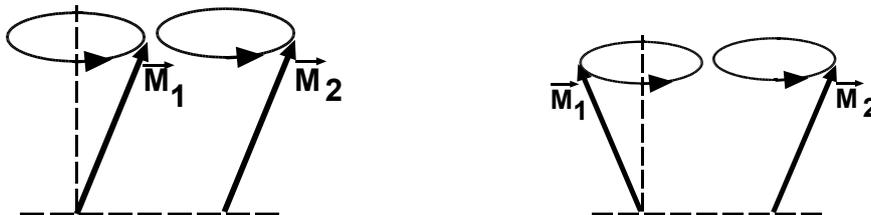


Рис. 2.17

Предлагаемые ниже задачи с формальными функциями Лагранжа помогут на простых примерах освоить методы нахождения собственных частот и нормальных колебаний.

В задачах 2.1.11–2.1.13 требуется найти частоты собственных колебаний систем, описываемых заданными функциями Лагранжа.

2.1.11. Функция Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2}(q_1\dot{q}_1^2 + q_2\dot{q}_2^2) - \left(\frac{1}{q_1q_2} + q_1 + q_2 \right). \quad (2.84)$$

Решение. Находим значения q_1 и q_2 , соответствующие минимуму потенциальной энергии, из условий

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 1 - \frac{1}{q_2q_1^2} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 1 - \frac{1}{q_1q_2^2} = 0,$$

откуда

$$q_1^{(0)} = q_2^{(0)} = 1.$$

Значения вторых производных в этой точке

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} \right)_0 = 2; \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0 = 1,$$

следовательно,

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \right)_0 > 0; \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \right)_0 \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0^2 = 3 > 0$$

и условия минимума выполнены. Находим функцию Лагранжа для малых отклонений от положения равновесия. Для этого подставляем равновесные значения $q_1^{(0)} = q_2^{(0)} = 1$ в выражение для кинетической энергии и переходим к отклонениям от положения равновесия вместо координат, т. е. вводим новые координаты:

$$\begin{cases} x = q_1 - q_1^{(0)} = q_1 - 1; \\ y = q_2 - q_2^{(0)} = q_2 - 1 \end{cases}$$

и получаем вместо (2.84)

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - (x^2 + y^2 + xy). \quad (2.85)$$

Запишем уравнения движения для функции Лагранжа (2.85):

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2x + y = 0; \\ \ddot{y} + 2y + x = 0. \end{cases} \quad (2.86)$$

Имеем систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными, решение которой следует искать в виде

$$x = A_1 e^{i\omega t}; \quad y = A_2 e^{i\omega t}. \quad (2.87)$$

Подставляя (2.87) в (2.86), находим

$$\begin{cases} (2 - \omega^2) A_1 + A_2 = 0; \\ A_1 + (2 - \omega^2) A_2 = 0. \end{cases} \quad (2.88)$$

Для того чтобы эти два линейных однородных алгебраических уравнения имели нетривиальные решения нужно, чтобы определитель из коэффициентов при неизвестных A_1 и A_2 в этих уравнениях равнялся нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 - \omega^2 & 1 \\ 1 & 2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.89)$$

С помощью (2.89) составляем характеристическое уравнение, которое и определяет частоты малых колебаний:

$$(2 - \omega^2)^2 - 1 = (1 - \omega^2)(3 - \omega^2) = 0. \quad (2.90)$$

Решения биквадратного уравнения (2.90) дают частоты малых колебаний.

В данном случае имеем: $\omega_1^2 = 1$; $\omega_2^2 = 3$. Заметим, что в данной системе, как это следует из (2.88), низкочастотная мода $\omega_1 = 1$ соответствует противофазным колебаниям с $A_1 = -A_2$, а высокочастотная с $\omega_2 = \sqrt{3}$ – синфазным колебаниям с $A_1 = A_2$.

2.1.12. Функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) - (q_1^3 - q_2^3 + 3q_1q_2). \quad (2.91)$$

Решение. Минимум потенциальной энергии для функции Лагранжа (2.91) находится в точке

$$q_1^{(0)} = 1, q_2^{(0)} = -1.$$

Вторые производные в этой точке равны

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right)_0 = 6, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 = 3,$$

т. е.

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0^2 > 0.$$

Функция Лагранжа для малых колебаний с точностью до квадратных слагаемых сводится к

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2) - 3(x^2 + xy + y^2), \quad (2.92)$$

где $x = q_1 - 1$, $y = q_2 + 1$.

Подставляя в соответствующие уравнения движения

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{1}{2}\ddot{y} + 6x + 3y = 0; \\ \frac{1}{2}\ddot{x} + \ddot{y} + 3x + 6y = 0 \end{cases}$$

зависимости от времени $x = A_1 e^{i\omega t}$, $y = A_2 e^{i\omega t}$, получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (6 - \omega^2)A_1 + \left(3 - \frac{1}{2}\omega^2\right)A_2 = 0; \\ \left(3 - \frac{1}{2}\omega^2\right)A_1 + (6 - \omega^2)A_2 = 0. \end{cases}$$

Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 6 - \omega^2 & 3 - \frac{\omega^2}{2} \\ 3 - \frac{\omega^2}{2} & 6 - \omega^2 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}(\omega^4 - 12\omega^2 + 36) = \frac{3}{4}(\omega^2 - 6)^2 = 0,$$

корни которого равны $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 6$.

В данном примере мы имеем ситуацию с вырождением частот нормальных мод. В этом случае подстановка полученных частот в приведенные выше алгебраические уравнения не дают нам соотношение амплитуд разных координат в нормальных модах (см., например, «Классическую механику» Г. Голдстейна» [14]). Для нахождения этого соотношения необходимо воспользоваться условием ортогональности нормальных мод. Продемонстрируем это.

Вернемся к лагранжиану (2.91) и произведем линейное преобразование:

$$\begin{cases} x = u + cv; \\ y = au + bv. \end{cases} \quad (2.93)$$

(Из-за линейности уравнений одну константу преобразования можно положить равной единице). Подстановка этого преобразования в лагранжиан (2.91) приводит его к виду:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}(1 + a^2 + a)\dot{u}^2 - 3(1 + a^2 + a)u^2 + \frac{1}{2}(c^2 + b^2 + bc)\dot{v}^2 - \\ & - 3(c^2 + b^2 + bc)v^2 + (2c + 2ab + b + ca)\left(\frac{1}{2}i\dot{u}v - 3uv\right). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Условием того, чтобы переменные (u, v) представляли собой независимые нормальные моды, является следующее:

$$2c + 2ab + b + ca = 0. \quad (2.95)$$

Лагранжиан распадается на две независимые части для u и v , задающие динамические уравнения колебаний

$$\begin{cases} \ddot{u} + 6u = 0; \\ \ddot{v} + 6v = 0 \end{cases} \quad (2.96)$$

с частотами $\omega = \sqrt{6}$. При этом соотношение амплитуд отдельных осцилляторов в нормальных модах еще остается неопределенным:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} v. \quad (2.97)$$

Воспользуемся условием ортогональности нормальных мод

$$c + ab = 0. \quad (2.98)$$

Вместе с приведенным условием на константы оно приводит к соотношению $a = 1$; $b = -c$ и общему решению вида

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} cv, \quad (2.99)$$

т. е. сумме синфазных и противофазных колебаний.

2.1.13. Функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) - \left[\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ln(q_1q_2) \right] \quad (2.100)$$

Решение. Минимум потенциальной энергии для лагранжиана (2.100) достигается при

$$q_1^{(0)} = q_2^{(0)} = 1.$$

Вторые производные в этой точке равны

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right)_0 = 1; \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 = 0,$$

т. е.

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0^2 > 0.$$

Таким образом, в малоамплитудном пределе

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad (2.101)$$

где $x = q_1 - 1$; $y = q_2 - 1$,

уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{1}{2}\ddot{y} + x = 0; \\ \frac{1}{2}\ddot{x} + \ddot{y} + y = 0. \end{cases}$$

Полагая $x = A_1 e^{i\omega t}$; $y = A_2 e^{i\omega t}$, находим

$$\begin{cases} (1 - \omega^2)A_1 - \frac{1}{2}\omega^2 A_2 = 0; \\ -\frac{1}{2}\omega^2 A_1 + (1 - \omega^2)A_2 = 0. \end{cases}$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega^2 & -\frac{\omega^2}{2} \\ -\frac{\omega^2}{2} & 1 - \omega^2 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}\omega^4 - 2\omega^2 + 1 = 0.$$

Отсюда частоты нормальных мод равны $\omega_1^2 = 2/3$; $\omega_2^2 = 2$. Из уравнений для амплитуд следует, что низкочастотная мода с $\omega_1^2 = 2/3$

соответствует синфазным колебаниям с $A_1 = A_2$, а высокочастотная мода с $\omega_2^2 = 2$ – антифазным колебаниям с $A_1 = -A_2$.

В задачах 2.1.14–2.1.15 требуется найти собственные частоты и нормальные координаты для систем, описываемых заданными функциями Лагранжа.

2.1.14. Рассмотрим систему со следующей функцией Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(x^2 - xy + y^2). \quad (2.102)$$

Решение. В данном случае лагранжиан (2.102) квадратичен по координатам и скоростям и описывает систему с двумя степенями свободы, совершающую малые колебания.

Составляем уравнения движения:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{1}{2}\ddot{y} + x - \frac{1}{2}y = 0; \\ \frac{1}{2}\ddot{x} + \ddot{y} - \frac{1}{2}x + y = 0. \end{cases}$$

Ищем координаты x и y в виде $x = A_1 e^{i\omega t}$; $y = A_2 e^{i\omega t}$ или в векторной форме как вектор-столбец:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}.$$

Получаем систему двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно A_1, A_2 :

$$\begin{cases} (1 - \omega^2)A_1 - \frac{1}{2}(1 + \omega^2)A_2 = 0; \\ -\frac{1}{2}(1 + \omega^2)A_1 + (1 - \omega^2)A_2 = 0. \end{cases} \quad (2.103)$$

Определитель этой системы для нетривиальных решений должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega^2 & -\frac{1}{2}(1 + \omega^2) \\ -\frac{1}{2}(1 + \omega^2) & 1 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

что и дает нам характеристическое уравнение для определения частот:

$$(1 - \omega^2)^2 - \frac{1}{4}(1 + \omega^2)^2 = \frac{1}{4}(1 - 3\omega^2)(3 - \omega^2) = 0.$$

Квадраты частот в данном случае равны соответственно $\omega_1^2 = 1/3$ и $\omega_2^2 = 3$, где индекс нумерует нормальные моды. Вводим эти нормальные колебания следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \operatorname{Re}\left(A^{(1)} e^{i\omega_1 t}\right) = \operatorname{Re}\left(A^{(1)} e^{it/\sqrt{3}}\right); \\ \theta_2 &= \operatorname{Re}\left(A^{(2)} e^{i\omega_2 t}\right) = \operatorname{Re}\left(A^{(2)} e^{i\sqrt{3}t}\right). \end{aligned}$$

Амплитуды нормальных мод $A^{(i)}$ представляют собой столбцы

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} A_1^{(i)} \\ A_2^{(i)} \end{pmatrix}; \quad i = 1, 2$$

с амплитудами каждой из координат в соответствующей моде. Подставляя нормальные частоты в уравнение (2.103), получаем для каждой частоты соотношение амплитуд координат в каждой моде:

$$\begin{aligned} \omega = \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}; & \quad A_1^{(1)} / A_2^{(1)} = 1; \\ \omega = \omega_2 = \sqrt{3}; & \quad A_1^{(2)} / A_2^{(2)} = -1. \end{aligned}$$

Как и раньше, нижние индексы нумеруют координаты, а индексы в скобках – моды. Таким образом, общее решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a e^{i\omega_1 t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} b e^{i\omega_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \theta_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \theta_2,$$

где a и b – произвольные амплитуды отдельных мод. Подстановка этого решения в исходный лагранжиан (2.102) приводит его к сумме двух независимых лагранжианов для нормальных мод:

$$L = \frac{3}{2}(\dot{\theta}_1^2 - \omega_1^2 \theta_1^2) + \frac{1}{2}(\dot{\theta}_2^2 - \omega_2^2 \theta_2^2),$$

представляющих функции Лагранжа двух независимых осцилляторов с собственными частотами ω_1 и ω_2 . Различие констант при двух квадратичных формах не принципиально, т. к. амплитуды нормальных мод произвольны. Однако обычно (см. «Механику» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [1]) производится перенормировка амплитуд так, чтобы в общем лагранжиане коэффициенты при обобщенных скоростях равнялись 1/2: $\Theta_1 = \sqrt{3}\theta_1$ и $\Theta_2 = \theta_2$. При этом

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\Theta}_1^2 - \omega_1^2 \Theta_1^2) + \frac{1}{2}(\dot{\Theta}_2^2 - \omega_2^2 \Theta_2^2)$$

и

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Theta_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Theta_2.$$

2.1.15. Рассмотреть колебания системы с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}(2\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(3x^2 + 2y^2). \quad (2.104)$$

Решение. Составляем уравнения движения:

$$\begin{cases} 2\ddot{x} + \ddot{y} + 3x = 0; \\ \ddot{x} + \ddot{y} + 2y = 0. \end{cases} \quad (2.105)$$

Решение ищем в виде

$$\begin{cases} x = A_1 e^{i\omega t}; \\ y = A_2 e^{i\omega t}. \end{cases} \quad (2.106)$$

Подставляя его в уравнения движения (2.105), получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (3 - 2\omega^2)A_1 - \omega^2 A_2 = 0; \\ -\omega^2 A_1 + (2 - \omega^2)A_2 = 0. \end{cases} \quad (2.107)$$

Составляем характеристическое уравнение и находим его решения (частоты нормальных мод):

$$\begin{vmatrix} (3 - 2\omega^2) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & (2 - \omega^2) \end{vmatrix} = \omega^4 - 7\omega^2 + 6 = 0;$$

$$\omega_1^2 = 1, \quad \omega_2^2 = 6.$$

Нормальные координаты вводятся обычным образом:

$$\theta_1 = \operatorname{Re}\left(A^{(1)} e^{it}\right); \quad \theta_2 = \operatorname{Re}\left(A^{(2)} e^{i\sqrt{6}t}\right).$$

Амплитуды нормальных мод $A^{(i)}$ представляют собой столбцы

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} A_1^{(i)} \\ A_2^{(i)} \end{pmatrix}$$

с амплитудами каждой из координат в соответствующей моде. Чтобы выразить исходные координаты x и y через нормальные координаты, полагаем в уравнениях (2.107) последовательно $\omega^2 = \omega_1^2 = 1$ и $\omega^2 = \omega_2^2 = 6$ и находим связь между амплитудами в каждой из нормальных мод:

$$A_2^{(1)} = A_1^{(1)}; \quad A_2^{(2)} = -\frac{3}{2} A_1^{(2)}.$$

Таким образом, первая нормальная мода с меньшей частотой отвечает синфазным колебаниям, а вторая – с большей частотой – противофазной моде. Поскольку амплитуды нормальных мод произвольны, то общее решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a e^{i\omega_1 t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix} b e^{i\omega_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \theta_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix} \theta_2,$$

где a и b – произвольные амплитуды мод.

Подставляя это решение в исходный лагранжиан, приводим его к виду с двумя отдельными лагранжианами нормальных мод:

$$L = \frac{5}{2}(\dot{\theta}_1^2 - \omega_1^2 \theta_1^2) + \frac{5}{8}(\dot{\theta}_2^2 - \omega_2^2 \theta_2^2).$$

Если перенормировать амплитуды нормальных мод следующим образом:

$$\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \Theta_1; \quad \theta_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \Theta_2,$$

то лагранжиан примет стандартный вид:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\Theta}_1^2 - \omega_1^2 \Theta_1^2) + \frac{1}{2}(\dot{\Theta}_2^2 - \omega_2^2 \Theta_2^2) = \frac{1}{2}(\dot{\Theta}_1^2 - \Theta_1^2) + \frac{1}{2}(\dot{\Theta}_2^2 - 6\Theta_2^2).$$

Соответствующие нормальные координаты запишутся в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Theta_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Theta_2.$$

2.1.4. Задачи к разделу 2.1

В задачах 2.1.16.–2.1.27 требуется найти собственные частоты для систем, описываемых заданными функциями Лагранжа.

2.1.16. $L = \frac{\dot{q}_1^2}{q_1} + \frac{\dot{q}_2^2}{q_2} - q_1^3 - \frac{5}{2}q_2^2 - 5q_1 + 6q_2 + 4q_1q_2.$

Ответ: $q_1^{(0)} = 1, q_2^{(0)} = 2; \quad \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 7.$

2.1.17. $L = \dot{q}_1^2 + q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + q_1^3 - \frac{5}{2}q_2^2 - 3q_1 + 4q_2 + 4q_1q_2.$

Ответ: $q_1^{(0)} = -1, q_2^{(0)} = 2; \quad \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 7.$

$$2.1.18. L = \frac{1}{2} \left[(q_2^3 + 1)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + 3(q_1^3 + 1)\dot{q}_1\dot{q}_2 \right] - \left(9q_2^2 + 12q_2 - \frac{11}{6}q_1^3 + \frac{11}{2}q_1 + 12q_1q_2 \right).$$

ОТВЕТ: $q_1^{(0)} = -1, q_2^{(0)} = 0; \quad \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 27.$

$$2.1.19. L = q_1(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \left(\frac{11}{3}q_1^3 + 9q_2^2 + 12q_1q_2 + \frac{5}{4}q_1 \right).$$

ОТВЕТ: $q_1^{(0)} = 1/2, q_2^{(0)} = -1/3; \quad \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 27.$

$$2.1.20. L = 2q_1\dot{q}_1^2 + 6q_2\dot{q}_2^2 + (q_1 - 3q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 - \left(2q_1^3 - 2q_1q_2 + 3q_2^2 - \frac{5}{24}q_1 \right).$$

ОТВЕТ: $q_1^{(0)} = 1/4, q_2^{(0)} = 1/12; \quad \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 7.$

$$2.1.21. L = (q_1 + 1)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{3}q_2\dot{q}_2^2 - (q_1 - 1)\dot{q}_1\dot{q}_2 - (2q_1^3 + 3q_2^2 - 4q_1q_2 - 5q_2).$$

ОТВЕТ: $q_1^{(0)} = 1, q_2^{(0)} = 3/2; \quad \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 7.$

$$2.1.22. L = 2 \left(\frac{\dot{q}_1^2}{(q_1 - 1)^2} + (q_1 + 1)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2 \right) + \frac{7}{12}q_1^3 - 15q_2^2 + 3q_1q_2 - \frac{7}{4}q_1 + 3q_2.$$

ОТВЕТ: $q_1^{(0)} = -1, q_2^{(0)} = 0; \quad \omega_1^2 = 3, \omega_2^2 = 8.$

$$2.1.23. L = \frac{2\dot{q}_1^2}{(q_1 + 1)^2} + \frac{1}{2}q_2^2 + \frac{2(q_1 - 1)}{q_1 + 1}\dot{q}_1\dot{q}_2 - \frac{2}{3}q_1^3 - 10q_2^2 + 6q_1q_2 - 4q_1 + 14q_2.$$

ОТВЕТ: $q_1^{(0)} = 1, q_2^{(0)} = 1; \quad \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 22.$

$$2.1.24. L = \frac{\dot{q}_1^2}{4q_1} + (2q_1 - 1)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{11}{3}q_2\dot{q}_2^2 - 2q_1^3 - 11q_2^2 + 6q_1q_2 + \frac{15}{22}q_1.$$

ОТВЕТ: $q_1^{(0)} = 1/2, q_2^{(0)} = 3/22; \quad \omega_1^2 = 4, \omega_2^2 = 24.$

$$2.1.25. L = \frac{1}{6q_1} \left[\dot{q}_1^2 + (3q_1 - 1)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2 \right] - 2q_1^3 - \frac{7}{2}q_2^2 + 2q_1q_2 + \frac{5}{2}q_2.$$

ОТВЕТ: $q_1^{(0)} = 1/3, q_2^{(0)} = 1/3; \quad \omega_1^2 = 3, \omega_2^2 = 8.$

$$2.1.26. L = \left(q_1 + \frac{1}{6} \right) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 5q_1^3 - 2q_2^2 + 4q_1q_2 + \frac{1}{3}q_1.$$

Ответ: $q_1^{(0)} = 1/3, q_2^{(0)} = 1/3; \quad \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 12.$

$$2.1.27. L = \frac{1}{2} \left[\dot{q}_1^2 + (3q_1 - 1)^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (3q_1 + 1)^2 \dot{q}_2^2 \right] - \left(2q_1^3 + 20q_2^2 - 8q_1q_2 - \frac{2}{15}q_1 \right).$$

Ответ: $q_1^{(0)} = 1/3, q_2^{(0)} = 1/15; \quad \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 12.$

Задачи **2.1.28–2.1.63** предлагаются для самостоятельного решения. В них требуется найти собственные частоты малых колебаний и нормальные координаты систем, описываемых заданными функциями Лагранжа.

В задачах **2.1.28–2.1.42** функция Лагранжа уже имеет вид квадратичной формы, а в задачах **2.1.43–2.1.63** нужно сначала привести ее к надлежащему виду.

$$2.1.28. L = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - \frac{1}{2} (2x^2 - 4xy + 8y^2).$$

Ответ: $\omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 3; \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{\sqrt{2}}{4} (\Theta_1 - \Theta_2).$

В векторной форме нормальные координаты можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Theta_1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Theta_2.$$

$$2.1.29. L = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - (x^2 + 2xy + 3y^2).$$

Ответ: $\omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 4; \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{2}\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\Theta_1 + \Theta_2 \right).$

$$2.1.30. L = \frac{1}{4} \dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - \frac{1}{2} (x^2 - 4xy + 12y^2).$$

Ответ: $\omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 4; \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}} (\sqrt{2}\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\Theta_1 - \sqrt{2}\Theta_2).$

$$2.1.31. L = \frac{1}{4} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2 - \frac{1}{2} (x^2 - 2xy + 3y^2).$$

ОТВЕТ: $\omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 4; \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{2}\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}(\Theta_1 - \sqrt{2}\Theta_2).$

2.1.32. $L = \frac{1}{4}\dot{x}^2 + \frac{9}{2}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}(x^2 - 6xy + 27y^2).$

ОТВЕТ: $\omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 4; \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{2}\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{3\sqrt{3}}(\Theta_1 - \sqrt{2}\Theta_2).$

2.1.33. $L = \frac{1}{2}(2\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 3x^2 + 4xy - \frac{5}{2}y^2.$

ОТВЕТ: $\omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 7; \quad x = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}(\Theta_1 - \sqrt{2}\Theta_2).$

2.1.34. $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(11x^2 + 24xy + 18y^2).$

ОТВЕТ: $\omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 27; \quad x = \frac{1}{5}(4\Theta_1 + 3\Theta_2); \quad y = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-3\Theta_1 + 4\Theta_2).$

2.1.35. $L = 2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - 5x^2 + xy - \frac{5}{4}y^2.$

ОТВЕТ: $\omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 3; \quad x = \frac{\sqrt{2}}{4}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\Theta_1 - \Theta_2).$

2.1.36. $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2) - (x^2 + 3xy + 6y^2).$

ОТВЕТ: $\omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 5, \quad x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\Theta_1 + \Theta_2\right).$

2.1.37. $L = \frac{1}{6}\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^2 - 4xy + 16y^2\right).$

ОТВЕТ: $\omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 5; \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{4}(\Theta_1 - \sqrt{3}\Theta_2).$

2.1.38. $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(3x^2 + 4xy + 3y^2).$

ОТВЕТ: $\omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 5; \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\Theta_1 + \Theta_2).$

2.1.39. $L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{1}{9}\dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}\left(3x^2 - \frac{4}{3}xy + \frac{1}{3}y^2\right).$

Ответ: $\omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 5; \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{3}{\sqrt{2}}(\Theta_1 - \Theta_2).$

2.1.40. $L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{1}{4}\dot{y}^2\right) - \frac{3}{2}x^2 - xy - \frac{3}{8}y^2.$

Ответ: $\omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 5; \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \sqrt{2}(-\Theta_1 + \Theta_2).$

2.1.41. $L = \dot{x}^2 + \frac{1}{4}\dot{y}^2 - 3x^2 + 2xy - \frac{3}{4}y^2.$

Ответ: $\omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 5; \quad x = \frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = (\Theta_1 - \Theta_2).$

2.1.42. $L = \frac{3}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{6}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}(9x^2 + 4xy + y^2).$

Ответ: $\omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 5; \quad x = \frac{1}{\sqrt{6}}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \sqrt{\frac{3}{2}}(-\Theta_1 + \Theta_2).$

2.1.43. $L = \frac{1}{2}(x-1)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(y^2 - 12)\dot{y} + \frac{x}{2}\dot{y}^2 - \frac{x^3}{3} - 2y^2 - 4xy - 7x - 4y.$

Ответ: $x_0 = 3, y_0 = -4; \quad \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 4;$

$x = \frac{1}{\sqrt{6}}(\Theta_1 + 2\sqrt{2}\Theta_2); \quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\Theta_1 + \Theta_2).$

2.1.44. $L = x\dot{x}^2 + (y-2)\dot{y} + \frac{1}{y}\dot{y}^2 - \frac{7}{3}x^3 - 2y^2 + 4xy + 20x.$

Ответ: $x_0 = 2, y_0 = 2; \quad \omega_1^2 = 3, \omega_2^2 = 8;$

$x = \frac{1}{2\sqrt{5}}(\Theta_1 + 2\Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\Theta_1 - \Theta_2).$

2.1.45. $L = x(\dot{x}^2 + 4\dot{y}^2) - \frac{11}{3}(2x-1)\dot{y} - \frac{11}{3}x^3 - 10y^2 + 8xy + \frac{23}{20}x.$

Ответ: $x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = \frac{1}{5}; \quad \omega_1^2 = 3, \omega_2^2 = 13;$

$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Theta_1 + 2\Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Theta_1 - \frac{1}{2}\Theta_2\right).$

2.1.46. $L = (x+1)\dot{x}^2 + 2(x-1)\dot{y} + \frac{\dot{y}^2}{x+1} - \left(\frac{14}{3}x^3 + 2y^2 - 4xy - 10y\right).$

ОТВЕТ: $x_0 = 1, y_0 = \frac{7}{2}; \quad \omega_1^2 = 3, \omega_2^2 = 8;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2} \Theta_1 + \Theta_2 \right); \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}} (2\Theta_1 - \Theta_2).$$

2.1.47. $L = \left(x + \frac{1}{6} \right) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 5x^3 - 2y^2 + 4xy + \frac{1}{3}x.$

ОТВЕТ: $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{3}; \quad \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 12;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} (\Theta_1 + 2\Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}} (2\Theta_1 - \Theta_2).$$

2.1.48. $L = \frac{1}{4} \dot{x}^2 + (y - 3x) \dot{x}\dot{y} + \frac{1}{x} \dot{y}^2 - 3x^3 - 4y^2 + 6xy + 36y.$

ОТВЕТ: $x_0 = 2, y_0 = 6; \quad \omega_1^2 = 6, \omega_2^2 = 14;$

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \Theta_1 + \Theta_2 \right); \quad y = \frac{1}{2} (\sqrt{3}\Theta_1 - \Theta_2).$$

2.1.49. $L = \frac{1}{y} \dot{x}^2 + 2(y - 2) \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2 - (4x^2 + y^3 - 4xy - 16x).$

ОТВЕТ: $x_0 = 3, y_0 = 2; \quad \omega_1^2 = 4, \omega_2^2 = 10;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} (\Theta_1 + \sqrt{2}\Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\Theta_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Theta_2 \right).$$

2.1.50. $L = \frac{x}{3} \dot{x}^2 - \left(\frac{4}{3}y - x \right) \dot{x}\dot{y} + \frac{\dot{y}^2}{x-1} - \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}y^2 - 4xy + \frac{3}{4}y \right).$

ОТВЕТ: $x_0 = 3, y_0 = \frac{9}{4}; \quad \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 7;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\Theta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Theta_2 \right); \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}} (\Theta_1 - \sqrt{2}\Theta_2).$$

2.1.51. $L = \frac{1}{2} \left[\dot{x}^2 + (3x - 1) \dot{x}\dot{y} + (3x + 1)^2 \dot{y}^2 \right] - 2x^3 - 20y^2 + 8xy + \frac{2}{15}x.$

ОТВЕТ: $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{15}; \quad \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 12;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} (2\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}\Theta_1 - \Theta_2 \right).$$

$$2.1.52. L = x\dot{x}^2 + (y+1)\dot{x}\dot{y} + \frac{x+1}{(y-1)^2}\dot{y}^2 - 8x^2 + y^3 + 4xy - 7y + 20x.$$

ОТВЕТ: $x_0 = 1, y_0 = -1; \omega_1^2 = 4, \omega_2^2 = 10;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Theta_1 + \Theta_2\right); \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\Theta_1 - \Theta_2).$$

$$2.1.53. L = y\dot{x}^2 + (x-2y)\dot{x}\dot{y} + y\dot{y}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}x^3 + 7y^2 - 4xy - 5x - 3y\right).$$

ОТВЕТ: $x_0 = 1, y_0 = \frac{1}{2}; \omega_1^2 = 5, \omega_2^2 = 9;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 - \Theta_2).$$

$$2.1.54. L = \frac{1}{2}(x+2y)\dot{x}^2 + 2(x-y)\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{x+1}\dot{y}^2 - 6x^3 - 4y^2 + 6xy + 12x + 2y.$$

ОТВЕТ: $x_0 = 1, y_0 = 1; \omega_1^2 = 6, \omega_2^2 = 14;$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\Theta_1 + \Theta_2\right); \quad y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\Theta_1 - \Theta_2).$$

$$2.1.55. L = x\dot{x}^2 + (x-2y)\dot{x}\dot{y} + y\dot{y}^2 - 2x^3 - 4y^2 + 4xy + 4x.$$

ОТВЕТ: $x_0 = 1, y_0 = \frac{1}{2}; \omega_1^2 = 4, \omega_2^2 = 10;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\Theta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Theta_2\right); \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}(\Theta_1 - \sqrt{2}\Theta_2).$$

$$2.1.56. L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - 3(y+1)\dot{x}\dot{y} + x\dot{y}^2) - (x^3 + 3y^3 - 3xy - 6x + 9y).$$

ОТВЕТ: $x_0 = 1, y_0 = -1; \omega_1^2 = 3, \omega_2^2 = 9;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 - \Theta_2).$$

$$2.1.57. L = \frac{5}{1-x}\dot{x}^2 + (x+1)\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + 5x^3 - 5y^3 + 5xy - \frac{25}{2}x.$$

ОТВЕТ: $x_0 = -1, y_0 = -\frac{1}{2}; \omega_1^2 = 5, \omega_2^2 = 11;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\Theta_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \Theta_2 \right); \quad y = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\Theta_1 - \sqrt{5} \Theta_2 \right).$$

2.1.58. $L = \frac{1}{2} [\dot{x}^2 - 2(x+1)\dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2] + \frac{7}{6}x^3 - \frac{7}{2}y^2 + 2xy - \frac{31}{2}y + \frac{3}{2}x.$

ОТВЕТ: $x_0 = -1, y_0 = -\frac{5}{2}; \quad \omega_1^2 = 5, \omega_2^2 = 9;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Theta_1 - \Theta_2).$$

2.1.59. $L = y\dot{x}^2 + (2y - 3x)\dot{x}\dot{y} + 3x\dot{y}^2 - \left(3x^3 + 8y^2 - 4xy + x - \frac{20}{3}y \right).$

ОТВЕТ: $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{2}; \quad \omega_1^2 = 4, \omega_2^2 = 10;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{2}\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Theta_1 - \Theta_2 \right).$$

2.1.60. $L = \frac{1}{2}(x+2y)\dot{x}^2 + (x-3y)\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{2}y\dot{y}^2 -$
 $\frac{5}{3}x^3 - 5y^2 + 5xy + 40x - 5y.$

ОТВЕТ: $x_0 = 3, y_0 = 1; \quad \omega_1^2 = 5, \omega_2^2 = 11;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\Theta_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \Theta_2 \right); \quad y = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\Theta_1 - \sqrt{5} \Theta_2 \right).$$

2.1.61. $L = \frac{1}{2}y\dot{x}^2 + 3(y-1)\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{2}(2x+1)\dot{y}^2 -$
 $\left(\frac{x^3}{2} + 25y^2 - 5xy - x - 40y \right).$

ОТВЕТ: $x_0 = 2, y_0 = 1; \quad \omega_1^2 = 5, \omega_2^2 = 11;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}} (\sqrt{5}\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\Theta_1 - \Theta_2 \right).$$

2.1.62. $L = \frac{3}{2}x\dot{x}^2 + 2(3x-y)\dot{x}\dot{y} + \frac{\dot{y}^2}{y+1} - 3x^3 - 3y^2 + 3xy - 2x + 5y.$

ОТВЕТ: $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = 1; \quad \omega_1^2 = 3, \omega_2^2 = 9;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 - \Theta_2).$$

$$2.1.63. \quad L = \frac{1}{2x}\dot{x}^2 + 3(5x + y)\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - 25x^2 + y^3 + 5xy + 15x - 4y.$$

Ответ: $x_0 = \frac{1}{5}, y_0 = -1; \quad \omega_1^2 = 5, \omega_2^2 = 11;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\Theta_1 + \Theta_2\right); \quad y = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{5}\Theta_1 - \Theta_2).$$

2.1.5. Задачи для домашних заданий к разделу 2.1

2.1.64. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид:

а) $L = \dot{q}^2 + \dot{Q}^2 - 2q^2 - 4Q^2;$

б) $L = 2\dot{q}^2 + \dot{Q}^2 - 4q^2 - 4Q^2;$

в) $L = \dot{q}^2 + \dot{Q}^2 - 2q^2 - 8Q^2.$

Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY , так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2.1.65. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид: $L = \dot{q}^2 + \dot{Q}^2 - 2q^2 - 4Q^2 + \alpha qQ$. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите частоты малых колебаний системы. Найдите нормальные координаты для системы.

2.1.66. На пружине жесткостью k висит грузик массой m . К нему на пружине жесткостью $2k$ прикреплен еще один грузик, масса которого $3m$. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

2.1.67. На нити длиной l висит грузик массой m . К нему на нити длиной $4l$ прикреплен еще один грузик, масса которого $2m$. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

2.1.68. Два грузика массами m и αm могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости k , второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости $2k$. Кроме того, оба грузика соединены третьей

пружиной жесткости $3k$. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

2.1.69. Решите предыдущую задачу, если массы грузиков одинаковы и равны m , а пружина, соединяющая грузики, имеет жесткость αk .

2.2. ДИНАМИКА ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассмотрим обобщение полученных выше результатов на случай линейных систем со многими степенями свободы.

Пусть потенциальная энергия $U(q_1, q_2, \dots, q_s)$ системы с s степенями свободы имеет минимум в точке $q_i = q_{i0}, i = 1, 2, \dots, s$. Найдем приближенный вид функции Лагранжа, считая малыми величинами отклонения от положения равновесия $x_i = q_i - q_{i0}$ и обобщенные скорости $\dot{x}_i = \dot{q}_i$. Разлагая потенциальную энергию в ряд Тейлора по малым отклонениям $x_i = q_i - q_{i0}$ с точностью до членов второго порядка

$$U \approx U_0 + \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_{q_0} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k} \right)_{q_0} x_i x_k,$$

получим выражение для потенциальной энергии в виде квадратичной формы:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s \frac{k_{ik} x_i x_k}{2}; \quad k_{ik} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k} \right)_{q_0}. \quad (2.108)$$

Потенциальная энергия в (2.108) отсчитывается от своего минимального значения U_0 и все первые производные $\frac{\partial U}{\partial q_i}$ в точке минимума

$q_i = q_{i0}, i = 1, 2, \dots, s$ равны нулю: $\left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_{q_0} = 0$. Поскольку потенциальная энергия является скалярной величиной, а произведение $x_i x_k$ – симметричный тензор второго ранга, то коэффициенты k_{ik} в (2.108) также образуют симметричный тензор второго ранга с $k_{ik} = k_{ki}$. Чтобы равновесие было устойчивым, должно быть выполнено неравенство

$$U(x) - U(0) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s \frac{k_{ik} x_i x_k}{2} > 0,$$

т. е. квадратичная форма (2.108) должна быть положительно определенной. Условие положительной определенности обобщает приведенное выше условие для системы с двумя степенями свободы. Запишем коэффициенты k_{ik} в виде квадратной матрицы:

$$k_{ik} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2s} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \cdots & k_{3s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{s1} & k_{s2} & k_{s3} & \cdots & k_{ss} \end{pmatrix}. \quad (2.109)$$

Методом индукции можно заключить, что все определители, у которых главная диагональ совпадает с главной диагональю матрицы (2.109)

$$\text{Det}(k_{ik}) = \begin{vmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{i1} & \cdots & k_{ii} \end{vmatrix} > 0; \quad i, k = 1, 2, \dots, s,$$

должны быть положительными, чтобы квадратичная форма

$$\sum_{i,k=1}^s k_{ik} x_i x_k$$

при всех x_i, x_k оставалась больше нуля. Доказательство этого утверждения имеется в любом курсе высшей алгебры (см., например, [16]).

Оставляя в общем выражении для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$$

только слагаемые, квадратичные по обобщенным координатам и скоростям, полагаем в коэффициентах $a_{ik}(q)$, что $q_i = q_{i0}$, и вводим обозначения

$$x_j = A_j e^{i\omega t}; \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (2.114)$$

Здесь A_j – постоянные, но пока не определенные коэффициенты. От решений (2.114), конечно, нужно взять действительную часть. После подстановки решения (2.114) в уравнения (2.113) получаем

$$\sum_{k=1}^s (k_{ik} - \omega^2 m_{ik}) A_k = 0 \quad (2.115)$$

или

$$\begin{pmatrix} \omega^2 m_{11} - k_{11} & \omega^2 m_{12} - k_{12} & \dots & \omega^2 m_{1s} - k_{1s} \\ \omega^2 m_{21} - k_{21} & \omega^2 m_{22} - k_{22} & \dots & \omega^2 m_{2s} - k_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega^2 m_{s1} - k_{s1} & \omega^2 m_{s2} - k_{s2} & \dots & \omega^2 m_{ss} - k_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix} = 0. \quad (2.116)$$

Эта система линейных однородных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами имеет нетривиальные (отличные от нуля) решения, если равен нулю ее определитель равен нулю:

$$Det(k_{ik} - \omega^2 m_{ik}) = 0. \quad (2.117)$$

Уравнение (2.117) представляет собой уравнение степени s относительно ω^2 , называется *характеристическим* и служит для определения *собственных частот* ω . Легко доказать (см. [16]), что в общем случае положительной определенности кинетической и потенциальной энергии все величины ω_i^2 , $i = 1, 2, \dots, s$ положительны. Совокупность всех возможных значений частот образует *спектр собственных частот*.

Подставим найденные значения частот в систему уравнений (2.115). Каждой частоте ω_i^2 будет соответствовать определенное отношение искомых величин $A_j^{(i)}/A_1^{(i)}$; $i = 1, 2, \dots, s$; $j = 2, \dots, s$. Здесь индекс i соответствует номеру решения уравнения для частот (2.117), а индекс j – номеру коэффициента для данного решения ω_i^2 . Эти отношения равны отношениям алгебраических дополнений элементов первой строки определителя (2.117).

Как и в рассмотренном выше случае системы с двумя степенями свободы для произвольного числа степеней свободы s имеется s частных

решений (нормальных мод), а общее решение есть сумма всех частных решений

$$x_j = \sum_{k=1}^s \zeta_{jk} A_j^{(k)} e^{i\omega_k t}, \quad \zeta_{1k} = 1; \quad j, k = 1, 2, \dots, s. \quad (2.118)$$

Вводим обозначения $\theta_k = A_1^{(k)} e^{i\omega_k t}$; $k = 1, 2, \dots, s$ для величин θ_k , удовлетворяющих уравнениям

$$\ddot{\theta}_k + \omega_k^2 \theta_k = 0; \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad (2.119)$$

которые отвечают функциям Лагранжа L_k

$$L_k = \frac{m_k}{2} (\dot{\theta}_k^2 - \omega_k^2 \theta_k^2); \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (2.120)$$

и полной функции Лагранжа

$$L = \sum_{k=1}^s L_k = \sum_{k=1}^s \frac{m_k}{2} (\dot{\theta}_k^2 - \omega_k^2 \theta_k^2). \quad (2.121)$$

Здесь m_k – положительные постоянные. Таким образом, в переменных θ_k задача о связанных колебаниях со многими степенями свободы свелась к задаче о независимых колебаниях эффективных линейных гармонических осцилляторов, число которых равно числу степеней свободы исходной колебательной системы. Каждый гармонический осциллятор описывается соответствующей координатой θ_k , которая называется *нормальной координатой*. Следовательно, каждая обобщенная координата представляется как сумма изменяющихся по закону гармонических колебаний нормальных координат, независимых друг от друга. Обычно частоты колебаний несоизмеримы. Тогда сумма выражений, в которые входят несоизмеримые частоты, – это непериодическая функция времени.

В общем случае при произвольных начальных условиях возбуждаются все нормальные моды. Они независимы друг от друга, и энергия каждой моды сохраняется, образуя систему s независимых интегралов движения системы. Учет ангармонизмов (нелинейности) приводит к взаимодействию нормальных мод и перекачиванию энергии между ними. Более того, в нелинейном случае, вообще говоря, не существует ортонормированного базиса

функций, аналогичных нормальным колебаниям, и отсутствует принцип суперпозиции.

Как уже говорилось в разделе 2.1.2, обычно нормальные координаты выбирают таким образом, чтобы коэффициенты при квадратах скоростей в функции Лагранжа были равны 1/2. Для этого достаточно определить нормальные координаты равенствами

$$\Theta_k = \sqrt{m_k} \theta_k. \quad (2.122)$$

Тогда функция Лагранжа (2.121) примет вид:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s (\dot{\Theta}_i^2 - \omega_i^2 \Theta_i^2). \quad (2.123)$$

Из функции Лагранжа (2.121) или (2.123) сразу видно, что выражение для полной энергии в нормальных координатах приводится к форме

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s (\dot{\Theta}_k^2 + \omega_k^2 \Theta_k^2), \quad (2.124)$$

поскольку $L = T - U$, а $E = T + U$. (Заметим, что это справедливо только при выбранном нами виде лагранжиана). Таким образом, энергии отдельных гармонических осцилляторов, представляемых координатами θ_j , заменяют энергию связанных колебаний (2.112) в координатах x_j .

Благодаря нормальным координатам рассмотрение задач о колебаниях значительно упрощается, так как линейный гармонический осциллятор является во многих отношениях одной из простейших механических систем.

Приведение к нормальным координатам необходимо при изучении колебаний многоатомных молекул, кристаллов и в теории поля. Кроме того, нормальные координаты полезны в технических применениях теории колебаний.

Рассмотрим случай *кратных корней* характеристического уравнения.

Введение нормальных координат основано на приведении положительно определенных квадратичных форм кинетической и потенциальной энергии к сумме квадратов. Проиллюстрируем возможность этого, используя геометрические представления. Положительно определенная квадратичная форма в n -мерном пространстве обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_n (или обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$) представляет собой поверхность

второго порядка, а именно, *эллипсоид* и потому поворотом координатных осей может быть приведена к осям симметрии, т. е. представлена в виде суммы квадратов. Поворот является линейным преобразованием координат q_1, q_2, \dots, q_n (при этом одновременно преобразуются и переменные $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$). В случае задачи теории малых колебаний одновременно к сумме квадратов приводятся две существенно положительные квадратичные формы T и U . Приведя линейным преобразованием (поворотом осей) форму T к сумме квадратов, мы, вообще говоря, не получим форму U в виде суммы квадратов; однако можно совершить *масштабное* преобразование координат, при котором *эллипсоид*, соответствующий форме T , перейдет в *сферу*. Повороты координатных осей после этого оставят сферу неизменной, а эллипсоид второй формы приведут к осям симметрии, которые будут осями симметрии сферы для первой квадратичной формы. Таким образом, обе формы T и U будут одновременно приведены к сумме квадратов, и функция Лагранжа примет вид (2.121), т. е. распадется на сумму выражений, каждое из которых (см. формулу (2.120)) соответствует одномерному колебанию с одной из частот ω_k . Наличие кратных корней означает одинаковость некоторых полуосей эллипсоида, что, очевидно, никак не препятствует осуществлению описанного приведения двух форм к сумме квадратов.

Это преобразование в иных терминах эквивалентно приведению матрицы к диагональной форме, совершаемому последовательными этапами («поворотами»): сначала обращение в нуль всех элементов 1-й строки и 1-го столбца, кроме находящегося на главной диагонали, затем то же для 2-й строки и 2-го столбца, и т. д. Осуществление этой операции не зависит от наличия кратных корней характеристического уравнения. Для иллюстрации этих положений рекомендуем рассмотреть задачу 2.12 из данного пособия, задачи 6.18–6.21, 6.28 и 6.29 из Коткина, Сербо [15].

2.2.1. Дополнения разделу 2.2

2.2.1. Исследовать малые колебания частицы массы m , на которую действует сила $\vec{F} = (-k_1x, -k_2y, -k_3z)$. Это так называемый пространственный осциллятор.

Решение. Если на частицу массы m , находящуюся в точке с координатами (x, y, z) , действует сила $\vec{F} = (-k_1x, -k_2y, -k_3z)$, ее потенциальная энергия

$$U = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2), \quad (2.125)$$

а функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2). \quad (2.126)$$

Движение пространственного осциллятора представляет собой колебания частицы вдоль координатных осей с частотами

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}; \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}. \quad (2.127)$$

Нормальные координаты определяются равенствами

$$\theta_1 = \sqrt{m}x; \quad \theta_2 = \sqrt{m}y; \quad \theta_3 = \sqrt{m}z. \quad (2.128)$$

Кинетическая энергия в нормальных координатах

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) \quad (2.129)$$

не зависит от выбора направлений координатных осей, а потенциальная энергия

$$U = \frac{1}{2}(\omega_1^2\theta_1^2 + \omega_2^2\theta_2^2 + \omega_3^2\theta_3^2) \quad (2.130)$$

представляет собой уравнение эллипсоида, приведенного к главным осям. Если все частоты различны, направления главных осей определяются однозначно. Если же среди корней характеристического уравнения имеются кратные, то каждой кратной (иногда говорят «вырожденной») частоте отвечает столько нормальных координат, какова степень кратности, но выбор этих нормальных координат неоднозначен.

Например, при $\omega_1^2 = \omega_2^2$ эллипсоид (2.130) является эллипсоидом вращения, и оси θ_1 и θ_2 , лежащие в плоскости, перпендикулярной оси θ_3 , могут быть одновременно повернуты на произвольный угол.

Если все частоты совпадают и эллипсоид превращается в сферу, то произвол в выборе направлений нормальных координат увеличивается, поскольку направление оси θ_3 становится также произвольным.

Движение пространственного осциллятора для случая $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_3^2$ подробно исследовано в [1, § 23, задача № 3]

2.2.2. Найти собственные частоты колебаний, если функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{1}{2} \left(\dot{x}^2 + \frac{2}{5} \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) - \frac{1}{2} \left(x^2 + y^2 + \frac{2}{5} yz + z^2 \right).$$

Решение. Составляем уравнения движения:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{1}{5} \ddot{y} + x = 0; \\ \frac{1}{5} \ddot{x} + \ddot{y} + y + \frac{1}{5} z = 0; \\ \ddot{z} + \frac{1}{5} y + z = 0. \end{cases} \quad (2.131)$$

Подставляем частные решения $x = A_1 e^{i\omega t}$; $y = A_2 e^{i\omega t}$; $z = A_3 e^{i\omega t}$ в (2.131), получаем

$$\begin{cases} (1 - \omega^2) A_1 - \frac{1}{5} \omega^2 A_2 = 0; \\ -\frac{1}{5} \omega^2 A_1 + (1 - \omega^2) A_2 + \frac{1}{5} A_3 = 0; \\ \frac{1}{5} A_2 + (1 - \omega^2) A_3 = 0. \end{cases} \quad (2.132)$$

Чтобы уравнения (2.132) имели отличные от нуля решения, необходимо:

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega^2 & -\frac{1}{5} \omega^2 & 0 \\ -\frac{1}{5} \omega^2 & 1 - \omega^2 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 - \omega^2 \end{vmatrix} = (1 - \omega^2) \left(\frac{24}{25} \omega^4 - 2\omega^2 + \frac{24}{25} \right) = 0,$$

откуда: $\omega_1^2 = 1$; $\omega_2^2 = \frac{4}{3}$; $\omega_3^2 = \frac{3}{4}$.

2.2.2. Задача к разделу 2.2

2.2.3. Найти собственные частоты колебаний, если функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + 2yz).$$

Ответ: $\omega_1^2 = 1$; $\omega_2^2 = \frac{1}{6}(9 + \sqrt{57})$; $\omega_3^2 = \frac{1}{6}(9 - \sqrt{57})$.

2.2.3. Задачи для домашних заданий к разделу 2.2

2.2.4. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами m , $2m$ и $3m$ могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружин, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, $6k$, $3k$ и $2k$. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы m_1, m_2, m_3 грузиков и жесткости k_1, k_2, k_3 пружин, чтобы в системе наступило вырождение частот.

2.2.5. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l -ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)} \cos(\omega_l t + \phi_l)$, вектора $\vec{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \dots, A_N^{(l)})$ и $\vec{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \dots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s , перпендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij} , т. е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = 0$.

Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m , m , $2m$ и m , которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружин, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т. д. равны, соответственно, k , $3k$, $3k$ и k . Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

2.2.6. Молекулу можно рассматривать как совокупность точечных масс (атомов), соединенных пружинками (связями). Но в отличие от рассмотренных выше примеров, колебания молекул могут быть двух типов – продольные и изгибные, обусловленные изменениями углов, определяющих геометрию молекулы. Рассмотрим трехатомную молекулу, состоящую из атомов массами $3m$, m и $2m$, находящимися на одной прямой так, что расстояние между первыми двумя равно $3l$, а между вторым и третьим l . Найдите все колебания молекулы. Колебания нулевой частоты нас не интересуют. Как исключить их из рассмотрения до этапа нахождения собственных частот системы?

2.2.7. Малые изменения параметров системы приводят чаще всего к малым изменениям собственных частот и нормальных координат. Кроме этого «слабого» эффекта искажения системы могут приводить к снятию вырождения. Рассмотрим систему из задачи 1. Пусть масса первой частицы увеличена на εm , $\varepsilon \ll 1$, а жесткость второй пружинки уменьшена на εk . Найдите поправку к собственным частотам системы. Получите нормальные колебания системы. Близки ли они к найденным в задаче 1?

2.3. ДИНАМИКА ЛИНЕЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ЦЕПОЧЕК

Частным, но очень важным случаем рассмотренных выше линейных систем с многими степенями свободы являются одномерные цепочки взаимодействующих частиц. Их можно рассматривать как реальные физические объекты (полимерные соединения или цепочки атомов на поверхности кристалла) или как модель трехмерного кристалла в том случае, когда возмущения в системе зависят лишь от одной пространственной координаты. Подобные модели рассматриваются как простейшие, дающие возможность на качественном уровне описать многие динамические свойства упругих и магнитоупорядоченных сред.

2.3.1. Однородные линейные цепочки

Рассмотрим простейшие случаи одномерных цепочек частиц, когда допускаются смещения атомов только в одном направлении: скалярная модель. Она изображена на рис. 2.18.

На рис. 2.18а приведен вариант этой модели для так называемой *цепочки со свободными границами*, на рис. 2.18б – *цепочки с фиксированными границами*, а на рис. 2.18д – *цепочки с периодическими граничными условиями* (так называемыми условиями Борна – Кармана). Первые модели сложнее, поскольку в них граничные частицы находятся в других условиях,

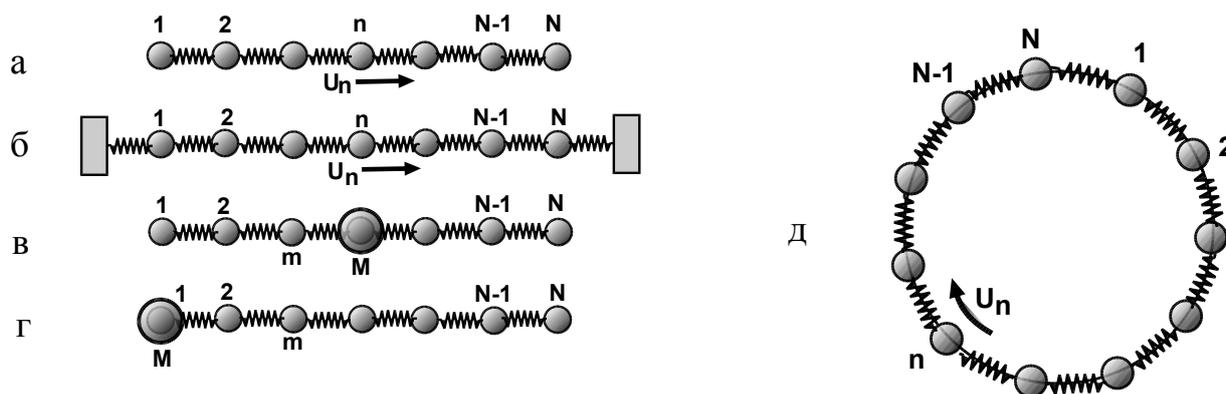


Рис. 2.18

чем внутренние (у них есть только один «сосед» или второй сосед фиксирован). Вторая модель более симметричная – в ней все частицы находятся в одинаковых условиях. Это, как будет показано ниже, приводит к вырождению частот собственных колебаний. Формально цепочку с периодическими граничными условиями можно представить как бесконечную цепочку с условием $u_{N+1} = u_1$. Эти модели обычно используются для качественного анализа динамики кристаллической решетки. Модели, изображенные на рис. 2.18в, 2.18г описывают колебания дефектных атомов в кристалле и динамику поверхностных колебаний.

Для описания динамики цепочек адатомов на поверхности кристаллов (рис. 2.19а) обычно используют модифицированную одномерную модель, в которой частицы находятся во внешнем потенциале подложки. Эта модель ближе к системе двух осцилляторов, рассмотренных в предыдущем разделе, и изображена на рис. 2.19б.

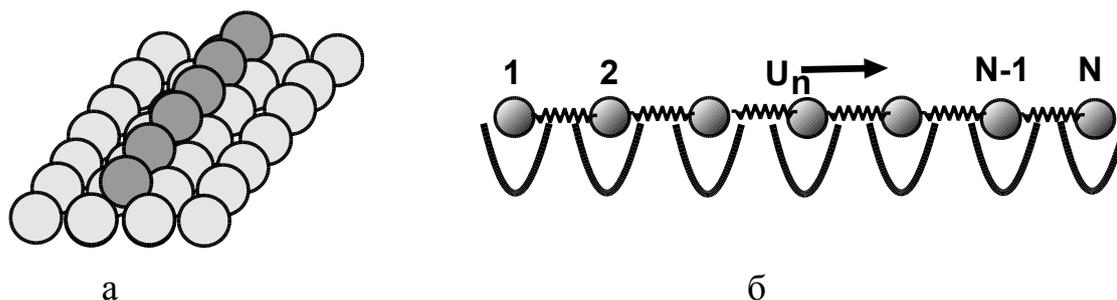


Рис. 2.19

На рисунке приведен случай цепочки со свободными концами, но его обобщение на систему с фиксированными границами и циклическими граничными условиями очевиден.

Рассмотрим вначале упругую цепочку во внешнем поле в линейном пределе, считая внешний потенциал гармоническим и взаимодействие частиц – линейным. Полная энергия такой системы в случае свободных границ имеет вид:

$$E = \sum_{n=1}^N \left(\frac{m}{2} \dot{u}_n^2 + \frac{k}{2} u_n^2 \right) + \sum_{n=2}^N \frac{\varepsilon}{2} (u_n - u_{n-1})^2, \quad (2.133)$$

где константы k и ε характеризуют внешний потенциал и межчастичное взаимодействие. (Для простоты считаем, что взаимодействуют только ближайшие соседи).

Соответствующая функция Лагранжа выглядит так:

$$L = \sum_{n=1}^N \left(\frac{m}{2} \dot{u}_n^2 - \frac{k}{2} u_n^2 \right) - \sum_{n=2}^N \frac{\varepsilon}{2} (u_n - u_{n-1})^2,$$

а уравнения движения:

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_n + k u_n + \varepsilon(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) &= 0; \\ m\ddot{u}_1 + k u_1 + \varepsilon(u_1 - u_2) &= 0; \\ m\ddot{u}_N + k u_N + \varepsilon(u_N - u_{N-1}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Ищем решение в виде $u_n = a_n \sin(\omega t)$ и получаем характеристическое уравнение в виде детерминанта следующей матрицы:

$$\begin{vmatrix} (\omega^2 - \omega_0^2 - \delta) & \delta & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - \delta) \end{vmatrix} = 0,$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ и $\delta = \varepsilon/m$. В этой матрице отличны от нуля только элементы на главной диагонали и на двух линиях, соседних с главной диагональю. Такая матрица называется якобиевой матрицей, и она имеет большое значение в теории колебаний кристаллической решетки.

В случае фиксированных границ матрица приведенного детерминанта становится более симметричной и содержит все одинаковые члены на главной диагонали:

$$\left| \begin{array}{cccccccc} (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) \end{array} \right| = 0.$$

Наконец, при циклических граничных условиях появляются дополнительные элементы в углах матрицы:

$$\left| \begin{array}{cccccccc} (\omega^2 - \omega_0^2 - \delta) & \delta & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \delta \\ \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta \\ \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - \delta) \end{array} \right| = 0.$$

Очевидно, что при достаточно большой длине цепочки краевые эффекты, связанные с теми или иными граничными условиями, становятся несущественными. Поэтому, как более простой, рассмотрим последний случай периодических граничных условий подробнее. Уравнения для всех частиц при этом идентичны и имеют вид:

$$m\ddot{u}_n + k u_n + \varepsilon(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) = 0. \tag{2.135}$$

Амплитуды решений вида $u_n = a_n \sin(\omega t)$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta)a_n + \delta(a_{n+1} + a_{n-1}) &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, N; \\ a_{N+1} &= a_1, \end{aligned} \tag{2.136}$$

решение которой естественно искать в виде $a_n = a \cos(\kappa n b)$, где b – постоянная решетки (расстояние между частицами). Подстановка в (2.136) дает соотношение

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 4\delta \sin^2(\kappa b / 2), \tag{2.137}$$

которое называется *законом дисперсии линейных волн*. Фигурирующий в нем параметр k называют *волновым числом*. Оно принимает значения, которые определяются из периодических граничных условий $a_{N+1} = a_1$, т. е. $\cos(kbN + kb) = \cos(kb)$. Отсюда следует, что $kbN = 2\pi s$ с целочисленными значениями параметра s . Однако поскольку из закона дисперсии (2.137) следует, что все различные значения частот лежат в интервале $0 \leq kb \leq \pi$, то $s = 0, 1, 2, \dots, N/2$. (N – четное)

В задаче 2.3.1 показано, что в замкнутой цепочке из трех частиц нижняя частота, соответствующая синфазным колебаниям, не вырождена, а следующая частота вырождена дважды.

В задаче 2.3.2 для четырех частиц показано, что в этом случае моды синфазных колебаний (нижняя) и противофазных колебаний (верхняя) не вырождены, а частота «промежуточных» мод дважды вырождена. Аналогично, в замкнутой цепочке N частиц спектр зависит от четности числа N . При четном $N = 2p$ нижняя синфазная мода (...↑↑↑↑...) отвечает невырожденной частоте $\omega = \omega_0$, а верхняя противофазная мода (...↑↓↑↓↑...) – не вырожденной максимальной частоте спектр $\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 + 4\delta}$. Все остальные $N/2 - 1$ частот дважды вырождены. В случае нечетного N верхняя противофазная мода (...↑↓↑↓↑...) отсутствует, а остальные, кроме синфазной, дважды вырождены. Для вырожденных состояний каждому значению волнового числа k соответствуют два ортогональных решения $a_n = a \cos(kbn)$ и $a_n = a \sin(kbn)$. Этому обстоятельству можно придать следующую интерпретацию. Если рассматривать не решения типа стоячей волны $x_n = a \sin(\omega t) \cos(kbn)$, а решения в виде бегущих волн $x_n = a \sin(kbn - \omega t)$ и $x_n = a \sin(kbn + \omega t)$, то двум модам с одинаковыми частотами соответствуют две волны, бегущие в замкнутом кольце в противоположных направлениях.

Частоты спектра линейных колебаний изображены в левой части рис. 2.15. Удобно «растянуть» этот рисунок, изображая вдоль оси абсцисс значения волнового числа или целочисленные значения параметра s . При этом мы получаем стандартный график закона дисперсии как зависимости частоты от волнового числа.

С ростом числа частиц в цепочке N растет число значений волнового числа $0 \leq kb \leq N/2$, но минимальная и максимальная частоты не меняются. Спектр становится все более «густым» и в пределе $N \rightarrow \infty$ – сплошным. Поскольку имеется минимальная частота спектра и щель запрещенных частот $0 \leq \omega \leq \omega_0$, то рассмотренный спектр называется *щелевым* или *активационным*.

Из рис. 2.20 видно, что частоты нормальных мод сгущаются при приближении к краям спектра: минимальной частоте ω_0 и максимальной

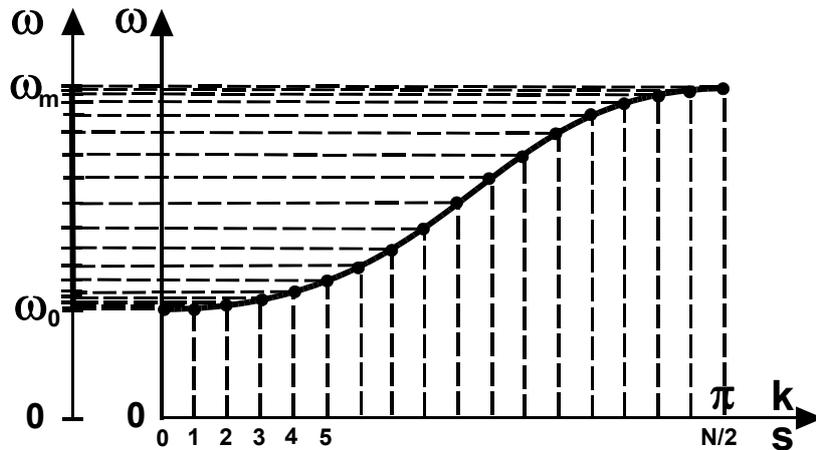


Рис 2.20

частоте ω_m . Для характеристики распределения собственных частот вводится величина *плотности состояний*, т. е. числа колебаний Δn в интервале частот $\Delta\omega$. В пределе больших N и сплошного спектра эта величина $g(\omega)$ вводится следующим образом:

$$dn = Ng(\omega)d\omega. \tag{2.138}$$

Очевидно, что $g(\omega) = \frac{1}{N} \sum_s \delta(\omega - \omega(\kappa_s))$, где $\omega(\kappa)$ – закон дисперсии. Учитывая, что $\kappa = 2\pi s / N$, переходя от суммирования по s к интегрированию по κ и воспользовавшись свойствами δ -функции, получаем

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|d\omega(\kappa) / d\kappa|}. \tag{2.139}$$

Здесь берется модуль величины $d\omega/d\kappa$, поскольку плотность состояний по определению – величина положительная. Сама величина $d\omega/d\kappa$, называется *групповой скоростью*. Из формулы (2.137) видно, что на краях спектра групповая скорость обращается в ноль (действительно, синфазной и антифазной модам отвечают стоячие колебания), а плотность состояний имеет особенности (см. рис. 2.21):

$$g(\omega \rightarrow \omega_0) \rightarrow \frac{\sqrt{\omega_0}}{2\pi\sqrt{2\delta}} \frac{1}{\sqrt{\omega - \omega_0}}, \quad g(\omega \rightarrow \omega_m) \rightarrow \frac{\sqrt{\omega_0}}{2\pi\sqrt{2\delta}} \frac{1}{\sqrt{\omega_m - \omega}}.$$

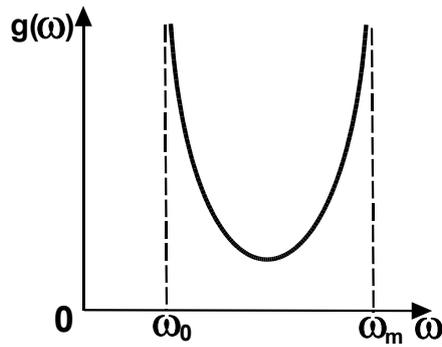


Рис. 2.21

Иногда рассматривают распределение плотности различных состояний не по частотам, а по квадратам частот $\varepsilon = \omega^2$. Эта величина вводится аналогично (2.139)

$$G(\varepsilon) = 1 / \left(2\pi \left| d\omega^2(\kappa) / d\kappa \right| \right) \quad (2.140)$$

и также имеет особенности на краях спектра. Указанные особенности играют важную роль в физике. При исследовании свойств низкоразмерных веществ (квазиодномерных и квазидвумерных) в экспериментах по поглощению энергии внешних полей основную роль играют именно колебания с частотами, при которых плотность состояний максимальна.

Рассмотрим теперь случай замкнутой цепочки в отсутствии внешнего потенциала, изображенный на рис. 2.13д. Он получается из разобранный выше примера в пределе $\kappa = 0$. При этом закон дисперсии (2.137) упростится:

$$\omega = 2\sqrt{\delta} \sin(kb/2). \quad (2.141)$$

При этом систематика состояний сохранится, но значению $\kappa = 0$ теперь будет отвечать нулевая частота. Эту моду обычно называют *сдвиговой модой*: поскольку внешний потенциал отсутствует, то все частицы как целое могут быть сдвинуты на произвольное расстояние. Спектр становится безщелевым. (Спектр, у которого в пределе $\kappa \rightarrow 0$ частота $\omega \rightarrow 0$, обычно называют голдстоуновским). В данном частном случае в пределе $\omega \rightarrow 0$ групповая скорость равна

$$V = \frac{d\omega}{dk} = b\sqrt{\delta} = b\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}. \quad (2.142)$$

Эта величина называется *скоростью звука* в данной системе, а спектр – *звуковым*. Заметим, что в этом пределе групповая скорость совпадает с другой характеристикой размерности скорости – *фазовой скоростью*:

$$v = \frac{\omega}{k} = b\sqrt{\delta}. \quad (2.143)$$

В отсутствии внешнего потенциала график закона дисперсии выглядит так (слева на рис. 2.22).

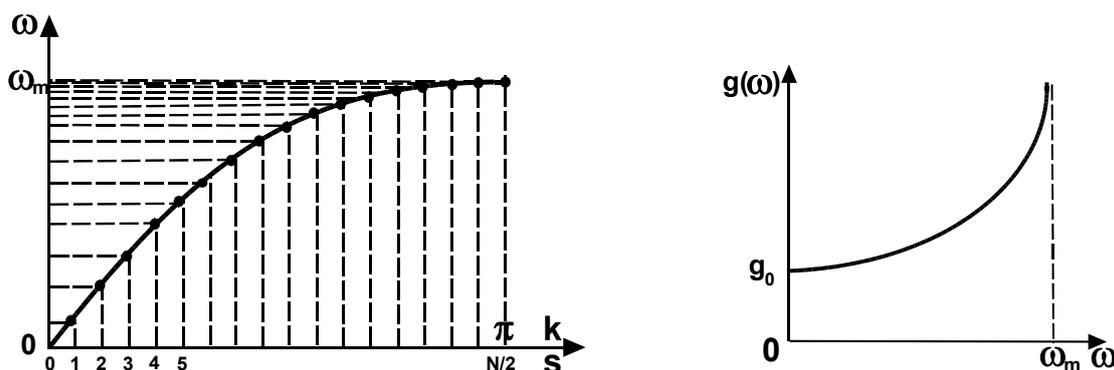


Рис. 2.22

Здесь же справа на рис. 2.22 изображена зависимость плотности состояний от частоты $g = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\omega_m^2 - \omega^2}}$, где максимальная частота спектра

$$\omega_m = 2b\sqrt{\delta}.$$

2.3.2. Линейные цепочки с дефектами. Локальные колебания

До сих пор мы рассматривали однородные цепочки, в которых все частицы были одинаковыми (с одинаковыми массами m и одинаковыми характеристиками внешнего поля k). Параметры связей между частицами \mathcal{E} также предполагались идентичными. Однако реальные кристаллы содержат дефекты различного типа. Примеры таких *точечных дефектов* приведены на рис. 2.18в, 2.18г (дефект внутри цепочки и поверхностный дефект). Наличие дефектной частицы существенно меняет классификацию собственных частот системы и приводит к возникновению так называемых *локальных частот*, имеющих важное значение для физики кристаллической решетки. Рассмотрим этот вопрос подробнее на примере цепочки с активационным спектром (с внешним потенциалом для частиц) и с периодическими граничными условиями (см. рис. 2.23).

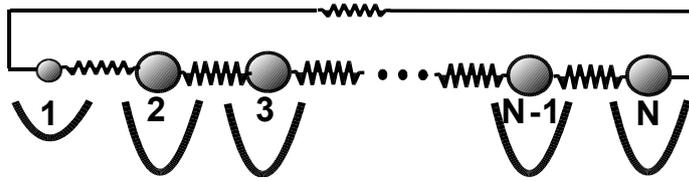


Рис. 2.23

В общем случае мы считаем, что у частицы с номером 1 изменены масса $m \rightarrow M$, внешний потенциал $k \rightarrow K$ и связи с соседними частицами $\varepsilon \rightarrow E$. При этом матрица, соответствующая характеристическому уравнению, изменится следующим образом:

$$\begin{vmatrix} (\omega^2 - \Omega_0^2 - \Delta) & \Delta & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \Delta \\ \Delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta \\ \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - \delta) \end{vmatrix} = 0,$$

Где $\Omega^2 = K/M$ и $\Delta = E/M$. Из-за дефекта исчезает трансляционная инвариантность системы (при сдвиге на одно межатомное расстояние) и вырождение частот спектра. Задача становится существенно сложнее. Поэтому рассмотрим ее приближенно в частном случае, когда меняется только масса одной частицы (случай *изотопической примеси*). При этом в системе уравнений (2.134) меняется только уравнение для частицы с номером $n = 1$:

$$M \ddot{u}_1 + k u_1 + \varepsilon (2u_1 - u_2 - u_N) = 0, \quad n = 1; \quad (2.144)$$

$$m \ddot{u}_n + k u_n + \varepsilon (2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) = 0, \quad n \neq 1. \quad (2.145)$$

Рассмотрим две первые нормальные моды с частотами вблизи нижнего края спектра с частотами ω_1 и ω_2 в случае тяжелого изотопического дефекта с $M > m$. Распределение смещений частиц в них при отсутствии дефекта изображены на рис. 2.24а, а в дефектной цепочке – на рис. 2.24б. Очевидно, что тяжелая примесь будет колебаться с малой амплитудой и в пределе $M \rightarrow \infty$ вообще остается неподвижной.

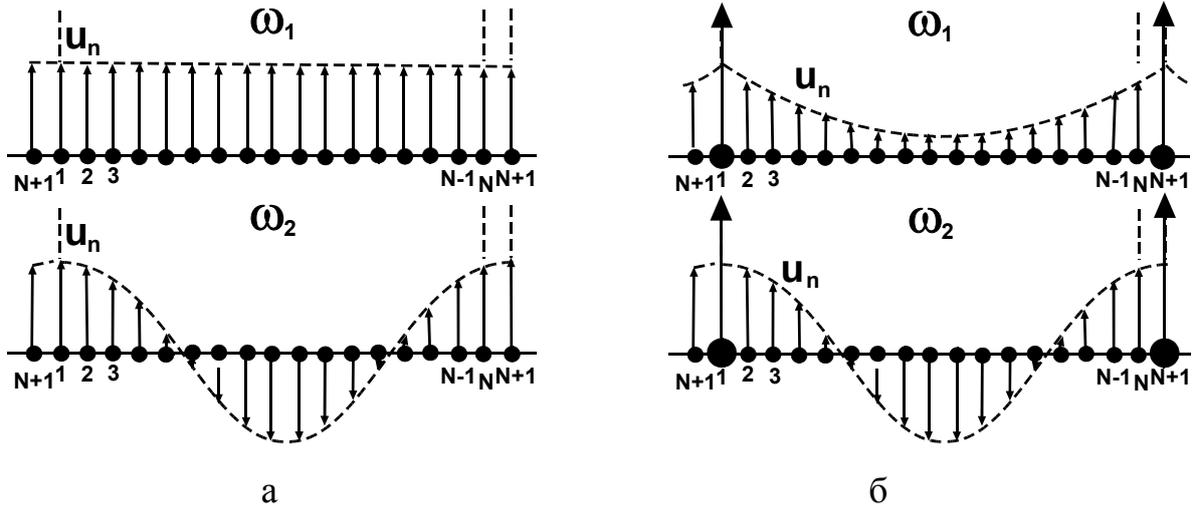


Рис. 2.24

Рассмотрим самое низкочастотное колебание, в которое трансформируются однородные колебания идеальной цепочки без дефекта. Из рис. 2.24 очевидно, что решение уравнений (2.144) для всех частиц, кроме дефектной, естественно искать в виде колебания, локализованного вблизи дефекта, т. е. в виде так называемого *локального колебания*. Оно имеет вид:

$$u_n = \sin \omega t \operatorname{ch} \left(\eta b \left(n - \frac{N}{2} - 1 \right) \right), \quad (2.146)$$

что дает связь частоты с параметром η :

$$m\omega^2 = k - 4\varepsilon \operatorname{sh}^2 \frac{\eta b}{2}. \quad (2.147)$$

Подставляя (2.146) в (2.144), получаем второе уравнение:

$$M\omega^2 = k - 4\varepsilon \operatorname{sh}^2 \frac{\eta b}{2} + 4\varepsilon \operatorname{sh} \frac{\eta b}{2} \operatorname{ch} \frac{\eta b}{2}. \quad (2.148)$$

Из сравнения этих уравнений видно, что при $M \rightarrow m$ параметр $\eta \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \omega_0 = \sqrt{k/m}$ и из (2.147) и (2.148) $\eta b \approx (M - m)\omega_0^2 / 2\varepsilon$. При этом из (2.147)

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 \left(1 - \frac{k}{4\varepsilon} \left(\frac{M - m}{m} \right)^2 \right). \quad (2.149)$$

В другом предельном случае $M \rightarrow \infty$ из (2.148) следует, что $\omega \rightarrow 0$. При этом из (2.148) имеем $\text{sh}^2(\eta b/2) \approx k/4\varepsilon$ и из (2.149) –

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 \sqrt{1 + \frac{4\varepsilon}{k} \frac{m}{M}}. \quad (2.150)$$

График зависимости частоты локального колебания от величины дефекта массы $\Delta = (M - m)/m$ приведена на рис. 2.25, где серым цветом выделена зона нормальных мод колебаний. Поскольку общее число нормальных мод равно числу степеней свободы и не меняется при изменении массы одной частицы, то в этой зоне содержится $N - 1$ состояние. (Одна нормальная мода преобразовалась в локальное колебание).

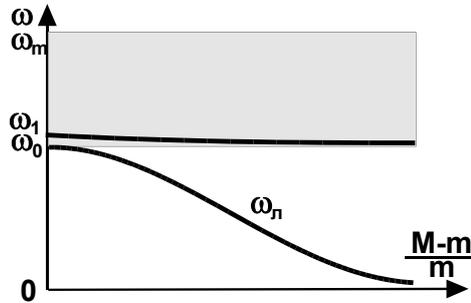


Рис. 2.25

Заметим, что из (2.148) следует, что

$$m\omega_0^2 - M\omega^2 = 4\varepsilon \text{sh} \frac{\eta b}{2} \exp\left(-\frac{\eta b}{2}\right) > 0,$$

а из (2.145) вытекает связь амплитуд примесной частицы и ее соседей:

$$a_1 = a_2 \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + (m\omega_0^2 - M\omega^2)}. \quad (2.151)$$

Следовательно, в локальном колебании у нижней границы спектра амплитуда тяжелой примеси больше амплитуды соседних частиц. (Сравните этот результат с решением задачи **2.1.1** о колебании двух связанных осцилляторов с разными массами).

Рассмотрим колебательную моду, следующую по частоте за локальным колебанием. Для нее решение уравнения (2.145) надо выбрать в виде

$$u_n = \sin \omega t \cos \left(\kappa b \left(n - \frac{N}{2} - 1 \right) \right). \quad (2.152)$$

При подстановке этого решения в (2.144) и (2.145) получаем систему уравнений:

$$m\omega^2 = k + 4\varepsilon \sin^2 \frac{\kappa b}{2}; \quad (2.153)$$

$$M\omega^2 = k + 4\varepsilon \sin^2 \frac{\kappa b}{2} - 4\varepsilon \sin \frac{\kappa b}{2} \cos \frac{\kappa b}{2} \operatorname{tg} \frac{\kappa b N}{2}. \quad (2.154)$$

В случае однородной цепочки параметр κ принимал значения $\kappa b = 2\pi s/N$. В цепочке с примесью первой после локального колебания моде отвечает состояние с $\kappa b \approx 2\pi/N \ll 1$. Из (2.153), (2.154) следует, что для первой нелокальной моды $\kappa b = 2\pi/N$ при $M - m = 0$ и $\kappa b = \pi/N$ при $(M - m)/m \rightarrow \infty$. При этом частота меняется от $\omega^2 \approx \omega_0^2 + 4\varepsilon\pi^2 / mN^2$ до $\omega^2 \approx \omega_0^2 + \varepsilon\pi^2 / mN^2$. Следовательно, в пределе больших N частота практически не меняется (см. рис. 2.25).

Таким образом, для достаточно длинных цепочек существенное изменение происходит лишь с граничной модой, а однородные колебания превращаются в локальные, исследованию которых и уделяется основное внимание.

Из решения (2.146) для локальной моды следует, что область локализации колебания имеет порядок величины $l \sim 1/\kappa$ и эта величина много больше межатомного расстояния при $(M - m)\omega_0^2 / (2\varepsilon) \ll 1$. В этом пределе можно воспользоваться так называемым *длинноволновым приближением*. В этом приближении, вводя вместо дискретного номера частиц n непрерывную координату x и раскладывая смещения $u_{n\pm 1} = u(bn \pm b)$, где $u_{n\pm 1} = u(bn \pm b)$ – межатомное расстояние, в ряд Тейлора, вторые разности в межчастичном взаимодействии $\varepsilon(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1})$ можно заменить на $\varepsilon b^2 u_{xx}$. При этом система обыкновенных дифференциальных уравнений для системы без дефектов (2.145) преобразуется в уравнение в частных производных

$$m u_{tt} - \varepsilon b^2 u_{xx} + k u(x, t) = 0, \quad (2.155)$$

которое называется уравнением Клейна – Гордона. Спектр возбуждений типа $u = a \sin \omega t \cos kx$ для этого уравнения имеет вид $\omega^2 = \omega_0^2 + (\varepsilon / m)b^2 k^2$ и совпадает с (2.153) в пределе малых $bk \ll 1$. Чтобы описать дефект масс в длинноволновом пределе (и в пределе бесконечной цепочки), достаточно рассмотреть такое уравнение:

$$m u_{tt} - \varepsilon a^2 u_{xx} + k u(x, t) = (m - M) u_{tt} \delta(x / b), \quad (2.156)$$

где $\delta(x/b)$ – δ -функция, соответствующая дефекту в точке $x = 0$ (константа b введена в δ -функцию из соображений размерности). Для монохроматических колебаний (2.156) сводится к однородному уравнению

$$\frac{\varepsilon}{m} b^2 u_{xx} - (\omega_0^2 - \omega^2) u = 0 \quad (2.157)$$

с граничным условием в точке расположения дефекта

$$2(\varepsilon / m) b u_x \Big|_0 = -\frac{(M - m)}{m} \omega^2 u(0). \quad (2.158)$$

Подставляя в граничное условие (2.158) решение (2.157) $u(x > 0) = \sin \omega t \exp\left(-x \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} / b \sqrt{\varepsilon / m}\right)$, получаем частоту локального колебания:

$$\omega_n^2 = \frac{2\varepsilon}{m\Delta^2} \left(-1 + \sqrt{1 + m\omega_0^2 \Delta^2 / \varepsilon}\right). \quad (2.159)$$

При малом дефекте массы $\Delta \ll \varepsilon/k$ формула (2.159) переходит в полученное ранее выражение (2.149) для дискретной цепочки.

2.3.3. Многоатомные линейные цепочки

В качестве еще одного важного примера динамики упругих цепочек рассмотрим колебание цепочки, в которой чередуются массы частиц. Эта система моделирует кристалл с двухатомной элементарной ячейкой и изображена на рис. 2.26.

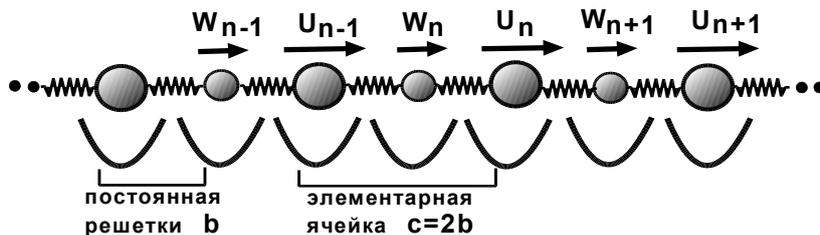


Рис. 2.26

Система уравнений, описывающих данную модель, имеет следующий вид:

$$M \ddot{u}_n + k u_n + \varepsilon (2u_n - w_{n+1} - w_n) = 0; \quad (2.160)$$

$$m \ddot{w}_n + k w_n + \varepsilon (2w_n - u_n - u_{n-1}) = 0. \quad (2.161)$$

Для амплитуд стационарных колебаний $u_n = U_n \sin \omega t$, $w_n = W_n \sin \omega t$ уравнения (2.160), (2.161) легко сводятся к уравнениям только для одной из подрешеток:

$$\left[(M \omega^2 - k - 2\varepsilon)(m \omega^2 - k - 2\varepsilon) - 2\varepsilon^2 \right] U_n - \varepsilon^2 (U_{n+1} + U_{n-1}) = 0. \quad (2.162)$$

Из (2.161) также следует соотношение между амплитудами колебаний частиц из разных подрешеток:

$$W_n = -\frac{\varepsilon}{m \omega^2 - k - 2\varepsilon} (U_n + U_{n-1}). \quad (2.163)$$

Подставляя в (2.163) решение в виде $U_n = A \cos kc n$, получаем спектр возможных колебаний в системе

$$\omega^2 = \frac{(k + 2\varepsilon)}{2Mm} \left((M + m) \pm \sqrt{(M - m)^2 + 4Mm \left(\frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + k} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{kc}{2} \right)} \right). \quad (2.164)$$

Он состоит из двух ветвей (двух зон колебаний), разделенных щелью запрещенных частот, и изображен на рис. 2.27.

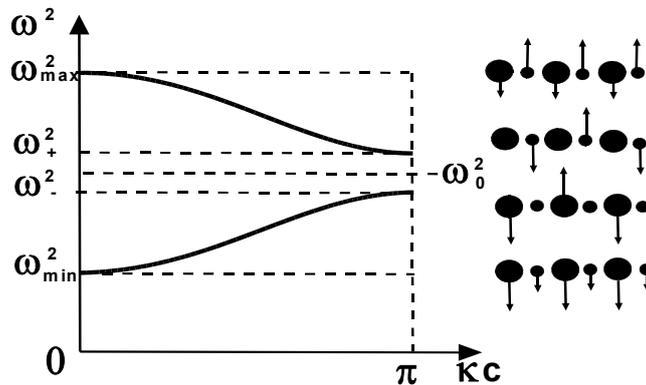


Рис. 2.27

Границам щели отвечают частоты

$$\omega_+^2 = \frac{(k + 2\varepsilon)}{m}; \quad \omega_-^2 = \frac{(k + 2\varepsilon)}{M}. \quad (2.165)$$

На верхней границе $\omega = \omega_+$ тяжелые частицы неподвижны, а легкие колеблются в противофазе, На нижней границе $\omega = \omega_-$ легкие частицы неподвижны, а тяжелые колеблются в противофазе. Нижней границе всего спектра $\omega = \omega_{\min}$ отвечают синфазные колебания всех частиц с большей амплитудой у тяжелых, а верхней границе $\omega = \omega_{\max}$ – противофазные колебания с преимущественным колебанием легких частиц. Зависимости $\omega^2(\kappa)$ для двух ветвей спектра симметричны относительно середины щели $\omega_0^2 = (k + 2\varepsilon)(M + m)/2Mm$. Эта симметрия исчезает в зависимости $\omega = \omega(\kappa)$. Это хорошо видно в пределе свободной цепочки без внешнего потенциала $k = 0$, для которой зависимость (2.67) модифицируется следующим образом:

$$\omega^2 = \frac{\varepsilon}{Mm} \left((M + m) \pm \sqrt{(M + m)^2 - 4Mm \sin^2 \left(\frac{\kappa c}{2} \right)} \right). \quad (2.166)$$

Верхняя ветка спектра качественно не меняется, но нижняя ветка в пределе $\kappa \rightarrow 0$ имеет следующую асимптотику:

$$\omega \approx \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(M + m)}} \kappa c. \quad (2.167)$$

(Заметим, что при определении волнового числа κ мы учитывали, что элементарная ячейка состоит из двух атомов и ее размер составляет $c = 2b$, а не b , как в одноатомной цепочке. Закон дисперсии колебаний цепочки без внешнего потенциала приведен на рис. 2.28. Здесь же приведено распределение плотности колебаний для нее. Нижняя ветка спектра соответствует так называемым *акустическим колебаниям* и называется *акустической*. Верхняя ветвь называется *оптической* и соответствует так называемым *оптическим колебаниям*, хотя речь идет о колебании решетки в упругих средах. Такое название иногда вводит в заблуждение. Поясним его происхождение. Дело в том, что в оптических модах колебаний атомы колеблются в противофазе.

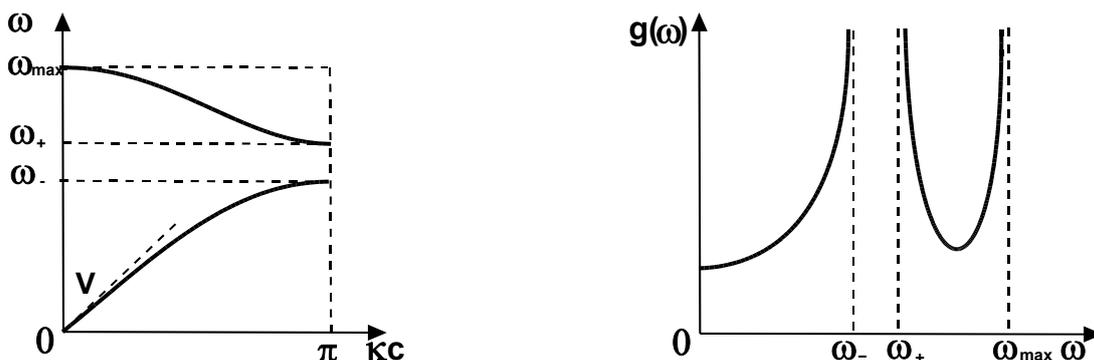


Рис. 2.28

Если атомы несут заряд, то такие колебания соответствуют переменному электрическому дипольному моменту, который способен излучать электромагнитную волну в оптическом диапазоне частот.

Для сравнения спектра частот, изображенного на рис. 2.28, с соответствующим законом дисперсии колебаний одноатомной цепочки, приведенном на рис. 2.22, необходимо следующее замечание.

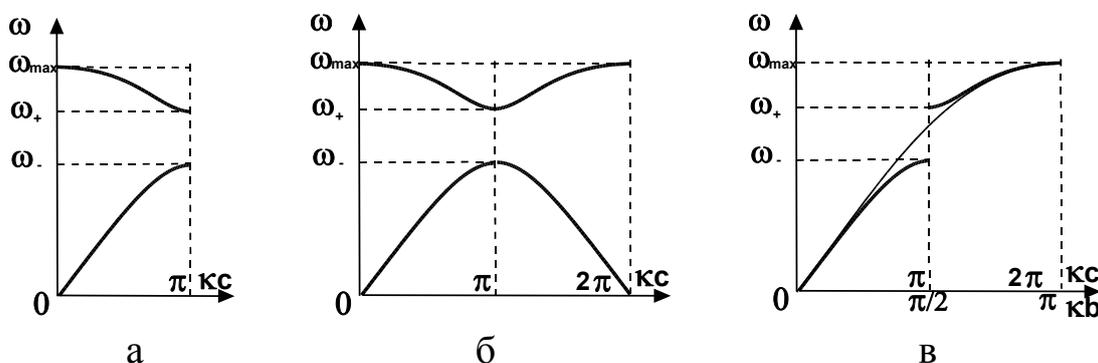


Рис. 2.29

На рис. 2.29а мы повторили спектр из рис. 2.28. На рис. 2.29б приведен тот же спектр в так называемой схеме расширенных зон. На рис. 2.29в в виде тонкой линии на тот же спектр наложена кривая из рис. 2.22, в которую спектр переходит в пределе $M \rightarrow m$. Переход от межатомного расстояния b к размеру элементарной ячейки приводит к изменению масштаба по оси абсцисс.

В заключение заметим, что на границах зон спектра, которые наиболее важны с физической точки зрения, все различные типы колебаний имеют период, равный 4 межатомным расстояниям. Поэтому для нахождения граничных частот спектра достаточно решить более простую задачу о колебаниях системы из четырех частиц с периодическими граничными условиями (см. задачи этого раздела).

2.3.4. Дополнения к разделу 2.3

2.3.1. Найти спектр колебаний трехатомной цепочки в скалярной модели с различными граничными условиями.

Рассматриваемые системы изображены на рис. 2.30 для периодических, свободных и фиксированных граничных условий, где x_i – смещения частиц из положения равновесия в минимумах потенциальной энергии.

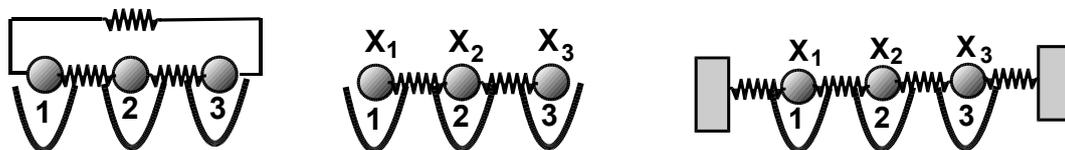


Рис. 2.30

Решение. В случае периодических граничных условий уравнения (2.134) принимают вид (см. формулу (2.135))

$$m\ddot{u}_n + k u_n + \varepsilon(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) = 0$$

и при подстановке $u_n = a_n \sin \omega t$ сводятся к системе алгебраических уравнений (см. формулу (2.136)):

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta)a_n + \delta(a_{n+1} + a_{n-1}) &= 0; \quad n = 1, 2, 3; \\ a_4 &= a_1. \end{aligned} \tag{2.168}$$

Легко показать, что характеристическое уравнение имеет вид:

$$(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_0^2 - 3\delta)^2 = 0. \tag{2.169}$$

В общем случае система с тремя степенями свободы характеризуется тремя нормальными колебаниями. Однако в данном случае из-за симметрии задачи одна из частот дважды вырождена. Одна нормальная мода отвечает синфазным колебаниям частиц:

$$\omega_1 = \omega_0; \quad a_1 = a_2 = a_3; \quad \uparrow\uparrow\uparrow. \tag{2.170}$$

(Здесь стрелки одинаковой длины соответствуют одинаковым амплитудам колебаний частиц). Две другие моды соответствуют одной и той же частоте $\omega^2 = \omega_0^2 + 3\delta$. Выбор таких мод неоднозначен. Из уравнений (2.168) следует соотношение $a_n + a_{n+1} + a_{n-1} = 0$, т. е. $a_3 = -a_1 - a_2$. Оно автоматически обеспечивает ортогональность этих мод моде синфазных колебаний.

Но дополнительно необходимо обеспечить ортогональность колебаний с вырожденными частотами между собой. Если обозначить амплитуды колебаний в двух модах как $(b, c, -b - c)$ и $(d, f, -d - f)$, то возникает условие $2bd + 2cf + bf + cd = 0$. Поскольку амплитуды каждой моды произвольны, то для определенности положим $b = d = 1$ и получим $f = -(2 + c)/(1 + 2c)$. При этом сохраняется произвол в выборе параметра c . Если $c = 1$, то распределение колебаний в модах $(1, 0, 1)$ и $1, -2, 1$ выглядит так:

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 3\delta}; \quad a_1 = -a_3; \quad a_2 = 0; \quad \uparrow\downarrow. \tag{2.171}$$

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 + 3\delta}; \quad a_1 = a_3 = -a_2/2; \quad \uparrow\downarrow\uparrow. \tag{2.172}$$

(Точка в (2.171) соответствует нулевой амплитуде). Из рисунков видно, что все три моды ортогональны друг другу, т. е. $a_1^{(i)}a_1^{(j)} + a_2^{(i)}a_2^{(j)} + a_3^{(i)}a_3^{(j)} = 0$.

Рассмотрим второй случай свободных границ, для которых уравнения (2.168) модернизируются таким образом:

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_0^2 - \delta)a_1 + \delta a_2 = 0; \\ (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta)a_2 + \delta(a_1 + a_3) = 0; \\ (\omega^2 - \omega_0^2 - \delta)a_3 + \delta a_2 = 0. \end{cases} \quad (2.173)$$

Характеристическое уравнение для определения спектра частот имеет вид:

$$(\omega^2 - \omega_0^2 - \delta)(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_0^2 - 3\delta) = 0,$$

а спектр и нормальные моды выглядят так:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0; & a_1 &= a_2 = a_3; & \uparrow\uparrow\uparrow; \\ \omega_2 &= \sqrt{\omega_0^2 + \delta}; & a_1 &= -a_3; & a_2 = 0; & \uparrow\cdot\downarrow; \\ \omega_3 &= \sqrt{\omega_0^2 + 3\delta}; & a_1 &= a_3 = -a_2/2; & \uparrow\downarrow\uparrow. \end{aligned}$$

Наконец, в случае фиксированных границ уравнения для амплитуд колебаний выглядят так:

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta)a_1 + \delta a_2 = 0; \\ (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta)a_2 + \delta(a_1 + a_3) = 0; \\ (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta)a_3 + \delta a_2 = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$(\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta)(\omega^2 - \omega_0^2 - (2 + \sqrt{2})\delta)(\omega^2 - \omega_0^2 - (2 - \sqrt{2})\delta) = 0,$$

а нормальные моды и их частоты

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\omega_0^2 + (2 - \sqrt{2})\delta}; & a_1 &= a_3 = a_2/\sqrt{2}; & \uparrow\uparrow\uparrow; \\ \omega_2 &= \sqrt{\omega_0^2 + 2\delta}; & a_1 &= -a_3; & a_2 = 0; & \uparrow\cdot\downarrow; \\ \omega_3 &= \sqrt{\omega_0^2 + (2 + \sqrt{2})\delta}; & a_1 &= a_3 = -a_2/2; & \uparrow\downarrow\uparrow. \end{aligned}$$

Из полученных результатов видно, что во всех трех случаях симметрия трех нормальных мод одинакова, но спектр частот различен, что связано с существенным влиянием граничных условий в случае коротких цепочек.

2.3.2. Найти спектр колебаний четырехатомной цепочки в скалярной модели с периодическими граничными условиями при наличии внешнего потенциала и при его отсутствии (см. рис. 2.31).

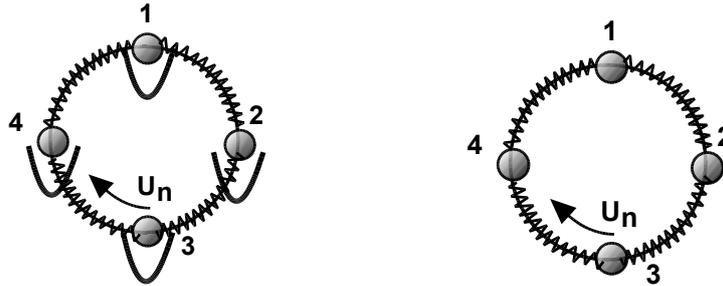


Рис. 2.31

Решение. Система уравнений для колебания 4 частиц во внешнем потенциале приведена в (2.145):

$$m\ddot{u}_n + k u_n + \varepsilon(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) = 0$$

с дополнительным условием $u_1 = u_5$. Характеристическое уравнение для нахождения частот имеет вид:

$$\det \begin{vmatrix} b & c & 0 & c \\ c & b & c & 0 \\ 0 & c & b & c \\ c & 0 & c & b \end{vmatrix} = b^2(b-2c)(b+2c) = 0,$$

где $b = \omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta$ и $c = 2\delta$ с $\delta = \varepsilon/m$. Таким образом, спектр колебаний состоит из трех частот, одна из которых дважды вырождена. Минимальная частота $\omega_{\min}^2 = \omega_0^2$ соответствует синфазным колебаниям. Максимальная частота $\omega_{\max}^2 = \omega_0^2 + 4\varepsilon/m$ отвечает противофазным колебаниям частиц. Кроме этого, имеется дважды вырожденная частота $\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon/m$. Из динамических уравнений следует, что в соответствующих решениях

$a_1 = -a_3$ и $a_2 = -a_4$, что обеспечивает ортогональность двум другим модам. В качестве ортогональных между собой мод можно выбрать состояния с $a_2 = a_4 = 0$ и $a_1 = a_3 = 0$. Качественно распределение колебаний в модах изображено ниже:

$$\begin{aligned} \omega_{\min} &= \omega_0; & a_1 &= a_2 = a_3 = a_4; & \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow; \\ \omega_1 &= \sqrt{\omega_0^2 + 2\delta}; & a_1 &= -a_3, a_2 = a_4 = 0; & \uparrow\cdot\downarrow; \\ \omega_2 &= \sqrt{\omega_0^2 + 2\delta}; & a_1 &= a_3 = 0, a_2 = -a_4 = 0; & \cdot\uparrow\cdot\downarrow; \\ \omega_{\max} &= \sqrt{\omega_0^2 + 4\delta}; & a_1 &= -a_2 = a_3 = -a_4; & \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow. \end{aligned}$$

Еще раз подчеркнем, что выбор нормальных мод для вырожденной частоты неоднозначен. Вместо рассмотренных состояний $(\uparrow\cdot\downarrow\cdot)$ и $(\cdot\uparrow\cdot\downarrow)$ можно было выбрать, например, такие: $(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow)$ и $(\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow)$.

Рассмотрим эту же задачу при отсутствии внешнего потенциала, т. е. при $\omega_0 = 0$. При этом $\omega_{\min} = 0$; $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{2\delta}$ и $\omega_{\max} = \sqrt{4\delta}$ и остаются только три колебательные моды. Мода с нулевой частотой называется *сдвиговой модой*. Ее наличие связано с тем, что в отсутствии внешнего потенциала допускается одновременный сдвиг всех частиц вдоль кольца на произвольное расстояние.

2.3.3. Найти спектр колебаний четырехатомной цепочки с чередующимися массами в скалярной модели с периодическими граничными условиями (см. рис. 2.32).

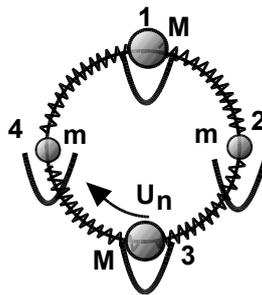


Рис. 2.32

Решение. В этом примере система уравнений колебания четырех частиц имеет вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_1 + k u_1 + \varepsilon(2u_1 - u_2 - u_4) &= 0; \\ M\ddot{u}_2 + k u_2 + \varepsilon(2u_2 - u_3 - u_1) &= 0; \end{aligned}$$

$$m\ddot{u}_3 + k u_3 + \varepsilon(2u_3 - u_4 - u_2) = 0;$$

$$M\ddot{u}_4 + k u_4 + \varepsilon(2u_4 - u_1 - u_3) = 0,$$

а характеристическое уравнение сводится к следующему:

$$(M\omega^2 - k - 2\varepsilon)(m\omega^2 - k - 2\varepsilon)\left[\omega^4 - (M + m)(k + 2\varepsilon)\omega^2 + k(k + 4\varepsilon)\right] = 0.$$

Видно, что частоты этого характеристического уравнения совпадают с выражением (2.164) при $\kappa = 0$ и $\kappa c = \pi$. Таким образом, решение задачи с четырьмя частицами дает частоты с бесконечной плотностью состояний на краях зон спектра бесконечной цепочки. Поскольку именно эти моды наиболее важны в эксперименте, то часто достаточно рассмотреть систему с конечным числом степеней свободы.

2.3.4. Рассмотреть предыдущую задачу 2.3.3 в отсутствии внешнего упругого поля, считая, что частицы с массой m имеют заряд $e = 1$, а частицы с массой M – заряд $e = -1$ (см. рис. 2.33). Вычислить колебания дипольного момента системы.

Решение. При отсутствии внешнего потенциала ($k = 0$) для частиц с периодическим чередованием зарядов

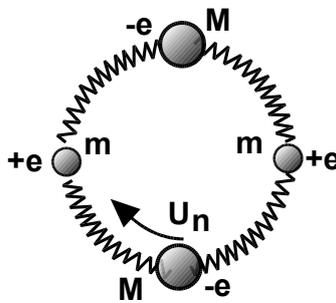


Рис. 2.33

частоты колебательных мод на границах зон и распределение смещений в них имеют вид, изображенный на рис. 2.34.

Из рис. 2.34 видно, что две первые моды ω_{\pm} дипольно не активны. «Активной» является только мода с ω_{\max} . Для нее, подставляя в соотношение (2.163) с $k = 0$ выражение для ω_{\max} , получаем

$$W = -\frac{M}{m}U.$$

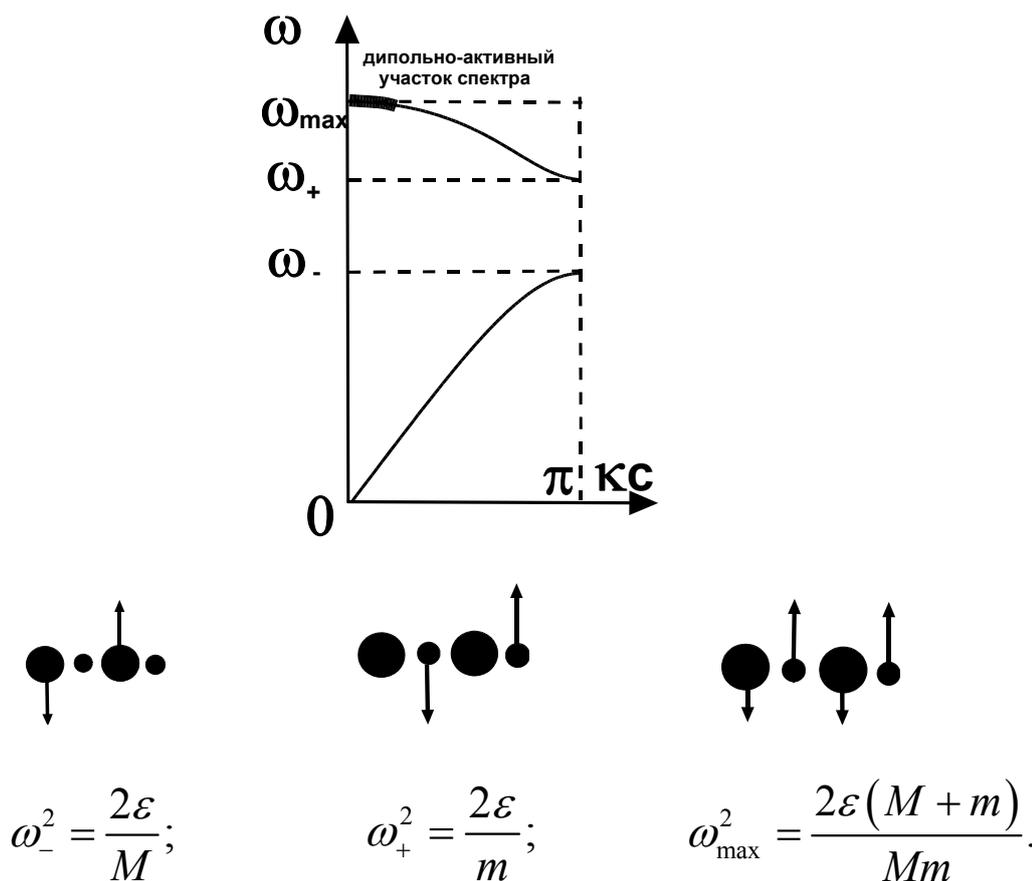


Рис. 2.34

Таким образом, дипольный момент системы равен

$$d = 2e \frac{M+m}{m} \sin \omega_{\max} t.$$

Измеряя поглощение высокочастотного электромагнитного поля и находя частоту максимума этого поглощения при известных массах атомов, легко найти константу упругого взаимодействия $\varepsilon = Mm\omega_{\max}^2 / 2(M+m)$.

2.3.5. Вычислить колебания дипольного момента двухатомной цепочки ионов с удвоением периода за счет чередования упругих констант межчастичного взаимодействия. Структура системы приведена на рис. 2.35.

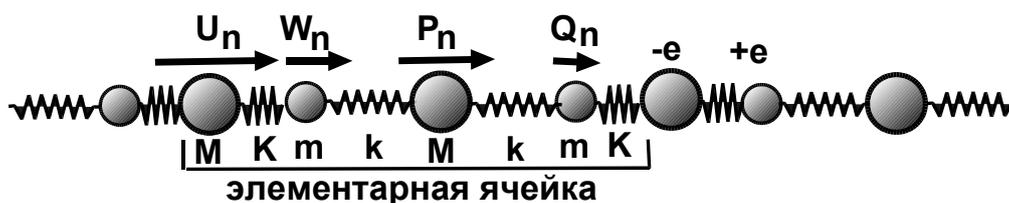


Рис. 2.35

При решении задачи воспользоваться малостью параметров $m/M \ll 1$ и $(K - k)/K \ll 1$.

Решение. В данном примере элементарная ячейка содержит 4 частицы и ее длина составляет $d = 2c = 4b$. Поэтому спектр частот достаточно изобразить в интервале $0 \leq \kappa d \leq \pi$. Система уравнений для амплитуд колебаний выглядит следующим образом:

$$(M\omega^2 - 2E)U_n + E(W_n + Q_{n-1}) = 0;$$

$$(M\omega^2 - 2\varepsilon)P_n + \varepsilon(W_n + Q_n) = 0;$$

$$(m\omega^2 - \varepsilon - E)W_n + EU_n + \varepsilon P_n = 0;$$

$$(m\omega^2 - \varepsilon - E)Q_n + EU_{n+1} + \varepsilon P_n = 0.$$

Эти четыре уравнения можно переписать в виде одного уравнения для смещений U_n :

$$\left[(m\omega^2 - \varepsilon - E)(M\omega^2 - 2E) - 2E^2 \right] \left[(m\omega^2 - \varepsilon - E)(M\omega^2 - 2\varepsilon) - 2\varepsilon^2 \right] U_n - \varepsilon^2 E^2 (2U_n + U_{n+1} + U_{n-1}) = 0.$$

Для решений вида $U_n = U \cos \kappa d n$ получаем спектр собственных колебаний системы:

$$\left[(m\omega^2 - \varepsilon - E)(M\omega^2 - 2E) - 2E^2 \right] \left[(m\omega^2 - \varepsilon - E)(M\omega^2 - 2\varepsilon) - 2\varepsilon^2 \right] - 4\varepsilon^2 E^2 \cos^2(\kappa d / 2) = 0.$$

Спектр частот содержит четыре ветви, изображенные на рис. 2.36.

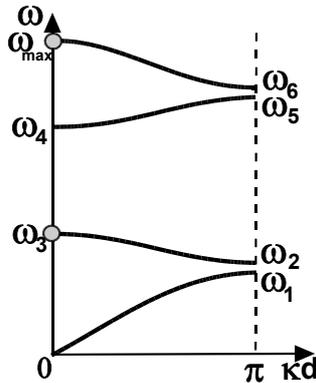


Рис. 2.36

За счет удвоения периода решетки возникают дополнительные щели в спектре частот при значении волнового числа $kd = \pi$. Этому значению отвечают противофазные колебания однотипных частиц $U_n = -U_{n+1}$; $W_n = -W_{n+1}$; $P_n = -P_{n+1}$, т. е. эти колебания дипольно не активны. При $kd = 0$ одна из трех ненулевых частот $\omega_4^2 = (\varepsilon + E)/m$ также отвечает дипольно неактивным колебаниям. В них $U_n = 0$; $P_n = 0$; $W_n = -Q_n$ и $W_n = -Q_{n-1}$ ($\dots \bullet \uparrow \bullet \downarrow \bullet \uparrow \bullet \dots$) – тяжелые частицы неподвижны, а легкие колеблются в противофазе с одинаковыми амплитудами и нулевым дипольным моментом. Дипольно активны только колебания с частотами ω_3 и ω_{\max} , отмеченные на рис. 2.28 кружочками. Характеристическое уравнение при $kd = 0$ сводится к виду:

$$\omega^2 (m\omega^2 - \varepsilon - E) \left[mM^2\omega^4 - M(M + 2m)(\varepsilon + E) + 4\varepsilon E(M + m) \right] = 0$$

и поэтому для частот ω_{\max} и ω_3 получаем выражения:

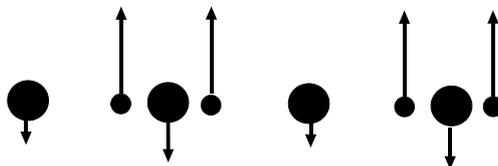
$$\omega_{\max,3}^2 = \frac{\varepsilon + E}{2m} \left[\left(1 + 2 \frac{m}{M} \right) \pm \sqrt{1 + 4 \left(\frac{E - \varepsilon}{E + \varepsilon} \right)^2 \frac{m}{M} \left(1 + \frac{m}{M} \right)} \right].$$

С первыми поправками по малому параметру m/M максимальная частота колебаний равна:

$$\omega_{\max}^2 = \frac{\varepsilon + E}{m} \left[1 + 2 \frac{m}{M} \frac{\varepsilon^2 + E^2}{(\varepsilon + E)^2} \right].$$

Ниже схематически приведено распределение амплитуд колебаний в этой моде: легкие частицы колеблются в фазе с большими и одинаковыми амплитудами $W = Q$, а тяжелые частицы – в противофазе с ними со слегка разными амплитудами:

$$U = -(m/M)W(E/\varepsilon) \ll W \text{ и } P = -(m/M)W \ll W.$$

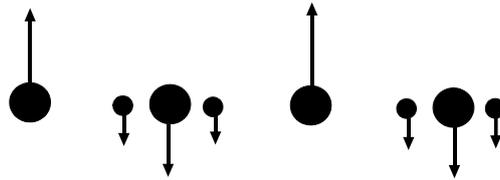


Это приближенно легко получить из исходной системы уравнений. Таким образом, амплитуда дипольного момента элементарной ячейки составляет $d_{\max} \approx 2W$. Поскольку энергия колебания на элементарную ячейку составляет $E_{\max} \approx m\omega_{\max}^2 W^2$, то $d_{\max} \approx 2\sqrt{E_{\max}/(\varepsilon + E)} \approx \sqrt{2E_{\max}/\varepsilon}$.

Дипольный момент второй активной моды существенно меньше. Ее частота примерно равна

$$\omega_3^2 = \frac{\varepsilon + E}{M} \left[\frac{4\varepsilon E}{(\varepsilon + E)^2} - 2 \left(\frac{m}{M} \right)^2 \left(\frac{E - \varepsilon}{E + \varepsilon} \right)^2 \right].$$

Ниже схематически приведено распределение амплитуд для случая $E > \varepsilon$: тяжелые частицы колеблются почти в противофазе, а легкие – в фазе с одинаковыми амплитудами.



Подставляя выражение для частоты в основном приближении в уравнения, находим соотношение амплитуд:

$$W = Q = \frac{E - \varepsilon}{E + \varepsilon} U = -\frac{E - \varepsilon}{E + \varepsilon} \frac{\varepsilon}{E} P.$$

Таким образом, дипольный момент элементарной ячейки $W + Q - U - P$ равен $d_3 = U(E - \varepsilon)(E + 3\varepsilon)/\varepsilon(E + \varepsilon) \approx 2U(E - \varepsilon)/\varepsilon$. Энергия колебания элементарной ячейки $E_3 \approx M\omega_3^2 U^2$, следовательно, $d_3 \approx \sqrt{2E_3/\varepsilon}(E - \varepsilon)/\varepsilon$.

Поэтому при одинаковых уровнях возбуждения двух активных нормальных мод их дипольные моменты относятся как $d_3/d_{\max} \approx (E - \varepsilon)/\varepsilon \ll 1$.

2.3.5. Задачи для домашних заданий к разделу 2.3

2.3.6. Рассмотреть локальные колебания у нижней границы спектра в случае изменения только параметра внешнего поля для дефектной частицы.

2.3.7. Рассмотреть локальные колебания у нижней границы спектра в случае изменения только констант упругого взаимодействия дефекта с соседними атомами.

2.3.8. Рассмотреть локальные колебания у верхней границы колебательного спектра в случае изменения массы дефектной частицы (изотопической примеси).

2.3.9. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m , могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i -ая частица соединена с соседними, $(i-1)$ -ой и $(i+1)$ -ой, пружинками жесткости k , а с $(i-3)$ -ей и $(i+3)$ -ей частицами – пружинками жесткости $2k$. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2.3.10. По цепочке, рассмотренной в задаче **2.3.9**, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i -ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

2.3.11. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи **2.3.9** длиной N и будем учитывать только взаимодействия между соседними частицами. Пусть

- а) первая частица жестко прикреплена к одной стене, а N -ая – к другой;
- б) первая частица жестко прикреплена к стене, а N -ая – свободна;
- в) весь фрагмент цепочки замкнут в кольцо;
- г) вторая частица жестко закреплена, а первая и последняя – свободны.

Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнейшее взаимодействие, учтенное в задаче **2.3.9**?

2.3.12. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи **2.3.9** без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи **2.3.11**. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s -ая частица имеет массу εm , где $\varepsilon \ll 1$. Кроме «обычных» колебаний, при которых легкая частица увлекается пружинками, есть выделенное колебание, при котором она движется на почти покоящихся пружинках, а тяжелые частицы совершают слабые «вынужденные колебания». Найдите все моды системы.

2.3.13. Пусть теперь в задаче **2.3.12** s -ая частица имеет массу εm , где $\varepsilon \gg 1$. Тогда кроме колебаний, при которых тяжелая частица почти не движется, есть выделенное колебание, при котором она колеблется на «длинных» пружинах, а остальные, легкие частицы, увлекаются этим движением, почти не оказывая на него влияния. Найдите все моды системы.

2.3.14. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи **2.3.9** имеют массу αm , отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. «Выключив» дальнейшее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

2.3.15. Упругий стержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в задаче **2.3.14** к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

2.3.16. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи **2.3.9**, связанные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε . При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как «плоская» конфигурация, так и «гармошка». Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблются так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Теоретическая физика : в 10 т. Т. I. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 216 с.
2. Невзглядов В. Г. Теоретическая механика / Невзглядов В. Г. – М. : Физматгиз, 1959. – 584 с.
3. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики : в 2 ч. Ч. I / Бухгольц Н. Н. – М. : Наука, 1969. – 468 с.
4. Суслов Г. К. Теоретическая механика / Суслов Г. К. – М. ; Л. : Гостехтеориздат, 1946. – 656 с.
5. Ландау Л. Д. Задачи по теоретической физике. Ч. I. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Л. А. Розенкевич. – Х. : ГНТИУ, 1935. – 120 с.
6. Ландау Л. Д., Пятигорский Л. М. Механика / Л. Д. Ландау, Л. М. Пятигорский. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1940. – 200 с.
7. Маркеев А. П. Теоретическая механика : учебник для университетов / Маркеев А. П. – М. : ЧеРо, 1999. – 572 с.
8. Сборник задач по аналитической механике / [Е. С. Пятницкий, Н. М. Трухан, Ю. И. Ханукаев, Г. Н. Яковенко]. – М. : Наука, 1980. – 320 с.
9. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – М. : Наука, 1986. – 448 с.
10. Ольховский И. И. Задачи по теоретической механике для физиков / И. И. Ольховский, К. Г. Павленко, Л. С. Кузьменков. – М. : Изд-во МГУ, 1977. – 391 с.
11. Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков / И. И. Ольховский. – М. : Изд-во МГУ, 1978. – 575 с.
12. Компанеец А. С. Курс теоретической физики : в 2 т. Т. 1 / А. С. Компанеец. – М. : Наука, 1972. – 512 с.
13. Арнольд В. И. Математические методы классической механики / И. И. Арнольд. – М. : Наука, 1989. – 472 с.
14. Голдстейн Г. Классическая механика / Голдстейн Г. – М. : Гостехиздат, 1957 – 413 с.
15. Коткин Г. Л. Сборник задач по классической механике / Г. Л. Коткин, В. Г. Сербо. – М. : Наука, 1977. – 319 с.
16. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1975. – 431 с.
17. Косевич А. М. Введение в нелинейную физическую механику / А. М. Косевич, А. С. Ковалев. – К. : Наук. думка, 1989. – 304 с.

18. Езерская Е. В. Динамика материальной точки в ньютоновом и лагранжевом формализме. Методические указания для самостоятельной работы студентов 2–3 курсов физического факультета / Е. В. Езерская, О. В. Усатенко, Т. С. Чебанова. – Х. : Харьковское межвузовское полиграфическое предприятие, 1989. – 51 с.

19. Езерская Е. В. Колебания систем со многими степенями свободы. Методические указания для самостоятельной работы студентов 2–3 курсов физического факультета / Е. В. Езерская, О. В. Усатенко, Т. С. Чебанова. – Х. : Харьковское межвузовское полиграфическое предприятие, 1989. – 38 с.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Навчальне видання

Ковальов Олександр Семенович
Єзерська Олена Володимирівна
Майзеліс Захар Олександрович
Чебанова Тетяна Сергіївна

МАЛІ КОЛИВАННЯ

I. Лінійні коливання

Навчально-методичний посібник

(Рос. мовою)

Відповідальний за випуск *О. І. Любимов*
Коректор *С. В. Гончарук*
Комп'ютерне верстання *В. В. Савінкова*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 7,14. Тираж 100 пр. Зам. № 132/13.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32