ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXX. Серия 4 1964

ОБ УРАВНЕНИИ ЛЯМЭ

Н. И. Ахиезер

1. Предметом настоящей статьи является подробное изложение и некоторое обобщение одного моего результата, полученного в заметке [1]. Эта заметка посвящена обратной задаче Штурма—Лиувилля на полуоси для того случая, когда спектральная функция абсолютно непрерывна а ее производная $\frac{1}{\pi} w(\lambda)$ определяется равенствами

$$w(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)\ldots(\lambda-\alpha_\rho)}{\lambda(\lambda-\beta_1)(\lambda-\beta_2)\ldots(\lambda-\beta_\rho)}} & (\lambda\in E) \\ 0 & (\lambda \overline{\in} E), \end{cases}$$

где E означает точечное множество, образованное интервалами

$$(0,\alpha_1),\ (\beta_1,\alpha_2),\ (\beta_2,\alpha_3),\ \ldots,\ (\beta_\rho,\infty),$$

причем

$$0<\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<\ \ldots\ <\beta_\rho<\infty.$$

Согласно общей теории, указанной спектральной функции отвечает вполне определенное уравнение Штурма—Лиувилля

$$-y''+q(x)\,y=\lambda y \quad (x>0) \tag{1}$$

и вполне определенное краевое условие

$$y'(0)=h,\ y(0)=1. \tag{2}$$

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), мы обозначим $C(x,\lambda)$. Второе решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$y'(0)=1,\ y(0)=0, \tag{3}$$

обозначим $S(x,\lambda)$. Как показано в статье [2], спектральная функция уравнения (1), отвечающая условию (3), также абсолютно непрерывна и ее производная равна $\frac{1}{\pi w(\lambda)}$ при $\lambda\in E$ и 0 при $\lambda\overline{\in} E$. Кроме того, в статье [2] доказано важное тождество

$$(\lambda-\alpha_1)\ \ldots\ (\lambda-\alpha_\rho)[C(x,\lambda)]^2+\lambda(\lambda-\beta_1)\ \ldots\ (\lambda-\beta_\rho)[S(x,\lambda)]^2=$$
$$=(\lambda-\gamma_1)\ \ldots\ (\lambda-\gamma_\rho),$$

где числа γ_j зависят от x и удовлетворяют неравенствам

$$\alpha_j\leqslant\gamma_j\leqslant\beta_j \qquad (j=1,2,\ \ldots,\ \rho).$$

В настоящей статье мы остановимся на случае $\rho = 1$. При этом мы можем, очевидно, принять, что «пустым» интервалом является $(k^2, 1)$ $(0 < k < 1)$ и, значит, множество E состоит из интервалов

$$(0, k^2), \ (1, \infty), \tag{4}$$

а

$$w(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\lambda - k^2}{\lambda(\lambda - 1)}} & (\lambda \in E) \\ 0 & (\lambda \overline{\in} E). \end{cases}$$

Для нахождения функций $C(x, \lambda)$, $S(x, \lambda)$ мы имеем, таким образом, уравнение

$$(\lambda - k^2)[C(x, \lambda)]^2 + \lambda(\lambda - 1)[S(x, \lambda)]^2 = \lambda - \gamma, \tag{5}$$

причем γ также неизвестно.

2. Обозначим через G плоскость комплексного переменного ζ, разрезанную вдоль интервалов (4), через G' — второй экземпляр такой плоскости и через F — двухлистную риманову поверхность с верхним листом G, нижним листом G' и интервалами (4) в качестве линий перехода. Условимся в дальнейшем считать, что

$$\sqrt{\frac{\zeta - k^2}{\zeta(\zeta - 1)}}$$

имеет положительное значение на верхнем берегу разреза $(1, \infty)$ листа G. В таком случае этот радикал будет однозначной функцией на поверхности F. Далее условимся обозначать ζ' точку листа G', лежащую под точкой ζ листа G.

Введем теперь функцию от ζ и параметра x

$$\mathscr{E}(x, \zeta) = C(x, \zeta) + i\sqrt{\frac{\zeta(\zeta - 1)}{\zeta - k^2}}\, S(x, \zeta).$$

Так как $C(x, \zeta)$, $S(x, \zeta)$ — целые функции от ζ и, следовательно, на F однозначны, то в силу (5) справедливо равенство

$$\mathscr{E}(x, \zeta)\, \mathscr{E}(x, \zeta') = \frac{\zeta - \gamma}{\zeta - k^2}. \tag{6}$$

Будем рассматривать $\mathscr{E}(x, \zeta)$ на поверхности F. Это однозначная функция, имеющая на конечном расстоянии всего одну особую точку, а именно, полюс $\zeta = k^2$ порядка 1. Из равенства (6) следует, что функция $\mathscr{E}(x, \zeta)$ имеет всего один корень на конечном расстоянии. Его порядок 1 и он лежит в интервале $[k^2, 1]$ на верхнем или нижнем листе (а именно, в точке $\zeta = \gamma$ или точке $\zeta = \gamma'$). Чтобы на основании этих данных построить функцию $\mathscr{E}(x, \zeta)$, нужно знать ее поведение на бесконечности. С этой целью напомним, что при $\zeta \to \infty$ имеют место асимптотические формулы:

$$C(x, \zeta) = \cos(x\sqrt{\zeta}) + e^{x|t|}O\left(\frac{1}{|\sqrt{\zeta}|}\right)$$

$$S(x, \zeta) = \frac{\sin(x\sqrt{\zeta})}{\sqrt{\zeta}} + e^{x|t|}O\left(\frac{1}{|\zeta|}\right),$$

где $t = \operatorname{Im}\sqrt{\zeta}$. Отсюда следует, что при $\zeta \to \infty$ на F

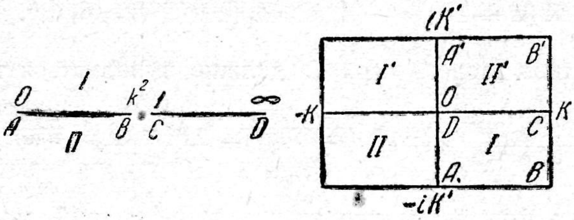
$$\mathscr{E}(x, \zeta) \sim \exp\left\{ix\sqrt{\frac{\zeta(\zeta - 1)}{\zeta - k^2}}\right\}. \tag{7}$$

Формула (7) дает полную информацию о поведении функции $\mathscr{E}(x, \zeta)$ на ∞, и построение функции $\mathscr{E}(x, \zeta)$ представляет простую задачу *.

3. Переходя к этому построению, отобразим поверхность F на прямоугольник, полагая

$$\zeta = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 w}, \tag{8}$$

где $\operatorname{sn} w = \operatorname{sn}(w; k)$. Обозначим римскими цифрами I, II верхнюю и нижнюю половины области G, и соответственно I′, II′ аналогичные части области G'. В таком случае соответствие границ этих областей при рассматриваемом отображении представится следующим рисунком



Заметим прежде всего, что из (8) вытекает равенство

$$dw = -\frac{d\zeta}{2\sqrt{\zeta(\zeta - k^2)(\zeta - 1)}}.$$

Для построения функции $\mathscr{E}(x, \zeta)$ будем пользоваться якобиевой тэта-функцией $\mathrm{H}(w)$, которая является целой функцией и в нашем прямоугольнике имеет единственный (и притом простой) корень $w = 0$. Точке $\zeta = \gamma$ будет отвечать точка $w = -K + iK' + ic$, где c вещественно **. Если $\zeta \to \infty$ на G, то $w \to 0$, оставаясь в нижней половине прямоугольника периодов, а в таком случае из равенства (8) и тождества

$$\frac{\mathrm{H}'(w)}{\mathrm{H}(w)} = \frac{\operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w}{\operatorname{sn} w} + \frac{\theta'(w)}{\theta(w)}$$

следует, что при $\zeta \to \infty$ на F

$$\sqrt{\frac{\zeta(\zeta - 1)}{\zeta - k^2}} = \frac{\mathrm{H}'(w)}{\mathrm{H}(w)} + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\zeta}|}\right).$$

На основании нашего анализа

$$\mathscr{E}(x, \zeta) = M \frac{\mathrm{H}(w + K - iK' - ic)}{\mathrm{H}(w + K - iK')} e^{ix \frac{\mathrm{H}'(w)}{\mathrm{H}(w)}},$$

где M от w не зависит. Так как в силу (7) коэффициент при

$$e^{ix \frac{\mathrm{H}'(w)}{\mathrm{H}(w)}}$$

должен обратиться в 1 при $\zeta = \infty$, то

$$\mathscr{E}(x, \zeta) = \frac{\mathrm{H}(K - iK')\,\mathrm{H}(w + K - iK' - ic)}{\mathrm{H}(K - iK' - ic)\,\mathrm{H}(w + K - iK')} e^{ix \frac{\mathrm{H}'(w)}{\mathrm{H}(w)}}.$$

---

* Заметим, что аналогичный анализ проходит в случае любого конечного числа пустых интервалов в спектре и приводит к выводу, что функция $\ln \mathscr{E}(x, \zeta)$ имеет на соответствующей римановой поверхности полюс порядка 1 в точке $\zeta = \infty$ и, сверх того, определенное число логарифмических особых точек. В силу этого построение функции $\mathscr{E}(x, \zeta)$ осуществляется при помощи гиперэллиптических интегралов второго и третьего рода.

** И, конечно, точки, сравнимые с нею по модулю периодов.

Пользуясь известными формулами приведения тэта-функций, получаем, что

$$\mathcal{E}(x, \zeta) = \frac{\theta_1(0)\,\theta_1(w - ic)}{\theta_1(ic)\,\theta_1(w)}\, e^{ix\frac{\mathrm{H}'(w)}{\mathrm{H}(w)}}.$$

Заметим, что пока число c еще не определено. Однако мы еще не использовали того факта, что $\mathcal{E}(x, \zeta)$ есть однозначная функция точки на римановой поверхности F. При переходе от римановой поверхности F к прямоугольнику периодов это означает, что $\mathcal{E}(x, \zeta)$ как функция от w должна иметь оба периода: $2K$ и $2iK'$. Первый из них имеется автоматически, так как

$$\mathrm{H}(w + 2K) = -\mathrm{H}(w), \quad \theta_1(w + 2K) = \theta_1(w).$$

Для существования второго периода должно выполняться тождество

$$\frac{\theta_1(w + 2iK' - ic)}{\theta_1(w + 2iK')}\, e^{ix\frac{\mathrm{H}'(w+2iK')}{\mathrm{H}(w+2iK')}} = \frac{\theta_1(w - ic)}{\theta_1(w)}\, e^{ix\frac{\mathrm{H}'(w)}{\mathrm{H}(w)}}.$$

Снова, пользуясь формулами приведения тэта-функций, можем это тождество написать в виде

$$e^{\frac{\pi}{K}(x-c)} = 1,$$

откуда следует, что $c = x$.

Итак,

$$\mathcal{E}(x, \zeta) = \frac{\theta_1(0)\,\theta_1(w - ix)}{\theta_1(w)\,\theta_1(ix)}\, e^{ix\frac{\mathrm{H}'(w)}{\mathrm{H}(w)}}.$$

Заметим, что эта функция имеет смысл также при $x < 0$. А так как переход от w к $-w$ означает переход от ζ к ζ', то

$$\mathcal{E}(-x\ \zeta) = \mathcal{E}(x, \zeta').$$

Поэтому

$$C(x, \zeta) = \frac{1}{2}\{\mathcal{E}(x, \zeta) + \mathcal{E}(-x, \zeta)\}$$

есть четная функция от x и, значит, константа h в краевом условии (2) равна 0.

Заметим далее, что

$$S(x, \zeta) = \sqrt{\frac{\zeta - k^2}{\zeta(\zeta - 1)}}\,\frac{\mathcal{E}(x, \zeta) - \mathcal{E}(-x, \zeta)}{2i}$$

есть нечетная функция от x.

4. Перейдем от обозначения ζ к обычному для спектрального параметра обозначению λ (при этом заменим w на u) и займемся нахождением уравнения Штурма—Лиувилля, которому удовлетворяют функции $C(x, \lambda)$ и $S(x, \lambda)$. Для этого нам придется рассматривать $\mathcal{E}(x, \lambda)$ как функцию от переменной x, по которой она является двоякопериодической функцией второго рода.

Нам нет надобности искать уравнение Штурма—Лиувилля с помощью дифференцирования функции $\mathcal{E}(x, \lambda)$ по x, так как мы можем воспользоваться одним готовым результатом, принадлежащим Эрмиту. Он состоит в следующем: уравнение Лямэ

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} = \{n(n+1)\,k^2\,\mathrm{sn}^2\xi + A\}\,y$$

при $n=1$ имеет решение

$$y(\xi)=\frac{\mathrm{H}(\xi-\alpha)}{\theta(\xi)}e^{\rho\xi},$$

где α и ρ — постоянные, определяемые следующими формулами:

$$\rho=\frac{\theta'(\alpha)}{\theta(\alpha)},\quad \operatorname{sn}^2\alpha=\frac{A+1+k^2}{k^2}.$$

Сравнение решения $y(\xi)$ с функцией $\mathscr{E}(x,\lambda)$ приводит к подстановке

$$\xi=ix+K,\quad \alpha=u-iK'.$$

Действительно, в силу этой подстановки

$$y(\xi)=f(u)\frac{\theta_1(ix-u)}{\theta_1(ix)}e^{ix\frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)}}.$$

Так как

$$\lambda=\frac{1}{\operatorname{sn}^2 u},$$

то необходимо еще положить

$$A+1+k^2=\lambda.$$

Из сказанного следует, что искомое уравнение Штурма—Лиувилля имеет вид

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\{2k^2\operatorname{sn}^2(ix+K;\ k)+\lambda-1-k^2\}y=0.$$

Заметим теперь, что

$$\operatorname{sn}^2(ix+K;\ k)=\frac{\operatorname{cn}^2(ix;\ k)}{\operatorname{dn}^2(ix;\ k)},$$

а с другой стороны, в силу второго главного преобразования первой степени

$$\frac{\operatorname{cn}^2(ix;\ k)}{\operatorname{dn}^2(ix;\ k)}=\frac{1}{\operatorname{dn}^2(x;\ k')}.$$

Поэтому окончательно наше уравнение Штурма—Лиувилля записывается следующим образом:

$$-\frac{d^2y}{dx^2}+(1-k^2)\frac{\operatorname{cn}^2(x;\ k')-k^2\operatorname{sn}^2(x;\ k')}{\operatorname{cn}^2(x;\ k')+k^2\operatorname{sn}^2(x;\ k')}y=\lambda y. \tag{9}$$

Нетрудно также найти константу γ в соотношении (5). Она равна

$$\gamma=k^2[C(x,0)]^2=\frac{k^2}{\operatorname{dn}^2(x;\ k')}.$$

5. Займемся теперь обобщением нашего результата. С этой целью зададимся многочленом $P(\lambda)$, положительным на множестве E, и введем абсолютно-непрерывные спектральные функции $\sigma(\lambda)$, $\tau(\lambda)$, для которых

$$\sigma'(\lambda)=\tau'(\lambda)=0\quad(\lambda\,\overline{\in}\,E)$$

и

$$\sigma'(\lambda)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda-k^2}{\lambda(\lambda-1)}}\frac{1}{P(\lambda)},\quad \tau'(\lambda)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda-k^2}}\frac{1}{P(\lambda)}\quad(\lambda\in E).$$

Мы покажем, что и эти функции* порождают некоторые изометрические (но уже не унитарные) операторы, а также некоторое уравнение

---

* В сущности, мы рассмотрим только первую.

Штурма—Лиувилля вида (1) и некоторые краевые условия, уже отличные от условий (2), (3) и зависящие определенным образом от спектрального параметра λ.

Снова введем подстановку $\lambda = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u}$, благодаря которой многочлен $P(\lambda)$ представится в виде четной эллиптической функции от u с периодами $2K$, $2iK'$. Эту функцию мы можем факторизовать с помощью якобиевых тэта-функций и записать следующим образом:

$$P(\lambda) = \Phi(u)\,\Phi(-u),$$

где $\Phi(u)$ имеет корни в нижней половине прямоугольника периодов (отвечающей верхнему листу римановой поверхности F), а $\Phi(-u)$ — в верхней половине.

Пусть многочлен $P(\lambda)$ имеет l отрицательных корней, $2m$ корней в интервале $(k^2, 1)$ и n пар комплексно сопряженных корней, так что его степень равна $2(m+n)+l = N$. В таком случае

$$\Phi(u) = A\,\frac{\prod_{j=1}^{l} \mathrm{H}(u+ic_j)\prod_{j=1}^{2m}\mathrm{H}(u-K+ib_j)\prod_{j=1}^{n}\mathrm{H}(u-a_j)\,\mathrm{H}(u+\bar{a}_j)}{[\mathrm{H}(u)]^{2(m+n)+l}},$$

где

$$0 < c_j < K',\ 0 < b_j < K',\ -K' < \operatorname{Im} a_j < 0,\ 0 < \operatorname{Re} a_j < K.$$

Введем функцию

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{2}\{E(x, \lambda) + E(x, \lambda')\}, \tag{10}$$

где

$$E(x, \lambda) = \Omega(x, u) = \Phi(u)\,\frac{\theta_1(0)\,\theta_1(u - ix - i\delta)}{\theta_1(u)\,\theta_1(ix + i\delta)}\,e^{ix\frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)}}$$

и

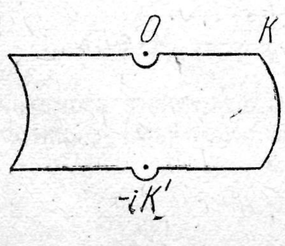
$$E(x, \lambda') = \Omega(x, -u).$$

Функция $\Omega(x, u)$ по переменной u имеет период $2K$ при любом значении параметра δ. Выберем этот параметр так, чтобы $\Omega(x, u)$ имела также период $2iK'$. Для этого нужно лишь воспользоваться формулами приведения, и мы найдем, что

$$\delta = -2\operatorname{Im}\sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{2m} b_j + \sum_{j=1}^{l} c_j.$$

Эта величина есть некоторый функционал от $P(\lambda)$ и, как мы сейчас покажем, допускает следующее представление

$$\delta = \frac{1}{2\pi}\int_E \frac{\ln P(\lambda)}{\sqrt{\lambda(\lambda - k^2)(\lambda - 1)}}\,d\lambda,$$



где радикал $\sqrt{\lambda(\lambda - k^2)(\lambda - 1)}$ положителен при $\lambda > 1$ и отрицателен при $0 < \lambda < k^2$.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим следующий интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma u\,\frac{d}{du}\ln P(\lambda)\,du,$$

взятый по границе нижней половины прямоугольника периодов, деформированного так, чтобы на его сторонах не было особых точек функции $\frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)}$. С одной стороны, интеграл I, очевидно, равен

$$\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma} u\,\frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)}\,du = \sum_{j=1}^{l} c_j + \sum_{i=1}^{2m} b_i - 2\ \mathrm{Im}\sum_{i=1}^{n} a_i + 2miK = \delta + 2miK.$$

С другой стороны,

$$I = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{K-iK'}^{K} 2K\,\frac{d}{du}\ln P(\lambda)\,du + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-K-iK'}^{K-iK'} u\,\frac{d}{du}\ln P(\lambda)\,du -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-K}^{K} u\,\frac{d}{du}\ln P(\lambda)\,du = I_1 + I_2 + I_3.$$

Прежде всего заметим, что

$$I_1 = \frac{K}{\pi}\ln\frac{P(1)}{P(k^2)} + 2m_1Ki,$$

где m_1 — целое число. Затем преобразуем интеграл I_2, разбивая его на две части и заменяя в одной из них u на $-u$. Мы найдем, что

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-iK'}^{K-iK'} u\,\frac{d}{du}\ln P(\lambda)\,du + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{iK'}^{K+iK'} u\,\frac{d}{du}\ln P(\lambda)\,du.$$

Но

$$\frac{d}{du}\ln P(\lambda) = \Psi(u)$$

есть эллиптическая функция с периодами $2K$, $2iK'$. Поэтому

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^K (u - iK')\,\Psi(u - iK')\,du + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^K (u + iK')\,\Psi(u + iK')\,du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^K u\,\{\Psi(u - iK') + \Psi(u + iK')\}\,du.$$

Так как при вещественном u функция $\Psi(u)$ вещественна, то будет вещественным также I_2. Следовательно, интегрируя по частям, найдем, что

$$I_2 = \frac{K}{\pi}\ln P(k^2) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{k^2} \frac{\ln P(\lambda)}{\sqrt{\lambda(\lambda - k^2)(\lambda - 1)}}\,d\lambda,$$

где логарифм имеет главное значение. Еще проще находится I_3:

$$I_3 = -\frac{K}{\pi}\ln P(1) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln P(\lambda)}{\sqrt{\lambda(\lambda - k^2)(\lambda - 1)}}\,d\lambda.$$

Таким образом,

$$\delta = 2(m_1 - m)\,iK + \frac{1}{2\pi}\int\limits_E \frac{\ln P(\lambda)}{\sqrt{\lambda(\lambda - k^2)(\lambda - 1)}}\,d\lambda,$$

и сравнение мнимых частей показывает, что $m_1 = m$.

Теперь займемся линейным оператором U в $L^2(0, \infty)$, который на непрерывных финитных функциях $f(x)$ определяется равенством

$$Uf(x) \equiv F(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx.$$

Мы докажем, что

$$\frac{1}{\pi}\int_E |F(\lambda)|^2 \sqrt{\frac{\lambda - k^2}{\lambda(\lambda-1)}}\,\frac{d\lambda}{P(\lambda)} = \int_0^\infty |f(x)|^2\,dx. \tag{11}$$

Отсюда будет следовать, что оператор U изометричен и отображает $L^2(0, \infty)$ на некоторое линейное многообразие $\Delta_U \subset L^2_\sigma$.

Переходя к доказательству соотношения (11), мы можем ограничиться вещественными функциями $f(x)$, непрерывно дифференцируемыми, финитными и равными нулю в некоторой окрестности точки $x = 0$. Напишем легко проверяемое равенство

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{2}\Phi(u)\,e^{-i\delta\frac{H'(u)}{H(u)}}\left\{C(x+\delta, \lambda) + i\sqrt{\frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda-k^2}}\,S(x+\delta, \lambda)\right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\Phi(-u)\,e^{i\delta\frac{H'(u)}{H(u)}}\left\{C(x+\delta, \lambda) - i\sqrt{\frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda-k^2}}\,S(x+\delta, \lambda)\right\}$$

и введем функции

$$g(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\,C(x+\delta, \lambda)\,dx, \quad h(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\,S(x+\delta, \lambda)\,dx,$$

с помощью которых выразим $F(\lambda)$, а затем и $[F(\lambda)]^2$:

$$[F(\lambda)]^2 = \frac{1}{2}P(\lambda)\left\{[g(\lambda)]^2 + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda-k^2}[h(\lambda)]^2\right\} +$$

$$+\frac{1}{4}[\Phi(u)]^2[M(u)]^2 + \frac{1}{4}[\Phi(-u)]^2[M(-u)]^2,$$

где

$$M(u) = \int_0^\infty f(x)\,\frac{\theta_1(0)\,\theta_1(u - ix - i\delta)}{\theta_1(u)\,\theta_1(ix + i\delta)}\,e^{ix\frac{H'(u)}{H(u)}}\,dx.$$

Левая часть подлежащего доказательству равенства Парсеваля (10) может быть представлена в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_E [F(\lambda)]^2\sqrt{\frac{\lambda-k^2}{\lambda(\lambda-1)}}\,\frac{d\lambda}{P(\lambda)} = \frac{1}{2\pi}\int_E [g(\lambda)]^2\sqrt{\frac{\lambda-k^2}{\lambda(\lambda-1)}}\,d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_E [h(\lambda)]^2\sqrt{\frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda-k^2}}\,d\lambda + I + I^*,$$

где

$$I = \frac{1}{4\pi}\int_E \frac{\Phi(u)}{\Phi(-u)}[M(u)]^2\sqrt{\frac{\lambda-k^2}{\lambda(\lambda-1)}}\,d\lambda$$

$$I^* = \frac{1}{4\pi}\int_E \frac{\Phi(-u)}{\Phi(u)}[M(-u)]^2\sqrt{\frac{\lambda-k^2}{\lambda(\lambda-1)}}\,d\lambda.$$

Но в силу равенства Парсеваля для операторов, порождаемых функциями $C(x, \lambda)$, $S(x, \lambda)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_E [g(\lambda)]^2 \sqrt{\frac{\lambda-k^2}{\lambda(\lambda-1)}}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_E [h(\lambda)]^2 \sqrt{\frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda-k^2}}\,d\lambda = \frac{1}{2}\int_0^\infty [f(x)]^2\,dx.$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что

$$|I| = |I^*|.$$

Поэтому для доказательства соотношения (11) мы должны установить, что $I = 0$. Обозначим через K_R окружность радиуса $R > 1$ с центром $\lambda = 0$, идущую в области G от верхнего берега разреза $(1, \infty)$ к нижнему берегу, через E_R — пересечение множества E с отрезком $[0, R]$ и, наконец, через G_R — двухсвязную область, ограниченную окружностью K_R и отрезками $[0, k^2]$, $[1, R]$. Благодаря регулярности в области G_R функции, стоящей под знаком интеграла I, интеграл от нее, взятый по границе области G_R, равен нулю. Следовательно,

$$-2\int_{E_R} \frac{\Phi(u)}{\Phi(-u)}[M(u)]^2 \sqrt{\frac{\lambda-k^2}{\lambda(\lambda-1)}}\,d\lambda = \oint_{K_R} \frac{\Phi(u)}{\Phi(-u)}[M(u)]^2 \sqrt{\frac{\lambda-k^2}{\lambda(\lambda-1)}}\,d\lambda,$$

и нам остается доказать, что при $R \to \infty$ правая часть стремится к нулю. С этой целью заметим, что на окружности K_R переменную интегрирования можно представить в виде $\lambda = Re^{i\omega}$ $(0 < \omega < 2\pi)$, а $\sqrt{\lambda} = \sqrt{R}e^{i\frac{\omega}{2}}$ имеет положительную мнимую часть. Пусть, в соответствии с условием, $f(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$ и $x \geqslant \mu$. Так как на окружности K_R при $R \to \infty$

$$\frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)} = \sqrt{\lambda} + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$$

и

$$\frac{\theta_1(0)\,\theta_1(u-ix-i\delta)}{\theta_1(u)\,\theta_1(ix+i\delta)} = 1 + \frac{A(x)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{B(x)}{\lambda} + \ldots,$$

где $A(x)$, $B(x)$, ... — аналитические функции, то

$$M(u) = \int_\varepsilon^\mu f(x)\,\frac{\theta_1(0)\,\theta_1(u-ix-i\delta)}{\theta_1(u)\,\theta_1(ix+i\delta)}\,e^{ix\frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)}}\,dx =$$

$$= \int_\varepsilon^\mu f(x)\left\{1 + \frac{C(x)}{\sqrt{\lambda}} + \ldots\right\} e^{ix\sqrt{\lambda}}\,dx.$$

Отсюда (после интегрирования главного члена по частям) найдем, что на окружности K_R при $R \to \infty$

$$M(u) = e^{-\varepsilon\sqrt{R}\sin\frac{\omega}{2}}\,O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right).$$

Следовательно, при $R \to \infty$

$$\oint_{K_R} \frac{\Phi(u)}{\Phi(-u)}[M(u)]^2 \sqrt{\frac{\lambda-k^2}{\lambda(\lambda-1)}}\,d\lambda = O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\int_0^{2\pi} e^{-2\varepsilon\sqrt{R}\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega = O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Таким образом равенство Парсеваля (11) доказано.

6. Нам остается выяснить, какова область значений Δ_U оператора U. Оказывается, что для принадлежности функции $F(\lambda) \in L^2_\sigma$ многообразию Δ_U необходимо и достаточно, чтобы функция $F(\lambda)$ была ортогональна в пространстве L^2_σ ко всякому многочлену степени $\leqslant \frac{N}{2}$, где N — степень многочлена $P(\lambda)$. Ограничимся доказательством достаточности. Итак, пусть функция $F(\lambda) \in L^2_\sigma$ ортогональна любому многочлену степени $\leqslant \frac{N}{2}$. Это значит, что

$$\int_E \frac{F(\lambda)}{P(\lambda)} \lambda^p \sqrt{\frac{\lambda - k^2}{\lambda(\lambda-1)}}\, d\lambda = 0 \quad \left(p = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right]\right). \tag{12}$$

Обозначая через $L^2(E)$ пространство L^2_σ при $P(\lambda) = 1$, замечаем, что функция $\frac{F(\lambda)}{P(\lambda)}$ принадлежит $L^2(E)$ вместе со всеми ее произведениями на $(\sqrt{\lambda})^q$ $(q = 0, 1, \ldots, N)$. Используя это обстоятельство, соотношения (12) и асимптотическое разложение функции $C(x, \lambda)$ при больших значениях $|\lambda|$, нетрудно заключить, что функция

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_E \frac{F(\lambda)}{P(\lambda)} C(x, \lambda) \sqrt{\frac{\lambda - k^2}{\lambda(\lambda-1)}}\, d\lambda \tag{13}$$

обладает следующими свойствами:

1) $g(x)$ и ее производные до порядка N включительно принадлежат $L^2(0, \infty)$,

2) при $x = 0$ функция $g(x)$ обращается в 0 вместе со всеми ее производными до производной порядка $N - 1$ включительно.

Установив эти факты, обратим равенство (13), то есть возьмем формулу

$$\frac{F(\lambda)}{P(\lambda)} = \int_0^\infty g(x)\, C(x, \lambda)\, dx$$

и перепишем ее в виде

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} \Phi(u) \Phi(-u) \int_0^\infty g(x) \frac{\theta_1(0)\, \theta_1(u - ix)}{\theta_1(u)\, \theta_1(ix)} e^{ix \frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)}} dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \Phi(u) \Phi(-u) \int_0^\infty g(x) \frac{\theta_1(0)\, \theta_1(u + ix)}{\theta_1(u)\, \theta_1(ix)} e^{-ix \frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)}} dx.$$

Затем рассмотрим функцию

$$I(u) = \Phi(-u) \int_0^\infty g(x) \frac{\theta_1(0)\, \theta_1(u - ix)}{\theta_1(u)\, \theta_1(ix)} e^{ix \frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)}} dx. \tag{14}$$

При больших $|\lambda|$

$$\Phi(-u) = O(|\sqrt{\lambda}|^N)$$

и

$$e^{ix \frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)}} = e^{ix\sqrt{\lambda}} O(1).$$

Переписав $I(u)$ в виде

$$I(u) = (\sqrt{\lambda})^N \int_0^\infty g(x)\, K(u, x)\, e^{ix\sqrt{\lambda}} dx$$

и помня свойства функции $g(x)$, мы убеждаемся в том, что $I(u)$ допускает N-кратное интегрирование по частям, причем проинтегрированный член всякий раз обращается в нуль. Произведем это интегрирование по частям в формуле (14), понимая под $g(x)$ произвольную функцию, удовлетворяющую условиям 1), 2). Мы получим тогда, что

$$I(u) = i^N \frac{\theta_1(0)}{\theta_1(u)} \int_0^\infty e^{ix\frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)}} \frac{d^N}{dx^N}\left\{g(x)\,\Phi(-u)\,\frac{\theta_1(u-ix)}{\theta_1(ix)}\left[\frac{\mathrm{H}(u)}{\mathrm{H}'(u)}\right]^N\right\} dx =$$

$$= \frac{\theta_1(0)}{\theta_1(u)} \int_0^\infty e^{ix\frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)}} \sum_{m=0}^{N} g^{(m)}(x)\, L_m(u, x)\, dx,$$

где $L_m(u, x)$ при каждом $x > 0$ есть мероморфная функция от u, для которой $u = 0$ является обыкновенной точкой. Так как $g(x)$ достаточно произвольная функция, то корни функции $\mathrm{H}'(u)$, которые в силу (14) являются для $I(u)$ регулярными точками, не могут быть полюсами функций $L_m(u, x)$. Следовательно, $L_m(u, x)$ являются целыми функциями от u. Но, в силу представления (14), при любом u

$$I(u + 2K) = I(u), \quad I(u + 2iK') = e^{-\frac{\pi}{K}\delta} I(u).$$

Отсюда, снова используя произвольность функции $g(x)$, находим, что точно таким же соотношениям должны удовлетворять функции

$$\frac{\theta_1(0)}{\theta_1(u)} L_m(u, x)\, e^{ix\frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)}}$$

при любом $x > 0$. Но в таком случае

$$M_m(u, x) = \frac{\theta_1(0)}{\theta_1(u)} L_m(u, x)$$

являются двоякопериодическими функциями второго рода с множителями

$$1,\ e^{-\frac{\pi}{K}(\delta + x)}.$$

Так как $M_m(u, x)$ имеет в основном прямоугольнике периодов только один полюс, то в этом прямоугольнике будет только один корень. В силу теоремы Эрмита поэтому

$$M_m(u, x) = A_m(x)\,\frac{\theta_1(0)\,\theta_1(u - ix - i\delta)}{\theta_1(u)\,\theta_1(ix + i\delta)},$$

где, как нетрудно проверить, $A_m(x) = L_m(0, x) = \text{const}\ \delta_{m,N}$ $(m = 0, 1, \ldots, N)$. Следовательно,

$$I(u) = \int_0^\infty f(x)\,\frac{\theta_1(0)\,\theta_1(u - ix - i\delta)}{\theta_1(u)\,\theta_1(ix + i\delta)}\, e^{ix\frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)}}\, dx,$$

где

$$f(x) = \text{const}\ \ g^{(N)}(x).$$

Полученное выражение для $I(u)$ позволяет написать соответствующее выражение для $I(-u)$. Пользуясь этими выражениями, найдем, что

$$F(\lambda) = \frac{1}{2}\Phi(u)\, I(u) + \frac{1}{2}\Phi(-u)\, I(-u) = \int_0^\infty f(x)\,\varphi(x, \lambda)\, dx.$$

Тем самым наше утверждение доказано.

7. Дифференциальное уравнение Штурма—Лиувилля, которому $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет, пишется непосредственно. Действительно, если положить

$$Q(x) = (1-k^2)\frac{\operatorname{cn}^2(x;\, k') - k^2 \operatorname{sn}^2(x;\, k')}{\operatorname{cn}^2(x;\, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(x;\, k')},$$

то это уравнение будет иметь вид

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x+\delta)\, y = \lambda y.$$

Чтобы полностью охарактеризовать решение $\varphi(x, \lambda)$ этого уравнения, необходимо указать краевые условия (при $x=0$), которым $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет.

Из представления (10) мы находим, что

$$\varphi(0, \lambda) = \frac{1}{2}\{E(0, \lambda) + E(0, \lambda')\}, \tag{15}$$

где

$$E(0, \lambda) = \Phi(u)\frac{\theta_1(0)\,\theta_1(u - i\delta)}{\theta_1(u)\,\theta_1(i\delta)}.$$

Эта функция на римановой поверхности F однозначна. Она имеет полюс порядка 1 в точке $\lambda = k^2$ и полюс порядка N в точке $\lambda = \infty$, она обращается в 0 на листе G в корнях многочлена $P(\lambda)$. Этими данными функция $E(0, \lambda)$ определяется с точностью до постоянного множителя. «Недостающим» ее корнем является точка

$$c = \frac{k^2}{\operatorname{dn}^2(\delta;\, k')},$$

которой отвечает $u = K - iK' + i\delta$. Этот корень лежит в пустом интервале $[k^2, 1]$ на одном из листьев G, G'.

В силу сказанного функция $E(0, \lambda)$ может быть представлена в виде

$$E(0, \lambda) = A(\lambda) + i\sqrt{\frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda-k^2}}\,B(\lambda),$$

где $A(\lambda)$ — многочлен степени $\left[\frac{N}{2}\right]$, а $B(\lambda)$ — степени $\left[\frac{N-1}{2}\right]$. Так как

$$E(0, \lambda)\, E(0, \lambda') = [A(\lambda)]^2 + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda-k^2}[B(\lambda)]^2 =$$

$$= P(\lambda)\frac{[\theta_1(0)]^2\,\theta_1(u-i\delta)\,\theta_1(u+i\delta)}{[\theta_1(i\delta)]^2\,[\theta_1(u)]^2} = P(\lambda)\frac{\lambda-c}{\lambda-k^2},$$

то многочлены $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ вещественны. На основании формулы (15)

$$\varphi(0, \lambda) = A(\lambda).$$

Далее, с помощью равенства

$$\frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)} - \frac{\theta_1'(u-i\delta)}{\theta_1(u-i\delta)} - \frac{\theta_1'(i\delta)}{\theta_1(i\delta)} = \frac{\sqrt{\lambda(\lambda-k^2)(\lambda-1)} + \sqrt{c(c-k^2)(c-1)}}{\lambda - c}$$

найдём без труда, что

$$\frac{\varphi'(0, \lambda)}{\varphi(0, \lambda)} = \frac{1}{\lambda-c}\left\{\lambda(\lambda-1)\frac{B(\lambda)}{A(\lambda)} - c(c-1)\frac{B(c)}{A(c)}\right\}.$$

В окончательном виде наш результат может быть сформулирован следующим образом.

Если $P(\lambda)$ — *многочлен степени* N, *положительный на множестве*

(E) $$[0, k^2],\ [1, \infty),$$

то спектральной плотности

$$\sigma'(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{\lambda - k^2}{\lambda(\lambda-1)}}\dfrac{1}{P(\lambda)} & (\lambda \in E) \\ 0 & (\lambda \overline{\in} E) \end{cases}$$

отвечает уравнение Штурма—Лиувилля

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x+\delta)\,y = \lambda y, \tag{16}$$

где

$$Q(x) = (1-k^2)\frac{\mathrm{cn}^2(x;\,k') - k^2\,\mathrm{sn}^2(x;\,k')}{\mathrm{cn}^2(x;\,k') + k^2\,\mathrm{sn}^2(x;\,k')},$$

а число δ *определяется формулой*

$$\delta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_E \frac{\ln P(\lambda)}{\sqrt{\lambda(\lambda-k^2)(\lambda-1)}}\,d\lambda,$$

и краевое условие при $x = 0$

$$\frac{\varphi'(0,\lambda)}{\varphi(0,\lambda)} = \frac{1}{\lambda - c}\left\{\lambda(\lambda-1)\frac{B(\lambda)}{A(\lambda)} - c(c-1)\frac{B(c)}{A(c)}\right\},\ \varphi(0,\lambda) = A(\lambda), \tag{17}$$

где

$$c = \frac{k^2}{\mathrm{dn}^2(\delta;\,k')},$$

а $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ — *некоторые вещественные многочлены степеней* $\left[\frac{N}{2}\right]$, $\left[\frac{N-1}{2}\right]$, *связанные с* $P(\lambda)$ *равенством*

$$P(\lambda)\frac{\lambda - c}{\lambda - k^2} = [A(\lambda)]^2 + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda - k^2}[B(\lambda)]^2.$$

Решение $\varphi(x,\lambda)$ *уравнения* (16), *удовлетворяющее условиям* (17), *порождает изометрический оператор* U, *который переводит* $L^2(0,\infty)$ *в линейное многообразие* Δ_U *всех тех функций из* L^2_σ, *которые ортогональны ко всякому многочлену степени* $\leqslant \frac{N}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер, Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов. «Докл. АН СССР», **141**, 2 (1961).
2. Н. И. Ахиезер. Об одном уравнении Штурма—Лиувилля на полуоси «Зап. мех.-матем. ф-та и Харьковск. матем. об-ва, серия 4», 29 (1963).
3. Н. И. Ахиезер. Элементы теории эллиптических функций, М.—Л., 1948.