УДК 517.9

В. А. МАРЧЕНКО

ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим краевую задачу Штурма — Лиувилля:

$$-y'' + q(x)\, y = \mu\, y; \quad y'(0) = 0; \quad 0 \leqslant x < \infty \tag{1}$$

с вещественным локально суммируемым потенциалом $q(x)$ и обозначим через $c(\lambda, x)$ решение уравнения $-y'' + q(x)\, y = \lambda^2 y$ при начальных данных $c(\lambda, 0) = 1$, $c'(\lambda, 0) = 0$. Согласно теореме Вейля существует, по крайней мере, одна неубывающая спектральная функция этой задачи $\rho(\mu)$ $(-\infty < \mu < \infty)$, порождающая формулы разложения:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\sqrt{\mu}, f)\, c(\sqrt{\mu}, x)\, d\rho(\mu);$$

$$c(\sqrt{\mu}, f) = \int_{0}^{\infty} f(x)\, c(\sqrt{\mu}, x)\, dx$$

и равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^\infty c(\sqrt{\mu}, f)\overline{c(\sqrt{\mu}, g)}\,d\rho(\mu),$$

где $f(x)$, $g(x)$ — произвольные функции из пространства $L_2(0, \infty)$, а интегралы сходятся в метриках пространств $L_2(0, \infty)$ и $L_2(d\rho(\mu))$ соответственно.

В 1949 г., подготавливая первое издание монографии [1], Н. И. Ахиезер заинтересовался вопросом, может ли спектральная функция быть ограниченной. Этот вопрос возбудил интерес к исследованию поведения спектральных функций при $\mu \to \pm\infty$. Оказалось [2], что при $\mu \to -\infty$ спектральные функции быстро стремятся к конечным пределам $\rho(-\infty)$, а при $\mu \to +\infty$ они удовлетворяют асимптотическому равенству:

$$\rho(\mu) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\mu} + o(\sqrt{\mu}),$$

дающему ответ на вопрос Наума Ильича. Вскоре Б. М. Левитан [3] уточнил эту асимптотическую формулу, доказав, что при $\mu \to +\infty$

$$\rho(\mu) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\mu} + \rho(-\infty) + o(1).$$

В настоящей работе устанавливается зависимость между скоростью убывания при $\mu \to +\infty$ функции

$$\varepsilon(\mu) = \rho(\mu) - \frac{2}{\pi}\sqrt{\mu} - \rho(-\infty)$$

и скоростью роста при $x \to +\infty$ функции

$$\sigma(x) = \int_0^x |q(t)|\,dt.$$

Одновременно с задачей (I) рассмотрим семейство аналогичных краевых задач с потенциалами

$$q_l(x) = \begin{cases} q(x) & 0 \leqslant x \leqslant l; \\ 0 & l < x < \infty. \end{cases}$$

Обозначим их спектральные функции через $\rho_l(\mu)$, а решения соответствующих уравнений — через $c_l(\lambda, x)$.

Так как $c(\lambda, x) \equiv c_l(\lambda, x)$ при $x \in [0, l]$, то $c(\sqrt{\mu}, f) = c_l(\sqrt{\mu}, f)$ для всех функций $f(x)$, равных нулю при $x > l$, откуда следует, что для таких функций при $x \in [0, l]$ выполняются равенства

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty c(\sqrt{\mu}, f)\,c(\sqrt{\mu}, x)\,d\rho(\mu) = \int_{-\infty}^\infty c(\sqrt{\mu}, f)\,c(\sqrt{\mu}, x)\,d\rho_l(\mu).$$

Интегралы в этих равенствах абсолютно сходятся, если функци $c(\lambda, f)$ суммируема на вещественной оси $-\infty < \lambda < \infty$ [1], и в этом случае

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} c(\sqrt{\mu}, f)\, d\rho(\mu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(\sqrt{\mu}, f)\, d\rho_l(\mu) = f(0).$$

Из существования операторов преобразования и теоремы Пели — Винера следует, что множество обобщенных преобразований Фурье $c(\lambda, f)$ функций $f(x)$, принадлежащих пространству $L_2(0, \infty)$ и равных нулю при $x > l$, совпадает с множеством всех четных функций экспоненциального типа l квадратично суммируемых на вещественной оси [4]. Согласно вышесказанному отсюда следует, что на множестве $Z(l)$ всех четных функций $g(\lambda)$ экспоненциального типа $\leqslant l$, суммируемых на вещественной оси, выполняются равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\sqrt{\mu})\, d\rho(\mu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\sqrt{\mu})\, d\rho_l(\mu).$$

Заметим теперь, что вместе с функцией $g(\lambda)$ множеству $Z(l)$ принадлежат также все функции вида $g(\sqrt{\lambda^2 + c})$. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\sqrt{\mu + c})\, d\rho(\mu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\sqrt{\mu + c})\, d\rho_l(\mu),$$

откуда следует, что на множестве $Z(l)$ при всех вещественных значениях c выполняются равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\sqrt{\mu})\, d\rho(\mu - c) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d(\sqrt{\mu})\, d\rho_l(\mu - c). \qquad ($$

причем интегралы в них сходятся абсолютно.

Как известно, спектр краевой задачи (1) с финитным потенциало $q_l(x)$ состоит из абсолютно непрерывной части, заполняющей вс положительную полуось, и конечного числа отрицательных собствен ных значений. Спектральная функция $\rho_l(\mu)$ этой задачи непрерывн дифференцируема на положительной полуоси, причем

$$\frac{d\rho_l(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{\pi\sqrt{\mu}\,|1 + h_l(\sqrt{\mu})|^2} \quad (0 < \mu < \infty), \qquad ($$

где

$$h_l(\lambda) = \frac{i}{\lambda}\int\limits_0^l e^{i\lambda t} q(t)\, c(\lambda, t)\, dt. \qquad (3$$

Оценим нижнюю границу спектра и скорость сходимости к единиц функции $|1 + h_l(\lambda)|^{-2}$ при $\lambda \to +\infty$.

Из интегрального уравнения

$$c(\lambda, x) = \cos\lambda x + \lambda^{-1}\int\limits_0^x \sin\lambda(x - t)\, q(t)\, c(\lambda, t)\, dt, \qquad (4$$

которому удовлетворяет решение $c(\lambda, x)$, следует, что в замкнутой верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$|e^{i\lambda x}c(\lambda, x)| \leqslant 1 + \int_0^x |\lambda|^{-1}|q(t)||e^{i\lambda t}c(\lambda, t)|\,dt.$$

Поэтому функция $|e^{i\lambda x}c(\lambda, x)|$ мажорируется решением уравнения $y' = |\lambda|^{-1}|q(x)|\,y$ с начальным условием $\tilde{y}(0) = 1$, т. е.

$$|e^{i\lambda x}c(\lambda, x)| \leqslant \exp(|\lambda|^{-1}\sigma(x)), \tag{5}$$

где

$$\sigma(x) = \int_0^x |q(t)|\,dt. \tag{6}$$

Из этой оценки и уравнения (4) следует далее, что

$$|e^{i\lambda x}(c(\lambda, x) - \cos\lambda x)| \leqslant e^{|\lambda|^{-1}\sigma(x)} - 1. \tag{7}$$

Так как $q_l(x) = 0$ при $x > l$, то согласно (4), (3′) на полуоси $l < x < \infty$ решения $c_l(\lambda, x)$ являются такой комбинацией экспонент:

$$c_l(\lambda, x) = \frac{1}{2}\{e^{i\lambda x}(1 + h_l(-\lambda)) + e^{-i\lambda x}(1 + h_l(\lambda))\}.$$

Поэтому они принадлежат пространству $L_2(0, \infty)$ только при тех значениях λ из верхней полуплоскости, которые являются корнями уравнения

$$1 + h_l(\lambda) \equiv 1 + i\lambda^{-1}\int_0^l e^{i\lambda t}q(t)\,c(\lambda, t)\,dt = 0.$$

Но согласно (5), (6)

$$|h_l(\lambda)| = \left|i\lambda^{-1}\int_0^l e^{i\lambda t}q(t)\,c(\lambda, t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^l |\lambda|^{-1}|q(t)|\,e^{|\lambda|^{-1}\sigma(t)}dt = e^{|\lambda|^{-1}\sigma(l)} - 1, \tag{8}$$

откуда следует, что все корни этого уравнения лежат в области $\exp(|\lambda|^{-1}\sigma(l)) - 1 \geqslant 1$, т. е. их модули удовлетворяют неравенству

$$|\lambda| \leqslant (\ln 2)^{-1}\sigma(l) \leqslant \frac{3}{2}\sigma(l)$$

и нижняя граница спектра лежит правее точки $-\frac{9}{4}\sigma(l)^2$. Таким образом, полуось $-\infty < \mu < -\frac{9}{4}\sigma(l)^2$ свободна от спектра и спектральная функция $\rho_l(\mu)$ на ней постоянна:

$$\rho_l(\mu) = \rho_l(-\infty), \quad -\infty < \mu < -\frac{9}{4}\sigma(l)^2. \tag{9}$$

Для оценки функции $|1 + h_l(\lambda)|^{-2}$ мы воспользуемся выполняющимся в круге $|z| < 1$ неравенством

$$||1+z|^{-2} - (1 - z - \bar{z})| \leqslant |z|^2 \left\{3 + \frac{3|z|}{1-|z|} + \frac{|z|}{(1-|z|)^2}\right\},$$

из которого вытекает такое неравенство:

$$||1+z|^{-2} - (1 - z - \bar{z})| \leqslant |z|^2 \{3 + 18|z|\} \tag{10}$$

для круга $|z| \leqslant \frac{2}{3}$.

Пусть $\alpha = |\lambda|^{-1}\sigma(l) \leqslant \frac{1}{2}$, т. е. будем рассматривать вещественные λ, удовлетворяющие неравенству $|\lambda| \geqslant 2\sigma(l)$. Так как $e^\alpha - 1 < \alpha\left(1 + \frac{2}{3}\alpha\right)$, если $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, то согласно (8) $|h_l(\lambda)| \leqslant \alpha\left(1 + \frac{2}{3}\alpha\right) \leqslant \frac{2}{3}$ и в силу (10)

$$|1 + h_l(\lambda)|^{-2} - (1 - 2\operatorname{Re} h_l(\lambda))| \leqslant \alpha^2 \left(1 + \frac{2}{3}\alpha\right)^2 \left(3 + 18\alpha\left(1 + \frac{2}{3}\alpha\right)\right) \leqslant \alpha^2 \left[3 + \alpha\left\{47 + \frac{1}{3}\right\}\right]. \tag{11}$$

Далее, из формулы (3′) и оценки (7) следует, что

$$2\operatorname{Re} h_l(\lambda) = 2\lambda^{-1}\int_0^l \sin\lambda t c(\lambda, t)\, q(t)\, dt =$$

$$= 2\lambda^{-1}\int_0^l \sin\lambda t \cos\lambda t q(t)\, dt + 2\lambda^{-1}\int_0^l \sin\lambda t\,(c(\lambda, t) - \cos\lambda t)\, q(t)\, dt,$$

$$\left|2\lambda^{-1}\int_0^l \sin\lambda t\,(c(\lambda, t) - \cos\lambda t)\, q(t)\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^l |\lambda|^{-1}\left(e^{|\lambda|^{-1}\sigma(t)} - 1\right)|q(t)|\, dt =$$

$$= 2\left\{e^{|\lambda|^{-1}\sigma(l)} - 1 - |\lambda|^{-1}\sigma(l)\right\} = 2\left(e^\alpha - 1 - \alpha\right)$$

и так как при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ $e^\alpha - 1 - \alpha \leqslant \frac{\alpha^2}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$, то

$$\left|2\operatorname{Re} h_l(\lambda) - \lambda^{-1}\int_0^l \sin 2\lambda t q(t)\, dt\right| \leqslant \alpha^2\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right). \tag{12}$$

Сопоставление неравенств (11), (12) показывает, что

$$|1 + h_l(\lambda)|^{-2} = 1 - \int_0^l \frac{\sin 2\lambda t}{\lambda} q(t)\, dt + \frac{\sigma(l)^2}{\lambda^2}\left(4 + 48\frac{\sigma(l)}{|\lambda|}\right)\theta(\lambda, l),$$

где $|\theta(\lambda, l)| \leqslant 1$ при $|\lambda| \geqslant 2\sigma(l)$.

Отсюда и из формулы (3) следует, что при $\sqrt{\mu} \geqslant 2\sigma(l)$

$$\frac{d\rho_l(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{\pi\sqrt{\mu}\,|1 + h_l(\sqrt{\mu})|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi\sqrt{\mu}}\left\{1 + \frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}} + 4\left(\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}}\right)^2 + 48\left(\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}}\right)^3\right\} \leqslant \frac{1}{\pi\sqrt{\mu}}\left\{1 + 15\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}}\right\}, \quad (13)$$

а при $\sqrt{\mu_1} > \sqrt{\mu} \geqslant 2\sigma(l)$

$$\rho_l(\mu_1) - \rho_l(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\mu_1} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}\,|1 + h_l(\sqrt{\mu})|^2} = \frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{\mu}}^{\sqrt{\mu_1}} \frac{d\lambda}{|1 + h_l(\lambda)|^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu} - \int_0^l [J(2\sqrt{\mu}\,t) - J(2\sqrt{\mu_1}\,t)]\,q(t)\,dt +\right.$$

$$\left. + 4\sigma(l)^2\left[\frac{1}{\sqrt{\mu}} - \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} + 6\sigma(l)\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_1}\right)\right]\theta(l, \mu, \mu_1)\right\},$$

где

$$J(2\sqrt{\mu}\,t) = \int_{2\sqrt{\mu}t}^{\infty} \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi = \int_{\sqrt{\mu}}^{\infty} \frac{\sin 2\lambda t}{\lambda}\,d\lambda$$

и $|\theta(l, \mu, \mu_1)| \leqslant 1$. Устремляя здесь μ_1 к $+\infty$ и замечая, что $\lim\limits_{\mu_1 \to +\infty}\left(\rho_l(\mu_1) - \frac{2}{\pi}\sqrt{\mu_1}\right) = \rho_l(-\infty)$, получаем следующую формулу для спектральных функций $\rho_l(\mu)$:

$$\rho_l(\mu) - \rho_l(-\infty) = \frac{2}{\pi}\left\{\sqrt{\mu} + \int_0^l J(2\sqrt{\mu}\,t)\,q(t)\,dt +\right.$$

$$\left. + 4\frac{\sigma(l)^2}{\sqrt{\mu}}\left(1 + 6\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}}\right)\theta(l, \mu)\right\}, \quad (14)$$

где $|\theta(l, \mu)| \leqslant 1$ при $\sqrt{\mu} \geqslant 2\sigma(l)$.

Из этой формулы и неравенства

$$|J(x)| \leqslant \frac{\pi}{2} \quad (0 \leqslant x < \infty) \quad (15)$$

вытекает такая оценка для спектральных функций при $\sqrt{\mu} \geqslant 2\sigma(l)$:

$$\rho_l(\mu) - \rho_l(-\infty) \leqslant \frac{2}{\pi}\sqrt{\mu}\left\{1 + \frac{\pi}{2}\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}} + 4\left(\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + 24\left(\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}}\right)^3\right\} \leqslant 12\frac{\sqrt{\mu}}{\pi}. \quad (16)$$

Полагая

$$Q(x) = \int_0^x q(t)\,dt,$$

после интегрирования по частям находим, что

$$\int_0^a J(2\sqrt{\mu}t)\,q(t)\,dt = J(2\sqrt{\mu}a)\,Q(a) + \int_0^a \frac{\sin 2\sqrt{\mu}\,t}{t}\,Q(t)\,dt$$

и, значит, при любых положительных $a \leqslant l$

$$\left|\int_0^l J(2\sqrt{\mu}t)\,q(t)\,dt - \int_0^a \frac{\sin 2\sqrt{\mu}\,t}{t}\,Q(t)\,dt\right| =$$

$$= \left|\int_a^l J(2\sqrt{\mu}t)\,q(t)\,dt + J(2\sqrt{\mu}\,a)\,Q(a)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |J(2\sqrt{\mu}\,a)|\,|Q(a)| + \max_{t \geqslant a}|J(2\sqrt{\mu}\,t)|\int_a^l |q(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sigma(a)}{a\sqrt{\mu}} + \frac{\sigma(l)-\sigma(a)}{a\sqrt{\mu}} = \frac{\sigma(l)}{a\sqrt{\mu}},$$

так как $|J(x)| \leqslant 2x^{-1}$ при всех $x > 0$. Поэтому из формулы (14) следует также, что

$$\left|\rho_l(\mu) - \rho_l(-\infty) - \frac{2}{\pi}\left\{\sqrt{\mu} + \int_0^a \frac{\sin 2\sqrt{\mu}\,t}{t}\,Q(t)\,dt\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\sigma(l)}{a\sqrt{\mu}} + 4\frac{\sigma(l)^2}{\sqrt{\mu}}\left(1 + 6\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}}\right)\right\} \tag{17}$$

при всех положительных $a \leqslant l$ и $\mu \geqslant 4\sigma(l)^2$.

Полученные оценки спектральных функций $\rho_l(\mu)$ позволяют уточнить поведение спектральной функции $\rho(\mu)$ исходной краевой задачи с помощью равенств (2). Для этого сначала нужно найти хорошее приближение ступенчатой функции

$$\chi\left(\frac{\xi}{\mu}\right) = \begin{cases} 1 & -\infty < \xi < \mu \\ \frac{1}{2} & \xi = \mu \\ 0 & \mu < \xi < \infty \end{cases}$$

функциями вида $g(\sqrt{\xi})$, где $g(\lambda) \in Z(l)$.

Определим четную функцию $\varphi(x)$ равенствами

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left(\cos\frac{x}{4}\right)^4 & |x| < 2\pi; \\ 0 & |x| \geqslant 2\pi. \end{cases}$$

Она имеет три абсолютно непрерывные производные и ограниченную производную четвертого порядка. Так как $\left(\cos\frac{x}{4}\right)^4$, так же, как

$$\frac{\left(\cos\frac{x}{4}\right)^4-1}{x}=\frac{\cos^2\frac{x}{4}-1}{x}\left(1+\cos^2\frac{x}{4}\right)=-\frac{\sin\frac{x}{4}}{x}\sin\frac{x}{4}\left(1+\cos^2\frac{x}{4}\right)$$

являются целыми функциями экспоненциального типа 1, причем модуль первой не превышает 1, а второй — $\sqrt{\frac{2}{27}}$, то согласно неравенству С. Н. Бернштейна модули их производных всех порядков не превышают соответственно 1 и $\sqrt{\frac{2}{27}}$. Следовательно,

$$\max_{|x|\leqslant 2\pi}|\varphi^{(k)}(x)|\leqslant 1,\quad \max_{|x|\leqslant 2\pi}\left|\left(\frac{\varphi(x)-1}{x}\right)^{(k)}\right|\leqslant\sqrt{\frac{2}{27}},\tag{18}$$

а при $|x|>2\pi$

$$\varphi^{(k)}(x)=0,\quad \left(\frac{\varphi(x)-1}{x}\right)^{(k)}=(-1)^{k+1}k!\,x^{-(k+1)}.\tag{19}$$

Рассмотрим функцию

$$f(\lambda,N)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nx}{x}\varphi(x)\cos\lambda x\,dx,$$

где N — произвольное положительное число. Поскольку функция $\frac{\sin Nx}{x}\varphi(x)$ — четырежды дифференцируема и равна нулю вне интервала $(-2\pi,\ 2\pi)$, $f(\lambda,N)$ является четной суммируемой на вещественной оси функцией экспоненциального типа 2π, т. е. $f(\lambda,N)\in Z(2\pi)$. При вещественных значениях λ

$$f(\lambda,N)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nx}{x}\cos\lambda x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin Nx\cos\lambda x\left(\frac{\varphi(x)-1}{x}\right)dx=$$

$$=D\left(\frac{\lambda}{N}\right)+S(N+\lambda)+S(N-\lambda),\tag{20}$$

где $D\left(\frac{\lambda}{N}\right)$ — разрывный множитель Дирихле:

$$D\left(\frac{\lambda}{N}\right)=\begin{cases}1 & |\lambda|<N;\\ \frac{1}{2} & |\lambda|=N;\\ 0 & |\lambda|>N\end{cases}$$

$$S(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\xi x\left(\frac{\varphi(x)-1}{x}\right)dx.$$

Интеграл в правой части последнего равенства можно четыре раз интегрировать по частям. Поэтому

$$(1+\xi^2)^2 S(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sin\xi x\left\{\frac{\varphi(x)-1}{x} - 2\left(\frac{\varphi(x)-1}{x}\right)'' + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\varphi(x)-1}{x}\right)^{\mathrm{IV}}\right\} dx,$$

откуда, используя оценки (15), (18), (19), находим, что $|S(\xi)| \leqslant \leqslant 3(1+\xi^2)^{-2}$ и тем более $|S(\xi)| \leqslant A(\xi)^2$, где

$$A(\xi) = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{ch}\pi - 1}\left(\frac{\operatorname{ch}\pi - \cos\pi\xi}{1+\xi^2}\right). \tag{21}$$

Отсюда согласно (20) следует, что

$$\left|D\left(\frac{\lambda}{N}\right) - f(\lambda, N)\right| \leqslant |S(N+\lambda)| + |S(N-\lambda)| \leqslant$$

$$\leqslant A(N+\lambda)^2 + A(N-\lambda)^2 \leqslant (A(N+\lambda) + A(N-\lambda))^2,$$

т. е. при вещественных значениях λ

$$-g_1(\lambda, N) + f(\lambda, N) \leqslant D\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) \leqslant f(\lambda, N) + g_1(\lambda, N),$$

где функции $f(\lambda, N)$ и

$$g_1(\lambda, N) = (A(N+\lambda) + A(N-\lambda))^2 \tag{22}$$

принадлежат множеству $Z(2\pi)$. Так как

$$D\left(\frac{\lambda}{N}\right) = D\left(\frac{\lambda^2}{N^2}\right) = \chi\left(\frac{\nu}{N^2}\right) (\nu = \lambda^2 > 0),$$

то полученные неравенства эквиваленты таким:

$$-g_1(\sqrt{\nu}, N) + f(\sqrt{\nu}, N) \leqslant \chi\left(\frac{\nu}{N^2}\right) \leqslant f(\sqrt{\nu}, N) +$$

$$+ g_1(\sqrt{\nu}, N). \tag{23}$$

Заметим, что функция $A(N+\lambda) + A(N-\lambda)$ принимает вещественные значения как при вещественных, так и при чисто мнимых значениях λ. Поэтому неравенство

$$g_1(\sqrt{\nu}, N) = \{A(N+\sqrt{\nu}) + A(N-\sqrt{\nu})\}^2 \geqslant 0$$

выполняется на всей вещественной оси $-\infty < \nu < \infty$.

Рассмотрим теперь чисто мнимые значения $\lambda = i\tau$ $(\tau > 0)$. В этом случае

$$f(i\tau, N) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x}\varphi(x)\operatorname{ch}\tau x dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sin Nx\,\varphi(x)\left\{\int_0^\tau \operatorname{sh}\xi x d\xi + x^{-1}\right\}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nx}{x}dx +$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin Nx\left(\frac{\varphi(x)-1}{x}\right)dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\tau d\xi\int_{-2\pi}^{2\pi}\sin Nx\operatorname{sh}\xi x\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= 1 + 2S(N) + \int_0^\tau\{C(N+i\xi) - C(N-i\xi)\}d\xi,$$

где

$$C(N\pm i\xi) = \frac{i}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi}\varphi(x)\cos(N\pm i\xi)xdx =$$

$$= i(2\pi(N\pm i\xi)^4)^{-1}\int_{-2\pi}^{2\pi}\varphi^{IV}(x)\cos(N\pm i\xi)xdx$$

и согласно предыдущему $|S(N)| \leqslant 3(1+N^2)^{-2}$.

Так как $|\varphi^{IV}(x)| \leqslant 1$, то

$$|C(N\pm i\xi)| \leqslant (2\pi(N^2+\xi^2)^2)^{-1}\int_{-2\pi}^{2\pi}|\cos(N\pm i\xi)x|dx \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi(N^2+\xi^2)^2)^{-1}\int_{-2\pi}^{2\pi}\operatorname{ch}\xi xdx = \frac{\operatorname{sh}2\pi\xi}{\pi(N^2+\xi^2)^2\xi}$$

и, значит,

$$\left|\int_0^\tau\Big\{C(N+i\xi) - C(N-i\xi)\Big\}d\xi\right| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\tau\frac{\operatorname{sh}2\pi\xi}{\xi(N^2+\xi^2)^2}d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{\operatorname{ch}2\pi\tau - 1}{\tau^2}\frac{\tau}{(N^2+\tau^2)^2} + \int_0^\tau\frac{\operatorname{ch}2\pi\xi - 1}{\xi^2}\left(\frac{1}{(N^2+\xi^2)^2} + \frac{4\xi^2}{(N^2+\xi^2)^3}\right)d\xi\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\operatorname{ch}2\pi\tau - 1}{\pi^2\tau^2}\left\{\frac{1}{N^3} + \frac{1}{N^3}\int_0^{N\tau}\frac{1+5t^2}{(1+t^2)^3}\right\}dt \leqslant \frac{3}{\pi^2N^3}\frac{\operatorname{ch}2\pi\tau - 1}{\tau^2},$$

откуда согласно (24) следует, что

$$|1 - f(i\tau, N)| \leqslant 2|S(N)| + \frac{3}{\pi^2N^3}\frac{\operatorname{ch}2\pi\tau - 1}{\tau^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{6}{(1+N^2)^2} + \frac{3}{\pi^2N^3}\frac{\operatorname{ch}2\pi\tau - 1}{\tau^2} \leqslant \frac{6}{\pi^2N^3}\frac{\operatorname{ch}2\pi\tau - 1}{\tau^2},$$

т. е. при $\lambda = i\tau$

$$|1 - f(\lambda, N)| \leqslant g_2(\lambda, N), \tag{25}$$

где функция

$$g_2(\lambda, N) = \frac{6}{\pi^2 N^3} \frac{\operatorname{ch} 2\pi\tau - 1}{\tau^2} = \frac{12}{N^3}\left(\frac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda}\right)^2 \tag{26}$$

принадлежит множеству $Z(2\pi)$ и принимает неотрицательные значения всех вещественных и чисто мнимых значениях λ. Так как при отрицательных значениях ν $\chi\left(\frac{\nu}{N^2}\right) = 1$, то согласно (25) на отрицательной полуоси $-\infty < \nu < 0$ выполняются неравенства

$$-g_2(\sqrt{\nu}, N) + f(\sqrt{\nu}, N) \leqslant \chi\left(\frac{\nu}{N^2}\right) \leqslant$$
$$\leqslant f(\sqrt{\nu}, N) + g_2(\sqrt{\nu}, N), \tag{27}$$

причем функция $g_2(\sqrt{\nu}, N)$ неотрицательна на всей вещественной оси $-\infty < \nu < \infty$.

Содержащиеся в неравенствах (23), (27) функции $g_1(\sqrt{\nu}, N)$, $g_2(\sqrt{\nu}, N)$ неотрицательны при всех вещественных значениях ν. Поэтому каждая из них мажорируется функцией

$$g(\sqrt{\nu}, N) = g_1(\sqrt{\nu}, N) + g_2(\sqrt{\nu}, N) \tag{28}$$

и неравенства

$$-g(\sqrt{\nu}, N) + f(\sqrt{\nu}, N) \leqslant \chi\left(\frac{\nu}{N^2}\right) \leqslant f(\sqrt{\nu}, N) + g(\sqrt{\nu}, N)$$

выполняются на всей вещественной оси $-\infty < \nu < \infty$.

Полагая здесь $\nu = \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \xi$, $N = \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}$, получаем выполняющиеся при всех $\xi \in (-\infty, \infty)$ и $\mu \in (0, \infty)$ неравенства

$$-g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) + f\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) \leqslant \chi\left(\frac{\xi}{\mu}\right) \leqslant$$
$$\leqslant f\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) + g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right),$$

в которых функции $\left(g\frac{l\lambda}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right)$, $f\left(\frac{l\lambda}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right)$ принадлежат множеству $Z(l)$. Из этих неравенств и тождеств (2) следует, что

$$|\rho(\mu - c) - \rho(-\infty) - (\rho_l(\mu - c) - \rho_l(-\infty)| \leqslant$$
$$\leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) d\rho_l(\xi - c)$$

при всех $c \in (-\infty, \infty)$, а так как согласно (9) $\rho_l\left(\xi - \frac{9}{4}\sigma(l)^2\right) = \rho_l(-\infty) = \mathrm{const}$ при всех $\xi \leqslant 0$, то, беря $c = \frac{9}{4}\sigma(l)^2$, получаем следующее неравенство:

$$\left|\rho\left(\mu - \frac{9}{4}\sigma(l)\right)^2 - \rho(-\infty) - \left(\rho_l\left(\mu - \frac{9}{4}\sigma(l)^2\right) - \rho_l(-\infty)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^\infty g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) d\rho_l\left(\xi - \frac{9}{4}\sigma(l)^2\right). \tag{29}$$

Для оценки интеграла, стоящего в правой части этого неравенства, разобьем его на два:

$$J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\mu} g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) d\rho_l\left(\xi - \frac{9}{4}\sigma(l)^2\right),$$

$$J_2 = \int_{\frac{1}{2}\mu}^\infty g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) d\rho_l\left(\xi - \frac{9}{4}\sigma(l)^2\right)$$

и оценим каждый из них при

$$\mu \geqslant 2\left(4 + \frac{9}{4}\right)\sigma(l)^2. \tag{30}$$

Из формул (21), (22), (26), (28) и неравенства $\left(\frac{\operatorname{ch}\pi + 1}{\operatorname{ch}\pi - 1}\right)^2 < \frac{3}{2}$ следует, что при положительных значениях ξ и μ

$$g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) \leqslant 12\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^3\left(\frac{\sin\frac{l\sqrt{\xi}}{2}}{\frac{l\sqrt{\xi}}{2}}\right)^2 +$$

$$+ \frac{9}{2}\left\{\frac{1}{1 + \left(\frac{l}{2\pi}(\sqrt{\mu} + \sqrt{\xi})\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{l}{2\pi}(\sqrt{\mu} - \sqrt{\xi})\right)^2}\right\}^2.$$

Огрубляя это неравенство, получаем на сегменте $0 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}\mu$ такую оценку:

$$g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) \leqslant 12\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^3\left\{1 + 54\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)\right\}, \tag{31}$$

а на полуоси $\frac{1}{2}\mu \leqslant \xi < \infty$ — такую:

$$g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) \leqslant \frac{9}{2\left\{1+\left(\frac{l}{2\pi}(\sqrt{\mu}-\sqrt{\xi})\right)^2\right\}^2}+$$

$$+\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \frac{27}{2(\sqrt{\mu}+\sqrt{\xi})^2}+12\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^3\left(\frac{\sin\frac{l\sqrt{\xi}}{2}}{\frac{l\sqrt{\xi}}{2}}\right)^2. \quad (32)$$

Заметим, что при рассматриваемых значениях μ выполняется неравенство $\frac{1}{2}\mu-\frac{9}{4}\sigma(l)^2 \geqslant 4\sigma(l)^2$, позволяющее пользоваться на полуоси $\frac{1}{2}\mu \leqslant \xi < \infty$ оценками (13), (16) для функции $\rho_l\left(\xi-\frac{9}{4}\sigma(l)^2\right)$ и ее производной. Поэтому

$$\rho_l\left(\frac{1}{2}\mu-\frac{9}{4}\sigma(l)^2\right)-\rho_l(-\infty) \leqslant \frac{12}{\pi}\sqrt{\frac{1}{2}\mu-\frac{9}{4}\sigma(l)^2} \leqslant 3\sqrt{\mu} \quad (33)$$

и, так как $\frac{\sigma(l)^2}{\mu} \leqslant \frac{2}{25}$, то при $\xi \geqslant \frac{1}{2}\mu$

$$\sqrt{\xi-\frac{9}{4}\sigma(l)^2} \geqslant \sqrt{\frac{1}{2}\mu-\frac{9}{4}\sigma(l)^2} \geqslant \frac{8}{13}\sqrt{\mu-\frac{9}{4}\sigma(l)^2},$$

$$\sqrt{\xi-\frac{9}{4}\sigma(l)^2} \geqslant \sqrt{\xi}\sqrt{1-\frac{9\sigma(l)^2}{2\mu}} \geqslant \sqrt{\xi}\left(1+\frac{9}{2}\frac{\sigma(l)^2}{\mu}\right)^{-1},$$

откуда согласно (13) следует, что при $\xi \geqslant \frac{1}{2}\mu$

$$\frac{d\rho_l\left(\xi-\frac{9}{4}\sigma(l)^2\right)}{d\xi} \leqslant \frac{1}{\pi\sqrt{\xi}}\left(1+\frac{9}{2}\frac{\sigma(l)^2}{\mu}\right)\left(1+25\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi\sqrt{\xi}}\left(1+36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}\right), \quad (34)$$

где

$$\mu' = \mu-\frac{9}{4}\sigma(l)^2.$$

Из оценок (31), (33) следует, что

$$J_1 \leqslant \left(\rho_l\left(\frac{1}{2}\mu-\frac{9}{4}\sigma(l)^2\right)-\rho_l(-\infty)\right)\max_{0\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{2}\mu} g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) \leqslant$$

$$\leqslant l^{-1}\,72\pi\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^2\left(1+54\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)\right),$$

из оценок (32), (34) следует, что

$$J_2 \leqslant \frac{2}{\pi}\left(1+36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}\right)\int\limits_{\frac{1}{2}\mu}^{\infty} g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right)d\sqrt{\xi} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\left(1+36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}\right)\left(\frac{9\pi^2}{2l}+\frac{81\pi}{5l}\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)+\frac{12\pi}{l}\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^3\right)=$$

$$=9\pi l^{-1}\left(1+36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}\right)\left(1+\frac{18}{5\pi}\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)+\frac{8}{3\pi}\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^3\right).$$

Мы получили эти оценки при условии (30), наложенном на μ. Это условие заведомо выполняется, если $\mu' \geqslant 16\sigma(l)^2$ и, так как в этом случае $\left(1+36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}\right) \leqslant 10$, то

$$J_2 \leqslant 9\pi l^{-1}\left\{1+36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}+\frac{180}{5\pi}\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)+\frac{80}{3\pi}\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^3\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 9\pi l^{-1}\left\{1+36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}+12\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)+9\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^3\right\}.$$

Следовательно, если $\mu' = \mu - \frac{9}{4}\sigma(l)^2 \geqslant 16\sigma(l)^2$, то $J_1 + J_2 \leqslant 9\pi l^{-1}\left\{1+36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}+\delta(l\sqrt{\mu})\right\}$, и тем более $J_1+J_2 \leqslant 9\pi l^{-1}\left\{1+36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}+\delta(l\sqrt{\mu'})\right\}$, где $\delta(z) = 12\left(\frac{2\pi}{z}\right)+8\left(\frac{2\pi}{z}\right)^2+441\left(\frac{2\pi}{z}\right)^3$, непосредственным следствием полученной оценки и неравенств (17), (19) является следующая

Теорема 1. *При любых положительных значениях l, $a \leqslant l$ и $\mu \geqslant 16\sigma(l)^2$ спектральная функция $\rho(\mu)$ краевой задачи* (1) *удовлетворяет неравенству*

$$\left|\rho(\mu)-\rho(-\infty)-\frac{2}{\pi}\left(\sqrt{\mu}+\int\limits_0^a\frac{\sin 2\sqrt{\mu}t}{t}Q(t)\,dt\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\sigma(l)}{\pi a\sqrt{\mu}}+\frac{20\sigma(l)^2}{\pi\sqrt{\mu}}+18\pi l^{-1}\left\{1+36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}}+\delta(l\sqrt{\mu})\right\}, \qquad (35)$$

где

$$Q(t)=\int\limits_0^t q(x)\,dx, \quad \sigma(l)=\int\limits_0^l |q(x)|\,dx,$$

$$\delta(l\sqrt{\mu}) = 12\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)+8\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^2+441\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^3.$$

Переходя к оценке остаточного члена $\varepsilon(\mu)=\rho(\mu)-\rho(-\infty)-\frac{2}{\pi}\sqrt{\mu}$, введем заданную на положительной полуоси непрерывную и неубывающую функцию: $l\sigma(l)^2 + 4\sigma(l)$ $(0 \leqslant l < \infty)$. Начиная с некоторого значения l, она строго растет от 0 до $+\infty$ (тривиальный случай, когда $q(x) \equiv 0$, исключаем). Поэтому при всех $\mu >$ уравнение

$$l\sigma(l)^2 + 4\sigma(l) = \sqrt{\mu} \qquad (3$$

имеет единственное решение $l = l(\mu)$, функция $l(\mu)$ строго раст от 0 до $+\infty$,

$$\frac{\sigma(l(\mu))^2}{\sqrt{\mu}} = \frac{1}{l(\mu)} - \frac{4\sigma(l(\mu))}{l(\mu)\sqrt{\mu}}, \quad \frac{\sigma(l(\mu))}{\sqrt{\mu}} = \frac{1}{4 + l(\mu)\sigma(l(\mu))} \qquad (3$$

и $l(\mu) \geqslant 1$, если $\sqrt{\mu} \geqslant \sigma(1)^2 + 4\sigma(1)$. Следовательно, все услов теоремы 1 вюполняются при $a = 1$, $l = l(\mu)$, $\mu \geqslant (\sigma(1)^2 + 4\sigma(1))$ и согласно (35), (37)

$$\left|\rho(\mu) - \rho(-\infty) - \frac{2}{\pi}\left(\sqrt{\mu} + \int_0^1 \frac{\sin 2\sqrt{\mu}\, t}{t} Q(t)\, dt\right)\right| \leqslant \frac{2\varphi(\mu)}{\pi l(\mu)}, \qquad (3$$

где

$$\varphi(\mu) = 10 + 9\pi^2 + \frac{l(\mu)}{4 + l(\mu)\sigma(l(\mu))} +$$
$$+ \frac{36 \cdot 9\pi^2 - 40}{l(\mu)(4 + l(\mu)\sigma(l(\mu)))} + 9\pi^2\delta\left(l(\mu)\sqrt{\mu}\right), \qquad ($$
$$\lim_{\mu\to\infty} \varphi(\mu) = 10 + 9\pi^2 + \sigma(\infty)^{-1} < 100 + \sigma(\infty)^{-1}.$$

Очевидным следствием неравенств (38), (39) является

Теорема 2. *На положительной полуоси* $0 < \mu < \infty$ *спектральн функция* $\rho(\mu)$ *краевой задачи* (I) *представима в виде*

$$\rho(\mu) - \rho(-\infty) = \frac{2}{\pi}\left(\sqrt{\mu} + \int_0^1 \frac{\sin 2\sqrt{\mu} t}{t} Q(t)\, dt + \frac{100 + \sigma(\infty)^{-1}}{l(\mu)}\theta(\mu)\right),$$

где $l(\mu)$ — *решение уравнения (36) и*

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} |\theta(\mu)| < 1.$$

Мы видим, что остаточный член

$$\varepsilon(\mu) = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^1 \frac{\sin 2\sqrt{\mu}\, t}{t}\right) Q(t)\, dt + \frac{100 + \sigma(\infty)^{-1}}{l(\mu)}\theta(\mu)\right)$$

состоит из двух слагаемых, причем скорость убывания перво зависит от гладкости потенциала в окрестности нуля, а второго от скорости роста функции $\sigma(l)$. При $\mu\to+\infty$ главный вклад в $\varepsilon(\mu)$ может вносить каждое из них. Например, если

$$q(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1} & 0<x\leqslant 1,\ 0<\alpha<1;\\ \beta x^{\beta-1} & 1\leqslant x<\infty,\ 0<\beta<\infty,\end{cases}$$

то

$$Q(t)=\sigma(t)=\begin{cases}t^{\alpha} & 0\leqslant t\leqslant 1;\\ t^{\beta} & 1\leqslant t<\infty\end{cases}$$

и при $\sqrt{\mu}>5$ уравнение (36) имеет такой вид: $l^{1+2\beta}+4l^{\beta}=\sqrt{\mu}$. Следовательно, при $\mu\to+\infty$

$$l(\mu)=\left(\sqrt{\mu}\right)^{\frac{1}{1+2\beta}}(1+o(1))$$

и

$$\int\limits_0^1\frac{\sin 2\sqrt{\mu}\,t}{t}Q(t)\,dt=\int\limits_0^1\frac{\sin 2\sqrt{\mu}\,t}{t}t^{\alpha}dt=\left(2\sqrt{\mu}\right)^{-\alpha}\int\limits_0^{2\sqrt{\mu}}\frac{\sin\xi}{\xi^{1-\alpha}}d\xi=$$

$$=\left(2\sqrt{\mu}\right)^{-\alpha}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi^{1-\alpha}}d\xi\,(1+o(1)),$$

откуда следует, что при $\alpha(1+2\beta)<1$ главный вклад вносит первое слагаемое, а при $\alpha(1+2\beta)>1$, в общем случае, — второе.

Список литературы: 1. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.; Л, 1950. 483 с. 2. *Марченко В. А.* О формулах обращения, порождаемых линейным дифференциальным оператором второго порядка // Докл. АН СССР. 1950. **74**, № 4. С. 657—660. 3. *Левитан Б. М.* Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1953. **17**, вып. 4. С. 331—364; **19**. вып. 1. С. 33—58. 4. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. К., 1977. 369 с.

Поступила в редколлегию 12.02.90