ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVIII, Серия 4 1961

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. Щербина

Вопрос о регуляризации произведений обобщенных функций (в основном со степенными и логарифмическими особенностями) рассматривался многими авторами.

Наиболее широкое распространение получил в настоящее время метод Рисса аналитического продолжения по показателю степени. Этот метод в приложении к большому числу конкретных задач рассматривается в книге Гельфанда и Шилова [1]. Несколько менее известен среди математиков другой метод, широко применяющийся физиками в задаче о регуляризации расходящихся интегралов типа свертки квантовой теории поля. Этот метод восходит к Фейнману и коротко состоит во введении под знаком соответствующего интеграла достаточно быстро убывающего множителя, который после вычисления интеграла устремляется к 1. После отбрасывания бесконечной в пределе части, представляющей собой некоторый полином со стремящимися к бесконечности коэффициентами, и получается регуляризованное значение интеграла. Ниже мы подробно остановимся на обоих методах.

Предлагаемый в настоящей работе подход к задаче регуляризации позволяет осмыслить оба указанных метода с общей точки зрения и рассматривать их как частные случаи некоторой весьма общей процедуры.

§ 1. Квази-произведение обобщенных функций

Пусть $f(x)$ есть обобщенная функция над пространством Шварца S ([1], стр. 29).

В силу инвариантности S относительно сдвига $f(x-\xi)$ есть также функционал над S. Среднее функции $f(x)$ вида

$$\bar{f}_\varphi(x) = \int f(x-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{1}$$

где $\varphi \in S$, есть бесконечно дифференцируемая функция. Если $\varphi(\xi) \to \delta(\xi)$, то $\bar{f}_\varphi(x) \to f(x)$ в слабом смысле, а, в силу ядерности S, и в сильном.

Произведение средних

$$\bar{f}_{\varphi_1}(x)\bar{g}_{\varphi_2}(x)\ \ldots\ \bar{h}_{\varphi_n}(x) \tag{2}$$

есть бесконечно дифференцируемая функция, растущая не быстрее некоторого полинома, и определяет над S линейный непрерывный функционал.

Полилинейный непрерывный функционал

$$(\bar{f}_{\varphi_1}(x) \ \ldots \ \bar{h}_{\varphi_n}(x), \ \varphi(x)) = F_{\varphi_1}, \ \ldots, \ \varphi_n(\varphi) \tag{2'}$$

В силу теоремы Шварца о билинейном функционале может быть без увеличения нормы продолжен на пространство основных функций $\varphi(x, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in S$, т. е. произведение вида

$$f(x-\xi_1)\, g(x-\xi_2) \ \ldots \ h(x-\xi_n) \tag{3}$$

можно рассматривать как линейный непрерывный функционал над пространством S основных функций от соответствующих переменных.

Произведение (3) можно рассматривать как применение операции сдвига на вектор x к прямому произведению $f(-\xi_1)\, g(-\xi_2) \ \ldots \ h(-\xi_n)$.

Определение 1. Произведение вида (3), понимаемое в указанном выше смысле, мы назовем квази-произведением функций $f(x)$, $g(x)$, $\ldots$, $h(x)$. Произведение типа (2) мы назовем средним квази-произведения по функциям φ_1, φ_2, $\ldots$, φ_n.

Процесс снятия усреднения будет состоять в том, что $\varphi_i \to \delta(\xi)$. Ясно, что результат такого предельного перехода в функционале (2) будет, вообще говоря, зависеть от выбора последовательностей $\varphi_i(\xi)$ и может быть осуществлен далеко не для всех $\varphi(x) \in S$. Множество R тех функций $\varphi \in S$, для которых указанный предельный переход возможен, представляет собой линейное многообразие. Если оно замкнуто в топологии пространства S, то R есть подпространство S. Снятие усреднения порождает линейный непрерывный функционал над R, который по теореме Хана — Банаха можно продолжить на все S.

Итак, пусть множество R функций $\varphi(x) \in S$, для которых возможен предельный переход в (2'), когда все $\varphi_i(\xi) \to \delta(\xi)$ некоторым фиксированным образом, образует подпространство в S.

Определение 2. Линейный непрерывный функционал над R, определяемый этим предельным переходом, мы назовем **регуляризацией** «произведения» $f(x)\, g(x) \ \ldots \ h(x)$ по последовательности $\{\varphi_1(\xi_1), \ \varphi_2(\xi_2), \ \ldots, \ \varphi_n(\xi_n)\}$, а подпространство R, зависящее от этой последовательности,— естественной областью определения нашего произведения.

Определение 3. Совокупность Φ_R последовательностей $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$, порождающих регуляризации данного произведения с естественной областью определения, включающей подпространство $R \subset S$, мы назовем областью устойчивости над R.

§ 2. Некоторые примеры. Регуляризация степенных одномерных особенностей.

В качестве первого примера рассмотрим регуляризацию произведения $\delta(x)\,\delta(x)$.

Соответствующее квази-произведение имеет вид: $\delta(x-\xi_1)\,\delta(x-\xi_2)$. Среднее $\int \delta(x-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = \varphi(x)$ есть произвольная функция из S. Ясно поэтому, что если не накладывать никаких условий на φ, то соответствующее произведение средних может вообще не сходиться ни над одной функцией из S. Этот факт верен для регуляризации произведений любых функций, преобразования Фурье которых являются делителями единицы в пространстве обобщенных функций над S.

Рассмотрим множество Ψ функций из S, нормированных условиями: $\psi(x) \geqslant 0$ и $\int \psi(x)\,dx = 1$.

Для целей регуляризации произведения $\delta(x)\,\delta(x)$ множество Ψ является все еще очень широким. Оно не может входить целиком в область устойчивости Φ_R соответствующего квази-произведения ни для какого

$R \subset S$. Но если мы выделим подпоследовательности, состоящие из финитных функций ψ со стремящейся к нулю областью финитности, то нетрудно видеть, что эти функции образуют область устойчивости над всяким множеством $R \subset S$ функций, обращающихся в нуль в некоторой сколь угодно малой, но общей для всех функций, окрестности нуля. Таким образом, регуляризация произведения δ-функций есть нуль на всякой функции, обращающейся в нуль в любой сколь угодно малой окрестности нуля. Будучи продолженным на все S, произведение $\delta(x)\delta(x)$ имеет вид: $\sum^{n} c_k \delta^{(k)}(x)$, где c_k и n — произвольны и конечны. Суживая область устойчивости Φ_R, можно добиться уменьшения неопределенности в выборе локального функционала $\sum^{n} c_k \delta^{(k)}(x)$.

Все сказанное относительно регуляризации произведений δ-функций переносится без всяких изменений на регуляризацию произведений функций x_+^λ, x_-^λ и $|x|^\lambda$ для отрицательных $\lambda > -1$. Применяемый в книге Гельфанда и Шилова метод аналитического продолжения по λ охватывается нашей схемой как частный случай.

В качестве следующего важного для дальнейших рассмотрений примера рассмотрим задачу о регуляризации степеней функций вида $(|x|^\mu \pm i0)^{-\lambda}$ и $(|x|^\mu \operatorname{sgn} x \pm i0)^{-\lambda}$. Здесь λ, $\mu > 0$ и фиксированы. Ясно, что сколь бы ни было велико μ, мы можем выбрать λ малым настолько, что обе указанных функции будут иметь в нуле интегрируемую особенность. Значения этих функций для больших λ при данном фиксированном μ мы будем рассматривать как регуляризацию соответствующих произведений. Для рассматриваемых функций мы укажем простой и естественный класс средних, позволяющих эффективно решить поставленную задачу.

Рассмотрим для определенности функцию $f(x) = (|x|^\mu + i0)^{-\lambda}$. Напишем для нее среднее вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(a)\, da}{(|x|^\mu + i0 - a)^\lambda} = \bar{f}(x), \tag{4}$$

где $\psi(a) \in \Psi$. Записывая для стоящего слева интеграла равенство Парсеваля, получим для $\bar{f}(x)$ выражение вида

$$\bar{f}(x) = \frac{2\pi e^{-i\frac{\pi\lambda}{2}}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \tilde{\psi}(t)\, t^{\lambda-1} e^{i|x|^\mu t} dt, \tag{5}$$

где $\tilde{\psi}(t) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-iat}\psi(a)\, da$.

При $\psi(a) \to \delta(a)\, \tilde{\psi}(t) \to \frac{1}{2\pi}$, и в силу условий нормировки $|\tilde{\psi}(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi}$. При $\tilde{\psi}(t) \equiv \frac{1}{2\pi}$ мы получаем саму функцию $f(x)$. В дальнейшем мы будем считать, что $f(x)$ вообще есть функция вида (5), где $\tilde{\psi}(t)$ — произвольная ограниченная функция.

Итак, рассмотрим произведение n средних типа (5), примененное к некоторой функции $\varphi \in S$. Имеем:

$$\left(\prod^{n} \bar{f}_i(x),\ \varphi(x)\right) = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \prod^{n} \psi_i(t_i)\, t_i^{\lambda_i - 1} dt_i \int_{-\infty}^{\infty} e^{i|x|^\mu \sum^{n} t_i} \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \prod^{n} \psi_i(t_i)\, t_i^{\lambda_i - 1} dt_i \int_0^\infty e^{i|x|^\mu \sum^{n} t_i} [\varphi(x) + \varphi(-x)]\, dx. \tag{6}$$

Представим сумму $\varphi(x)+\varphi(-x)$ в виде

$$[\varphi(x)+\varphi(-x)]=2\left[\varphi(0)+\frac{x^2}{2!}\varphi''(0)+\ \ldots\ +\frac{x^{2n}}{(2n)!}\varphi^{(2n)}(0)\right]\tau(x)+$$
$$+\left\{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\left[\varphi(0)+\frac{x^2}{2!}\varphi''(0)+\ \ldots\ +\frac{x^{2n}}{(2n)!}\varphi^{(2n)}(0)\right]\tau(x)\right\},$$

где $\tau(x)$ есть финитная бесконечно дифференцируемая функция, равная в некоторой окрестности нуля единице. Заменяя $|x|^\mu=s$, перепишем (6) в виде

$$\left(\prod^n \bar{f}_i(x),\ \varphi(x)\right)=\int_0^\infty\ \ldots\ \int_0^\infty\prod^n\psi_i(t_i)\,t_i^{\lambda_i-1}dt_i\int_0^\infty e^{is\,\Sigma\,t_i}\left\{2\left[\varphi(0)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{s^{\frac{2}{\mu}}}{2!}\varphi''(0)+\ \ldots\ +\frac{s^{\frac{2n}{\mu}}}{(2n)!}\varphi^{(2n)}(0)\right]\tau(s)+\varphi_n(s)\right\}\frac{ds}{\mu s^{1-1/\mu}}.$$

Выбирая n достаточно большим, всегда можно добиться, чтобы $\varphi_n(s)$ имела данное число непрерывных производных. Таким образом главный член асимптотики последнего интеграла, являющегося функцией от $\sum^n t_i$, будет иметь вид

$$\frac{c}{\left(\sum^n t_i\right)^{\frac{2\left[\frac{k}{2}\right]+3}{\mu}}},$$

где k — порядок нуля функции $\varphi(x)$ в нуле. Беря k достаточно большим, всегда можно добиться, чтобы (6) абсолютно сходился после снятия усреднения.

Полностью аналогичными будут рассмотрения и для функций от $(|x|^\mu\operatorname{sgn}x+i0)$. Здесь для случая $\mu=1$ дело упрощается, так как интеграл по x в выражении типа (6) берется, и естественная область определения регуляризации произведения совпадает со всем S, что является известным фактом.

Очевидно, что предложенный метод регуляризации для перечисленных выше случаев содержит в качестве частного случая метод продолжения по параметру λ, т. е. метод Рисса, о котором мы говорили во введении.

§ 3. Расходящиеся интегралы квантовой теории поля. Регуляризация произведений функций, зависящих от квадратичной формы

Причинная функция скалярного поля с массой m дается интегралом

$$D_m^c(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{ikx}\,d^4k}{m^2+k^2-io}, \tag{7}$$

где x и k — векторы четырехмерного пространства, $d^4k=dk_1dk_2dk_3dk_0$, а скалярное произведение векторов x и y задается квадратичной формой вида $xy=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_0y_0$.

Вычисление интегралов типа (7) мы будем проводить следующим способом:

$$\int \frac{e^{ikx} d^4k}{m^2 + k^2 - i0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{i} \int e^{ikx} d^4k \int\limits_0^\infty e^{-i\alpha(m^2 + k^2 - i\varepsilon|k|^2)} d\alpha =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{i} \int\limits_0^\infty d\alpha e^{-i\alpha m^2} \prod_{j=1}^{3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik_j x_j + (i\alpha - \varepsilon) k_j^2} dk_j \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_0 x_0 - (i\alpha + \varepsilon) k_0^2} dk_0 =$$

$$= - \lim_{\varepsilon \to 0} \pi^2 \int\limits_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{i \frac{x^2 + i\varepsilon}{4\alpha} - i\alpha m^2} = - 4\pi^2 \int\limits_0^\infty e^{i(x^2 + i0)t - \frac{im^2}{4t}} dt.$$

Таким образом,

$$D_m^c(x) = \frac{mi}{4\pi^2} \cdot \frac{K_1(m\sqrt{x^2 + i0})}{\sqrt{x^2 + i0}}. \tag{7'}$$

Возникающая в теории поля необходимость вычисления преобразований Фурье от произведений причинных функций приводит к проблеме расходящихся интегралов теории поля. Действительно, преобразование Фурье квадрата функции $D_m^c(x)$ представляется расходящимся интегралом вида

$$c \int \frac{d^4 p}{[(k-p)^2 + m^2 - i0]\,[p^2 + m^2 - i0]}. \tag{8}$$

Как видно из (7′), $D_m^c(x)$ представима в виде

$$D_m^c(x) = \frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{x^2 + i0} + \frac{mi}{8\pi^2} \frac{I_1(m\sqrt{x^2 + i0})}{\sqrt{x^2 + i0}} \ln(x^2 + i0) + R(x^2), \tag{9}$$

где $R(x^2)$ есть бесконечно дифференцируемая функция. Таким образом, квадрат причинной функции содержит слагаемое $c \frac{1}{(x^2 + i0)^2}$, которое не есть обобщенная функция над S. Это обстоятельство и служит причиной расходимости интеграла (8).

Введение под знаком интеграла (8) суммирующего множителя типа $f(p)\, g(k-p)$ означает замену в произведении $D_m^c(x)\, D_m^c(x)$ причинных функций сглаженными функциями, полученными из $D_m^c(x)$ с помощью предложенной выше процедуры усреднения (1).

Необходимо отметить, что преобразование Фурье причинной функции не обращается в нуль ни в одной точке. Поэтому любая последовательность, аппроксимирующая D_m^c, может быть представлена в виде последовательности средних типа (1).

Рассмотрим подробнее представление (7′) для причинной функции. Нетрудно понять, что его можно было бы переписать и так:

$$D_m^c(x) = - \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\nu \to \infty} \int\limits_0^\infty e^{ix^2 t - i\frac{m^2}{4t}} \psi_\nu(t)\, dt, \tag{10}$$

где $|\psi_\nu| < c$, $\psi_\nu(t) \to 1$ и убывает достаточно быстро на бесконечности. Именно к такого сорта аппроксимациям мы приходим, если усредняем функцию от x^2 типа причинной $f(x^2 + i0)$ следующим образом:

$$\bar{f}(x^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x^2 + i0 - a)\, \psi(a)\, da, \tag{11}$$

где $\psi(a) \in \Psi$ и $\psi(a) \to \delta(a)$.

Записывая для интеграла (11) равенство Парсеваля, получим

$$\bar{f}(x^2) = \int_0^\infty e^{ix^2t} \tilde{f}(t) \tilde{\psi}(t)\, dt. \tag{12}$$

Относительно $\tilde{f}(t)$ мы будем всюду в дальнейшем предполагать, что она абсолютно интегрируема в каждом конечном интервале и при $t \to \infty$ имеет асимптотику вида $\varphi(t)t^\lambda$, где $\varphi(t)$ ограничена.

Например, степени $(x^2 + i0)^{-\lambda}$ $(\lambda > 0)$ будет отвечать $\tilde{f}(t) = t^{\lambda-1}$, $D_m^c(x)$ отвечает $\tilde{f}(t) = e^{-i\frac{m^2}{4t}}$ и т. п. Как видно из (12), средние типа (11) для причинных функций являются частью средних типа (10) и все вместе они охватываются средними типа (1). В дальнейшем под x^2 мы будем понимать приведенную к главным осям квадратичную форму вида $x^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2$. Кроме того, мы будем рассматривать не только функции $f(x^2 + i0)$, но и производные от них по x_i. Поэтому вместо $f(x^2 + i0)$ мы будем употреблять обозначение $f(x)$.

Целью этого раздела является регуляризация произведений функций $f(x)$, допускающих аппроксимацию вида (12). При этом мы будем рассматривать произведения вида

$$\prod_{(j,i)} f_j(x_i) \prod_{(j,i,k)} f_j(x_i + \alpha_k^j x_k) \; \ldots \; \prod f_l(x_1 + \beta_2^l x_2 + \; \ldots \; \beta_n^l x_n). \tag{13}$$

Здесь под x_i понимается вектор пространства размерности n, $\alpha, \ldots, \beta$ — фиксированные вещественные числа.

В несколько менее общей форме задача о регуляризации произведений типа (13) рассматривалась целым рядом авторов.

Впервые математически строгое ее рассмотрение с помощью метода регуляризации Паули — Вилларса было проведено в ряде работ Н. Н. Боголюбова и О. С. Парасюка ([3], [4]). Наличие других работ на эту тему, где предлагалась методика, отличная от метода Паули — Вилларса, ставит вопрос об однозначности получаемых результатов. Кроме того, задача изучения различных методов регуляризации представляет самостоятельный интерес. Развиваемая ниже методика регуляризации произведений типа (13) позволяет существенно продвинуться в решении данной задачи.

Итак, рассмотрим произведение (13). Нам удобно для дальнейшего ввести следующее

Определение. Будем говорить, что тип произведения (13) равен N, если между аргументами перемножаемых функций имеется N нетривиальных линейных зависимостей. Тип прямого произведения мы будем полагать равным нулю.

При этом без ограничения общности можно считать, что если мы вычеркнем в нашем произведении один сомножитель, то его тип понизится на единицу. Если этого не происходит, то это означает линейную независимость аргумента вычеркнутого сомножителя от аргументов других перемножаемых функций.

Таким образом, наше произведение разобьется на прямое произведение данного сомножителя и произведения остальных. Задача о регуляризации исходного произведения сведется, таким образом, к аналогичной задаче для этого последнего произведения (мы предполагаем, что для отдельных сомножителей она может быть решена).

Решение задачи регуляризации мы начнем с простейшего произведения типа (13), произведения нулевого типа. Так как оно представляет собой прямое произведение, то данная задача сводится к задаче регуляризации отдельных сомножителей.

Применим среднее (12) к функции $\varphi(x) \in S$:

$$(\bar{f}(x^2),\ \varphi(x)) = \int_0^\infty \tilde{f}(t)\,\tilde{\psi}(t)\,dt \int e^{ix^2t}\,\varphi(x)\,dx. \tag{14}$$

Очевидно,

$$\bar{f}(x^2) = \int_0^1 e^{ix^2t}\,\tilde{f}(t)\,\tilde{\psi}(t)\,dt + \int_1^\infty e^{ix^2t}\,\tilde{f}(t)\,\tilde{\psi}(t)\,dt. \tag{15}$$

Первое слагаемое правой части при снятии усреднения, т. е. $\tilde{\psi}(t) \to 1$ при $|\tilde{\psi}(t)| < c$, равномерно стремится к бесконечно дифференцируемой функции, являющейся функционалом над S. Второе слагаемое в (14) дает член

$$\int_1^\infty \tilde{f}(t)\,\tilde{\psi}(t)\,dt \int e^{ix^2t}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \tilde{f}\left(\frac{1}{t}\right)\tilde{\psi}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}\int e^{i\frac{x^2}{t}}\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= c\int_0^1 \tilde{f}\left(\frac{1}{t}\right)\tilde{\psi}\left(\frac{1}{t}\right)t^{\frac{n}{2}-2}\,dt\int e^{-\frac{i}{4}p^2t}\,\tilde{\varphi}(p)\,dp. \tag{16}$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма. Если $\varphi(x) \in S$ и $\varphi(x) = 0(|x|)$ в окрестности $x = 0$, то

$$\varphi(x) = \sum^n x_i\varphi_i(x),$$

где все $\varphi_i(x) \in S$.

Как видно из (16), в интеграле по t при снятии усреднения может возникнуть степенная особенность в нуле.

Действительно, интеграл $\int e^{-\frac{i}{4}p^2t}\,\tilde{\varphi}(p)\,dp \to \int \tilde{\varphi}(p)\,dp$, а $\tilde{f}\left(\frac{1}{t}\right)t^{n/2-2}$ имеет в нуле особенность, порядок которой зависит от размерности n пространства x и выбора функции $\tilde{f}$.

Предположим теперь, что $\varphi(x)$ имеет в начале координат нуль порядка l. В силу сформулированной выше леммы $\tilde{\varphi}(p)$ представима в виде $\tilde{\varphi}(p) = \sum D_i^l\,\varphi_i(p)$, где D_i^l — дифференциальный однородный полином порядка l.

Пользуясь (15) и интегрируя по частям, получим

$$(\bar{f}(x^2),\ \varphi(x)) = (\bar{f}_1(x^2),\ \varphi(x) +$$

$$+ c\int_0^1 \tilde{f}\left(\frac{1}{t}\right)\tilde{\psi}\left(\frac{1}{t}\right)t^{\frac{n}{2}-2+\left[\frac{l+1}{2}\right]}\,dt\int e^{-\frac{i}{4}p^2t}\sum_{(i)} P_i(p,t)\,\varphi_i(p)\,dp,$$

где $P_i(p, t)$ — некоторые полиномы относительно p и t. Ясно, что, выбирая l достаточно большим, всегда можно добиться абсолютной сходимости последнего интеграла по t после снятия усреднения. Если речь идет не о функции от x^2, а о некоторой ее производной, то ее всегда можно представить в виде $\sum_{(k)} P_k(x)\,f_k(x^2)$, так что все проделанные рассмотрения не меняются.

Таким образом, задача регуляризации произведений с типом, равным нулю, нами полностью решена.

Рассмотрим теперь произведение вида (13), тип которого равен N.

Представляя каждый из сомножителей в виде суммы (15), мы можем разбить исходное произведение средних на сумму интеграла

$$\int_1^\infty \cdots \int_1^\infty \prod_{(j)}^{L} \tilde{f}_j(t_j)\, \tilde{\psi}_j(t_j)\, dt_j\, e^{i[t_1 x_1^2 + \ldots + t_L(x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_s x_s)^2]} \tag{17}$$

и слагаемых, в которых интегрирование хотя бы по одной из переменных t_j проводится в интервале (0, 1). Все эти члены представляют собой произведения вида (13), тип которых не превосходит $(N-1)$. Имея в виду применить метод математической индукции и считая задачу регуляризации решенной для произведений, тип которых не превосходит $(N-1,)$ мы приходим к необходимости исследовать задачу только для интеграла (17).

Применим (17) к $\varphi(x) \in S$, где под x мы будем понимать совокупность $x_1, x_2, \ldots, x_s$ векторов пространства размерности n.

$$\int_1^\infty \ldots \int_1^\infty \prod^{L} \tilde{f}_j(t_j)\, \tilde{\psi}(t_j)\, dt_j \int e^{i[t_1 x_1^2 + \ldots + t_L(x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_s x_s)^2]} \varphi(x)\, dx. \tag{18}$$

В показателе экспоненты стоит квадратичная форма с чисто мнимыми коэффициентами, распадающаяся на сумму n квадратичных форм для каждой из составляющих векторов $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Заменяя коэффициенты этих форм $\pm it_j$ на $\pm it_j - \varepsilon$, переходя после этой замены в интеграле по x в (18) к равенству Парсеваля и устремляя затем $\varepsilon \to 0$, перепишем (18) в виде (с точностью до постоянного множителя)

$$\int_1^\infty \ldots \int_1^\infty \prod^{L} \tilde{f}_j(t_j)\, \tilde{\psi}_j(t_j)\, dt_j\, \frac{1}{D^{n/2}} \int e^{-i\frac{A^{-1}(k_1, \ldots, k_s)}{4}} \tilde{\varphi}(k)\, dk. \tag{19}$$

Здесь D есть определитель квадратичной формы $t_1 y_1^2 + \ldots + t_L(y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_s y_s)^2$, где $(y_1, y_2, \ldots, y_s)$ — вектор пространства размерности s. В силу положительной определенности написанной квадратичной формы (все $t_j > 1$) D в области интегрирования ограничен снизу некоторым положительным числом и представляет собой однородный многочлен степени s переменных t_j. $A^{-1}(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ представляет собой квадратичную форму, обратную к форме $t_1 x_1^2 + \ldots + t_L(x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_s x_s)^2$. Ее коэффициенты есть однородные функции от t_j степени (-1). Так как форма A ограничена снизу равномерно во всей области итегрирования, то A^{-1} ограничена равномерно сверху в этой же области.

Перепишем (19), сделав замену $t_j \to \frac{1}{t_j}$. Имеем

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 \prod^{L} \tilde{f}_j\left(\frac{1}{t_j}\right) \tilde{\psi}_j\left(\frac{1}{t_j}\right) t_j^{-2}\, dt_j\, \frac{1}{D^{n/2}} \int e^{-i\frac{A^{-1}(k_1, \ldots, k_s)}{4}} \tilde{\varphi}(k)\, dk. \tag{20}$$

Теперь D есть однородная функция степени $(-s)$ переменных t_j, а коэффициенты формы A^{-1} есть однородные функции степени $+1$.

Здесь под знаком интеграла по t_j стоит однородная функция (с точностью до ограниченного множителя), имеющая особенности в точках, где некоторые из t_j обращаются в нуль. Если $\varphi(x)$ в (18) имеет нуль в окрестности начала координат порядка l, то $\tilde{\varphi}(k)$ будет представлять собой соответствующую линейную комбинацию производных порядка l от функций из S. Как видно из (20), при интегрировании по частям в последнем интеграле порядок особенности в нуле по t_j будет понижаться.

Ниже следует центральный пункт наших рассуждений.

Итак, пусть $\varphi(x)$ в (18) входит в пересечение естественных областей определения всех частичных произведений исходного, описываемого в существенном интегралами (18) — (20). Это значит, что если мы одно из t_j в подинтегральной функции (18) фиксируем условием $t_j = 1$, то интеграл по остальным будет абсолютно сходящимся после снятия усреднения. Действительно, положив $t_j = 1$, мы заменяем соответствующий сомножитель в произведении (13) бесконечно дифференцируемой функцией, что приводит нас к произведению типа $(N-1)$. Абсолютная же сходимость соответствующих интегралов нулевого типа была нами доказана.

Обратимся теперь к интегралу (20). В силу нашего выбора $\varphi(x)$ функция $\tilde{\varphi}(k)$ представима в виде $\tilde{\varphi}(k) = \sum D_j^l \tilde{\varphi}_j(k)$, где D_j^l — однородные дифференциальные полиномы степени l. Интегрируя в (20) по частям, мы получим следующее выражение:

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \prod^L \tilde{f}_j\left(\frac{1}{t_j}\right) \tilde{\psi}_j\left(\frac{1}{t_j}\right) t_j^{-2} dt_j \frac{1}{D^{n/2}} \int \sum_{r=1}^R P_r(t) \Pi_r k e^{-i\frac{A^{-1}(k_1, \ldots, k_S)}{4}} \varphi_r(k)\, dk. \tag{21}$$

Здесь $P_r(t)$ есть однородные рациональные функции t, степень однородности которых не ниже $\left[\frac{l+1}{2}\right]$, $\Pi_r k$ представляют собой произведения компонент векторов $k_1, k_2, \ldots, k_s$, различные для различных членов суммы. Функции $\varphi_r(k)$ выражаются линейно через $\tilde{\varphi}_i(k)$. Для наших рассуждений достаточно будет считать, что все $\tilde{\varphi}_j(k) \equiv 0$, кроме одной. Тогда все $\varphi_r(k)$ в (21) будут равны этой функции, которая входит в S и произвольна. Как мы уже отмечали выше, подинтегральная функция в (21) после снятия усреднения абсолютно интегрируема на гранях L-мерного куба, сходящихся в вершине, где все $t_j = 1$. Нетрудно видеть, что это утверждение справедливо и для отдельных слагаемых суммы по r. Действительно, в силу ограниченности $A^{-1}(k_1, \ldots, k_s)$ сверху равномерно для всех t_j, мы можем не принимать во внимание множитель $exp\left[-i\frac{A^{-1}(k_1, \ldots, k_s)}{4}\right]$, если $\varphi(k)$ сосредоточена в достаточно малой окрестности нуля. Пользуясь произвольностью $\varphi(k)$, нетрудно выбрать систему таких функций $\varphi_1(k)$, $\varphi_2(k), \ldots, \varphi_R(k)$, что определитель матрицы $\| \int \Pi_r k \varphi_s(k)\, dk \|_{r,s=1}^M$ будет отличен от нуля. Отсюда и следует наше утверждение.

Таким образом, подинтегральное выражение в (21) мажорируется после снятия усреднения функцией вида

$$C(\varphi) \prod^L \left| f_j\left(\frac{1}{t_j}\right)\right| t_j^{-2} \frac{1}{D^{n/2}} \sum_{r=1}^R \left| P_r(t)\right|, \tag{22}$$

интегрируемой на всех гранях куба $0 < t_j < 1$ $(j = 1, 2, \ldots, L)$, сходящихся в вершине $(1, 1, \ldots, 1)$.

Рассмотрим любой из членов суммы по r, образующих (21). Делая замену переменных $t_j = t\xi_j$, где ξ_j пробегают грани единичного куба, сходящиеся в вершине $(1, 1, \ldots, 1)$, а t — интервал $(0, 1)$, получим мажорантное выражение вида

$$C(\varphi) \int\limits_0^1 t^{\alpha_r + \frac{ns}{2} - L - \sum^L \lambda_j - 1} dt \int \prod_{(j)}^L \left| t^{\lambda_j} f_j\left(\frac{1}{t\xi_j}\right) \tilde{\psi}_j\left(\frac{1}{t\xi_j}\right)\right| \xi_j^{-2} \frac{|P_r(\xi)|}{[D(\xi)]^{n/2}} d\xi. \tag{23}$$

Здесь $\alpha_r \geqslant \left[\frac{l+1}{2}\right]$, и после снятия усреднения интеграл останется абсолютно сходящимся, если

$$\left[\frac{l+1}{2}\right] + \frac{ns}{2} - L - \sum^{L} \lambda j > 0. \tag{24}$$

Таким образом, естественная область определения произведения вида (13) типа N состоит из функций $\varphi(x)$, входящих в пересечение областей определения частичных произведений и имеющих в начале координат нуль такого порядка l, что выполняется неравенство (24).

Следовательно, нами доказана следующая

Теорема. Каково бы ни было произведение типа (13), описанный выше процесс регуляризации позволяет его рассматривать как обобщенную функцию над некоторым подпространством S_l пространства S, состоящим из функций, имеющих в начале координат нуль порядка l, задаваемого неравенством (24). Порядок нуля по каждой из переменных определяется реккурентным способом, указанным выше.

Доказанная теорема без труда обобщается на случай произведений типа (13) для сомножителей, зависящих от квадратичных форм вида

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i x_i^2,$$

где числа $\alpha_i \geqslant 0$ свои для каждой из перемножаемых функций.

§ 4. О взаимной связи методов, применявшихся для решения задачи регуляризации

Общей чертой, характеризующей различные методы регуляризации, является введение параметра. Данный объект, скажем, произведение обобщенных функций, включается в некоторое параметрическое семейство регулярных функций, т. е. рассматривается как крайняя точка, «предел» при некотором предельном значении параметров. Выяснение смысла этого предела и составляет коротко содержание задачи о регуляризации.

В методе Рисса таким параметром служит показатель степени сингулярного члена. Желая применить этот метод для регуляризации произведений причинных функций (7'), мы могли бы поступить, например, следующим образом. Очевидно, $D_m^c(x)$ можно представить так:

$$D_m^c(x) = \lim_{\lambda \to +0} \left\{ \frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{(x^2+i0)^{1-\lambda}} + P(x^2) \ln(x^2+i0) + R(x^2) \right\} = \lim_{\lambda \to +0} f_\lambda(x). \tag{25}$$

При λ, близких к единице, функции $f_\lambda(x)$ можно перемножать. Возможность предельного перехода $\lambda \to 0$ в произведениях типа (13) вытекает, как мы сейчас увидим, из предыдущих рассмотрений.

Действительно, будем рассматривать причинную функцию в виде предела

$$D_m^c(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \lim_{\lambda \to +0} \int_0^\infty e^{i(x^2+i0)t - i\frac{m^2}{4t}} t^{-\lambda} dt =$$

$$= \lim_{\lambda \to +0} i \frac{m^{1-\lambda} 2^\lambda e^{-i\frac{\pi}{2}}}{4\pi^2} \frac{K_{1-\lambda}(m\sqrt{x^2+i0})}{(x^2+i0)^{\frac{1-\lambda}{2}}}. \tag{26}$$

Это значит, что

$$D_m^c(x) = \lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{i}{4\pi}\frac{e^{-i\frac{\pi\lambda}{2}}}{\Gamma(\lambda)\sin\lambda\pi}\frac{1}{(x^2+i0)^{1-\lambda}} + Q_2(x^2)\right],$$

т. е. аппроксимация (25) в существенном эквивалентна (26). Аппроксимация (26) может быть истолкована как среднее типа (10), хотя функция $\psi(t) = t^{-\lambda}$ и не удовлетворяет условию $|\psi(t)| < c$. Это условие заменяется интегрируемостью в нуле, так как мы будем считать $\lambda < 1$. Нетрудно видеть, что всегда можно выбрать такое $0 < \lambda < 1$, что соответствующие интегралы по t_j типа (18) и (20) будут абсолютно сходящимися для всех $\varphi(x) \in S$. Отсюда и следует, что аппроксимации типа (26), а следовательно, и (25) приводят к той же регуляризации, что и (10).

Рассмотрим теперь регуляризацию Паули-Вилларса. Подробно она изучается в ряде работ Н. Н. Боголюбова и О. С. Парасюка, к которым мы и отсылаем читателя ([3], [4], [5]). Подробное изложение этого метода можно найти также в книге Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова «Введение в теорию квантованных полей». Указанная регуляризация порождается аппроксимациями вида

$$D_m^c(x) = \lim_{M\to\infty}[D_m^c(x) - D_M^c(x)]. \tag{27}$$

Как видно из (7), $D_M^c(x) \to 0$ при $M \to \infty$.

В то же время разность, стоящая в квадратных скобках, не содержит члена $\frac{c}{x^2+i0}$, что и дает возможность перемножать эти аппроксимации при любых конечных M. Равенство (27) можно переписать в форме

$$D_m^c(x) = -\frac{1}{4\pi^2}\lim_{M\to\infty}\int_0^\infty e^{ix^2t - i\frac{m^2}{4t}}\left(1 - e^{-i\frac{M^2-m^2}{4t}}\right)dt. \tag{27'}$$

Как видно из этой записи, аппроксимация Паули-Вилларса есть также аппроксимация типа (10). Здесь $\psi(t) = (1 - e^{-i\frac{M^2-m^2}{4t}})$. В более общем случае функцию $\psi(t)$ можно выбрать в виде

$$\psi(t) = (1 - e^{-i\frac{M^2-m^2}{4t}})^N.$$

Здесь $|\psi(t)| \leqslant 2^N$ и на бесконечности $\psi(t)$ убывает, как $\left[\frac{i(M^2-m^2)}{4t}\right]^N$. Таким образом, регуляризация Паули-Вилларса полностью укладывается в нашу схему.

Наконец, мы рассмотрим еще один метод регуляризации, примененный Филипповичем в работе ([7]) для регуляризации расходящихся интегралов квантовой электродинамики. При этом осталась недоказанной эквивалентность указанного метода другим, применявшимся ранее.

Нетрудно показать, что метод, предложенный Филипповичем и названный им методом Рисса, коротко сводится к следующему. Вместо интеграла (20) рассматривается вначале такой:

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 \prod^L e^{-imt_jt_j^{s_j}}dt_j \frac{1}{[D_1(t)]^\lambda}\int e^{-i\frac{A^{-1}(k_1,\ldots,k_S)}{4}}\varphi(k)\,dk, \tag{28}$$

где $s_j \geqslant 0$, а λ выбрано с достаточно малой реальной частью, чтобы написанный интеграл по t сходился.

Здесь $D_1(t)$ есть однородный полином, стоящий в числителе выражения для определителя D из (20), представляющего собой рациональную функцию от t_j. Как было нами доказано выше, найдется такое подпространство S_l пространства s, что если $\varphi(x) \in S_l$, то после замены в (28) λ на $n/2$ этот интеграл останется абсолютно сходящимся. Ясно поэтому, что и данный метод регуляризации дает тот же результат, что и предлагавшиеся выше.

Таким образом мы видим, что метод регуляризации Паули-Вилларса, метод Рисса и его модификация, предложенная Филипповичем, приводят к одной и той же естественной области определения для произведений типа (13).

Другими словами, все эти методы порождаются аппроксимациями причинных функций, входящими в одну и ту же область устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними, 1958.

2. Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей, М., 1957.

3. Н. Н. Боголюбов и О. С. Парасюк. 1) К теории умножения причинных синулярных функций, ДАН СССР, т. 100, № 1, (1955), 25—28; 2) О вычитательном формализме при умножении причинных синулярных функций, ДАН СССР, т. 100, № 3, (1955), 429—432.

4. О. С. Парасюк. Дисс., МИАН СССР.

5. О. С. Парасюк. К теории R-операции Боголюбова, УМЖ, т. XII, № 3, (1960).

6. Е. И. Филиппович. О применении метода Рисса в квантовой теории поля. УМЖ, т. X, № 2, (1958).