УДК 513.88

М. Ю. ЛЮБИЧ, Ю. И. ЛЮБИЧ

ОТЩЕПЛЕНИЕ ГРАНИЧНОГО СПЕКТРА ДЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ И ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛУГРУПП

Изложим результаты, анонсированные в работе [1], которые относятся к общим п.п. представлениям и сконцентрированы вокруг так называемой теоремы об отщеплении граничного спектра. Описаны применения этой теоремы к обобщенной теории Перрона — Фробениуса. т. е. к спектральной теории неотрицательных п.п. представлений в банаховом пространстве с конусом будет посвящена отдельная статья. Частично наши результаты отражены в книге [2], здесь они получили дальнейшее развитие.

§ 1. Банаховы представления компактных групп и полугрупп. Пусть G — компактная группа. $\{U_\lambda\}$ — система всех ее попарно неэквивалентных унитарных неприводимых (следовательно, конечномерных) представлений, χ_λ — характер представления U_λ, n_λ — его степень, т. е. размерность пространства этого представления. Рассмотрим групповую алгебру $L_1(G)$. Это банахова алгебра со сверткой

$$(\varphi*\psi)(h)=\int\limits_G \varphi(g)\psi(hg^{-1})\,dg \tag{1.1}$$

в качестве произведения. Ее центр совпадает с множеством центральных функций, т. е. таких $\varphi\in L_1(G)$, что $\varphi(h^{-1}gh)=\varphi(g)$. В частности, все характеры χ_λ принадлежат центру, а их линейная оболочка там плотна. Правило свертывания характеров имеет вид $\chi_\lambda*\chi_\mu=(1/n_\lambda)\delta_{\lambda\mu}\chi_\mu$. Поэтому, если положить $\pi_\lambda=n_\lambda\chi_\lambda$, то окажется $\pi_\lambda*\pi_\mu=\delta_{\lambda\mu}\pi_\mu$. В силу этих соотношений интегральные операторы $\Pi_\lambda\varphi=\varphi*\pi_\lambda$ являются проекторами ($\Pi_\lambda^2=\Pi_\lambda$) и попарно аннулируются ($\Pi_\lambda\Pi_\mu=0$ при $\lambda\neq\mu$). Проекторы Π_λ конечномерны: если положить $L(G;\ \lambda)=\operatorname{Im}\Pi_\lambda$, то $\dim L(G;\ \lambda)=n_\lambda^2$. Система $\{\Pi_\lambda\}$ полна, т. е. $\overline{\sum\limits_\lambda L(G;\ \lambda)}=L_1(G)$ (черта означает замыкание), и тотальна, т. е. $\bigcap\limits_\lambda \operatorname{Ker}\Pi_\lambda=0$*). Все Π_λ коммутируют со сдвигами по группе.

Пусть $(\tau_{\lambda,ik})_{i,k=1}^{n_\lambda}$ — матрица представления U_λ в каком-нибудь ортонормированном базисе. Подпространство $L(G;\ \lambda)$ совпадает с линейной оболочкой матричных элементов $\tau_{\lambda,ik}(1\leqslant i,\ k\leqslant n_\lambda)$. Если R — правое регулярное представление группы G в $L_1(G)$, т. е. $(R(h)\varphi)(g)=\varphi(gh)$, то $RL(G;\ \lambda)\subset L(G;\ \lambda)$ и ограничение

*) Кроме того, система $\{\Pi_\lambda\}$ минимальна, т. е. $L(G;\ \lambda)\bigcap\sum\limits_{\mu\neq\lambda}L(G,\ \mu)=0$ для всех λ. Это следует из того, что $\Pi_\lambda\Pi_\mu=0\ (\mu\neq\lambda)$.

$R \mid L(G; \lambda)$ распадается в прямую сумму n_λ неприводимых пред ставлений, каждое из которых эквивалентно u_λ.

Описанная классическая ситуация (Петер—Г. Вейль, А. Вейль является прототипом и одновременно основой для анализа произ вольных банаховых представлений компактных групп. Согласн стандартному определению, все представления топологически групп (или полугрупп) предполагаются сильно непрерывными В силу этого любое банахово представление T компактной груп пы G ограничено: $\sup_g \|T(g)\| < \infty$. Рассматриваемые банаховы пространства, если не оговорено противное, предполагаются комп лексными.

Теорема 1.1. *Пусть T — представление компактной групп в банаховом пространстве B. Ограниченные операторы*

$$P_\lambda = \int_G \pi_\lambda(g) T(g^{-1})\, dg \tag{1.2}$$

образуют полную тотальную систему попарно аннулирующихс проекторов, коммутирующих с представлением, так что под пространства $B(\lambda) = \operatorname{im} P_\lambda$ инвариантны для T и

$$B = \overline{\sum_\lambda B(\lambda)} \tag{1.3}$$

Для любого вектора $x \in B(\lambda)$ $(x \neq 0)$ линейная оболочк орбиты $\{T(g)x\}$ конечномерна и разлагается в прямую сумм не более n_λ инвариантных подпространств, на каждом из ко торых представление эквивалентно U_λ. Любое инвариантно подпространство, на котором представление эквивалентно U_λ содержится в $B(\lambda)$.

Доказательство теоремы 1.1 приведено в [2].

Инвариантные подпространства $B(\lambda) \neq 0$ называются *изотипическими компонентами* представления T. Это понятие можн формально определить для любой группы (и даже полугруппы) свойствами, описанными в последнем абзаце теоремы 1.1, не упоминая конструкцию при помощи проекторов. Теорема 1.1 утверждает, что *банахово представление компактной группы разлагается в топологическую прямую сумму своих изотипических компонент.*

Множество тех унитарных неприводимых представлений U_λ, для которых $B(\lambda) \neq 0$ (т. е. $P_\lambda \neq 0$), назовем *спектром** *представления T.* В связи с этим описанное разложение представления назовем *спектральным*, а теорему 1.1 — спектральной теоремой. Из нее прежде всего вытекает

Следствие 1. *Для любого банахова представления компактной группы система конечномерных подпредставлений полна.*

---

* Термин «спектр» здесь употребляется в том же смысле, что в теории почти периодических функций. Спектр может быть не замкнут в естественной топологии.

Ясно, что неприводимые банаховы представления компактной группы конечномерны и эквивалентны унитарным. Для абелевой группы они одномерны и могут быть отождествлены со своими характерами.

Напомним некоторые термины из общей теории представлений.

Пусть G — любая топологическая группа (или полугруппа), T — ее представление в банаховом пространстве B. Если вектор $w \in B$ $(w \neq 0)$ порождает одномерное инвариантное подпространство представления T, то он называется *весовым*. При этом $T(g)w = \chi(g)w$, где χ — одномерный комплексный характер (непрерывный гомоморфизм из G в мультипликативную группу C^* поля комплексных чисел). Характер χ называется *весом* представления, соответствующим весовому вектору w. Для каждого веса χ множество всех весовых векторов, пополненное нулем, является подпространством и называется *весовым подпространством*, соответствующим весу χ.

Следствие 2. *Пространство банахова представления абелевой компактной группы разлагается в топологическую прямую сумму весовых подпространств.*

Характер χ, для которого $|\chi(g)| \equiv 1$, называется *унитарным*. Все характеры компактной группы унитарны.

Унитарный характер $\chi_0(g) \equiv 1$ называется *единичным*, или *тривиальным*. В любом представлении T ему соответствует подпространство $\Phi_T = \{x \mid x \in B, T(g)x \equiv x\}$ инвариантных (т. е. неподвижных) векторов ($\Phi_T \neq 0$, если χ_0 — вес и только в этом случае). Рассмотрим наряду с Φ_T подпространство $\hat{\Phi}_T = \{f \mid f \in B^*, T(g)^* f \equiv f\}$ инвариантных линейных функционалов. Эти подпространства находятся в естественной двойственности, как показывает

Следствие 3. *Для любого банахова представления T компактной группы G подпространство $\hat{\Phi}_T$ естественно отождествляется с Φ_T^*.*

Доказательство. Положим в соответствии с (1.2)

$$P_1 = \int_G T(g^{-1})\, dg = \int_G T(g)\, dg. \tag{1.4}$$

Это — проектор на Φ_T, аннулирующий все остальные изотипические компоненты представления T (если χ_0 не является весом, то $P_1 = 0$). Если $F \in \Phi_T^*$, то, полагая $f(x) = F(P_1 x)$, получаем $f \in \hat{\Phi}_T$. Наоборот, для любого $f \in \hat{\Phi}_T$ функционал $F = f \mid \Phi_T$ принадлежит Φ_T^*. Указанные отображения $\Phi_T^* \rightleftarrows \hat{\Phi}_T$ взаимно обратны. Следовательно, $\hat{\Phi}_T \approx \Phi_T^*$.

Любое банахово представление T компактной группы G можно превратить в изометрическое, вводя в пространстве представления новую норму $\|x\|_T = \sup\limits_g \|T(g)x\|$, эквивалентную исходной.

Если группа G — абелева, а представление T — изометрично, то $\|P_\lambda\| \leqslant 1$, т. е. $\|P_\lambda\| = 1$, если только $P_\lambda \neq 0$. Таким образом, *для изометрических представлений абелевых компактных групп все P_λ являются банаховыми ортопроекторами.* В этом смысле разложение (1.3) — *ортогональное*. Это верно также для гильбертовых унитарных представлений любых компактных групп, так как в этом случае $P_\lambda^* = P_\lambda$. Вместе с тем, например, для регулярного представления группы $G = U(2)$ в $C(G)$ нормы проекторов P_λ не ограничены в совокупности.

Перейдем теперь к представлениям полугрупп. Для некоторых классов полугрупп теория представлений в значительной степени сводится к ситуации компактной группы. Пусть S — полугруппа. Ее наименьший двусторонний идеал называется *ядром Сушкевича* (короче — *ядром*) и обозначается $K(S)$. В настоящей работе этот объект играет ведущую роль.

Бесконечные полугруппы не всегда обладают ядром. Простейший пример — аддитивная полугруппа Z_+ целых неотрицательных чисел. Однако, *любая компактная полугруппа обладает ядром, причем ее ядро является объединением изоморфных между собой компактных групп, каждая из которых является пересечением некоторого минимального левого идеала с некоторым минимальным правым идеалом* (см. [2, 3]).

Назовем топологическую полугруппу S *элементарной*, если ядро $K(S)$ существует и является компактной группой. Например, *любая компактная абелева полугруппа элементарна* в силу сказанного выше. Очевидно, любая компактная (и только компактная) группа элементарна. Если топологическая полугруппа S обладает двусторонним идеалом K, являющимся компактной группой, то этот идеал — ядро и, следовательно, S элементарна. В частности, любая топологическая полугруппа S с нулем элементарна: $K(S) = \{0\}$.

В элементарной полугруппе S особое место занимает единица e ядра $K(S)$. Это, очевидно, идемпотент и, кроме того, e — центральный элемент полугруппы S. Действительно, для любого $s \in S$ элементы se, es принадлежат $K(S)$ и, следовательно, $se = ese = es$.

Отображение $\hat{s} = es = se$ является ретракцией S на $K(S)$. Кроме того, оно является гомоморфизмом: $(st)e = s(te) = s(ete) = (se)(te)$. Поэтому каждое представление группы $K(S)$ канонически продолжается до представления полугруппы S. Полученные этим путем представления элементарной полугруппы S будем называть *невырожденными*. *Для невырожденности представления T* необходимо и достаточно, чтобы $T(e) = I$ (I — единичный оператор). Необходимость очевидна, достаточность следует из выкладки: $T(s) = T(s)I = T(se)$*.

* Представление T любой группы G по определению удовлетворяет условию $T(e) = I$, однако, если G рассматривать как полугруппу, то оператор $T(e)$ обязан быть лишь идемпотентом (проектором). Таким образом, представления групп в классе полугрупп выделяются условием невырожденности. Отметим, что *любое изометрическое представление элементарной полугруппы — невырожденное.*

Если T — невырожденное представление, то все операторы $T(s)$ ($s \in S$) обратимы в $\operatorname{End} B$. Они образуют компактную в сильной топологии группу операторов.

Из теоремы 1.1 вытекает еще и такое

Следствие 4. *Невырожденное банахово представление элементарной полугруппы S разлагается в топологическую прямую сумму изотипических компонент, отвечающих унитарным неприводимым представлениям ядра $K(S)$.*

Общий случай сводится к невырожденному в следующем смысле.

Теорема 1.2. *Пусть T — представление элементарной полугруппы S в банаховом пространстве B. Тогда $B = B_0 \dot{+} B_1$, где B_0, B_1 — инвариантные подпространства, такие, что 1) представление $T \mid B_1$ — невырожденное, причем B_1 — наибольшее такое подпространство,* 2) $B_0 = \bigcup\limits_s \operatorname{Ker} T(s) = \operatorname{Ker} T(e)$.

Тем самым $T \mid B_1$ обладает свойствами, указанными в следствии 4.

Доказательство. Рассмотрим проектор $P = T(e)$ и положим $B_0 = \operatorname{Ker} P$, $B_1 = \operatorname{Im} P$. Так как P коммутирует со всеми $T(s)$, то B_0 и B_1 — инвариантные подпространства. Поскольку $T(e) \mid B_1 = P \mid B_1 = \mathrm{id}$, то $T \mid B_1$ — невырожденное. Обратно, если B' — такое инвариантное подпространство, что $T \mid B'$ — невырожденное, то $T(e) \mid B' = \mathrm{id}$, т. е. $P \mid B' = \mathrm{id}$, а это означает, что $B' \subset B_1$. Наконец, если $x \in B_0$, то по определению $x \in \operatorname{Ker} T(e)$ и обратно, если $x \in \operatorname{Ker} T(s)$ для некоторого $s \in S$, то $T(s)Px = PT(s)x = 0$. Но $Px \in B_1$, а $T(s) \mid B_1$ обратим. Следовательно, $Px = 0$, т. е. $x \in B_0$. Теорема доказана.

Для любой полугруппы S любое ограниченное банахово представление T можно превратить в сжимающее путем перенормировки $\|x\|_T = \max(\|x\|, \sup\limits_s \|T(s)x\|)$ (полугруппа S может не содержать единицы).

Теорема 1.2′. *Если T — сжимающее представление элементарной полугруппы S в банаховом пространстве B, то $B = B_0 \dot{+} B_1$, где B_1 — наибольшее инвариантное подпространство, такое, что представление $T \mid B_1$ — изометрическое*, а $B_0 = \bigcup\limits_s \operatorname{Ker} T(s) = \operatorname{Ker} T(e)$. Представление $T \mid B_1$ разлагается в топологическую прямую (а если S — абелева, то в ортогональную) сумму изотипических компонент, отвечающих унитарным неприводимым представлениям ядра $K(s)$. Разложение $B = B_0 \dot{+} B_1$ полуортогонально в том смысле, что соответствующий проектор P* ($\operatorname{Ker} P = B_0$, $\operatorname{Im} P = B_1$) *ортогонален* (но проектор $Q = I - P$, вообще говоря, не ортогонален).

Доказательство. Рассмотрим то же разложение, что и в теореме 1.2. Поскольку представление $T \mid B_1$ — сжимающее и не-

* Таким образом, $T \mid B_1$ — *представление обратимыми изометриями, а* $\operatorname{Im}(T \mid B_1)$ — *подгруппа группы изометрий подпространства B_1.*

вырожденное, то $T|B_1$ — изометрическое. Разложение $T|B_1$ на изотипические компоненты обеспечивается следствием 4 теоремы 1.1. Проектор P ортогонален, ибо $P = T(e)$, а T — сжимающее.

Спектр представления $T|B_1$ в условиях теоремы 1.2 мы будем называть *граничным спектром* представления T, а саму теорему 1.2 (и ее метрический вариант — теорему 1.2′, а также дальнейшие обобщения и аналоги) теоремой об отщеплении граничного спектра. Соответственно подпространства B_1 и B_0 называются *граничным* и *внутренним* для T. Проектор P называется *граничным проектором* представления T.

§ 2. Почти периодические представления полугрупп. Представление T топологической полугруппы S в банаховом пространстве B называется *почти периодическим (п. п.)*, если орбита $\{T(s)x\}$ каждого вектора $x \in B$ сильно предкомпактна. В работе [3] показано, что *для п. п. представления T необходимо и достаточно, чтобы в сильной топологии замыкание полугруппы операторов* $\operatorname{Im} T = \{T(s)\}$ *было компактным.* Появляющаяся таким образом компактная полугруппа* β_T называется *боровским компактом* представления T. Ее ядро называется *ядром (Сушкевича)* п. п. представления T. П. п. представление называется *элементарным*, если его ядро есть группа, т. е. боровский компакт представления является элементарной полугруппой. *Любое п. п. представление абелевой полугруппы S элементарно.*

Если T — п. п. представление топологической группы, то его боровский компакт является компактной группой (следовательно, совпадает со своим ядром).

Теорема 2.1. *Для того чтобы ограниченное представление T топологической группы G обладало полной системой конечномерных унитарных (с точностью до эквивалентности) подпредставлений, необходимо и достаточно, чтобы оно было п. п.*

Необходимость. Для любого x орбита $\{T(g)x\}$ сколь угодно точно аппроксимируется конечными суммами предкомпактных множеств. Следовательно, орбита предкомпактна.

Достаточность вытекает из теоремы 1.1, примененной к боровскому компакту представления.

Замечание. В сторону необходимости теорема справедлива для полугрупп в силу тех же рассуждений, что и для групп.

Теорема 2.2. *Пусть T — элементарное п. п. представление топологической полугруппы S в банаховом пространстве B. Тогда $B = B_0 \dotplus B_1$, где 1) B_1 — наибольшее инвариантное подпространство, на котором представление невырождено: при этом $T|B_1$ разлагается в топологическую прямую сумму изотипических компонент, отвечающих унитарным неприводимым пред-*

---

* Любое п. п. представление, очевидно, ограничено. На любом ограниченном подмножестве алгебры операторов умножение непрерывно в сильной топологии. Поэтому сильное замыкание ограниченной полугруппы операторов является топологической полугруппой (в сильной топологии).

ставлениям ядра; 2) B_0 состоит из тех векторов $x \in B$, для которых замыкание орбиты $\{T(s)x\}$ содержит нуль. Если представление T — сжимающее, то разложение $B = B_0 \dot{+} B_1$ полуортогонально, а $T \mid B_1$ представление обратимыми изометриями.

Доказательство. Применяя теорему 1.2 (а для сжатий — теорему 1.2′) к единичному представлению боровского компакта β_T, получаем разложение $B = B_0 \dot{+} B_1$ (полуортогональное для сжатий), где $\beta_T \mid B_1$ обладает всеми нужными свойствами, а значит, ими обладает и $T \mid B_1$. Из тех же соображений следует

$$B_0 = \bigcup_{A \in \beta_T} \operatorname{Ker} A = \{x \mid 0 \in \{\overline{T(s)x}\}\}.$$

Для слабо п. п. представлений теорема об отщеплении граничного спектра принадлежит К. де Лю и И. Гликсбергу [3] — основателям излагаемой теории.

Коммутативный случай допускает более законченную формулировку. Дело в том, что на любой абелевой полугруппе S имеется естественный квазипорядок: $s \succ t$, если s делится на t или $s = t$*. При этом S является направленным множеством, так как $s_1 s_2 \succ s_1$ и $s_1 s_2 \succ s_2$. Это позволяет применять к S обобщенную теорию пределов. Если $\varphi(s)$ — направленность на S (т. е. функция на S со значениями в топологическом пространстве) и если она сходится, ее предел будем обозначать через $\lim\limits_{s \to \infty} \varphi(s)$. Условие $0 \in \{\overline{T(s)x}\}$, определяющее внутреннее подпространство B_0, теперь примет вид $\lim\limits_{s \to \infty} T(s)x = 0$. Действительно, если $s \succ t$, то $\|T(s)x\| \leqslant \|T(t)x\|$ в силу сжимаемости**. Поэтому направленность $\Psi(s) = \|T(s)x\|$ сходится к своей нижней грани, которая при $x \in B_0$ равна нулю, поскольку $0 \in \{\overline{T(s)x}\}$. Отправляясь от этого наблюдения, определим для абелевых полугрупп максимально широкий класс представлений, для которых имеет место теорема об отщеплении граничного спектра.

Назовем направленность $\varphi(s)$ *асимптотически предкомпактной*, если любая ее поднаправленность обладает сходящейся поднаправленностью. Такова, в частности, любая сходящаяся направленность. Для любой направленности будем называть *ω-предельными точками* пределы сходящихся поднаправленностей. Если направленность асимптотически предкомпактна, то множество ее ω — предельных точек компактно.

Ограниченное представление T абелевой топологической полугруппы S называется *асимптотически почти периодическим* (*а. п. п*), если направленность $T(s)$ асимптотически предкомпактна в сильной топологии. *Любое п. п. представление является а. п. п.* Обратное неверно, как показывает следующий

* В полугруппе может не быть единицы.

** Сжимаемость обеспечивается переходом к эквивалентной норме.

Пример. Пусть $S = Z_+^2$ — неотрицательный квадрант в двумерной целочисленной решетке. Возьмем в бесконечномерном гильбертовом пространстве H любой унитарный оператор U с чисто непрерывным спектром и определим представление T полугруппы S в H, полагая $T(m, n) = \delta(n)U^m$, где $\delta(0) = 1$, $\delta(n) = 0$ $(n > 0)$. Если $(m, n) \to \infty$, т. е. $m \to \infty$ и $n \to \infty$, то $T(m, n)$ сходится к нулю ($T(m, n) = 0$ при $n > 0$). Таким образом, T — а. п. п. представление. Но оно не является п. п, ибо $T(m, 0) = U^m$, а для представления $m \to U^m$ $(m \in Z_+)$ п. п. эквивалентна полноте системы собственных векторов оператора U.

Ограниченное представление T называется *сходящимся*, если направленность $T(s)$ сильно сходится. Очевидно, любое сходящееся представление является а. п. п.

Лемма 2.1. *Если T — а. п. п. представление, то сильное замыкание β_T полугруппы операторов* $\operatorname{Im} T$ *является элементарной полугруппой.* *

Доказательство. Обозначим через K множество ω-предельных (в сильной топологии) точек направленности $T(s)$. Оно непусто по определению а. п. п. и сильно компактно. Покажем, что K — идеал в β_T (тем более — полугруппа). Пусть $A \in K$, т. е. $A = \lim_i T(s_i)$, где $\{s_i\}$ — поднаправленность в S. Тогда $T(s)A = \lim_i T(ss_i)$, т. е. $T(s)A \in K$ $(s \in S)$, откуда $XA \in K$ $(X \in \beta_T)$ в силу замкнутости множества K.

Остается проверить, что K — группа, а для этого достаточно установить делимость для любых двух элементов A, $A' \in K$.

Пусть $A = \lim_i T(s_i)$, $A' = \lim_i T(t_i')$, где $\{s_i\}$, $\{s_i'\}$ — две поднаправленности в S. Выберем j_i для каждого i так, чтобы $t_i = t_{j_i}' \geqslant s_i^2$ и тем самым $t_i = s_i v_i$, где $v_i \to \infty$. Так как $A' = \lim_i T(t_i)$ и в силу а. п. п. представления T можно считать, что существует $\lim_i T(v_i) \equiv Q$, то $A' = AQ$, что и требовалось.

Для любого а. п. п. представления T мы назовем *ядром* (*Сушкевича*) ядро полугруппы β_T.

Теорема 2.3. *Пусть T — ограниченное представление абелевой топологической полугруппы S в банаховом пространстве B, $B_0 = \{x \mid \lim_{s \to \infty} T(s)x = 0\}$, B_1 — замыкание линейной оболочки весовых векторов, отвечающих унитарным весам. Для того чтобы имело место разложение $B = B_0 + B_1$, необходимо и достаточно, чтобы представление T было а. п. п. При этом B_1 является топологической прямой суммой весовых подпространств,*

* Эта полугруппа, играющая роль боровского компакта для а. п. п. представления T, вообще говоря, не компактна.

отвечающих унитарным весам, $T \mid B_1$ — невырожденное представление.

Достаточность вытекает из теоремы 1.2 благодаря лемме 2.1.

Необходимость ясна из того, что прямая сумма двух а. п. п. представлений является а. п. п., представление $T \mid B_0$ — сходящееся к нулю и потому а. п. п., представление $T \mid B_1$ — п. п. в силу замечания к теореме 2.1, и тем более — а. п. п.

Если T — сжимающее а. п. п. представление, то, как обычно, разложение $B_0 \dotplus B_1$ — полуортогональное, представление $T \mid B_1$ — изометрическое и B_1 разлагается в топологическую ортогональную сумму весовых подпространств, отвечающих унитарным весам.

Охарактеризуем теперь сходящиеся представления.

Теорема 2.4. *Для того чтобы представление T абелевой топологической полугруппы S было сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы оно было а. п. п. и не имело унитарных весов, отличных от единичного.*

Необходимость свойства а. п. п. очевидна. Далее, если χ — унитарный вес, то из сходимости представления следует, что существует $\lim\limits_{s\to\infty} \chi(s) \neq 0$. Следовательно, существует и не зависит от t предел $\lim\limits_{s\to\infty} \chi(st)$. Отсюда $\chi(t) \equiv 1$.

Достаточность вытекает из того, что прямая сумма двух сходящихся представлений сходится, а применение теоремы 2.3. дает именно такое разложение, ибо $T \mid B_0$ сходится (к нулю), а B_1 при данных условиях совпадает с подпространством инвариантных векторов.

Замечание. Если а. п. п. представление T сходится, то оператор $P_1 = \lim\limits_{s\to\infty} T(s)$ является проектором (для сжимающего представления — ортопроектором) на подпространство инвариантных векторов, $\operatorname{Ker} P_1 = B_0$.

С любой абелевой полугруппой S связана группа Гротендика $G(S)$. Она является универсальным объектом относительно гомоморфизмов из S в группы, т. е. любой гомоморфизм $f: S \to \Gamma$ (Γ — группа) имеет вид $f = \tilde{f}\gamma$, где $\gamma: S \to G(S)$ — канонический гомоморфизм, $\tilde{f}: G(S) \to \Gamma$ — гомоморфизм групп, однозначно определяемый гомоморфизмом f. Если S — полугруппа с сокращением, то канонический гомоморфизм инъективен и $\tilde{f}$ можно назвать *продолжением* гомоморфизма f на $G(S)$, а f соответственно *сужением* $\tilde{f}$ на S. Будем применять эту терминологию и в общем случае.

Предложение 2.1. *Если T-ограниченное представление абелевой топологической полугруппы S, обладающее полной системой весовых векторов, отвечающих унитарным весам, то оно однозначно продолжается до п. п. представления $\tilde{T}$ группы Гротендика*.*

* В $G(S)$ имеется стандартная топология, индуцированная из S.

Доказательство. Представление T является п. п. согласно замечанию к теореме 2.1. Применяя теорему 2.3, получаем $B_0=0$ в силу условия полноты. Будучи гомоморфизмом в компактную группу, а именно, в свое ядро Сушкевича, T однозначно продолжается до п. п. представления $\tilde{T}$ группы Гротендика $G(S)$.

Следствие. *Пусть $\tilde{T}$ — представление группы Гротендика $G(S)$. Для того чтобы $\tilde{T}$ было п. п., необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным, а его сужение T на S было п. п.*

Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности заметим, что для представления T будет $B_0 = 0$. Действительно, если $\lim\limits_{s\to\infty} T(s)x = 0$, то $\lim\limits_{s\to\infty} \tilde{T}(\gamma(s)x) = 0$, а тогда $x = 0$, ибо $\sup\limits_{s} \|\tilde{T}(\gamma(s)^{-1})\| < \infty$. Итак, T обладает полной системой весовых векторов, отвечающих унитарным весам, а тогда $\tilde{T}$ п. п.

§ 3. Почти периодические операторы и однопараметрические полугруппы. Ограниченный линейный оператор A в банаховом пространстве B называется *п. п.*, если представление $n \to A^n$ $(n \in Z_+)$ является *п. п.*, т. е. каждая орбита $\{A^n x\}$ предкомпактна. *Свойство а. п. п.* для Z_+ *эквивалентно п. п.*

Теорема об отщеплении граничного спектра для п. п. оператора непосредственно вытекает из теоремы 2.3. и формулируется следующим образом.

Теорема 3.1. *Пусть A — оператор в банаховом пространстве B такой, что $\sup\limits_{n\geq 1}\|A^n\| < \infty$. Пусть $B_0 = \{x \mid \lim\limits_{n\to\infty} A^n x = 0\}$, B_1 — замыкание линейной оболочки собственных векторов оператора A, отвечающих унитарному дискретному спектру*. Для того чтобы имело место разложение $B = B_0 \dotplus B_1$, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был п. п. При этом B_1 является топологической прямой суммой собственных подпространств, отвечающих граничному спектру. Если вдобавок $\|A\| = 1$, т. е. A — сжатие, то разложение $B = B_0 \dotplus B_1$ — полуортогональное, оператор $A \mid B_1$ — обратимая изометрия, B_1 является топологической ортогональной суммой граничных собственных подпространств.*

Далее, имеет место критерий сильной сходимости степеней оператора, вытекающий из теоремы 2.4.

Теорема 3.2. (ср. [4]). *Для того чтобы последовательность $\{A^n\}_{n\geq 1}$ сильно сходилась, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был п. п. и не имел унитарных собственных значений, отличных от единицы. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = P_1$, где P_1 — проектор (если A — сжатие, то P_1 — ортопроектор) на подпространство инвариантных векторов оператора A.*

---

* В дальнейшем эта часть спектра п. п. оператора называется *граничным спектром* (см. подстрочное примечание на с. 3).

Вообще же для любого п. п. оператора А имеет место **эргодическая теорема**, т. е. существует сильный предел

$$P_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k,$$

и он является проектором (для сжатия — ортопроектором) на подпространство инвариантных векторов оператора A. Это вытекает из теоремы 3.1. Следовательно, для каждого граничного собственного значения λ существует сильный предел

$$P_\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-k} A^k,$$

и он является проектором (для сжатия — ортопроектором) на соответствующее собственное подпространство*. Это получается заменой A на A/λ.

Наконец, отметим, что из предложения 2.1 вытекает

Предложение 3.1. *Если* $\sup\limits_{n\geq 1} \| A^n \| < \infty$ *и оператор A обладает полной системой собственных векторов, отвечающих унитарному дискретному спектру, то оператор A обратим и порождает п. п. представление группы* $\mathbf{Z}$.

В этом смысле можно сказать, что A — *двусторонне п. п.* оператор.

Следствие. *Для того чтобы обратимый оператор A был двусторонне п. п., необходимо и достаточно, чтобы он был п. п. и чтобы* $\sup\limits_{n<0} \| A^n \| < \infty$.

Рассмотрим некоторые примеры п. п. операторов.

Пример 1. Если A — строгое сжатие в том смысле, что его спектральный радиус $r(A) < 1$, то A — п. п. оператор, так как A^n сходится к нулю (даже по норме). Граничный спектр строгого сжатия пуст.

Пример 2. Если A — компактный оператор и $\sup\limits_{n\geq 1} \| A^n \| < \infty$, то A — п. п. оператор в силу определений. Граничный спектр такого оператора конечен, более того, граничное подпространство конечномерно в силу теории Фредгольма. Проекторы P и P_1 совпадают** с рисовскими спектральными проекторами. После отщепления граничного спектра получается строгое сжатие.

Аддитивная комбинация двух предыдущих тривиальных примеров уже не тривиальна. Она была исследована К. Иосида и С. Какутани [5]. Один из основных результатов этой работы можно истолковать как теорему об отщеплении граничного спектра

---

* Если $|\lambda| = 1$, но λ не является собственным значением, то P_λ существует но в этом случае $P_\lambda = 0$.

** Здесь, как и прежде, P — граничный проектор.

с теми же свойствами, что для компактного оператора. В ситуации Иосида — Какутани свойство п. п. проверяется непосредственно, после чего указанная теорема становится следствием общей теории.

Теорема 3.3. *Пусть оператор A в банаховом пространстве имеет вид $A = C + R$, где C — компактный оператор, R — строгое сжатие, причем $\sup\limits_{n \geq 1} \| A^n \| < \infty$. Тогда A — п. п. оператор, его граничное подпространство конечномерно, а на внутреннем подпространстве спектральный радиус меньше единицы.*

Можно сказать, для A имеет место *равномерное* отщепление граничного спектра. Доказательство теоремы 3.3 приведено в [2].

Следствие [5]. *Пусть существует показатель N, такой, что $A^N = C + R$, где C — компактный оператор, R — строгое сжатие, причем $\sup\limits_{n \geq 1} \| A^n \| < \infty$. Тогда A — п. п. оператор, его граничное подпространство конечномерно, а на внутреннем подпространстве спектральный радиус меньше единицы.*

Замечание. В условиях теоремы 3.3 (или её следствия) средние $n^{-1} \sum\limits_{k \leq n-1} A^k$ сходятся по норме. Таким образом, имеет место равномерная эргодическая теорема.

Сформулируем теперь основные результаты для сильно непрерывной однопараметрической полугруппы операторов e^{At} ($t \geq 0$, A — инфинитезимальный оператор*), иными словами, для представления полугруппы $\boldsymbol{R}_+$ в банаховом пространстве B. В этом случае а. п. п. и п. п. по-прежнему эквивалентны. Граничный спектр п. п. представления $t \to e^{At}$ состоит в точности из тех экспонент $e^{i\lambda t}$, для которых $\lambda \in \boldsymbol{R}$, а $i\lambda$ является собственным значением оператора A. В этом случае *граничным спектром* оператора A естественно называть его чисто мнимый дискретный спектр.

Теорема 3.1′. *Пусть $\sup\limits_{t>0} \| e^{At} \| < \infty$. Положим: $B_0 = \{x \mid \lim\limits_{t \to +\infty} e^{At} x = 0\}$, B_1 — замыкание линейной оболочки собственных векторов оператора A, отвечающих граничному спектру. Для того чтобы имело место разложение $B = B_0 + B_1$ необходимо и достаточно, чтобы полугруппа e^{At} была п. п. При этом B_1 является топологической прямой суммой собственных подпространств, отвечающих граничному спектру. Если вдобавок $\| e^{At} \| \leq 1$ (т. е. A—диссипативный оператор), то разложение $B = B_0 + B_1$ — полуортогональное, оператор $A \mid B_1$ консервативен (т. е. $e^{At} \mid B_1$ — полугруппа обратимых изометрий), B_1 является топологической ортогональной суммой граничных собственных подпространств.*

Теорема 3.2′. *Для того чтобы существовал сильный предел $P_0 = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{At}$, необходимо и достаточно, чтобы полугруппа e^{At} была п. п. и A не имел чисто мнимых собственных значений, отличных от нуля. Этот предел является проектором на* $\operatorname{Ker} A$.

* Оператор A, вообще говоря, неограничен, но замкнут и плотно определен.

Вообще же для любой п. п. полугруппы e^{At} существует сильный предел

$$P_0 = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t e^{A\tau}\,d\tau,$$

и он является проектором на $\operatorname{Ker} A$. Следовательно, для каждого граничного собственного значения $i\lambda$ существует сильный предел

$$P_\lambda = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t e^{A\tau}e^{-i\lambda\tau}\,d\tau,$$

и он является проектором на соответствующее собственное подпространство*. Все описанные выше проекторы в случае диссипативного оператора A являются ортопроекторами.

Теорема 3.2′ непосредственно соприкасается с теорией устойчивости, ибо e^{At} является эволюционным оператором в задаче Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \quad (t>0), \quad x(0) = x. \tag{3.1}$$

С этой точки зрения ограниченность полугруппы e^{At} означает устойчивость по Ляпунову, а стремление e^{At} к нулю (в сильном смысле) означает асимптотическую устойчивость. Из теоремы 3.2′ вытекает

Следствие. *Пусть A — инфинитезимальный оператор сильно непрерывной однопараметрической полугруппы. Для того чтобы задача Коши* (3.1) *была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы полугруппа e^{At} была п. п. и A не имел чисто мнимых собственных значений.*

Это — обобщение классического критерия Ляпунова, относящегося к конечномерному случаю. В конечномерном случае условие п. п. полугруппы e^{At} эквивалентно ограниченности. В бесконечномерном случае это неверно, даже если оператор A не имеет чисто мнимых собственных значений. Примером может служить полугруппа сдвигов $\xi\to\xi_t$ $(\xi_t(s) = \xi(s+t))$ в пространстве непрерывных ограниченных функций на полуоси $s \geqslant 0$.

Остановимся теперь на вопросе о полноте системы собственных векторов инфинитезимального оператора A.

Предложение 3.1′. *Если $\sup\limits_{t\geqslant 0}\|e^{At}\| < \infty$ и оператор A обладает полной системой собственных векторов, отвечающих чисто мнимому дискретному спектру, то полугруппа e^{At} $(t\geqslant 0)$ продолжается до п. п. группы e^{At} $(-\infty < t < \infty)$.*

---

* Если λ вещественно, но $i\lambda$ не является собственным значением, то P_λ существует, но в этом случае $P_\lambda = 0$.

Следствие. *Для того чтобы однопараметрическая группа* e^{At} $(-\infty < t < \infty)$ *была п. п., необходимо и достаточно, чтобы полугруппа* e^{At} $(t \geqslant 0)$ *была п. п. и* $\sup\limits_{t<0} \| e^{At} \| < \infty$.

В силу теоремы 2.1 полнота системы собственных векторов, отвечающих граничному спектру инфинитезимального оператора A, эквивалентна п. п. группы e^{At} при условии ее ограниченности. Вместе с тем одним из авторов [6,7] получен критерий полноты системы собственных векторов, состоящий в п. п. всех функций вида $f(e^{At}x)$ $(x \in B,\ f \in B^*)$. При этом пространство B предполагалось слабо полным. Если такую почти периодичность называть *скалярной*, то оказывается, что в слабо полном пространстве для ограниченной группы e^{At} скалярная п. п. эквивалентна п. п. (здесь уместно сказать,— сильной п. п.). Отметим, что если A — компактный оператор, то группа e^{At} при условии ее ограниченности является скалярно п. п. [6].

Теорема 3.4. *Пусть банахово пространство B не содержит подпространств изоморфных c (т. е. пространству сходящихся последовательностей). Если A — компактный оператор и группа e^{At} $(-\infty < t < \infty)$ ограничена, то она является п. п.*

Доказательство аналогично [6], но использует известную теорему Кадеца об интегрировании п. п. вектор-функций.

В пространстве c имеется контрпример [7]. Пусть $\{\lambda_k\}_{k\geqslant 1}$ — последовательность попарно различных вещественных чисел, стремящаяся к нулю. Тогда оператор $A\{\xi_k\} = \{i\lambda_k \xi_k\}$ $(\{\xi_k\} \in c)$ компактен, группа e^{At} изометрична, но не является п. п., ибо при $\xi_k \equiv 1$ орбита $\{e^{i\lambda_k t}\}$ не предкомпактна. Конечно, в этом примере нет полноты системы собственных векторов (замыкание их линейной оболочки совпадает с c_0). Вместе с тем эта группа является скалярно п. п.

Остановимся еще вкратце на приложениях к теории скалярных п. п. функций. Скалярная функция $\varphi(t)$, непрерывная и ограниченная на полуоси $t \geqslant 0$, называется *п. п.*, если семейство ее сдвигов $\varphi_h(t) = \varphi(t+h)$ $(h \geqslant 0)$ предкомпактно в sup-норме, т. е. в пространстве $CB(\mathbf{R}_+)$. Замыкая в этом пространстве линейную оболочку семейства $\{\varphi_h\}$, мы получаем подпространство L_φ, инвариантное относительно сдвигов, и в этом подпространстве регулярное представление $R_h\varphi = \varphi_h$ $(h \geqslant 0)$ полугруппы $\mathbf{R}_+$. Почти периодичность функции φ эквивалентна почти периодичности представления R.

Теорема 3.1″ [8]. *Для того чтобы непрерывная функция $\varphi(t)$ $(t \geqslant 0)$ была п. п., необходимо и достаточно, чтобы она имела вид $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, где $\varphi_1(t)$ принадлежит равномерному замыканию линейной оболочки семейства экспонент* $\{e^{i\lambda t}\}_{-\infty<t<\infty}$, *а* $\varphi_0(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

При этом функция φ_1 будет аппроксимироваться линейными комбинациями лишь тех экспонент, которые сами аппроксимируются линейными комбинациями сдвигов исходной функции (и в этом смысле принадлежат спектру Берлинга функции φ_1). Таким образом, здесь, как и на всей оси имеет место спектральный синтез. На самом деле указанная аппроксимация эквивалентна тому, что φ_1 почти периодически продолжается на всю ось (согласно предложению 3.1′).

§ 4. Вычисление ядра Сушкевича. Ядро Сушкевича а. п. п. представления абелевой полугруппы можно описать в спектральных терминах.

Теорема 4.1. *Пусть S — абелева топологическая полугруппа, T — ее а. п. п. представление, K — его ядро Сушкевича. Пусть граничный спектр представления T непуст. Тогда $K \approx D^*$, где D — дискретная группа, порожденная семейством $\{\chi_\nu\}$ унитарных весов представления T (рассматриваемых как функции на K)*

Доказательство. Так как D — группа непрерывных функций на K со значениями в единичной окружности, то обычная дуализация ($A^*(\chi) = \chi(A)$ $(A \in K)$) определяет непрерывный гомоморфизм f: $K \to D^*$. Так как группа K компактна, то нужно лишь показать, что f биективен.

Пусть $f(A_0) = 1$, т. е. $\chi(A_0) = 1$. Тогда, в частности, все $\chi_\nu(A_0) = 1$, т. е. все весовые векторы оператора A_0 инвариантны. Ввиду полноты системы весовых векторов в граничном подпространстве, получаем, что $A_0 = \mathrm{id}$. Таким образом, f инъективен.

Пусть $f(K) \neq D^*$. Тогда на компактной группе $D^*/f(K)$ существует нетривиальный характер χ_0. Естественный гомоморфизм $D^* \to D^*/f(K)$ переносит χ_0 на D^*. По принципу двойственности $\chi_0 \in D$. Но при этом $\chi_0 | K = 1$, т. е. $\chi_0 = 1$ в D вопреки построению.

Отметим несколько следствий этой теоремы.

Следствие 1. *Если A — п. п. оператор, $r(A) = 1$, то $K \approx D^*$, где D — дискретная подгруппа единичной окружности, порождаемая граничным спектром оператора A.*

В частности, если граничный спектр конечен* (например, в случае компактного оператора или в более общей ситуации Иосида — Капутани), то порождаемая им подгруппа изоморфна прямому произведению конечной циклической группы и целочисленной решетки $\boldsymbol{Z}^k$ некоторой размерности $k \geqslant 0$. Поэтому имеет место

Следствие 2. *Если граничный спектр п. п. оператора конечен, то его ядро Сушкевича изоморфно прямому произведению конечной циклической группы и тора $\boldsymbol{T}^k$ некоторой размерности $k \geqslant 0$. Если все точки граничного спектра являются*

---

* Для краткости здесь и далее мы опускаем оговорку о непустоте граничного спектра.

корнями из единицы (и только в этом случае), ядро Сушкевича конечно, и тогда оно является циклической группой

Эта циклическая группа изоморфна D (любая конечная абелева группа изоморфна своей группе характеров). Ее порядок есть наименьшее общее кратное порядков точек граничного спектра.

Рассмотрим теперь п. п. полугруппу e^{At} $(t \geqslant 0)$.

Следствие 3. *Если* e^{At} $(t \geqslant 0)$ *— п. п. полугруппа, то* $K \approx D^*$, *где* D *— подгруппа аддитивной группы* $\mathbf{R}$, *порождаемая граничным спектром оператора* A. *Если граничный спектр конечен, то ядро Сушкевича является тором некоторой размерности* $k \geqslant 0$.

Действительно, если $D \subset \mathbf{R}$ — конечнопорожденная подгруппа, то $D \approx \mathbf{Z}^k$ при некотором $k \geqslant 0$, поскольку она не содержит элементов конечного порядка. По этой же причине *для любой однопараметрической п. п. полугруппы ядро* K связно.

В заключение прокомментируем ситуацию п. п. ф. $\varphi(t)$ $(t \geqslant 0)$. В этом случае D — так называемый модуль спектра, а $K \approx D^*$ — боровский компакт функции φ. Роль этих объектов в теории п. п. ф. хорошо известна.

Список литературы

1. *Любич М. Ю., Любич Ю. И.* Спектральная теория почти периодических представлений полугрупп.— Укр. мат. журн., 1984, **36**, № 5, с. 632—636.
2. *Любич Ю. И.* Введение в теорию банаховых представлений групп.— Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1985.— 142 с.
3. *Leew de K., Glicksberg I.* Applications of almost periodic compactifications.—Acta Math., 1962, **105**, N 1—2, p. 63—97.
4. *Jamison B.* Asymptotic behavior of Succesive iterates of continuous functions under a Markov operator.— J. Math. Appl., 1964, **9**, p. 203—214
5. *Yosida K., Kakutani S.* Operator-theoretical treatment of Markoff process and mean ergodic theorem.— Ann. of Math., 1941, **42**, p. 188—228.
6. *Любич Ю. И.* Почти периодические функции в спектральном анализе операторов.— Докл. АН СССР, 1960, **132**, № 3, с. 518—520.
7. *Любич Ю. И.* Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора.— Успехи мат. наук, 1963, **18**, вып. 1, с. 165—171.
8. *Frechet M.* Les fonctions asymptotiquement presque-periodiques.— Rev. Sci, 1941, **79**, p. 341—354.

Поступила в редколлегию 23.11.83.