II

СООБЩЕНІЯ

И

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ

Императорскомъ Харьковскомъ Университетѣ.

1880 года.

I.

ХАРЬКОВЪ.

Въ Университетской Типографіи.

1880.

Напечатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Харьковскаго Университета.

Ректоръ *А. Питра.*

I.

СОДЕРЖАНІЕ.

Протоколы засѣданій:

Сообщенія*.

* Изъ читанныхъ въ засѣданіяхъ математическаго общества сообщеній изданы лишь тѣ, которыхъ рукописи представлены авторами ихъ, для напечатанія, въ распорядительный комитетъ.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стран.	*Стр.*	*Напечатано:*	*Слѣдуетъ:*
8	6 *снизу*	$\frac{\partial x'_i}{q_m} = -\frac{\partial \xi_i}{\partial q'_m}$	$\frac{\partial x'_i}{\partial q_m} = \frac{\partial \xi_i}{\partial q'_m}$
11	13 *сверху*	$\frac{\partial T_2}{\partial q'_2}\, p_2$	$\frac{\partial T_2}{\partial q'_2} = p_2$
12	5 —	T^0	$T^{(0)}$
39	9 —	точку M_1	точку M_2
41	3 *снизу*	$\frac{1}{q+\frac{m}{n}}$	$\frac{1}{q+\frac{m''}{n''}}$
42	9 *сверху*	$\frac{79}{337}$	$\frac{97}{337}$
67	10 —	$\nabla\tau = \frac{1}{(2u_1+h_1)}$	$\nabla\tau = \frac{1}{2(u_1+h_1)}$

ПРОТОКОЛЪ

засѣданія математическаго общества, состоящаго при Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ, 2-го февраля 1880 года.

Присутствовали: В. Г. Имшенецкій, К. А. Андреевъ, Г. В. Левицкій, Ю. И. Морозовъ, А. К. Погорѣлко, А. Е. Рейнботъ, П. М. Рудневъ, И. К. Шейдтъ, И. Д. Штукаревъ.

Предсѣдательствовалъ В. Г. Имшенецкій.

Секретарь доложилъ, что 24-го декабря получено письмо изъ г. Архангельска отъ г-на подпоручика О. П. Фролова, въ которомъ этотъ послѣдній дѣлаетъ дополненія къ тому, что было имъ сообщено въ предыдущемъ письмѣ. Согласно предложенію распорядительнаго комитета, К. А. Андреевъ изъявилъ готовность сообщить подробно содержаніе замѣтки г-на Фролова въ слѣдующее засѣданіе.

А. А. Клюшниковъ, студентъ 4-го курса физико-математическаго факультета, представилъ обществу свою работу: «О уравненіяхъ Бура въ теоріи относительнаго движенія».

В. Г. Имшенецкій высказалъ нѣсколько разъяснительныхъ замѣчаній о работѣ г-на Клюшникова, съ которой онъ былъ знакомъ еще прежде, и обѣщалъ въ одно изъ слѣдующихъ засѣданій сообщить замѣтку, могущую служить дополненіемъ къ тому же предмету.

В. Г. Имшенецкій сообщилъ за-тѣмъ свое изслѣдованіе по вопросамъ о брахистохронѣ и о равновѣсіи гибкой нити, основанное на приведеніи относящихся къ этимъ вопросамъ уравненій къ формѣ каноническихъ уравненій динамики.

I.

О ПРИВЕДЕНІИ УРАВНЕНІЙ

ОТНОСИТЕЛЬНАГО ДВИЖЕНІЯ СИСТЕМЫ МАТЕРІАЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ КЪ КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ.

Студента *А. А. Клюшникова.*

§ 1. Для опредѣленія относительнаго движенія какой-либо системы n матеріальныхъ точекъ по отношенію къ прямоугольной системѣ координатныхъ осей, движущихся извѣстнымъ образомъ въ пространствѣ, можно получить $6n$ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка слѣдующаго вида[1].

$$
(\mathrm{I})\left\{
\begin{aligned}
m_i\frac{d\xi_i}{dt} &= X_i - m_iu + m_ir\eta_i - m_iq\zeta_i + \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3n-k}\lambda_\varepsilon\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial x_i},\\
m_i\frac{d\eta_i}{dt} &= Y_i - m_iv + m_ip\zeta_i - m_ir\xi_i + \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3n-k}\lambda_\varepsilon\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial y_i},\\
m_i\frac{d\zeta_i}{dt} &= Z_i - m_iw + m_iq\xi_i - m_ip\eta_i + \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3n-k}\lambda_\varepsilon\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial z_i},
\end{aligned}
\right.
$$

[1] *Bour*, Mém. sur les mouvem. relatifs. Journ. de Liouville. 1863. Janvier.

$$
(\mathrm{II}) \left\{
\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt} &= \xi_i + ry_i - qz_i, \\
\frac{dy_i}{dt} &= \eta_i + pz_i - rx_i, \\
\frac{dz_i}{dt} &= \zeta_i + qx_i - py_i,
\end{aligned}
\right.
$$

гдѣ i—одно изъ чиселъ $1, 2, \ldots n$; m_i — масса какой-либо изъ разсматриваемыхъ матеріальныхъ точекъ; x_i, y_i, z_i — ея координаты въ концѣ времени t относительно системы подвижныхъ осей, слагающія по которымъ дѣйствующей на эту матеріальную точку въ концѣ времени t данной силы суть X_i, Y_i, Z_i, и $L_1=0$, $L_2=0, \ldots\ldots L_{3n-k}=0$ — условныя уравненія, въ которыя входятъ $3n$ относительныхъ координатъ и время t.

Затѣмъ p, q, z; u, v, w — слагающія по подвижнымъ осямъ соотвѣтственно угловой скорости вращенія координатной системы въ теченіи промежутка времени dt и ускоренія, которое имѣетъ начало координатной системы въ концѣ времени t; наконецъ, количества ξ_i, η_i, ζ_i — функціи, опредѣленныя уравненіями (II).

Вопросъ, рѣшеніе котораго предлагается въ въ этой статьѣ состоитъ въ слѣдующемъ:

Преобразовать систему 6n уравненій вида (I) (II) въ каноническую, допустивъ, что

$$
(1) \qquad X_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial V}{\partial z_i},
$$

гдѣ $V = \Phi\,(x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n, t)$, *и не дѣлая никакого ограниченія относительно условныхъ уравненій* [2].

§ 2. Введемъ количества T, K, G, V_1 опредѣленныя слѣдующими уравненіями:

---

[1] Буръ предполагалъ, что время t не входитъ явно ни въ V, ни въ уравненія $L_1=0$, $L_2=0\ldots$

$$(2)\left\{\begin{aligned}T=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]=\\=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}m_i\left(\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2\right)+\sum_{i=1}^{i=n}m_i\left[(ry_i-qz_i)\xi_i+\right.\\&\left.+(pz_i-rx_i)\eta_i+(qx_i-py_i)\zeta_i\right]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}m_i\left[(ry_i-qz_i)^2\right.\\&\qquad\left.+(pz_i-rx_i)^2+(qx_i-py_i)^2\right],\end{aligned}\right.$$

$$(3)\ K=-u\sum_{i=1}^{i=n}m_i x_i-v\sum_{i=1}^{i=n}m_i y_i-w\sum_{i=1}^{i=n}m_i z_i,$$

$$(4)\ G=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}m_i\left[(ry_i-qz_i)^2+(pz_i-rx_i)^2+(qx_i-py_i)^2\right],$$

$$(5)\ V_1=V+K+G.$$

На основаніи послѣднихъ формулъ, а также уравненія (1), и въ-силу того обстоятельства, что u, v, w, p, q, r независятъ отъ x_i, y_i, z_i, уравненія (I) и (II) можно замѣнить соотвѣтственно уравненіями:

$$
(\mathrm{I}')\begin{cases}
m_i\dfrac{d\xi_i}{dt}=\dfrac{\partial(V_1-T)}{\partial x}+\displaystyle\sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3n-k}\lambda_\varepsilon\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial x_i},\\[2ex]
m_i\dfrac{d\eta_i}{dt}=\dfrac{\partial(V_1-T)}{\partial y_i}+\displaystyle\sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3n-k}\lambda_\varepsilon\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial y_i},\\[2ex]
m_i\dfrac{d\zeta_i}{dt}=\dfrac{\partial(V_1-T)}{\partial z_i}+\displaystyle\sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3n-k}\lambda_\varepsilon\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial z_i},
\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{II}')\begin{cases}
\dfrac{dx_i}{dt}=\dfrac{\partial T}{\partial m_i\xi_i},\\[2ex]
\dfrac{dy_i}{dt}=\dfrac{\partial T}{\partial m_i\eta_i},\\[2ex]
\dfrac{dz_i}{dt}=\dfrac{\partial T}{\partial m_i\zeta_i}.
\end{cases}
$$

Допустивъ теперь, что каждое изъ количествъ x_1, y_1, z_1.... x_n, y_n, z_n выражено помощью k новыхъ перемѣнныхъ q_1, q_2,...q_k и (количества) t, входящаго явно въ условныя уравненія, такимъ образомъ что, по вставкѣ этихъ выраженій въ уравненія $L_1=0$, $L_2=0$,.... $L_{3n-k}=0$, послѣднія обращаются въ тождественныя; умножимъ уравненія (I′) соотвѣтственно на $\dfrac{\partial x_i}{\partial q_m}$, $\dfrac{\partial y_i}{\partial q_m}$, $\dfrac{\partial z_i}{\partial q_m}$ (m — одно изъ чиселъ $1, 2, \ldots k$) и затѣмъ сложимъ; а взявъ сумму подобныхъ результатовъ для $i=1, 2,\ldots n$, получимъ:

$$
(6)\left\{
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[\frac{d\xi_i}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_m}+\frac{d\eta_i}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_m}+\frac{d\zeta_i}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right]=\\
&=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_m}+\frac{\partial V_1}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_m}+\frac{\partial V_1}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right)\\
&-\sum_{i=1}^{i=1}\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Принимая во вниманіе равенства

$$
\frac{\partial V_1}{\partial q_m}=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_m}+\frac{\partial V_1}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_m}+\frac{\partial V_1}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right)
$$

и
$$
\frac{\partial T}{\partial q_m}=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right)+
$$
$$
+\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial \eta_i}\frac{\partial \eta_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial \zeta_i}\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_m}\right),
$$

уравненію (6) можно дать видъ

$$
\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(\frac{d\xi_i}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_m}+\frac{d\eta_i}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_m}+\frac{d\zeta_i}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right)+
$$
$$
+\frac{\partial T}{\partial q_m}-\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial \eta_i}\frac{\partial \eta_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial \zeta_i}\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_m}\right)=\frac{\partial V_1}{\partial q_m}
$$

или слѣдующій:

$$
(7)\left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(\xi_i\frac{\partial x_i}{\partial q_m}+\eta_i\frac{\partial y_i}{\partial q_m}+\zeta_i\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right)-\\
&-\sum_{i=1}^{i=n}\left(\xi_i\frac{d\frac{\partial x_i}{\partial q_m}}{dt}+\eta_i\frac{d\frac{\partial y_i}{\partial q_m}}{dt}+\zeta_i\frac{d\frac{\partial z_i}{\partial q_m}}{dt}\right)\\
&+\frac{\partial T}{\partial q_m}-\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial \eta_i}\frac{\partial \eta_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial \zeta_i}\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_m}\right)=\frac{\partial V_1}{\partial q_m};
\end{aligned}\right.
$$

но изъ формулъ

$$x'_i=\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{\partial x_i}{\partial q_1}q'_1+\ldots\ldots+\frac{\partial x_i}{\partial q_k}q'_k$$

$$y'_i=\frac{dy_i}{dt}=\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial y_i}{\partial q_1}q'_1+\ldots\ldots+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}q'_k$$

$$z'_i=\frac{dz_i}{dt}=\frac{\partial z_i}{\partial t}+\frac{\partial z_i}{\partial q_1}q'_1+\ldots\ldots+\frac{\partial z_i}{\partial q_k}q'_k,$$

гдѣ $q'_m=\dfrac{dq_m}{dt}$

слѣдуетъ, во-первыхъ, что

$$\frac{\partial x'_i}{q_m}=\frac{\partial \xi_i}{\partial q'_m}=\frac{\partial x_i}{\partial q_m},\ \frac{\partial y'_i}{\partial q'_m}=\frac{\partial \eta_i}{\partial q'_m}=\frac{\partial y_i}{\partial q_m};\ \frac{\partial z'_i}{\partial q'_m}=\frac{\partial \zeta_i}{\partial q'_m}=\frac{\partial z_i}{\partial q_m}$$

и во-вторыхъ, что

$$\frac{d\frac{\partial x_i}{\partial q_m}}{dt}=\frac{\partial\frac{\partial x_i}{\partial q_m}}{\partial t}+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m\partial q_1}q'_1+\ldots+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m\partial q_k}q'_k=\frac{\partial x'_i}{\partial q_m}=\frac{\partial\frac{\partial T}{\partial m_i\xi_i}}{\partial q_m}$$

и подобнымъ же образомъ

$$\frac{d\frac{\partial y_i}{\partial q_m}}{dt,}=\frac{\partial y_i}{\partial q_m}=\frac{\partial\frac{\partial T}{\partial m_i\eta_i}}{\partial q_m};\quad \frac{d\frac{\partial z_i}{\partial q_m}}{dt}=\frac{\partial z_i}{\partial q_m}=\frac{d\frac{\partial T}{\partial m_i z_i}}{\partial q_m},$$

такъ-что

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\xi_i \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \eta_i \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \zeta_i \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\xi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q'_m} + \eta_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q'_m} + \zeta_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial q'_m} \right),$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\xi_i \frac{d \frac{\partial x_i}{\partial q_m}}{dt} + \eta_i \frac{d \frac{\partial y_i}{\partial q_m}}{dt} + \zeta_i \frac{d \frac{\partial z_i}{\partial q_m}}{dt} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\xi_i \frac{d \frac{\partial T}{\partial m_i \xi_i}}{dt} + \eta_i \frac{d \frac{\partial T}{\partial m_i \eta_i}}{dt} + \zeta_i \frac{d \frac{\partial T}{\partial m_i \zeta_i}}{dt} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_m} \sum_{i=i}^{i=n} \left(\xi_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial T}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial T}{\partial \zeta_i} \right)$$

$$- \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_m} + \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial q_m} + \frac{\partial T}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_m} \right),$$

а, слѣдовательно, уравненію (7) можно дать видъ:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\xi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q'_m} + \eta_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q'_m} + \zeta_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial q'_m} \right)$$

$$- \frac{\partial}{\partial q_m} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\xi_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial T}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial T}{\partial \zeta_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_m} = \frac{\partial V_i}{\partial q_m}. \quad (8)$$

Желая придать послѣднему уравненію болѣе простую форму, введемъ количества T_2 и T_1, опредѣленныя уравненіями:

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2\right), \tag{9}$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big[\left(ry_i - qz_i\right)\xi_i + \left(pz_t - rx_i\right)\eta_i + \left(qx_i - py_i\right)\zeta_i\Big], \tag{10}$$

такъ что, на основаніи формулъ (2) и (4), имѣемъ

$$T = T_2 + T_1 + G. \tag{11}$$

Дифференцированіе формулы (9) доставляетъ

$$\frac{\partial T_2}{\partial q'_m} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(\xi_i\frac{\partial \xi_i}{\partial q'_m} + \eta_i\frac{\partial \eta_i}{\partial q'_m} + \zeta_i\frac{\partial \zeta_i}{\partial q'_m}\right), \tag{12}$$

а изъ уравненія (11), въ силу теоремы однородныхъ функцій, имѣемъ

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\xi_i\frac{\partial T}{\partial \xi_i} + \eta_i\frac{\partial T}{\partial \eta_i} + \zeta_i\frac{\partial T}{\partial \zeta_i}\right) = 2T_2 + T_1\,. \tag{13}$$

Обративъ вниманіе на равенства (11), (12) и (13), уравненіе (8) можно представить подъ видомъ

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T_2}{\partial q'_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\left(T_2 - G\right) = \frac{\partial V_1}{\partial q_m}$$

или такъ

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T_2}{\partial q'_m} = \frac{\partial (T_2 + V + K)}{\partial q_m}\,.$$

Приписывая въ послѣднемъ уравненіи указателю m послѣдовательно значенія $1, 2, 3, \ldots k$, мы образуемъ слѣдующую систему k совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial q'_1}=\frac{\partial(T_2+V+K)}{\partial q_1};\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial q'_2}=\frac{\partial(T_2+V+K)}{\partial q_2};$$

$$\ldots\ldots\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial q'_k}=\frac{\partial(T_2+V+K)}{\partial q_k}, \quad (14)$$

въ которыя входятъ независимое перемѣнное t, искомыя количества $q_1, q_2, \ldots q_k$ и ихъ производныя въ отношеніи t перваго и втораго порядковъ. Эти k дифференціальныхъ уравненій 2-го порядка можно привести къ $2k$ дифференціальнымъ уравненіямъ 1-го порядка, введя k новыхъ количествъ $p_1, p_2, \ldots p_k$, извѣстнымъ образомъ связанныхъ съ производными $q'_1, q'_2, \ldots q'_k$.

Такъ, если положимъ:

$$\frac{\partial T_2}{\partial q'_1}=p_1,\ \frac{\partial T_2}{\partial q'_2}p_2,\ \ldots\ \frac{\partial T_2}{\partial q'_k}=p_k, \quad (15)$$

то для опредѣленія искомыхъ количествъ $q_1, q_2, \ldots q_k$ и $p_1, p_2, \ldots p_k$ будемъ имѣть $2k$ дифференціальныхъ уравненій (14) и (15) перваго порядка.

Съ цѣлью преобразовать послѣднія уравненія, условимся на время разсматривать $2k$ количествъ $q_1, q_2, \ldots q_k; p_1, p_2, \ldots p_k$, какъ независимыя перемѣнныя, и дѣйствіе дифференцированія относительно ихъ означать характеристикой δ; количества же q'_1, $q_2, \ldots q_k$ суть по формуламъ (15) функціи предыдущихъ $2k$ перемѣнныхъ и еще количества t. Подставивъ въ выраженіе

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]=T$$

вмѣсто производныхъ $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{dy_i}{dt}$, $\frac{dz_i}{dt}$ ихъ выраженія въ количествахъ t, q_1, q_2, ... q_k; q_1', q_2', ... q_k', какъ напр. $\frac{dx_i}{dt} + \frac{dx_i}{dq_1} q_1' + \ldots + \frac{dx_i}{dq_k'} q_k'$ вмѣсто $\frac{dx_i}{dt}$, можно количество T представить подъ видомъ суммы трехъ членовъ T'', T', T^0, которые соотвѣтственно суть однородныя функціи второй, первой и нулевой степени относительно производныхъ q_1', q_2', ... q_k'. Итакъ, имѣемъ равенство:

$$T = T'' + T' + T^{(0)}, \tag{16}$$

изъ котораго слѣдуетъ, что $\sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T}{\partial q_m'} q_m' = \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial (T'' + T' + T^{(0)})}{\partial q_m'} q_m'$

$= \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T''}{\partial q_m'} q_m' + \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T'}{\partial q_m'} q_m' + \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial q_m'} q_m'$, но такъ-какъ

$\sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T''}{\partial q_m'} q_m' = 2T''$ и $\sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T'}{\partial q_m} q_m' = T'$ на основаніи теоремы однородныхъ функцій, а $\sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial q_m'} q_m' = 0$ — вслѣдствіе того, что $T^{(0)}$ не содержитъ производныхъ q_1', q_2',... q_k'; то имѣемъ:

$$\sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T}{\partial q_m'} q_m' = 2T'' + T'. \tag{17}$$

Изъ равенствъ (17) и (16) находимъ черезъ дифференцированіе:

$$2\delta T'' + \delta T' = \sum_{m=1}^{m=k} q'_m\, \delta \frac{\partial T}{\partial q'_m} + \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T}{\partial q'_m} \delta q'_m$$

и $\delta T = \delta T'' + \delta T' + \delta T^0 = \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T}{\partial q_m} \delta q_m + \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T}{\partial q'_m} \delta q'_m$;

а отсюда черезъ вычитаніе получимъ:

$$\delta\left(T'' - T^{(0)}\right) = \sum_{m=1}^{m=k} q'_m\, \delta \frac{\partial T}{\partial q'_m} - \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T}{\partial q_m} \delta q_m . \quad (18)$$

Обращаясь теперь къ уравненію (11) и замѣчая, во-первыхъ, что G не содержитъ $q'_1, q'_2, \ldots q'_k$, а во-вторыхъ, что, на основаніи уравненій (15), $\frac{\partial T_2}{\partial q'_m} = p_m$, найдемъ, что

$$\frac{\partial T}{\partial q'_m} = p_m + \frac{\partial T_1}{\partial q'_m},$$

откуда $\delta \frac{\partial T}{\partial q'_m} = \delta p_m + \delta \frac{\partial T_1}{\partial q'_m}$; (19)

но, съ другой стороны, T_1 есть функція первой степени относительно количествъ $q'_1, q'_2, \ldots q'_k$, такъ-что производная $\frac{\partial T}{\partial q'_m}$ не содержитъ въ себѣ этихъ количествъ, а слѣдовательно, и количествъ $p_1, p_2 \ldots p_k$, и есть функція только отъ t, $q_1, q_2, \ldots q_k$; а потому

$$\delta \frac{\partial T_1}{\partial q'_m} = \delta q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial T_1}{\partial q'_m} + \delta q_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{\partial T_1}{\partial q'_m} + \delta q_k \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial T_1}{\partial q_m} .$$

На основаніи послѣдней формулы уравненію (19) можно дать видъ

$$\delta \frac{\partial T_1}{\partial q'_m} = \delta p_m + \delta q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial T_1}{\partial q'_m} + \ldots + \delta q_k \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial T_1}{\partial q'_m};$$

а, слѣдовательно, уравненіе (18) можетъ быть представлено такъ

$$\delta\left(T^{11} - T^{(0)}\right) = \sum_{m=1}^{m=k} q'_m \delta p_m + \sum_{m=1}^{m=k}\left(q'_1 \frac{\partial}{\partial q_m} \frac{\partial T_1}{\partial q'_1} + \ldots \right.$$

$$\left. + q'_k \frac{\partial}{\partial q_m} \frac{\partial T_1}{\partial q'_k} - \frac{\partial T}{\partial q_m}\right) \delta q_m$$

Здѣсь въ первой части $T^{(0)}$ есть функція только количествъ $t, q_1, q_2, \ldots q_k$; тогда какъ T'' содержитъ въ себѣ еще производныя $q'_1, q'_2, \ldots q'_k$; выключивъ изъ T'' эти производныя помощью уравненій (15), означимъ выраженіе функціи T'' въ количествахъ $q_1, q_2, \ldots q_k$; $p_1\, p_2, \ldots p_k$ черезъ $T^{(11)}$.

Послѣднее равенство, въ которомъ первая часть есть:

$$\sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial (T^{(11)} - T^{(0)})}{\partial q_m} \delta q_m + \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial p_m} \delta p_m,$$

по произвольности дифференціаловъ δq_m, δp_m разлагается на равенства:

$$q'_m = \frac{\partial T^{(11)}}{\partial p_m}, \tag{20}$$

и
$$\frac{\partial (T^{(11)} - T^{(0)})}{\partial q_m} = \frac{\partial}{\partial q_m} \sum_{l=1}^{l=k} q'_l \frac{\partial T_1}{\partial q'_l} - \frac{\partial T}{\partial q_m}. \tag{21}$$

Представимъ иначе входящую сюда сумму $\sum_{l=1}^{l=k} q'_l \frac{\partial T_1}{\partial q'_l}$.

Такъ-какъ формулы (II) § 1 при новыхъ обозначеніяхъ принимаютъ видъ:

$$\xi_t = \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial x}{\partial q_m} q'_m + \frac{\partial x}{\partial t} + q z_i - r y_i \,,$$

$$\eta_i = \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} q'_m + \frac{\partial y_i}{\partial t} + r x_i - p z \,,$$

$$\zeta_i = \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} q'_m + \frac{\partial z_i}{\partial t} + p y_i = q x_i \,,$$

то, по формулѣ (10) функцію T_1, можно представить, какъ сумму двухъ другихъ $T_1^{\,1}$ и $T_1^{(0)}$, изъ которыхъ первая есть однородная первой степени относительно производныхъ q'_1, q'_2,... q'_k, а вторая опредѣляется формулою

$$T_1^{(0)} = \div \sum_{i=1}^{i=n} m_i \Big[\Big(q z_i - r y_i \Big) \frac{\partial x_i}{\partial t} + \Big(r x_i - p z_i \Big) \frac{\partial y_i}{\partial t}$$

$$+ \Big(p y_i - q x_i \Big) \frac{\partial z_i}{\partial t} \Big] - 2G \,,$$

такъ-что производныхъ q'_1, q'_2, ... q'_k въ себѣ не содержитъ:

Такимъ образомъ, на основаніи теоремы однородныхъ функцій, имѣемъ

$$\sum_{l=1}^{l=k} q'_l \frac{\partial T_1}{\partial q'_l} = \sum_{l=1}^{l=k} q'_l \frac{\partial (T_1^{\,1} + T_1^{(0)})}{\partial q'_l}$$

$$=\sum_{l=1}^{l=k} q'_l \frac{\partial T_1^1}{\partial q'_l}=T'_1=T_1-T_1^{(0)};$$

послѣ этого уравненію (21) можно дать видъ:

$$\frac{\partial (T_1-T_1^{(0)}-T)}{\partial q_m}=\frac{\partial (T^{(11)}-T^{(0)})}{\partial q_m}$$, или, на основаніи формулы (11),

слѣдующій

$$\frac{\partial (-T_2-G-T_1^{(0)})}{\partial q_m}=\frac{\partial (T^{(11)}-T^{(0)})}{\partial q_m};$$ а отсюда

$$\frac{\partial T_2}{\partial q_m}=-\frac{\partial [T^{(11)}-(T^{(0)}-T_1^{(0)}-G)]}{\partial q_m}=-\frac{\partial (T^{(11)}-T_2^{(0)})}{\partial q_m}, \quad (22)$$

гдѣ $T_2^{(0)}=T^{(0)}-T_1^{(0)}-G$.

На основаніи формулъ (22) и (15) уравненія (14) могутъ быть написаны такъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt}&=-\frac{\partial (T^{(11)}-V-(T_2^{(0)}+K))}{\partial q_1}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dp_k}{dt}&=-\frac{\partial (T^{(11)}-V-(T_2^{(0)}+K))}{\partial q_k}; \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

что же касается уравненій (15), то послѣднія могутъ быть замѣнены уравненіями вида (20).

Такимъ образомъ вмѣсто уравненій (14) и (15) можетъ взять (23) и слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt}&=\frac{\partial T_1^{(11)}}{\partial p_1},\\ &\cdots\cdots\\ \frac{dq_k}{dt}&=\frac{\partial T^{(11)}}{\partial p_k} \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Положивъ для краткости $H = T^{(11)} - V - (T_2^{(0)} + K)$ и замѣтивъ, что количества V, $T_2^{(0)}$ и K не зависятъ отъ p_1, $p_2, \ldots . p_k$, мы можемъ уравненіямъ (23) и (24) дать слѣдующій видъ:

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_2} \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}$$

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

который и есть *каноническій.*

II.

КАНОНИЧЕСКІЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ

гибкой, нерастяжимой нити и брахистохроны,

въ случаѣ потенціальныхъ силъ.

В. Г. Имшенецкаго.

Свое изслѣдованіе «О фигурѣ равновѣсія гибкой нити» *А. Клебшъ*[1] началъ слѣдующимъ замѣчаніемъ: «Общіе принципы, при помощи которыхъ *Якоби* привелъ интегрированіе уравненій движенія къ рѣшенію уравненія въ частныхъ производныхъ, какъ скоро существуетъ функція силъ, въ томъ-же самомъ случаѣ допускаютъ приложеніе и къ опредѣленію фигуры равновѣсія нити, которое равнымъ образомъ приводится къ задачѣ варіаціоннаго вычисленія». *Тэтъ* въ своей статьѣ «О приложеніи характеристической функціи Гамильтона къ спеціальнымъ случаямъ несвободнаго движенія»[2], напомнивъ о важномъ значеніи способа Гамильтона, для рѣшенія обыкновенныхъ вопросовъ динамики, въ-слѣдъ за тѣмъ выражается приблизительно такимъ

---

[1] Ueber die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen Fadens. Von *A. Clebsch.* Crelle (Borcharat). 57 B. 93 S. 1860.

[2] On the Application of Hamilton's Characteristic Function to the Special Cases of Constraint. By Professor *Tait,* Transactions of the R. S. of Edinburgh. Vol. XXIV. Part I. 1864—65. p. 147.

образомъ: «сколько мнѣ извѣстно, этотъ способъ не былъ прилагаемъ къ обратнымъ задачамъ, въ родѣ брахистохроны, напримѣръ, гдѣ имѣется въ виду, какъ самый существенный предметъ, опредѣленіе требуемой связи (constraint), которая произвела бы данный результатъ. Между-тѣмъ-какъ въ обширномъ классѣ такихъ вопросовъ нетрудно замѣтить легкое примѣненіе процесса совершенно аналогичнаго гамильтонову; хотя въ этихъ случаяхъ характеристическая функція не та-же самая функція (количествъ, опредѣляющихъ движеніе) какъ въ *способѣ измѣняющагося дѣйствія* (Methode of Varying Action)».

Второму изъ упомянутыхъ авторовъ, по-видимому, не была извѣстна работа перваго; такъ-какъ она имъ не цитируется даже въ концѣ статьи, гдѣ указана возможность приложенія къ опредѣленію фигуры равновѣсія гибкой нити способа, даннаго для нахожденія брахистохронъ. Но оба эти автора пользуются варіаціоннымъ вычисленіемъ для полученія уравненія въ частныхъ производныхъ 1-го порядка и 2-й степени, изъ котораго выводится характеристическая функція, какъ полный его интегралъ. Если имѣется въ виду лишь выводъ этого уравненія, то, конечно, варіаціонное вычисленіе приводитъ къ нему кратко и непосредственно. Но, во-первыхъ, этотъ пріемъ не достаточно элементаренъ, по-крайней-мѣрѣ для статики, а во-вторыхъ, такимъ образомъ краткость изложенія можетъ быть достигнута только при пропускѣ нѣкоторыхъ предложеній, доказательство которыхъ необходимо въ систематическомъ развитіи теоріи. Такія сокращенія можно объяснить лишь тѣмъ, что опущенныя предложенія и ихъ доказательства имѣютъ много сходнаго съ аналогичными предложеніями въ теоріи рѣшенія по способу Гамильтона и Якоби обыкновенныхъ задачъ динамики. Но какъ бы то ни было, а въ этомъ, можетъ быть, заключается причина того, что прекрасное распространеніе теоріи Гамильтона и Якоби, сдѣланное Клебшемъ и Тэтомъ, на задачи о равновѣсіи гибкой нити и о брахистохронѣ, объясненное превосходными приложеніями, до сихъ поръ не вошло, сколько мнѣ извѣстно, въ курсы теоретической механики, за исключеніемъ «A Treatise on Dinamics of a Particle» самого Тэта.

Примѣняемость гамильтоно-якобіевской теоріи къ задачамъ о равновѣсіи гибкой нити и о брахистохронѣ можетъ быть доказана, по моему мнѣнію, болѣе простымъ образомъ. Для этого, предполагая извѣстною общую аналитическую теорію интегрированія дифференціальныхъ уравненій *каноническаго* вида, очевидно, необходимо и достаточно показать только, какъ къ этому виду приводятся, посредствомъ надлежащаго выбора перемѣнныхъ, обыкновенныя дифференціальныя уравненія, которыя даются въ большинствѣ курсовъ механики, той и другой изъ этихъ двухъ задачъ. Это преобразованіе должно различаться въ случаѣ нити или брахистохроны *свободной* или *несвободной;* въ первомъ случаѣ его можно объяснить въ нѣсколькихъ словахъ; во второмъ же, хотя оно нѣсколько и сложнѣе, однако исполняется при помощи обычныхъ пріемовъ для аналогичныхъ случаевъ обыкновенныхъ задачъ динамики.

§ I.

Равновѣсіе гибкой своводной нити.

1. Отнеся положеніе точекъ нити къ тремъ прямоугольнымъ осямъ, означимъ черезъ ds элементъ ея въ точкѣ xyz, черезъ $U.\,ds$ функцію или потенціалъ дѣйствующихъ на него силъ и, наконецъ, черезъ T натяженіе этого элемента.

Фигура равновѣсія нити опредѣляется, какъ извѣстно, слѣдующими уравненіями:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+\frac{\partial U}{\partial x}=0$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)+\frac{\partial U}{\partial y}=0$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+\frac{\partial U}{\partial z}=0 \qquad (1)$$

и

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1. \qquad (2)$$

Эти четыре уравненія, съ четырьмя неизвѣстными функціями x, y, z, T отъ s, можно преобразовать, исключивъ одну неизвѣстную T и приведя остальныя уравненія, посредствомъ введенія новыхъ перемѣнныхъ, вмѣсто $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, къ системѣ шести уравненій перваго порядка и канонической формы.

Для этого полагаемъ

$$T\frac{dx}{ds}=x_1,\quad T\frac{dy}{ds}=y_1,\quad T\frac{dz}{ds}=z_1, \qquad (3)$$

означая черезъ $x_1\ y_1\ z_1$ новыя зависимыя перемѣнныя, представляющія, очевидно, слагающія натяженія.

Изъ (3) на основаніи (2) имѣемъ

$$T=+\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}, \qquad (4)$$

гдѣ корень взятъ съ $+$, потому что натяженіе величина абсолютная.

Такимъ образомъ уравненія (3) и (1) обратятся въ слѣдующія

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{ds}&=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z}},\ \frac{dy}{ds}=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},\ \frac{dz}{ds}=\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}\\ \frac{dx_1}{ds}&=-\frac{\partial U}{\partial x_1},\quad \frac{dy_1}{ds}=-\frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{dz_1}{ds}=-\frac{\partial U}{\partial z}.\end{aligned}\right\} (5)$$

Можно допустить, что $\frac{\partial U}{\partial x_1}=\frac{\partial U}{\partial y_1}=\frac{\partial U}{\partial z_1}=0$, т. е. что U не зависитъ отъ $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, а слѣдовательно и отъ x_1, y_1, z_1.

Въ такомъ случаѣ полагая

$$H=U+\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

напишемъ уравненія (5) слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{ds}&=\frac{dH}{dx_1},\ \frac{dy}{ds}=\frac{dH}{dy_1},\ \frac{dz}{ds}=\frac{dH}{dy_1}\\ \frac{dx_1}{ds}&=-\frac{dH}{dx},\ \frac{dy_1}{ds}=-\frac{dH}{dy},\ \frac{dz_1}{ds}=-\frac{dH}{dz}\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

т. е. приводимъ ихъ къ каноническои формѣ.

2. Если предположимъ, что U есть функціи только x, y, z; то, полагая

$$x_1=\frac{\partial V}{\partial x},\ y_1=\frac{\partial V}{\partial y},\ z_1=\frac{\partial V}{\partial z},\quad(7)$$

получимъ уравненіе въ частныхъ производныхъ

$$U+\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}}=h=\text{const},\quad(8)$$

какой-нибудь полный интегралъ котораго, содержащій произвольныя постоянныя a, b, h (не принимая во вниманіе просто приданнаго произвольнаго постояннаго), будетъ главной или характеристической функціей задачи.

Всѣ неизвѣстныя получатся слѣдующимъ образомъ помощію этой функціи.

Во-первыхъ, имѣемъ, на основаніи (3) и (7),

$$T\frac{dx}{ds}=\frac{\partial V}{\partial x},\ T\frac{dy}{ds}=\frac{\partial V}{\partial y},\ T\frac{dz}{ds}=\frac{\partial V}{\partial y},$$

откуда, на основаніи (2) и (8), находимъ натяженіе нити въ каждой точкѣ

$$T=\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}}=h-U$$

и замѣчаемъ, что нить въ каждой точкѣ натянута нормально къ поверхности $V=\text{const.}$, проходящей черезъ эту точку.

Во 2-хъ, фигуру равновѣсія нити опредѣлятъ два конечныя уравненія:

$$\frac{\partial V}{\partial a}=\alpha=\text{const. и } \frac{\partial V}{\partial b}=\beta=\text{const.};$$

и, въ 3-хъ, наконецъ, длина нити s найдется изъ уравненія

$$\frac{\partial V}{\partial h}-s=\gamma=\text{const.}$$

Понятно, какъ упрощаются эти результаты, если фигура равновѣсія будетъ плоская.

Для большей общности можно допустить, что U кромѣ координатъ x, y, z содержитъ еще s явно.

Тогда полагая

$$x_1=\frac{\partial S}{\partial x},\ y_1=\frac{\partial S}{\partial y},\ z_1=\frac{\partial S}{\partial z}$$

получимъ уравненіе въ частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial S}{\partial s}+\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}}+U=0 \quad (9)$$

и найдя какой-нибудь полный интегралъ его S, содержащій кромѣ просто приданнаго произвольныя постоянныя a, b, c, выразимъ полное рѣшеніе задачи уравненіями

$$T\frac{dx}{ds}=\frac{\partial S}{\partial x},\quad T\frac{dy}{ds}=\frac{\partial S}{\partial y},\quad T\frac{dz}{ds}=\frac{\partial S}{\partial z}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a}=\alpha=\text{const},\quad \frac{\partial S}{\partial b}=\beta=\text{const.},\quad \frac{\partial S}{\partial c}=\gamma=\text{const.}$$

Дѣйствительно, изъ трехъ послѣднихъ уравненій можно выразить x, y, z какъ функціи s; потомъ изъ предпослѣднихъ трехъ уравненій также въ функціи s получится натяженіе

$$T=\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}}=-\left(V+\frac{\partial S}{\partial s}\right)$$

Предыдущій способъ рѣшенія нѣсколько видоизмѣняется, если положимъ

$$x = -\frac{\partial W}{\partial x_1}, \quad y = -\frac{\partial W}{\partial y_1}, \quad z = -\frac{\partial W}{\partial z_1} \qquad (10)$$

Тогда будемъ имѣть уравненіе въ частныхъ производныхъ

$$F\left(-\frac{\partial W}{\partial x_1}, -\frac{\partial W}{\partial y_1}, -\frac{\partial W}{\partial z_1}\right) + \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = h = \text{const} \ (11)$$

если $U = F(x, y, z)$. Найдя полный интегралъ этого уравненія W, содержащій кромѣ приданнаго произвольныя постоянныя a, b, h, получимъ полное рѣшеніе задачи изъ уравненій (10)

и $$\frac{\partial W}{\partial a} = \alpha = \text{const}, \frac{\partial W}{\partial b} = \beta = \text{const}, \frac{\partial W}{\partial h} - s = \gamma = \text{const}.$$

Дѣйствительно, изъ трехъ послѣднихъ уравненій x_1, y_1, z_1, а слѣдовательно и натяженіе T можно выразить функціями s; потомъ посредствомъ s выразятся также x, y, z, изъ уравненій (10). Исключивъ изъ нихъ s, получимъ фигуру равновѣсія.

Наконецъ уравненія

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \alpha \quad \text{и} \quad \frac{\partial W}{\partial b} = \beta,$$

если x_1, y_1, z_1 разсматривать какъ прямоугольныя координаты, опредѣлятъ (подобно тому, какъ въ аналогичныхъ случаяхъ задачъ о движеніи точки) родъ *годографа* или указательницы — кривую линію такого свойства, что радіусы-векторы ея, проведенные изъ начала координатъ, представятъ величину натяженія нити въ тѣхъ точкахъ, гдѣ касательныя къ фигурѣ равновѣсія параллельны этимъ радіусамъ.

Функціи V, S, W можно получить посредствомъ вычисленія квадратуръ, если получена половина интеграловъ кононическихъ уравненій (6), интеграловъ выполняющихъ условія, выраженныя теоремой *Ліувилля*. Нахожденіе такихъ интеграловъ, при систематическомъ приложеніи теоремы *Пуассона*, обращается въ способъ *Якоби* интегрированія уравненій въ частныхъ производныхъ 1-го порядка (8), (9) и (11).

Замѣтимъ еще, что иногда U можетъ представляться суммой U_1+U_2 такого рода, что дѣлая $U_2=0$, т. е. принимая $U=U_1$ легко вполнѣ интегрировать уравненія (6). Произвольными постоянными, введенными этимъ интегрированіемъ, можно замѣнить зависимыя перемѣнныя первоначальной задачи, гдѣ $U=U_1+U_2$, и такимъ образомъ получится преобразованная система дифференціальныхъ уравненій также каноническаго вида, куда U_1 не войдетъ. Если притомъ U_2 весьма мало въ сравненіи съ U_1, то преобразованныя уравненія достаточно будетъ интегрировать лишь приближенно.

Задача этого рода, подобная вопросу о возмущенномъ движеніи планеты, по-видимому возможна при опредѣленіи фигуры равновѣсія нити. Напримѣръ — если главная сила, дѣйствующая на элементы нити, есть тяжесть и второстепенныя или возмущающія силы происходятъ отъ окружающей среды, которою можетъ быть вода или воздухъ.

§ II.

Равновѣсіе гибкой несвободной нити.

3. Если къ условіямъ, принятымъ въ началѣ § I, прибавимъ требованіе, чтобы уравновѣшенная данными силами нить находилась на данной поверхности

$$f(x,y,z)=0; \tag{1}$$

то фигура равновѣсія нити опредѣлится уравненіемъ (1) и слѣдующими:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+\frac{\partial V}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)+\frac{\partial V}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0\\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right)+\frac{\partial V}{\partial z}+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1\qquad(3)$$

гдѣ

$$\lambda=\frac{N}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right\}}},$$

а $N.ds$ означаетъ неизвѣстную нормальную реакцію поверхности (1) на элементъ ds нити. Посредствомъ пяти уравненій (1), (2) и (3) должно, слѣдовательно, опредѣлить пять неизвѣстныхъ x, y, z, T и λ функціей отъ s.

4. Сначала мы преобразуемъ эти уравненія такъ, чтобы исключалось λ, а вмѣсто x, y, z вошли бы двѣ новыхъ неизвѣстныхъ p и q.

Для этого представимъ, что x и y выражены какими-нибудь различными функціями отъ p и q и что эти выраженія подставлены въ (1), вмѣсто x и y, изъ котораго затѣмъ z выразится посредствомъ p и q. Пусть полученныя такимъ образомъ выраженія x, y, z, тождественно удовлетворяющія (1), будутъ

$$x=\varphi(p,q),\quad y=\psi(p,q),\quad z=\chi(p,q).\qquad(4)$$

Полагая для краткости

$$\frac{dx}{ds}=x',\quad \frac{dy}{ds}=y',\quad \frac{dz}{ds}=z'$$

и

$$W=\frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)$$

можно уравненія (2) и (3) написать такимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Big(T\frac{\partial W}{\partial x'}\Big)+\frac{\partial U}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{d}{ds}\Big(T\frac{\partial W}{\partial y'}\Big)+\frac{\partial U}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0\\ \frac{d}{ds}\Big(T\frac{\partial W}{\partial z'}\Big)+\frac{\partial U}{\partial z}+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$2W=1. \quad (6)$$

Далѣе, дифференцируя въ отношеніи s уравненія (4) и положивъ

$$\frac{dp}{ds}=p',\ \frac{dq}{ds}=q' \quad (7)$$

получимъ

$$x'=\frac{\partial x}{\partial p}p'+\frac{\partial x}{\partial q}q',\ y'=\frac{\partial y}{\partial p}p'+\frac{\partial y}{\partial q}q',\ z'=\frac{\partial z}{\partial p}p'+\frac{\partial z}{\partial q}q'. \quad (8)$$

Слѣдовательно, вставивъ эти выраженія x', y', z' въ (6), получимъ

$$2W=Ep'^2+2Fp'q'+Gq'^2=1, \quad (9)$$

гдѣ

$$E=\Big(\frac{\partial x}{\partial p}\Big)^2+\Big(\frac{\partial y}{\partial p}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial p}\Big)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q},$$

$$G=\Big(\frac{\partial x}{\partial q}\Big)^2+\Big(\frac{\partial y}{\partial q}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial q}\Big)^2.$$

Теперь, складывая уравненія (5), умноженныя соотвѣтственно на $\frac{\partial x}{\partial p}$, $\frac{\partial y}{\partial p}$, $\frac{\partial z}{\partial p}$, сначала найдемъ

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{d}{ds}\left(T\frac{\partial W}{dx'}\right)+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{d}{ds}\left(T\frac{\partial W}{dy'}\right)+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{d}{ds}\left(T\frac{\partial W}{dz'}\right)$$
$$+\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial y}{dp}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p}$$
$$+\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dp}\right)=0.$$

Но, во 1-хъ,

$$\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p}=\frac{\partial V}{dp};$$

во 2-хъ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dp}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{\partial p}=0,$$

ибо выраженія x, y, z (4) тождественно удовлетворяютъ (1); и, въ 3-хъ,

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{d}{ds}\left(T\frac{\partial W}{dx'}\right)=\frac{d}{ds}\left(T\frac{\partial W}{dx'}\frac{\partial x}{\partial p}\right)-T\frac{\partial W}{dx'}\frac{d.\frac{\partial x}{\partial p}}{ds},\ldots$$

слѣдовательно предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$\frac{d}{ds}\left\{T\left(\frac{\partial W}{dx'}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial W}{dy'}\frac{\partial y}{\partial p}+\frac{\partial W}{dz'}\frac{\partial z}{\partial p}\right)\right\}$$
$$-T\left(\frac{\partial W}{\partial y'}\frac{d.\frac{\partial x}{\partial p}}{as}+\frac{\partial W}{\partial y'}\frac{d.\frac{\partial y}{dp}}{ds}+\frac{\partial W}{\partial z'}\frac{d.\frac{\partial z}{\partial p}}{\partial s}\right)+\frac{\partial U}{\partial p}=0.$$

Далѣе изъ (8) нетрудно получить слѣдующія равенства

$$\frac{\partial x'}{\partial p'}=\frac{\partial x}{\partial p},\ \frac{\partial y'}{\partial p'}=\frac{\partial y}{\partial p},\ \frac{\partial z'}{\partial p'}=\frac{\partial z}{\partial p},$$

$$\frac{\partial x'}{\partial p}=\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial p}p'+\frac{\partial^2 x}{\partial q\,\partial p}q'=\frac{d.\frac{\partial x}{\partial p}}{ds},\ldots$$

а вслѣдствіе ихъ множители при T въ предыдущемъ уравненіи

$$\frac{\partial W}{dx'}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial W}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial p}+\frac{\partial W}{\partial z'}\frac{\partial z}{\partial p}=\frac{\partial W}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial p'}+\frac{\partial W}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial p'}+\frac{\partial W}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial p'}=\frac{\partial W}{\partial p'},$$

$$\frac{\partial W}{dx'}\frac{d.\frac{\partial x}{\partial p}}{ds}+\frac{\partial W}{\partial y'}\frac{d.\frac{\partial y}{\partial p}}{ds}+\frac{\partial W}{\partial z'}\frac{d.\frac{\partial z}{\partial p}}{ds}=$$

$$=\frac{\partial W}{\partial x'}\frac{dx'}{dp}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{dy'}{\partial p}+\frac{\partial W}{\partial z'}\frac{dz'}{dp}=\frac{\partial W}{\partial p}$$

Поэтому мы получимъ слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned}\frac{ds}{d}\left(T\frac{\partial W}{dp'}\right)-T\frac{\partial W}{dp}+\frac{\partial U}{\partial p}=0,\\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{\partial W}{\partial q'}\right)-T\frac{\partial W}{\partial q}+\frac{\partial U}{\partial q}=0,\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

изъ которыхъ послѣднее получено изъ предыдущаго черезъ замѣну p на q.

Такимъ образомъ первоначальная задача приведена къ опредѣленію функцій p, q, p', q', T изъ уравненій (7) (9) и (10).

Эти уравненія соотвѣтствуютъ уравненіямъ Лагранжа въ динамикѣ.

4. Полученныя уравненія преобразуемъ теперь въ уравненія каноническаго вида.

Для этого введемъ перемѣнныя p_1 и q_1 вмѣсто p' и q' посредствомъ положеній

$$T\frac{\partial W}{\partial p'}=p_1 \text{ и } T\frac{\partial W}{\partial q'}=q_1, \qquad (11)$$

гдѣ W получается изъ уравненія (9). А такъ-какъ выраженіе W однородное второй степени относительно p' и q', то

$$\frac{\partial W}{dp'}p'+\frac{\partial W}{\partial q'}q'=2W=1;$$

слѣдовательно, сложивъ уравненія (11), умноженныя соотвѣтственно на p' и q', получимъ

$$T = p_1 p' + q_1 q'. \qquad (12)$$

Теперь, чтобъ получить окончательное выраженіе T, напишемъ (11) слѣдующимъ образомъ

$$T(Ep' + Fq') = p_1 \text{ и } T(Fp' + Gq') = q_1$$

и выведемъ изъ нихъ

$$p' = \frac{Gp_1 - Fq_1}{T(EG - F^2)}, \quad q' = \frac{Eq_1 - Fp_1}{F(EG - F^2)} \qquad (13)$$

Вставивъ эти значенія p' и q' въ (12), умноживъ его на T и извлекая корень, находимъ

$$T = +\sqrt{\left\{\frac{T}{D}p_1^2 - 2\frac{F}{D}p_1 q_1 + \frac{E}{D}q_1^2\right\}}, \qquad (14)$$

гдѣ

$$D = (EG - F^2),$$

а корень взятъ съ $+$, потому что T величина абсолютная.

При помощи (13) и (14) уравненія (7) получатъ слѣдующій видъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq}{ds} &= \frac{\frac{G}{D}p_1 - \frac{F}{D}q_1}{\sqrt{\left\{\frac{G}{D}p_1^2 - 2\frac{F}{D}p_1 q_1 + \frac{E}{D}q_1^2\right\}}} = \frac{\partial T}{\partial q_1} \\ \frac{dq}{ds} &= \frac{\frac{E}{D}q_1 - \frac{F}{D}p_1}{\sqrt{\left\{\frac{G}{D}p_2^2 - 2\frac{F}{D}p_1 q_1 + \frac{E}{D}q_2^2\right\}}} = \frac{\partial T}{\partial q_1} \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Уравненія же (10) на основаніи положеній (11) напишутся слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp_1}{ds}&=T\frac{\partial W}{\partial p}-\frac{\partial U}{\partial p}\\ \frac{dq_1}{ds}&=T\frac{\partial W}{\partial q}-\frac{\partial U}{\partial q}\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

Замѣтимъ теперь, что въ U, не содержавшее первоначально x', y', z', не могли войдти p' и q' послѣ перваго преобразованія, ни p_1 и q_1 послѣ втораго преобразованія. Поэтому для симметріи съ (16) къ вторымъ частямъ уравненій (15) можно соотвѣтственно придать $\frac{\partial V}{dp_1}$ и $\frac{\partial V}{dq_1}$, величины равныя нулю. Но вслѣдствіе этого, очевидно, уравненія (15) и (16) примутъ каноническую форму, если только будетъ доказано существованіе равенствъ:

$$T\frac{\partial W}{dp}=-\frac{\partial T}{dp}\ \text{ и }\ T\frac{\partial W}{dq}=-\frac{\partial T}{dp},\qquad(17)$$

при подстановкѣ въ первыя ихъ части значеній p' и q' (13).

Достаточно провѣрить первое изъ этихъ равенствъ, второе получится точно такъ-же.

Но помощію (9) находимъ

$$\frac{\partial W}{\partial p}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial E}{\partial p}p'^2+2\frac{\partial F}{\partial p}p'q'+\frac{\partial G}{\partial p}q'^2\right);$$

отсюда, вставивъ значенія p' и q' (13) и умноживъ на T, получимъ

$$T\frac{\partial W}{dp}=\frac{1}{2TD^2}\left(\frac{\partial E}{dq}(Gp_1-Fq_1)^2\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial F}{dp}(Gp_1-Fq_1)(Gq_1-Fp_1)+\frac{\partial G}{dp}(Gq_1-Fp_1)^2\right).$$

Съ другой стороны, изъ (14) найдемъ

$$\frac{\partial T}{\partial d}=\frac{1}{2F}\left\{\frac{\partial.\dfrac{G}{D}}{dp}p_1^{\,2}-2\frac{\partial.\dfrac{F}{D}}{dp}p_1q_1+\frac{\partial.\dfrac{E}{D}}{dp}q_1^{\,2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2TD^2}\left\{\left(\frac{\partial G}{dp}p_1^{\,2}-2\frac{\partial F}{dp}p_1q_1+\frac{\partial E}{dp}q_1^{\,2}\right)(EG-F^2)\right.$$

$$\left.-\left(G\frac{\partial E}{dp}+E\frac{\partial G}{dp}-2F\frac{\partial F}{dp}\right)(Gp_1^{\,2}-2Fp_1q_1+Eq_1^{\,2})\right\}$$

или, произведя умноженія и очевидныя сокращенія равныхъ членовъ,

$$\frac{\partial T}{dp}=\frac{-1}{2TD^2}\left(\frac{\partial E}{dp}(Gp_1-Fq_1)^2+2\frac{\partial F}{dp}(Gp_1-Fq_1)(Eq_1-Fp_1)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial F}{dp}(Eq_1-Fp_1)^2\right).$$

И такъ, теперь доказано первое изъ равенствъ (17) и точно такъ-же докажется и второе.

Слѣдовательно, полагая

$$H=U+\sqrt{\left\{\frac{G}{D}p_1^{\,2}-2\frac{F}{D}p_1q_1+\frac{E}{D}q_1^{\,2}\right\}}\qquad(18)$$

мы приведемъ уравненія (15) и (16) къ канонической формѣ

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dp}{ds}=\dfrac{\partial H}{dp_1},\ \dfrac{dq}{ds}=\dfrac{\partial H}{dq_1}\\[2ex]\dfrac{dp_1}{ds}=-\dfrac{\partial H}{dp},\ \dfrac{dq_1}{ds}=-\dfrac{\partial H}{dq}\end{array}\right\}\qquad(19)$$

Что касается уравненія (9), то при подстановкѣ значеній p' и q' (13) оно очевидно обратится въ тождество.

Если функція U выражена только черезъ p и q, то

$$H=\text{const}.$$

есть интегралъ уравненій (19), для полнаго интегрированія которыхъ достаточно отыскать еще только одинъ интегралъ вида

$$G = \text{const.},$$

гдѣ G есть функція p, q, p_1, q_1. Остальные два интеграла найдутся, извѣстнымъ образомъ, посредствомъ главной функціи V, опредѣляемой помощію вычисленія квадратуры или вообще какъ какой-нибудь полный интегралъ уравненія въ частныхъ производныхъ

$$U + \sqrt{\left\{\frac{G}{D}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2 - 2\frac{T}{D}\frac{\partial V}{\partial p}\cdot\frac{\partial V}{\partial q} + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^2\right\}} = h.$$

Если линіи

$$p = \text{const.}, \text{ и } q = \text{const.},$$

на данной поверхности (1) образуютъ ортогональную систему; то $F = 0$ и предыдущее уравненіе, вмѣстѣ съ выраженіемъ H, принимаетъ упрощенный видъ.

(Будетъ окончаніе).

Протоколъ засѣданія 8 марта.

Присутствовали: В. Г. Имшенецкій, Д. М. Деларю, К. А. Андреевъ, А. П. Грузинцевъ, М. Ѳ. Ковальскій, Г. В. Левицкій, А. К. Погорѣлко, С. А. Раевскій, И. К. Шейдтъ, И. Д. Штукаревъ.

Предсѣдательствовалъ В. Г. Имшенецкій.

В. Г. Имшенецкій, въ качествѣ корреспондента общества физическихъ и естественныхъ наукъ въ Бордо (Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux), доложилъ, что имъ получено отъ г. проф. Hoüel'я частное письмо, въ которомъ послѣдній изъявляетъ, отъ имени названнаго общества, желаніе войдти въ сношеніе съ харьковскимъ математическимъ обществомъ и установить обмѣнъ изданій.

Постановили: просить В. Г. Имшенецкаго увѣдомить г. Hoüel'я, что харьковское математическое общество съ готовностью принимаетъ такое предложеніе и будетъ высылать обществу физическихъ и естественныхъ наукъ въ Бордо свои изданія.

Секретарь доложилъ, что 25 февраля получено изъ г. Смоленска отъ г. А. Д. Любавскаго письмо, въ которомъ онъ изъявляетъ желаніе быть членомъ харьковскаго математическаго общества.

Постановили: препроводить г. Любавскому уставъ общества съ разъясненіемъ условій вступленія въ его члены.

А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе изъ области математической физики по вопросу объ отраженіи и преломленіи свѣта на границѣ двухъ изотропныхъ срединъ.

К. А. Андреевъ доложилъ замѣтку О. П. Фролова объ одномъ вопросѣ графическаго исчисленія.

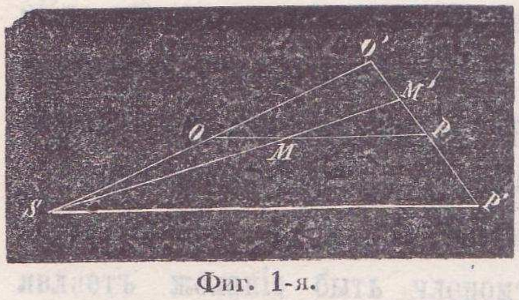
М. Ѳ. Ковальскій дополнилъ свое сообщеніе, сдѣланное имъ въ засѣданіи 20 октября, указавъ на возможность обобщить полученные имъ результаты.

ЗАМѢТКА

объ одномъ вопросѣ графическаго исчисленія.

О. П. Фролова.

Положимъ, что намъ данъ какой-нибудь треугольникъ $SO'P'$ (фиг. 1-я), и пусть OP будетъ прямая, соединяющая средины двухъ сторонъ его SO' и $O'P'$. Проведемъ чрезъ вершину S прямую линію такъ, чтобы она отсѣкала на прямой OP отрѣзокъ OM, относящійся къ OP, какъ a къ b. Спрашивается, какую часть $O'M'$ отсѣкаетъ та-же самая прямая на сторонѣ $O'P'$, т. е. въ какомъ отношеніи будутъ находиться отрѣзки $O'M'$ и $O'P'$?



Фиг. 1-я.

Отвѣтъ на этотъ вопросъ усматривается изъ подобія треугольниковъ $SM'P'$ и $MM'P$. Въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе этого подобія имѣемъ

$$\frac{SP'}{M'P'}=\frac{MP}{M'P}=\frac{SP'-MP}{M'P'-M'P}=\frac{SP'-2MP}{M'P'-2M'P}$$

но изъ чертежа видно, что

$$SP'-MP=2OP-MP=OM+OP$$

$$SP'-2MP=2(OP-MP)=2OM$$

$$M'P'-M'P=PP'=O'P=\frac{1}{2}O'P'$$

$$M'P'-2M'P=O'P-M'P=O'M'$$

слѣдовательно, имѣемъ пропорцію

$$\frac{OM+OP}{O'P'}=\frac{2OM}{O'M'}$$

откуда, перемѣстивъ крайніе члены и раздѣливъ обѣ части на 2, получимъ

$$\frac{O'M'}{O'P'}=\frac{OM}{OM+OP}.$$

По условію

$$\frac{OM}{OP}=\frac{a}{b} \text{ или } OM=\frac{a}{b}OP,$$

слѣдовательно

$$\frac{O'M'}{O'P'}=\frac{a}{b}:\left(\frac{a}{b}+1\right)=\frac{a}{a+b}.$$

Если положимъ $OP=O'P'=1$ и назовемъ дробь $\frac{a}{b}$ чрезъ k, то будемъ имѣть

$$OM=k \quad \text{и} \quad O'M'=\frac{k}{k+1}.$$

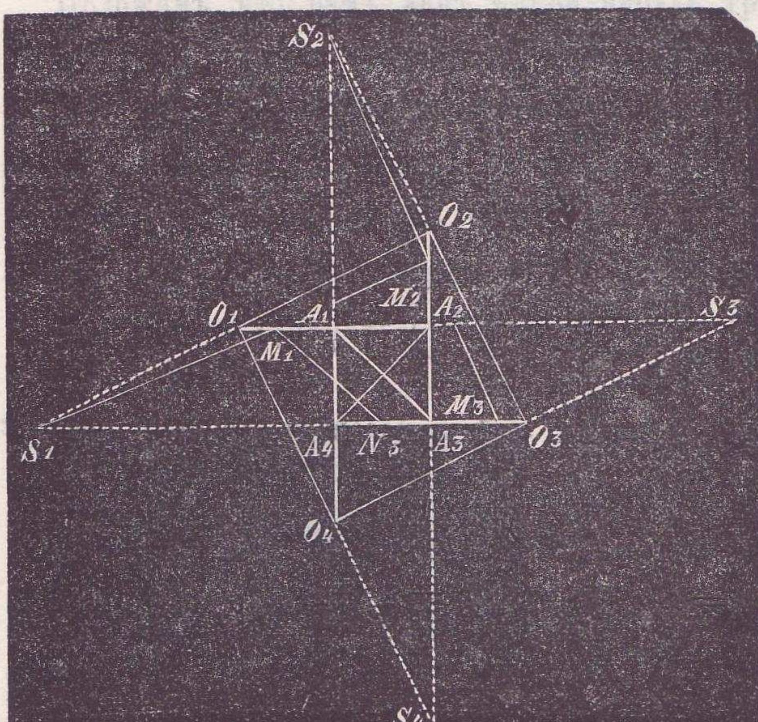
Найденнымъ соотношеніемъ между длинами OM и $O'M'$ можно воспользоваться для того, чтобы посредствомъ весьма простого и однообразнаго графическаго процесса построить какую угодно раціональную дробь, т. е. такую длину, которая относилась бы къ длинѣ, принятой за единицу, какъ два какія-нибудь цѣлыя числа m и n[1].

Съ этою цѣлью построимъ квадратъ $A_1A_2A_3A_4$, сторона котораго равняется $\frac{1}{2}$ (фиг. 2-я).

Продолжимъ стороны этого квадрата въ одномъ и томъ-же круговомъ направленіи до точекъ O_1, O_2, O_3, O_4 такъ, чтобы было

$$O_1A_1 = O_2A_2 = O_3A_3 = O_4A_4 = \frac{1}{2}.$$

Точки O_1, O_2, O_3, O_4 будутъ вершинами другого квадрата, котораго стороны пересѣкаются еще со сторонами перваго квадрата въ точкахъ S_1, S_2, S_3, S_4.



Фиг. 2-я.

Стороны квадратовъ $A_1A_2A_3A_4$ и $O_1O_2O_3O_4$ и ихъ точки пересѣченія послужатъ намъ основаніемъ или, такъ сказать, механизмомъ, при по-

---

[1] Числа m и n нужно, вообще говоря, предполагать очень большими, первыми между собою и притомъ $m < n$.

средствѣ котораго выполняется названный графическій процессъ. Самый же процессъ этотъ состоитъ въ повтореніи въ опредѣленномъ числѣ и опредѣленной послѣдовательности двухъ слѣдующихъ элементарныхъ графическихъ операцій.

1. *Проектированіе числа.* Возьмемъ произвольную точку M_1 на прямой O_1A_2 между точками O_1 и A_2. Разстояніе O_1M_1 будетъ имѣть нѣкоторую величину меньшую единицы. Если проведемъ изъ S_1 прямую, проектирующую точку M_1 на прямую O_2A_3, то получимъ на этой послѣдней точку M_1, которой разстояніе отъ O_2 будетъ имѣть также опредѣленную величину. Такое графическое опредѣленіе величины O_2M_2 по величинѣ O_1M_1 мы будемъ называть *проектированіемъ* послѣдней величины.

Такъ-какъ въ треугольникѣ $S_1O_2A_3$ сторона O_2A_3 равняется прямой O_1A_2, соединяющей средины двухъ сторонъ, и есть единица, то убѣждаемся изъ предыдущаго, что если O_1M_1 есть нѣкоторое число k, то O_2M_2 есть число $\frac{k}{k+1}$. Это значитъ, что *результатъ проектированія какого-нибудь числа есть отношеніе этого числа къ числу единицею большему.*

Величину O_2M_2 можно проектировать изъ точки S_2 на слѣдующую сторону квадрата $A_1A_2A_3A_4$ такъ-же точно какъ O_1M_1 проектировалась изъ точки S_1. Затѣмъ полученную величину можно проектировать изъ точки S_3 и т. д.

Если, имѣя первоначально величину k, мы произведемъ надъ нею проектированіе n разъ сряду, то въ результатѣ получится величина

$$\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+1}{2k+1}\cdot\frac{2k+1}{3k+1}\cdots\cdots\frac{(n-1)k+1}{nk+1}=\frac{k}{nk+1}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $k = O_1A_2 = 1$, въ результатѣ послѣдовательныхъ проектированій получаются дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$.....

Когда k есть раціональная дробь $\frac{a}{b}$, то въ результатѣ n-кратнаго проектированія получается дробь $\frac{a}{na+b}$. Слѣдовательно, *результатъ n-кратнаго проектированія дроби есть дробь, у которой числитель равняется числителю данной дроби, а знаменатель болѣе знаменателя данной дроби на числителя, повтореннаго n разъ.*

2. *Перенесеніе числа.*— Проведемъ чрезъ точку M_1, опредѣляющую величину O_1M_1 меньшую единицы, прямую параллельную діагонали A_1A_3 квадрата $A_1A_2A_3A_4$. Точкой пересѣченія N_3 этой прямой съ противоположною стороной квадрата опредѣлится величина O_3N_3. Такое графическое опредѣленіе величины O_3N_3 по величинѣ O_1M_1 мы будемъ называть перенесеніемъ послѣдней на противоположную сторону квадрата или просто *перенесеніемъ* величины.

Такъ-какъ очевидно, что $O_1M_1 + O_3N_3 = O_1A_2 = 1$, то можно сказать, что *результатъ перенесенія какого-нибудь числа меньшаго единицы есть число дополнительное съ нимъ до единицы.*

Построеніе всякой раціональной дроби при помощи *проектированія* и *перенесенія* можетъ быть достигнуто слѣдующимъ образомъ.

Всякую раціональную дробь $\frac{m}{n}$ можно представить въ видѣ

$$\frac{1}{p+\frac{m'}{n'}}$$

гдѣ p, m' и n' суть цѣлыя числа. Допустивъ, что дробь $\frac{m'}{n'}$ уже построена и произведя надъ нею одинъ разъ проектированіе и одинъ разъ перенесеніе, получимъ дробь

$$1-\frac{m'}{m'+n'}=\frac{n'}{m'+n'}.$$

Произведемъ затѣмъ еще $(p-1)$ разъ проектированіе, получимъ

$$\frac{n'}{m'+n'+(p-1)n'}=\frac{n'}{m'+pn'}=\frac{1}{p+\frac{m'}{n'}},$$

т. е. данную дробь $\frac{m}{n}$.

Дробь $\frac{m'}{n'}$, въ свою очередь, можетъ быть представлена въ видѣ

$$\frac{1}{q+\frac{m''}{n''}}$$

и, слѣдовательно, построена указаннымъ сейчасъ образомъ, когда построена дробь $\frac{m''}{n''}$.

Продолжая разсуждать такимъ образомъ, мы убѣждаемся, что построеніе всякой непрерывной дроби

$$\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{}{\ddots+\cfrac{1}{v}}}}$$

достигается при помощи ряда послѣдовательныхъ проектированій и перенесеній, какъ-скоро построена дробь $\frac{1}{v}$. Но мы уже видѣли, что эта дробь строится посредствомъ $(v-1)$ кратнаго проектированія единицы.

Возьмемъ частный примѣръ. Пусть требуется построить дробь $\frac{79}{337}$, которая разлагается въ слѣдующую непрерывную

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7}}}}}.$$

Произведя 7 разъ проектированіе единицы, получимъ $\frac{1}{8}$, послѣ чего перенесеніе дастъ

$$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

Проектируя затѣмъ эту дробь два раза и перенеся полученный результатъ, найдемъ

$$1-\frac{7}{2.7+8}=1-\frac{7}{22}=\frac{15}{22}.$$

Проектируя эту дробь 5 разъ и перенеся результатъ, получимъ

$$1-\frac{15}{5.15+22}=1-\frac{15}{97}=\frac{82}{97}.$$

Проектируя эту дробь одинъ разъ и перенеся результатъ, получимъ

$$1-\frac{82}{82+97}=1-\frac{82}{179}=\frac{97}{179}.$$

Проектируя наконецъ эту послѣднюю дробь два раза, получимъ

$$\frac{97}{2.97+179}=\frac{97}{373}.$$

Изъ всего сказаннаго видимъ, что разсматриваемый графическій процессъ построенія дроби, однообразный во всѣхъ частныхъ случаяхъ, состоитъ въ сущности въ проведеніи приличнымъ образомъ одной непрерывной ломанной линіи, вершины угловъ которой находятся на сторонахъ квадрата $A_1A_2A_3A_4$ и которая обертывается, такъ сказать, около этого квадрата, подобно непрерывной нити, обертывающей клубокъ.

Въ предложенномъ примѣрѣ эта ломанная состоитъ изъ 20 прямолинейныхъ частей.

Протоколъ засѣданія 22 марта.

Присутствовали: В. Г. Имшенецкій, К. А. Андреевъ, А. П. Грузинцевъ, Г. В. Левицкій, А. К. Погорѣлко, А. Е. Рейнботъ, Н. М. Флавицкій, П. М. Рудневъ.

Предсѣдательствовалъ В. Г. Имшенецкій.

В. Г. Имшенецкій доложилъ, что г. J. Graindorge, профессоръ математики въ Люттихѣ, прислалъ ему для сообщенія харьковскому математическому обществу свою замѣтку объ интегрированіи одного частнаго вида линейныхъ уравненій 2-го порядка.

А. С. Шумигорскій, студентъ 4-го курса физико-математическаго факультета, сообщилъ сдѣланное имъ распространеніе пріема алгебраическаго рѣшенія уравненій 3-й степени на одинъ частный видъ уравненій 5-й степени.

А. Е. Рейнботъ сдѣлалъ сообщеніе объ опредѣленіи постоянной прецессіи независимо отъ предположеній о собственномъ движеніи звѣздъ.

Протоколъ засѣданія 7 апрѣля.

Присутствовали: В. Г. Имшенецкій, Д. М. Деларю, К. А. Андреевъ, М. Θ. Ковальскій, А. П. Грузинцевъ, М. С. Косенко, Г. В. Левицкій, Ю. И. Морозовъ, А. К. Погорѣлко, А. Е. Рейнботъ, И. К. Шейдтъ и А. П. Шимковъ.

Предсѣдательствовалъ В. Г. Имшенецкій.

В. Г. Имшенецкій доложилъ замѣтку изъ письма д-ра Graindorge'a подъ названіемъ «Note sur l'intégration de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\mathrm{Cotg} \times \frac{dy}{dx} - y = 0$ и по поводу этой замѣтки сдѣлалъ собственное сообщеніе о линейныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ втораго порядка, интегрируемыхъ посредствомъ множителя.

А. Е. Рейнботъ продолжалъ и окончилъ сообщеніе «объ опредѣленіи постоянной прецессіи», начатое имъ въ предыдущемъ засѣданіи.

М. Θ. Ковальскій продолжалъ и окончилъ сообщеніе «о разложеніи тангенса въ строку», начатое имъ въ засѣданіи 15-го декабря.

I.

N O T E*

sur l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2 \operatorname{Cotg} x \,.\, \frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Par *M. J. Graindorge*[1].

En posant

$$y = e^{\int u\, dx} \tag{1}$$

on réduit l'équation à la suivante

$$\frac{du}{dx} + u^2 + 2u \operatorname{Cotg} x - 1 = 0\,, \tag{2}$$

laquelle est du premier ordre. On obtient une solution particulière de (2), en posant

$$u = -\operatorname{Cotg} x$$

Si, donc, nous faisons

$$u = v - \operatorname{Cotg} x\,,$$

il vient, en substituant dans (2)

---

* Сообщена въ письмѣ къ проф. В. Г. Имшенецкому $^{24}/_{12}$ марта 1880 г.

[1] Профессоръ университета въ Люттихѣ (Liège).

$$\frac{dv}{dx} + v^2 = 0 \text{ , ou } \frac{dv}{v^2} + dx = 0.$$

Par suite,

$$v = \frac{1}{x + c};$$

D'où

$$u = \frac{1}{x + c} - \operatorname{Cotg} x .$$

En remplaçant u par sa valeur dans (1), on trouve pour l'intrégrale de l'équation proposée

$$y = e^{\int\left(\frac{1}{x + c} - \operatorname{Cotg} x\right)dx} = e^{\lg \frac{x + c}{c' \operatorname{Sin} x}},$$

ou bien

$$y = \frac{x + c}{c' \operatorname{Sin} x}.$$

II.

Линейныя дифференціальныя уравненія 2-го порядка, интегрируемыя посредствомъ множителя.

По поводу сообщенія г. *Грендоржа.*

В. Г. Имшенецкаго.

Данное г. Грендоржемъ полное рѣшеніе

$$y=\frac{ax+b}{\sin x}$$

линейнаго дифференціальнаго уравненія

$$y''+2\cot g\, x.\; y'-y=0$$

подало мнѣ мысль искать другіе случаи, интегрируемые точно такимъ-же образомъ. Но, занимаясь этой задачей, нетрудно замѣтить, что всѣ такіе случаи заключаются въ дифференціальномъ уравненіи общаго вида

$$\frac{d^2(Xy)}{dx^2}=0,$$

гдѣ y неизвѣстная, а X какая-нибудь данная функція отъ x.

Дѣйствительно, интегрируя дважды это уравненіе и означая черезъ a и b произвольныя постоянныя, найдемъ

$$y=\frac{ax+b}{X}.$$

Случай, разрѣшенный г. Грендоржемъ, соотвѣтствуетъ положенію

$$X = \sin x.$$

Другіе весьма сходные съ этимъ случаи получаются при послѣдовательныхъ положеніяхъ

$$X = \cos x, \quad X = sh x, \quad X = ch x,$$

гдѣ sh и ch означаютъ гиперболическіе синусъ и косинусъ.

Мнѣ кажется, заслуживаютъ вниманія тѣ частные случаи этого рода, гдѣ X будетъ amplitudo эллиптическихъ функцій, или одной изъ нихъ.

Для вывода этихъ случаевъ полагаемъ

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi.}} = F(\varphi) = x, \text{ гдѣ } 0 \leqq k \leqq 1,$$

и беремъ функціи

$$\varphi = am\, x, \; \lambda = \sin \varphi, \; \mu = \cos \varphi, \; \nu = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} = \Delta\varphi.$$

Дифференцируя ихъ въ отношеніи x, получимъ:

$$\varphi' = \nu, \quad \lambda' = \mu\nu, \quad \mu' = -\nu\lambda, \quad \nu' = -k^2\lambda\mu;$$

$$\varphi'' = -k^2\lambda\mu, \; \lambda'' = -\lambda(\nu^2 + k^2\mu^2), \; \mu'' = \mu(k^2\lambda^2 - \nu^2), \; \nu'' = -k^2\nu(\mu^2 - \lambda^2).$$

И такъ полагая:

1) $X = \varphi$; 2) $X = \lambda$; 3) $X = \mu$; 4) $X = \nu$;

мы получимъ слѣдующія линейныя дифференціальныя уравненія вмѣстѣ съ ихъ полными интегралами

$$(1)\begin{cases} am\, x. \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\Delta\, am\, x \dfrac{dy}{dx} - k^2 \sin am\, x \cos am\, x.\; y = 0 \\ \text{и} \qquad y = \dfrac{ax+b}{am\, x} \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{\cos am\, x\, \Delta\, am\, x}{\sin am\, x} \dfrac{dy}{dx} - (1 + k^2 \cos 2\, am\, x)\, y = 0 \\ \text{и} \qquad y = \dfrac{ax+b}{\sin am\, x} \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{\sin am\,x\,\Delta\,am\,x}{\cos am\,x}\dfrac{dy}{dx}-(k'^2+k^2\cos 2am\,x)\,y=0,\\[2ex] \text{гдѣ}\ \ k'^2=1-k^2,\ \ \text{и}\ \ y=\dfrac{ax+b}{\cos am\,x};\end{cases}$$

$$(4)\begin{cases}\dfrac{1}{k^2}\ \dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{\sin am\,x\cos am\,x}{\Delta\,am\,x}\dfrac{dy}{dx}-\cos 2am\,x\ y=0\\[2ex] \text{и}\qquad y=\dfrac{ax+b}{\Delta\,am\,x}.\end{cases}$$

Для $k=0$ изъ (2) получаются уравненія г. Грендоржа. Уравненіямъ (1)—(4) нетрудно дать еще другой видъ, введя въ нихъ независимымъ перемѣннымъ $am\,x$ вмѣсто x. Для этого имѣемъ

$$am\,x=\varphi,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\varphi}\,\nu=\frac{dy}{d\varphi}\,\Delta\varphi,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{d\varphi^2}\,\nu^2-k^2\frac{dy}{d\varphi}\lambda\mu=-\frac{d^2y}{d\varphi^2}\,(\Delta\varphi)^2-k^2\frac{dy}{d\varphi}\sin\varphi\cos\varphi,$$

Черезъ подстановку этихъ значеній напр. въ (1) получимъ

$$(1')\begin{cases}\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)\dfrac{d^2y}{d\varphi^2}+[2(1-k^2\sin^2\varphi)-k^2\varphi\sin\varphi\cos\varphi]\ \dfrac{dy}{d\varphi}\\ -k^2\sin\varphi\cos\varphi\ y=0\\[2ex] \text{и}\qquad y=\dfrac{aF(\varphi)+b}{\varphi}.\end{cases}$$

Для $k=1$ уравненія (1′), даютъ

$$(1'')\begin{cases}\dfrac{d^2y}{d\varphi^2}+\left(\dfrac{2}{\varphi}-\operatorname{tg}\varphi\right)\dfrac{dy}{d\varphi}-\dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{\varphi}\ y=0\\[2ex] \text{и}\qquad y=\dfrac{a\log\operatorname{tg}\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)+b}{\varphi}\end{cases}$$

Замѣтимъ еще, что уравненіе (1′) можно написать такимъ образомъ

$$\varphi\frac{d^2y}{d\varphi^2}+2\frac{dy}{d\varphi}=k^2\varphi\,\mathrm{Sin}^2\varphi\left[\frac{d^2y}{d\varphi^2}+\left(\frac{2}{\varphi}+\mathrm{Cotg}\,\varphi\right)\frac{dy}{d\varphi}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\varphi}\mathrm{Cotg}\,\varphi.\,y\right].$$

Послѣднее уравненіе имѣетъ частное рѣшеніе $y=\frac{1}{\varphi}$, которое очевидно обращаетъ также въ нуль и первую его часть; слѣд. то-же самое оно сдѣлаетъ и со второй его частью, т. е. уравненіе

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2}+\left(\frac{2}{\varphi}+\mathrm{Cotg}\,\varphi\right)\frac{dy}{d\varphi}+\frac{1}{\varphi}\mathrm{Cotg}\,\varphi.\,y=0$$

имѣетъ частное рѣшеніе $y=\frac{1}{\varphi}$. Другое частное рѣшеніе этого уравненія получится по извѣстной формулѣ, а затѣмъ и полный его интегралъ вида

$$y=\frac{a\lg\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}+b}{\varphi}.$$

Имѣя теперь нѣсколько линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ общимъ всѣмъ имъ частнымъ рѣшеніемъ $y=\frac{1}{\varphi}$ и складывая ихъ, по умноженіи на какія-нибудь функціи отъ φ, можно составлять другія болѣе или менѣе сложныя дифференціальныя уравненія съ тѣмъ-же частнымъ рѣшеніемъ, а слѣдовательно и находить ихъ полныя рѣшенія. Подобныя преобразованія и замѣчанія прилагаются также и къ уравненіямъ (2) (3) и (4).

И такъ, о всѣхъ приведенныхъ выше примѣрахъ и множествѣ еще другихъ можно сказать: 1) что они интегрируются посредствомъ множителя, приводясь къ виду

$$\frac{d^2(Xy)}{dx^2}=0;$$

2. Данное уравненіе вида

(A) $$y'' + 2f(x) . y' + F(x) . y = 0$$

интегрируется такимъ образомъ, если выполнено условіе

$$F(x) = f'(x) + f(x)^2;$$

тогда интегрирующимъ множителемъ будетъ

$$X = e^{\int f(x)\, dx}.$$

Подобный случай интегрируемости посредствомъ множителя встрѣчается въ линейныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ всѣхъ порядковъ.

3. Если извѣстно отношеніе $\frac{y_1}{y_2} = \Phi(x)$ двухъ частныхъ рѣшеній y_1 и y_2 даннаго дифференціальнаго уравненія (A); то, полагая

$$\Phi(x) = z$$

и введя независимое перемѣнное z вмѣсто x, мы преобразуемъ уравненіе (A) въ слѣдующее

(B) $$\frac{d^2y}{dz^2} + 2f_1(z)\frac{dy}{dz} + F_1(z)y = 0,$$

а полный интегралъ

$$y = ay_1 + by_2$$

уравненія (A) обратится въ полный интегралъ уравненія (13) и приметъ видъ

$$y = \frac{a\Phi(x) + b}{\frac{1}{y_2}} = \frac{az + b}{Z}.$$

Отсюда, на основаніи предыдущаго, видно, что уравненіе (B) непосредственно интегрируется по умноженіи на

$$Z = \frac{1}{y_2} = e^{-\int f_1(z)\, dz}.$$

Другими словами, такимъ образомъ обнаружилось извѣстное свойство частныхъ рѣшеній уравненія (A): что по данному отношенію двухъ частныхъ рѣшеній уравненія (A) всегда можно вычислять каждое изъ нихъ.

III.

КАНОНИЧЕСКІЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ

гибкой, нерастяжимой нити и брахистохроны,

въ случаѣ потенціальныхъ силъ.

В. Г. Имшенецкаго.

(Окончаніе).

---

§ III.

5. Обыкновенныя дифференціальныя уравненія свободной или несвободной брахистохроны.

Брахистохроной называется вообще, какъ извѣстно, кривая линія, въ свободномъ пространствѣ или на данной поверхности, представляющая путь, между двумя точками A и B, проходимый въ наименьшее время матеріальною точкой, находящеюся подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ и принужденною оставаться на этомъ пути.

Отнесемъ положенія разсматриваемыхъ точекъ къ тремъ прямоугольнымъ осямъ; означимъ, во время t, черезъ x, y, z координаты движущейся матеріальной точки, имѣющей массу$=1$, черезъ v ея скорость и черезъ $u=\Phi\,(x,\ y,\ z)$ потенціалъ приложенныхъ къ ней внѣшнихъ силъ.

Мы будемъ имѣть

$$v^2 = 2(u+h) \tag{1}$$

уравненіе живой силы, гдѣ h постоянное, и

$$v = \frac{ds}{dt}, \tag{2}$$

гдѣ

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \tag{3}$$

есть безконечно малый элементъ искомой кривой.

Изъ (2)

$$dt = \frac{ds}{v},$$

а интегрируя это уравненіе и распространяя интегралъ вдоль траекторіи отъ A до B, получимъ

$$\tau = \int \frac{ds}{v}, \tag{4}$$

гдѣ τ означаетъ время движенія между этими двумя точками.

Варіируя (4), по опредѣленію брахистохроны имѣемъ

$$\delta\tau = \int\left(\frac{\delta ds}{v} - \frac{ds\delta v}{v^2}\right) = 0, \tag{5}$$

а варіируя (3) и (1), получимъ

$$\delta ds = \frac{dx}{ds}\,d\delta x + \frac{dy}{ds}\,d\delta y + \frac{dz}{ds}\,d\delta z,$$

$$\delta v = \frac{1}{v}\left(\frac{du}{dx}\delta x + \frac{du}{dy}\delta y + \frac{du}{dz}\delta z\right).$$

Вставивъ эти выраженія δds и δv въ (5), приведемъ его къ виду

$$\int \frac{1}{v}\left(\frac{dx}{ds}d\delta x + \frac{dy}{ds}d\delta y + \frac{dz}{ds}d\delta z\right) = \int \frac{ds}{v^3}\left(\frac{du}{dx}\delta x + \right.$$

$$\left. + \frac{du}{dy}\delta y + \frac{du}{dz}\delta z\right).$$

Произведя въ первой части послѣдняго уравненія интегрированіе по частямъ, находимъ

$$\frac{1}{v}\left(\frac{dx}{ds}\delta x+\frac{dy}{ds}\delta y+\frac{dz}{ds}\delta z\right)-\int\left\{\frac{d.\dfrac{dx}{vds}}{ds}\delta x+\right.$$

$$\left.+\frac{d.\dfrac{dy}{vds}}{ds}\delta y+\frac{d.\dfrac{dz}{vds}}{ds}\delta z\right\}ds.$$

Здѣсь интегралъ и проинтегрированную часть нужно взять въ предѣлахъ отъ A до B. Если предположимъ обѣ эти точки неизмѣняющимися при варіированіи, то для нихъ $\delta x=0$, $\delta y=0$, $\delta z=0$; слѣдовательно, проинтегрированная часть въ предыдущемъ выраженіи сама собою уничтожится, а вслѣдствіе этого предыдущее уравненіе получитъ видъ

$$\int ds\left\{\left[\frac{d.\left(\dfrac{1}{v}\dfrac{dx}{ds}\right)}{ds}+\frac{1}{v^3}\frac{du}{dx}\right]\delta x+\right.$$

$$+\left[\frac{d.\left(\dfrac{1}{v}\dfrac{dy}{ds}\right)}{ds}+\frac{1}{v^3}\frac{du}{dy}\right]\delta y+$$

$$\left.+\left[\frac{d.\left(\dfrac{1}{v}\dfrac{dz}{ds}\right)}{ds}+\frac{1}{v^3}\frac{du}{dz}\right]\delta z\right\}=0. \qquad (6)$$

Далѣе нужно различать два случая.

1) Пусть отыскивается брахистихрона въ свободномъ пространствѣ. Въ этомъ случаѣ, вслѣдствіе совершенной произвольности δx, δy, δz внутри границъ интеграла, уравненіе (6) приводится къ слѣдующимъ:

$$
(A)\quad \begin{cases}
\dfrac{d.\left(\dfrac{1}{v}\dfrac{dx}{ds}\right)}{ds}+\dfrac{1}{v^3}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\[2ex]
\dfrac{d.\left(\dfrac{1}{v}\dfrac{dy}{ds}\right)}{ds}+\dfrac{1}{v^3}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\\[2ex]
\dfrac{d.\left(\dfrac{1}{v}\dfrac{dz}{ds}\right)}{ds}+\dfrac{1}{v^3}\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.
\end{cases}
$$

2) Если же брахистохрона должна находиться на данной поверхности

$$f(x,\ y,\ z)=0,$$

то между δx, δy, δz мы имѣемъ условное уравненіе

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0,$$

вслѣдствіе чего изъ (6), по правиламъ варіаціоннаго вычисленія, получимъ

$$
(B)\quad \begin{cases}
\dfrac{d.\left(\dfrac{1}{v}\dfrac{dx}{ds}\right)}{ds}+\dfrac{1}{v^3}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,\\[2ex]
\dfrac{d.\left(\dfrac{1}{v}\dfrac{dy}{ds}\right)}{ds}+\dfrac{1}{v^3}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial f}{\partial y}=0,\\[2ex]
\dfrac{d.\left(\dfrac{1}{v}\dfrac{dz}{ds}\right)}{ds}+\dfrac{1}{v^3}\dfrac{\partial u}{\partial z}+\lambda\dfrac{\partial f}{\partial z}=0,
\end{cases}
$$

гдѣ λ неопредѣленный множитель.

---

6. Приведенiе къ каноническому виду уравненiй (A).

Полагая

$$\frac{1}{v}\frac{dx}{ds}=x_1,\quad \frac{1}{v}\frac{dy}{ds}=y_1,\quad \frac{1}{v}\frac{dz}{ds}=z_1, \tag{7}$$

вслѣдствiе уравненiя

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,$$

находимъ

$$v=\frac{1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}.$$

Поэтому уравненiя (7) получаютъ видъ

$$\frac{dx}{ds}=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}=\frac{\partial.\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}{\partial x_1},$$

$$\frac{dy}{ds}=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}=\frac{\partial.\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}{\partial y_1}, \tag{8}$$

$$\frac{dz}{ds}=\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}=\frac{\partial.\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}{\partial z_1},$$

а уравненiя (A), при помощи (7) и (1), напишутся слѣдующимъ образомъ

$$\frac{dx_1}{ds}=-\frac{1}{(2u+2h)^{3/2}}\frac{du}{dx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2u+2h}}\right),$$

$$\frac{dy_1}{ds}=-\frac{1}{(2u+2h)^{3/2}}\frac{du}{dy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{2u+2h}}\right), \tag{9}$$

$$\frac{dz_1}{ds}=-\frac{1}{(2u+2h)^{3/2}}\frac{du}{dz}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{2u+2h}}\right).$$

Уравненiя (8) и (9) образуютъ каноническую систему.

Дѣйствительно, положивъ

$$H=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}-\frac{1}{\sqrt{2(u+h)}}$$

можно написать (8) и (9) слѣдующимъ образомъ

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds}&=\frac{\partial H}{\partial x_1}, & \frac{dx_1}{ds}&=-\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{dy}{ds}&=\frac{\partial H}{\partial y_1}, & \frac{dy_1}{ds}&=-\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \frac{dz}{ds}&=\frac{\partial H}{\partial z_1}, & \frac{dz_1}{ds}&=-\frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned} \tag{10}$$

---

7. Замѣчанія объ интегрированіи уравненій (10).

Приравнявъ H произвольному постоянному C, имѣемъ

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}-\frac{1}{\sqrt{2(u+h)}}=C \tag{11}$$

одинъ изъ интеграловъ каноническихъ уравненій (10).

Но вставивъ сюда значенія x_1, y_1, z_1 (7), получимъ уравненіе

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{\sqrt{2(u+h)}}=C,$$

первая часть котораго, очевидно, уничтожается въ силу (1); поэтому $C=0$. Слѣдовательно (1) и (11) представляютъ одинъ и тотъ-же интегралъ нашей задачи; въ немъ h не есть произвольное, но данное постоянное. Оно вполнѣ опредѣляется, напр., условіемъ, что матеріальная точка проходитъ положеніе $A(x_0, y_0, z_0)$ съ данною по величинѣ скоростью $v=v_0$; тогда

$$h=\frac{1}{2}v_0^2-\Phi(x_0, y_0, z_0).$$

Уравненія (10) по исключеніи ds имѣютъ видъ

$$\frac{dx}{\frac{\partial H}{\partial x_1}} = -\frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial H}{\partial y_1}} = -\frac{dy_1}{\frac{\partial H}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial H}{\partial z_1}} = -\frac{dz_1}{\frac{\partial H}{\partial z}} \qquad (12)$$

и всѣ пять интеграловъ ихъ можно получить, какъ извѣстно, отыскавъ полный интегралъ V уравненія въ частныхъ производныхъ

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{2(u+h)},$$

легко составляемаго помощію уравненія (11). Этотъ полный интегралъ долженъ, кромѣ просто приданнаго, содержать еще два произвольныхъ постоянныхъ a и b.

Означивъ черезъ α и β еще два произвольныхъ постоянныхъ, всѣ интегралы уравненій (12) можно представить слѣдующими уравненіями

$$x_1 = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad y_1 = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad z_1 = \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \alpha, \; \frac{\partial V}{\partial b} = \beta,$$

изъ которыхъ два послѣднія опредѣлятъ траекторію, имѣющую свойство брахистохроны. Введя условіе, что она проходитъ черезъ данную точку $A\,(x_0, y_0, z_0)$, должно для α и β взять значенія

$$\alpha = \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)_0, \quad \beta = \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)_0,$$

гдѣ указатель ($_0$) требуетъ положить $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Слѣдовательно брахистохрону опредѣляютъ уравненія

$$\frac{\partial V}{\partial a} - \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)_0 = 0 \text{ и } \frac{\partial V}{\partial b} - \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)_0 = 0.$$

Можно слѣдующимъ образомъ повѣрить это рѣшеніе.

Мы имѣемъ

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$= x_1 dx + y_1 dy + z_1 dz$$

или, вставивъ значенія x_1, y_1, z_1 (7),

$$dV = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{vds} = \frac{ds}{v} = dt.$$

Интегрируя это уравненіе отъ $A(x_0, y_0, z_0)$ до $B(x, y, z)$, находимъ

$$\tau = V - V_0$$

время движенія между точками A и B. Уравненія же (13) выражаютъ условія, необходимыя для значенія minimum τ; слѣдовательно ими опредѣляется брахистохрона.

---

§ IV.

8. Приведеніе къ каноническому виду уравненій (B) несвободной брахистохроны.

Предварительно нужно сдѣлать, точно такъ-же, какъ выше (§ II п. 4), число неизвѣстныхъ возможно меньшимъ. Для этого пусть x, y, z будутъ выражены въ новыхъ перемѣнныхъ p и q такимъ образомъ, что обратятъ въ тождество уравненіе

$$f(x, y, z) = 0$$

поверхности, на которой должна находиться искомая брахистохрона.

Полагая для краткости

$$\frac{dx}{ds} = x', \quad \frac{dy}{ds} = y', \quad \frac{dz}{ds} = z', \quad \frac{dp}{ds} = p', \quad \frac{dq}{ds} = q'$$

и складывая уравненія (B), соотвѣтственно умноженныя на $\frac{dx}{dp}$, $\frac{dy}{dp}$, $\frac{dz}{dp}$, находимъ

$$\frac{dx}{dp}\frac{d.\frac{x'}{v}}{ds}+\frac{dy}{dp}\frac{d.\frac{y'}{v}}{ds}+\frac{dz}{dp}\frac{d.\frac{z'}{v}}{ds}+\frac{1}{v^3}\frac{du}{dp}=0,$$

или

$$\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{v}\left(x'\frac{dx}{dp}+y'\frac{dy}{dp}+z'\frac{dz}{dp}\right)\right\}$$

$$-\frac{1}{v}\left(x'\frac{d.\frac{dx}{dp}}{ds}+y'\frac{d.\frac{dy}{dp}}{ds}+z'\frac{d.\frac{dz}{dp}}{ds}\right)+\frac{1}{v^3}\frac{du}{dp}=0.$$

Замѣчая теперь (§ II, п. 4), что

$$\frac{dx}{dp}=\frac{dx'}{dp'},\ \frac{dy}{dp}=\frac{dy'}{dp'},\ \frac{dz}{dp}=\frac{dz'}{dp'},$$

и

$$\frac{d.\frac{dx}{dp}}{ds}=\frac{dx'}{dp},\ \frac{d.\frac{dy}{dp}}{ds}=\frac{dy'}{dp},\ \frac{d.\frac{dz}{dp}}{ds}=\frac{dz'}{dp},$$

и полагая для краткости

$$\frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)=W,$$

можно предыдущее уравненіе написать въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{d.\left(\frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial p'}\right)}{ds}-\frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial q}+\frac{1}{v^3}\frac{du}{dp}=0;$$

точно такимъ-же образомъ получимъ

$$\frac{d.\left(\frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial q'}\right)}{ds} - \frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial q} + \frac{1}{v^3}\frac{\partial u}{\partial q} = 0. \qquad (14)$$

Эти два уравненія вмѣстѣ съ уравненіями

$$\frac{dp}{ds} = p', \quad \frac{dq}{ds} = q' \qquad (15)$$

$$2W = 1 \qquad (16)$$

опредѣляютъ брахистохрону въ криволинейныхъ координатахъ p и q на данной поверхности $f=0$.

9. Теперь остается только замѣнить послѣднія уравненія системой уравненій каноническаго вида.

Для этого вмѣсто p' и q' введемъ новыя перемѣнныя p_1 и q_1, полагая

$$\frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial p'} = p_1, \quad \frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial q'} = q_1. \qquad (17)$$

Далѣе имѣемъ

$$2W = Ep'^2 + 2Fp'q' + Gq'^2 = \frac{\partial W}{\partial p'}p' + \frac{\partial W}{\partial q'}q'. \qquad (18)$$

Слѣдовательно, сложивъ (17) по соотвѣтственномъ умноженіи ихъ на p' и q', будемъ имѣть

$$\frac{1}{v} = p_1 p' + q_1 q'. \qquad (19)$$

Съ другой стороны, написавъ (17) слѣдующимъ образомъ

$$Ep' + Fq' = vp_1, \quad Fp' + Gq' = vq_1,$$

выводимъ изъ нихъ значенія

$$p' = \frac{v}{D}(Gp_1 - Fq_1) \quad \text{и} \quad q' = \frac{v}{D}(Eq_1 - Fp_1), \qquad (20)$$

гдѣ

$$D = EG - F^2.$$

Посредствомъ этихъ значеній p' и q' изъ (19) находимъ

$$\frac{1}{v}=\sqrt{\frac{G}{D}p_1^{\,2}-2\frac{F}{D}p_1q_1+\frac{E}{D}q_1^{\,2}}. \qquad (21)$$

Послѣ чего легко замѣтить, что (15) получатъ видъ

$$\frac{dp}{ds}=\frac{\partial}{\partial p_1}\sqrt{\frac{G}{D}p_1^{\,2}-2\frac{F}{D}p_1q_1+\frac{E}{D}q_1^{\,2}},$$

$$\frac{dq}{ds}=\frac{\partial}{\partial q_1}\sqrt{\frac{G}{D}p_1^{\,2}-2\frac{F}{D}p_1q_1+\frac{E}{D}q_1^{\,2}}.$$

Далѣе, уравненія (14) на основаніи (17) будутъ

$$\frac{dp_1}{ds}=\frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial p}-\frac{1}{v^3}\frac{\partial u}{\partial p},$$

$$\frac{dq_1}{ds}=\frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial q}-\frac{1}{v^3}\frac{\partial u}{\partial q}.$$

Во вторыхъ частяхъ этихъ уравненій значенія $\frac{\partial W}{\partial p}$ и $\frac{\partial W}{\partial q}$ должно вычислить изъ (18), подставить въ нихъ выраженія p' и q' посредствомъ p_1 и q_1 (20), причемъ результаты подстановокъ можно условно означить черезъ $\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)$ и $\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)$.

Такимъ образомъ

$$\frac{\partial W}{\partial p}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial E}{\partial p}p'^2+2\frac{\partial F}{\partial p}p'q'+\frac{\partial G}{\partial p}q'^2\right];$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)=\frac{v^2}{2D^2}\left\{\frac{\partial E}{\partial p}(Gp_1-Fq_1)^2+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial F}{\partial p}(Gp_1-Fq_1)(Eq_1-Fp_1)+\frac{\partial G}{\partial q}(Eq_1-Fp_1)^2\right\}.$$

Съ другой стороны, дифференцируя частнымъ образомъ въ отношеніи p (21), получимъ

$$\frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{dp}=\frac{v}{2D^2}\left\{\left(\frac{\partial G}{\partial p}p_1^{\,2}-2\frac{\partial F}{\partial p}p_1q_1+\frac{\partial E}{\partial p}q_1^{\,2}\right)(EG-F^2)\right.$$

$$\left.-\left(G\frac{\partial E}{\partial p}+E\frac{\partial G}{\partial p}-2F\frac{\partial F}{\partial p}\right)(Gp_1^{\,2}-2Fp_1q_1+Eq_1^{\,2})\right\}$$

$$=-\frac{v}{2D^2}\left\{\frac{\partial E}{\partial p}(Gp_1-Fq_1)^2+2\frac{\partial F}{\partial p}(Gp_1-Fq_1)(Eq_1-Fp_1)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial F}{\partial p}(Eq_1-Fp_1)^2\right\}.$$

Слѣдовательно

$$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)=-\frac{\partial\,\frac{1}{v}}{\partial p}=-\frac{\partial}{\partial p}\sqrt{\frac{G}{D}p_1^{\,2}-2\frac{F}{D}p_1q_1+\frac{E}{D}q_1^{\,2}}$$

и точно такъ-же можно доказать, что

$$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)=-\frac{\partial\,\frac{1}{v}}{\partial q}.$$

Наконецъ остается еще замѣтить, что вслѣдствіе уравненія

$$v=\left\{2(u+h)\right\}^{1/_2},$$

имѣемъ

$$-\frac{1}{v^3}\frac{\partial u}{\partial p}=\frac{\partial}{\partial p}\left\{(2u+h)\right\}^{-1/_2}\text{ и }-\frac{1}{v^3}\frac{\partial u}{\partial q}=\frac{\partial}{\partial q}\left\{2(u+h)\right\}^{-1/_2}.$$

Слѣдовательно, если положимъ для краткости

$$H=\sqrt{\left\{\frac{G}{D}p_1^{\,2}-2\frac{F}{D}p_1q_1+\frac{E}{D}q_1^{\,2}\right\}}-\frac{1}{\sqrt{2(u+h)}},$$

то уравненія (14) и (15) приведутся къ канонической формѣ

$$\frac{dp}{ds}=\frac{\partial H}{\partial p_1},\quad \frac{dq}{ds}=\frac{\partial H}{\partial q_1},$$

$$\frac{dp_1}{ds}=-\frac{\partial H}{\partial p},\quad \frac{dq_1}{ds}=-\frac{\partial H}{\partial q},$$

а уравненіе (16) обратится въ тождественное при подстановкѣ значеній p' и q' (20).

---

§ V.

10. Отношенія между потенціалами силъ, при которыхъ одна и та-же кривая представляетъ путь свободной точки, брахистохрону или фигуру равновѣсія нити.

Каноническая форма дифференціальныхъ уравненій, имѣющая мѣсто въ случаѣ потенціальныхъ силъ, какъ для двухъ выше разсмотрѣнныхъ задачъ, такъ и для задачи о движеніи матеріальной точки свободной или принужденной оставаться на данной поверхности,— позволятъ сдѣлать замѣчательныя сближенія между этими тремя различнаго рода вопросами.

Пусть каноническія уравненія

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial x_1},\quad \frac{dx_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_1},\quad \frac{dy_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y},\qquad (1)$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial H}{\partial z_1},\quad \frac{dz_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial z},$$

опредѣляютъ въ отношеніи прямоугольныхъ осей движеніе свободной матеріальной точки съ массой $=1$, при дѣйствіи на нея силъ съ потенціаломъ u.

Тогда, какъ извѣстно, весь вопросъ окончательно приводится къ отысканію полнаго интеграла A уравненія въ частныхъ производныхъ

$$\nabla A = 2(u+h), \qquad (2)$$

гдѣ для краткости положено

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2 = \nabla A$$

и h означаетъ постоянное.

Функція A, выражающаяся посредствомъ x, y, z, h и двухъ произвольныхъ постоянныхъ a и b, представляетъ такъ называемое *дѣйствіе*, имѣющее мѣсто при переходѣ матеріальной точки изъ положенія (x_0, y_0, z_0) въ положеніе (x, y, z). Посредствомъ этой функціи траекторія получится изъ уравненія

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)_0 \text{ и } \frac{\partial A}{\partial b} = \left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)_0, \qquad (3)$$

гдѣ знакъ (o) требуетъ положить $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ во вторыхъ частяхъ.

Уравненія (3) выражаютъ, очевидно, условія необходимыя для того, чтобы A имѣло наименьшее значеніе на дѣйствительной траекторіи между точками (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z). Слѣдовательно и обратно, принимая за принципъ, что дѣйствіе A должно имѣть значеніе minimum для дѣйствительной траекторіи, мы получимъ ея уравненія (3), т. е. два изъ интеграловъ движенія. Это замѣчаніе легко обобщается и остается вѣрнымъ и при движеніи многихъ точекъ въ случаѣ существованія потенціала силъ [1].

Предположимъ теперь, что каноническія уравненія

$$\frac{dx}{ds}=\frac{\partial H}{dx_1},\quad \frac{dx_1}{ds}=-\frac{\partial H}{dx},\ldots \tag{1'}$$

опредѣляютъ свободную брахистохрону для матеріальной точки съ массой $=1$, движущейся подъ дѣйствіемъ силъ, которыхъ потенціалъ u_1. Эта задача окончательно приводится (§ III, п. 7) къ отысканію полнаго интеграла τ уравненія въ частныхъ производныхъ

$$\nabla\tau=\frac{1}{(2u_1+h_1)}, \tag{2'}$$

гдѣ h_1 постоянное и ∇ тотъ-же сокращающій символъ, какъ и выше. Функція τ, выражающаяся посредствомъ x, y, z, h и двухъ произвольныхъ постоянныхъ a и b, представляетъ время перехода матеріальной точки изъ положенія (x_0, y_0, z_0) въ положеніе (x, y, z) по траекторіи, опредѣляемой уравненіями

$$\frac{d\tau}{\partial a}=\left(\frac{d\tau}{\partial a}\right)_0 \text{ и } \frac{d\tau}{\partial b}=\left(\frac{d\tau}{\partial b}\right)_0. \tag{3'}$$

---

[1] Это замѣчаніе, мнѣ кажется, совершенно опровергаетъ установившійся взглядъ, что принципъ наименьшаго дѣйствія отличается отъ другихъ принциповъ тѣмъ, что не даетъ интеграловъ движенія. Этотъ ошибочный взглядъ опирается на весьма авторитетное мнѣніе *Якоби*, усвоенное и другими писателями. Въ его «динамикѣ» въ началѣ шестой лекціи, посвященной этому принципу, говорится: Wir kommen jetzt zu einem neuen Princip, welches nicht, wie die früheren, ein Integral giebt». *Schell* въ своей Theorie der Bewegung und der Kräfte повторятъ то-же самое: «Das... Princip der kleinsten Wirkung unterscheidet sich von den bisher aufgestellten Principen dadurch, dass es nicht ein Integral der Diff.-gleichungen der Bewegung liefert ....» (III Cap. § 17, S. 292).

Они выражаютъ необходимое условіе для того, чтобы τ было *minimum* для найденной траекторіи, т. е. чтобы послѣдняя была брахистохроной.

Возможенъ случай, когда въ обѣихъ только-что разсмотрѣнныхъ задачахъ получается одна и та-же траекторія, т. е. когда уравненіями (3′), опредѣляется та-же кривая какъ и уравненіями (3). Для этого достаточно, чтобы функція A, представляющая дѣйствіе въ первой задачѣ, выражалась точно такъ-же, какъ функція τ, выражающая время движенія во второй. А такъ-какъ A и τ суть соотвѣтственно полные интегралы уравненій (1) и (1′), то послѣднее условіе влечетъ за собой слѣдующее

$$2(u+h) = \frac{1}{2(u_1+h_1)}. \tag{4}$$

Отсюда по данному потенціалу u силъ, заставляющихъ свободную точку описывать нѣкоторую траекторію (C), получается потенціалъ u_1 силъ, при дѣйствіи которыхъ на ту-же точку, брахистохроной будетъ кривая (C). Называя v и v_1 соотвѣтственныя скорости этихъ двухъ движеній въ той-же точкѣ ихъ одинаковыхъ траекторій и замѣчая, что въ томъ и другомъ имѣетъ мѣсто начало живыхъ силъ, вмѣсто (4) получимъ

$$v = \frac{1}{v_1}$$

отношеніе, показывающее, что величины этихъ двухъ скоростей обратно пропорціональны. Слѣдовательно, если направленія ихъ постоянно одинаковыя или прямо противуположныя, то, очевидно, годографъ одного движенія получится изъ годографа другого помощію преобразованія посредствомъ обратныхъ радіусовъ-векторовъ.

Тэтъ выводитъ изъ этихъ отношеній теорему, которой для большей ясности можно дать слѣдующій видъ. Пусть при потенціалахъ силъ u и u_1 пути свободной точки массы $=1$ будутъ соотвѣтственно (C) и (C_1), а ея брахистохроны (B) и (B_1). Если свободный путь (C_1) одинаковъ съ брахистохроной B, между тѣми-же крайними точками; то и брахистохрона (B_1) должна быть одного вида съ свободнымъ путемъ (C) между общими крайними точками. Въ самомъ дѣлѣ, для совпаденія (C_1) съ (B), по доказанному выше, необходимо условіе

$$2(u_1+h_1)=\frac{1}{2(u+h)},$$

котораго очевидно достаточно и для совпаденія (B) съ (C_1).

Предыдущія отношенія между скоростями и потенціалами движеній свободнаго и брахистохроннаго по одному и тому-же пути находятся непосредственно изъ выраженія принципа наименьшаго дѣйствія

$$\delta\int vds=0, \tag{7}$$

имѣющаго мѣсто въ первомъ движеніи, и изъ условія

$$\delta\int\frac{ds}{v_1}=0, \tag{8}$$

вполнѣ опредѣляющаго второе движеніе.

Изъ этихъ двухъ уравненій тотчасъ-же видно, что, при условіи (5), влекущемъ за собой (4), на основаніи начала живой силы, траекторіи двухъ движеній должны быть одинаковыя и что дѣйствіе $A=\int vds$ въ 1-мъ и время $\tau=\int\frac{ds}{v_1}$ во 2-мъ при одинаковости границъ этихъ двухъ интеграловъ получатъ одинаковыя выраженія.

11. Теперь остается еще сдѣлать подобное же сближеніе вопроса о фигурѣ равновѣсія гибкой нити съ каждымъ изъ двухъ предыдущихъ. Для этого положимъ, что каноническія

уравненія (1′) п. 10 опредѣляютъ фигуру равновѣсія гибкой, нерастяжимой нити, плотность которой $= 1$, при дѣйствіи на нее силъ, имѣющихъ потенціалъ U. Вопросъ этотъ окончательно приводится (§ I, п. 1 и 2) къ отысканію полнаго интеграла V уравненія въ частныхъ производныхъ

$$\nabla V = (H - U),$$

гдѣ H постоянное. Функція V, выражающаяся посредствомъ x, y, z, H и двухъ произвольныхъ постоянныхъ a и b, представляетъ уровни для силъ T натяженія нити, опредѣленныхъ формулой

$$T = \sqrt{\Delta V} = H - U.$$

Кривая, соединяющая точки (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z) и представляющая фигуру равновѣсія нити, получится изъ уравненій

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)_0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial V}{\partial b} = \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)_0,$$

выражающихъ условіе, необходимое для того, чтобы V имѣло наименьшее значеніе для этой кривой между разсматриваемыми точками.

Понятно, что найденная фигура равновѣсія можетъ быть одного вида съ траекторіей свободной точки въ 1-й задачѣ, или съ брахистохроной 2-й задачи. Для этого достаточно, чтобы имѣли мѣсто тождественныя равенства:

$$V = A \text{ въ первомъ случаѣ,}$$

$$V = \tau \text{ во второмъ случаѣ.}$$

Эти условія влекутъ за собой соотвѣтственно слѣдующія

$$2(u+h)=(H-U)^2,$$

и

$$\frac{1}{2(u_1+h_1)}=(H-U)^2,$$

которыя равнозначущи соотвѣтственно

$$v=T,$$

и

$$\frac{1}{v_1}=T.$$

Эти выводы, истолкованіе значенія которыхъ очень просто, можно получить еще другимъ путемъ. На основаніи § 1 можно функціи V дать слѣдующія выраженія

$$V=\int(x_1dx+y_1dy+z_1dz)=\int T\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds}$$

$$=\int Tds=\int(H-U)ds.$$

Но, какъ доказано выше, V имѣетъ значеніе minimum для фигуры равновѣсія между точками (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z); поэтому задача объ отысканіи этой кривой выражается однимъ изъ уравненій

$$\delta V=\delta\int \mathrm{T}\,ds=\delta\int(H-U)ds=0,$$

гдѣ неизмѣняемыя границы s_0 и s интеграла соотвѣтствуютъ точкамъ (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z) и присоединяется условіе

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1.$$

Дѣйствительно, при такой постановкѣ вопроса, при помощи варіаціоннаго вычисленія легко получаемъ уравненія (1) § I.

Теперь, принимая во вниманіе уравненія (7) и (8), служащія выраженіемъ 1 и 2 изъ выше разсмотрѣнныхъ задачъ, непосредственно заключаемъ, что фигура равновѣсія совпадетъ съ путемъ свободной точки, или съ брахистохроной, смотря по тому, будетъ ли

$$v = T,$$

или

$$\frac{1}{v_1} = T,$$

откуда получаемъ, какъ равнозначущія условія,

$$2(u+h) = (H-U)^2,$$

или

$$\frac{1}{2(u_1+h_1)} = (H-U)^2.$$

12. Для опредѣленности мы предполагали движущуюся точку, брахистохрону и уравновѣшенную нить въ свободномъ пространствѣ.

Но каноническая форма уравненій, служившая основаніемъ для послѣднихъ выводовъ, сохраняется и въ случаѣ движенія точки на данной поверхности, или когда на ней должны находиться брахистохрона и уравновѣшенная нить. Поэтому легко было бы убѣдиться изъ сравненія этихъ трехъ новыхъ задачъ, что и для нихъ останутся безъ измѣненія только-что полученные выводы.

Часть этихъ выводовъ, относящуюся до связи между вопросами о движеніи точки и о равновѣсіи нити на данной поверхности, Н. Е. Жуковскій недавно [1] доказалъ слѣдующимъ образомъ.

---

[1] «Математическій Сборникъ». Т. 9. Вып. 3-й, стр. 530.

Означимъ черезъ u потенціалъ силъ, дѣйствующихъ на точку массы $=1$, черезъ v ея скорость, черезъ ds элементъ траекторіи, черезъ ϱ радіусъ ея *геодезической* кривизны относительно данной поверхности $f=0$, и черезъ dn элементъ нормала по направленію ϱ.

Изъ обыкновенныхъ уравненій движенія точки на данной поверхности, складывая ихъ по умноженіи сначала на косинусы направленія v, потомъ — на косинусы направленія n, получимъ

$$v\frac{dv}{ds}=\frac{du}{ds} \quad \text{и} \quad \frac{v^2}{\rho}=\frac{du}{dn}. \qquad (1)$$

Точно такъ-же изъ уравненій равновѣсія (B) несвободной нити (§ II) найдемъ

$$\frac{dT}{ds}=-\frac{dU}{ds} \quad \text{и} \quad \frac{T}{\rho}=-\frac{dU}{dn}, \qquad (2)$$

отсюда, интегрируя и означая h и H произвольныя постоянныя, имѣемъ

$$v=\sqrt{2(u+h)} \quad \text{и} \quad T=H-U. \qquad (3)$$

При помощи (3) уравненія (1) и (2) напишутся слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{ds}&=\frac{1}{\sqrt{2(u+h)}}\frac{du}{ds}=\frac{d.\sqrt{2(u+h)}}{ds} \\ \frac{v}{\rho}&=\frac{1}{\sqrt{2(u+h)}}\frac{du}{dn}=\frac{d.\sqrt{2(u+h)}}{dn} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} T.\frac{dT}{ds}&=-(H-U)\frac{dU}{ds}=\frac{1}{2}\frac{d(H-U)^2}{ds} \\ \frac{T^2}{\rho}&=-(H-U)\frac{dU}{dn}=\frac{1}{2}\frac{d(H-U)^2}{dn} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Если въ (4) положимъ $\sqrt{2(u+h)} = H - U$ и $v = T$, то получимъ (2). Если, на-оборотъ, въ (5) сдѣлаемъ $(H-U)^2 = 2(u+h)$ и $T = v$, то получимъ уравненія (1).

Чтобы имѣть право приложить эти выводы къ свободной точкѣ и нити нужно только предположить, что нормалъ n есть главный нормалъ траекторіи, т. е. направленъ къ центру ея кривизны.

Не желая еще болѣе увеличивать объема этой статьи, я долженъ отказаться отъ поясненія предыдущихъ общихъ выводовъ частными примѣрами, прекрасные образцы которыхъ можно найдти у *Клебша* и *Тэта*. По той-же причинѣ я не касаюсь вопроса о фигурѣ равновѣсія тонкой эластической нити, разобраннаго въ послѣднемъ § цитированнаго выше изслѣдованія Клебша.