УДК 512.83:512.87

Е. М. РУССАКОВСКИЙ

О ГАНКЕЛЕВЫХ И ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦАХ И БЕЗУТИАНТЕ. II

3. *Обращение ганкелевых и теплицевых матриц.*

Теорема 1 (*об обращении ганкелевых матриц*). *Пусть* $U = (u_{i+j})_{i,\, j=1}^{n}$ — *ганкелева матрица,* x_n, x_{n+1}, y_n, y_{n+1} — *некоторые числа, связанные соотношением* $\begin{vmatrix} x_n & x_{n+1} \\ y_n & y_{n+1} \end{vmatrix} = 1$, z_x — *n-мерный вектор-столбец* $(x_{n+1}, -u_1x_n, -u_2x_n, \ldots, u_{n-1}x_n)^t$, z_y — *n-мерный вектор-столбец* $(y_{n+1}, -u_1y_n, -u_2y_n, \ldots, -u_{n-1}y_n)^t$.

Если разрешимы две системы n линейных уравнений с n неизвестными

$$U\vec{x} = z_x, \quad U\vec{y} = z_y, \tag{1}$$

где $\vec{x} = (x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0)^t$, $\vec{y} = (y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_0)^t$, *то матрица U невырожденная, обратная к ней матрица может быть построена по любой из следующих двух формул:*

$$U^{-1} = \tilde{X}J\tilde{Y}^t - \tilde{Y}J\tilde{X}^t, \quad U^{-1} = \tilde{Y}J\tilde{X}^t - \tilde{X}J\tilde{Y}^t \tag{2}$$

(*обозначения см.* [*1, п. 1*]).

Соответствующая двойственная теорема о теплицевых матрицах формулируется следующим образом:

Теорема 2 (*об обращении теплицевых матриц*). *Пусть* $U = (u_{i-j})_{i,\, j=1}^{n}$ — *теплицева матрица,* x_n, x_{n+1}, y_n, y_{n+1} — *некоторые числа, связанные соотношением* $\begin{vmatrix} x_n x_{n+1} \\ y_n y_{n+1} \end{vmatrix} = 1$, z_x — *n-мерный вектор-столбец* $(-u_1x_n, -u_2x_n, \ldots, -u_{n-1}x_n, x_{n+1})^t$, z_y — *n-мерный вектор-столбец* $(-u_1y_n, -u_2y_n, \ldots, u_{n-1}y_n, y_{n+1})^t$.

Если разрешимы две системы n линейных уравнений с n неизвестными

$$U\vec{x} = z_x, \quad U\vec{y} = z_y, \tag{3}$$

где $\vec{x} = (x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0)^t$, $\vec{y} = (y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_0)^t$, *то матрица U невырожденная, обратная к ней матрица может быть построена по любой из следующих двух формул:*

$$U^{-1} = \tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X}, \quad U^{-1} = \tilde{Y}\tilde{X} - \tilde{X}\tilde{Y} \tag{4}$$

(*см.* [*1, п. 1*]).

Доказательство теоремы 1. Пусть $\vec{x} = (\tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_{n-2}, \ldots, \tilde{x}_0)^t$ и $\vec{y} = (\tilde{y}_{n-1}, \tilde{y}_{n-2}, \ldots, \tilde{y}_0)^t$ — решения систем (1). Заметим, что тогда набор $\{x, y\} = \{\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n-1}, \ldots, \tilde{x}_0, \tilde{y}_n, \tilde{y}_{n-1}, \ldots, \tilde{y}_0\}$ представляет собой решение системы $2n-1$ уравнений с $2n+2$ неизвестными

$$uT_{x,\,y} = v, \tag{5}$$

где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_{2n-1})$ и $v = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ — $(2n-1)$-мерные вектор-строки (ср. с доказательством предложения 6 [1, п. 2]).

Пусть $B_{f,g}$ — безутианта многочленов $f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \tilde{x}_i \lambda^i$ и $g(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \tilde{y}_i \lambda^i$. По лемме 2 [1, п. 2] имеем $U \cdot B_{f,g} = E_n$. Отсюда следует, что матрица U обратима и $U^{-1} = B_{f,g}$. Используя формулы для представления безутианты [1, п. 2], получаем формулы (2). Теорема 1 доказана. Аналогично может быть доказана теорема 2.

Замечание 1. Невырожденность матрицы U в теореме 1 можно доказать и без использования понятия безутианты. Предположим, что обе системы (1) разрешимы, а матрица U вырожденная. Тогда подпространство $\operatorname{Ker} U = \{k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) : kU = 0\}$ нетривиально. Пусть $I = \min\limits_{k \in \operatorname{Ker} U} (\min\limits_{k_i \neq 0} i)$. Предположим, что $I \geqslant 2$ и минимум достигается при $\tilde{k} = (\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \ldots, \tilde{k}_n) = (0, \ldots, 0, 0, \tilde{k}_I, \tilde{k}_{I+1}, \ldots, \tilde{k}_{n-1}, \tilde{k}_n)$. Если $\vec{x}(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0)^t$ и $\vec{y} = (y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_0)^t$ — решения систем (1), то

$$0 = kU\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=I}^{n} \tilde{k}_i u_{i+j-1} \right) x_{n-j} = \sum_{i=I}^{n} \tilde{k}_i \left(\sum_{j=1}^{n} u_{i+j-1} x_{n-j} \right) =$$

$$= \sum_{i=I}^{n} \tilde{k}_i (-u_{i-1} x_n) = -\left(\sum_{i=I}^{n} \tilde{k}_i u_{i-1} \right) x_n.$$

Аналогично получаем: $0 = kU\vec{y} = -\left(\sum_{i=I}^{n} \tilde{k}_i u_{i-1} \right) y_n$. Поскольку $\begin{vmatrix} x_n x_{n+1} \\ y_n y_{n+1} \end{vmatrix} = 1$, отсюда следует, что $\sum_{i=I}^{n} \tilde{k}_i u_{i-1} = \sum_{i=I-1}^{n-1} \tilde{k}_{i+1} u_i = 0$. Пусть $k' = (k_1', k_2', \ldots, k_n') = (0, \ldots, 0, \tilde{k}_I, \tilde{k}_{I+1}, \tilde{k}_{I+2}, \ldots, \tilde{k}_n, 0)$. Нетрудно проверить, что $k' \in \operatorname{Ker} U$, $\min\limits_{k_i' \neq 0} i = I - 1$. Противоречие показывает, что $I = 1$, т. е. первая строка матрицы U есть линейная комбинация остальных $n-1$ строк:

$$u_j = \sum_{i=2}^{n} k_i u_{i+j-1} \; (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} u_j x_{n-j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=2}^{n} k_i u_{i+j-1} \right) x_{n-j} =$$

$$= \sum_{i=2}^{n} k_i \left(\sum_{j=1}^{n} u_{i+j-1} x_{n-j} \right) = \sum_{i=2}^{n} k_i (-u_{i-1} x_n) = -\left(\sum_{i=2}^{n} k_i u_{i-1} \right) x_n.$$

Аналогично получаем $y_{n+1} = -\left(\sum_{i=2}^{n} k_i u_{i-1} \right) y_n$. Но тогда

$$1 = \begin{vmatrix} x_n x_{n+1} \\ y_n y_{n+1} \end{vmatrix} = -\left(\sum_{i=2}^{n} k_i u_{i-1} \right) \begin{vmatrix} x_n x_n \\ y_n y_n \end{vmatrix} = 0.$$

Противоречие показывает, что матрица U невырожденная.

Замечание 2. В условиях теорем 1 и 2, как и в [2, п. 5], правая часть по крайней мере одной из систем (1) зависит от элементов матрицы U, и доказательство невырожденности матрицы U проводится без дополнительных предположений. В работах [2, п. 4; 3, 4; 5, гл. III, § 6; 6—8; 9, гл. IV, § 18] для обращения ганкелевых и теплицевых матриц используются решения двух систем n линейных уравнений с n неизвестными

$$U\vec{x}_j = \vec{z}_j \quad (j = 1, 2), \tag{6}$$

правые части которых постоянны, т. е. не зависят от элементов матрицы U. При этом доказательство невырожденности матрицы U проводится при некоторых дополнительных предположениях.

Пусть U — ганкелева (теплицева) матрица порядка $n \geqslant 3$. Возникает вопрос, можно ли выбрать постоянные n-мерные вектор-столбцы $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$ таким образом, что из разрешимости систем (6) будет следовать невырожденность матрицы U.

Теорема 3. *При $n \geqslant 3$ для любых постоянных n-мерных вектор-столбцов $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$ существует вырожденная ганкелева (теплицева) матрица U такая, что системы уравнений (6) разрешимы.*

Доказательство теоремы 3 проведем только для ганкелевых матриц.

Пусть $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$ — постоянные n-мерные вектор-столбцы, $\vec{z}_j = (z_{j,\,n-1}, z_{j,\,n-2}, \ldots, z_{j,\,0})^t$ $(j = 1, 2)$. Поскольку $n \geqslant 3$, система двух линейных уравнений с n неизвестными $w_{n-1}, w_{n-2}, \ldots, w_0$

$$\sum_{i=1}^{n} w_{n-i} z_{j,\,n-i} = 0 \quad (j = 1, 2) \tag{7}$$

имеет нетривиальные решения $(w_{n-1}, w_{n-2}, \ldots, w_0)$. Заметим, что если

$$z_{j,\,i} = 0 \ (j = 1, 2;\ i = 2, 3, \ldots, n-1), \begin{vmatrix} z_{1,\,n-1} & z_{1,0} \\ z_{2,\,n-1} & z_{2,0} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{8}$$

(как это имеет место в [3, 4; 5, гл. III, § 6; 6, 8; 9, гл. IV, § 18], то диагональная матрица $U = \operatorname{diag}(1, 0, 0, \ldots, 0, 0, 1)$ доставляет пример вырожденной ганкелевой матрицы, для которой системы (6) разрешимы.

Пусть условие (8) не выполнено. Тогда среди решений системы (7) существуют такие, в которых либо $w_{n-1} \neq 0$, либо $w_0 \neq 0$. Очевидно, достаточно рассмотреть только один из этих случаев. Пусть $(\tilde{w}_{n-1}, \tilde{w}_{n-2}, \ldots, \tilde{w}_0)$ — решение системы (7), в котором $\tilde{w}_{n-1} \neq 0$. Рассмотрим многочлены $f_\varepsilon(\lambda) = \lambda^n + (\tilde{w}_{n-2}/\tilde{w}_{n-1})\lambda^{n-1} + \ldots + (\tilde{w}_0/\tilde{w}_{n-1})\lambda + \varepsilon$ и $g(\lambda) = \tilde{w}_{n-1}\lambda^{n-1} + \tilde{w}_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + \tilde{w}_0$. Нетрудно проверить, что безутианту $B_{f_\varepsilon, g}$ многочленов $f_\varepsilon(\lambda)$ и $g(\lambda)$ можно представить в виде $B_{f_\varepsilon, g} = \tilde{W} + \varepsilon W_0$, где $\tilde{W} = (\tilde{w}_{n-i} \times \tilde{w}_{n-k})^n_{i, k=1}/\tilde{w}_{n-1}$, $W_0 = (-\tilde{w}_{2n-i-k+1})^n_{i, k=1}$, $\tilde{w}_l = 0$ при $l > n-1$; $\tilde{W}\vec{z}_j = 0$ $(j = 1, 2)$; $\det B_{f_\varepsilon, g} = \varepsilon^{n-1}\tilde{w}^n_{n-1}(-1)^{n(n-1)/2}$; при $\varepsilon \neq 0$ безутианта $B_{f_\varepsilon, g}$ совпадает с матрицей, присоединенной к матрице $U_\varepsilon = \left(\det B_{f_\varepsilon, g}\right)^{1/(n-1)} B^{-1}_{f_\varepsilon, g}$; при $\varepsilon \neq 0$ U_ε — невырожденная ганкелева матрица (см. предложение 5 [1, п. 2]); существует конечный предел $U = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} U_\varepsilon$; U — ганкелева матрица, присоединенная к которой совпадает с $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} B_{f_\varepsilon, g} = \tilde{W}$, матрицей ранга 1, и потому U — вырожденная матрица ранга $n-1$.

Положим $\vec{x}_j = W_0\vec{z}_j/(\tilde{w}^{n/(n-1)}_{n-1}(-1)^{n/2})$ $(j = 1, 2)$. При $\varepsilon \neq 0$ имеем $U_\varepsilon\vec{x}_j = \left(\det B_{f_\varepsilon, g}\right)^{1/(n-1)} B^{-1}_{f_\varepsilon, g}\varepsilon W_0\vec{z}_j/\left(\varepsilon\tilde{w}^{n/(n-1)}_{n-1}(-1)^{n/2}\right) = B^{-1}_{f_\varepsilon, g}(\tilde{W} + \varepsilon W_0) \times \vec{z}_j = \vec{z}_j$ $(j = 1, 2)$. Устремляя ε к нулю, получаем $U\vec{x}_j = \vec{z}_j$ $(j = 1, 2)$. Таким образом, U — вырожденная ганкелева матрица, для которой системы (6) разрешимы. Теорема 3 доказана.

Замечание 3. В условиях теоремы 3 при вещественных $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$ ганкелева (теплицева) матрица U также может быть выбрана вещественной.

В заключение рассмотрим обратную задачу для систем (1) (систем (3)). В приводимой ниже теореме решается задача о восстановлении ганкелевой (теплицевой) матрицы по решениям систем (1) (систем (3)).

Теорема 4 *(о восстановлении ганкелевых и теплицевых матриц). Пусть* $\{x, y\} = \{x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_0\}$ *— заданный набор комплексных чисел.*

Для того, чтобы существовали ганкелева (теплицева) матрица U *и числа* x_{n+1}, y_{n+1} такие, что $\begin{vmatrix} x_n x_{n+1} \\ y_n y_{n+1} \end{vmatrix} = 1$ *и выполняются соотношения* (1) *(соотношения* (3)), *необходимо и достаточно, чтобы результант* [1, п. 1] *многочленов* $f(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i\lambda^i$ *и* $g(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i\lambda^i$ *был отличен от нуля.*

Если выполнено указанное условие, то матрица U невырожденная и однозначно восстанавливается по набору $\{x, y\}$; кроме того, набор $\{x, y\}$ однозначно определяет числа x_{n+1}, y_{n+1}.

Доказательство теоремы 4 проведем только для ганкелевых матриц. Необходимость условия $\det R_{f,g} \neq 0$ следует из предложения 3 [1, п. 2] и теоремы 1.

Докажем достаточность условия $\det R_{f,g} \neq 0$. Положим $u_i = \Delta_i/((-1)^{n-1} \det R_{f,g})$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n-1)$. Тогда имеем (как было отмечено при доказательстве предложения 5 [1, п. 2]): $\sum_{i=1}^{n+1} u_{i+j-1}x_{n-i+1} = 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} u_{i+j-1}y_{n-i+1} = 0$, т. е. $\sum_{i=2}^{n+1} u_{i+j-1}x_{n-i+1} = -u_jx_n$, $\sum_{i=2}^{n+1} u_{i+j-1}y_{n-i+1} = -u_jy_n$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$. Положим $x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} [\Delta_i x_{n-i}/((-1)^{n-1} \det R_{f,g})]$, $y_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} [\Delta_i y_{n-i}/((-1)^{n-1} \times \det R_{f,g})]$ и заметим, что $\begin{vmatrix} x_n & x_{n+1} \\ y_n & y_{n+1} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \left[\Delta_i \begin{vmatrix} x_n & x_{n-i} \\ y_n & y_{n-i} \end{vmatrix} /((-1)^{n-1} \times \det R_{f,g})\right] = 1$ (ср. с доказательством предложения 5 [1, п. 2]).

Таким образом, существует ганкелева матрица $U = (u_{i+j-1})_{i,j=1}^{n}$ и числа x_{n+1}, y_{n+1} такие, что $\begin{vmatrix} x_n & x_{n+1} \\ y_n & y_{n+1} \end{vmatrix} = 1$ и выполняются соотношения (1). Из теоремы 1 следует, что эта матрица невырожденная и однозначно восстанавливается по набору $\{x, y\}$ при помощи формул (2). Единственность искомой ганкелевой матрицы обеспечивается тем, что числа x_{n+1}, y_{n+1} не входят в формулы (2). Единственность искомых чисел x_{n+1}, y_{n+1} следует из единственности искомой матрицы. Теорема 4 доказана.

Замечание 4. В работах [6—8; 9, гл. IV, § 18] при восстановлении ганкелевых и теплицевых матриц по решениям соответствующих систем уравнений с постоянными правыми частями приходится накладывать дополнительные ограничения на эти решения (кроме указанного в условиях теоремы 4).

Список литературы: 1. *Руссаковский Е. М.* О ганкелевых и теплицевых матрицах и безутианте I.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Харьков, 1979, вып. 32, с. 2. *Сахнович А. Л.* Об одном методе обращения теплицевых матриц.— Мат. исследования, 1973, т. VIII, вып. 4 (30), с. 180—186. 3. *Baxter G., Hirschman I. I.* Ir. An explicit inversion for mula for finite-section Wiener-Hopf operators.— Bull. Amer. Math. Soc., 1964, vol. 70, p. 820—823. 4. *Семенцул А. А.* Обращение конечных теплицевых матриц и их континуальных аналогов.— В кн.: И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. Проекционные методы решения уравнений Винера—Хопфа. Доп. II. Кишинев, РИО АН МССР, 1967, с. 140—156. 5. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М., Наука, 1971. 352 с. 6. *Гохберг И. Ц., Семенцул А. А.* Об обращении конечных теплицевых матриц и их континуальных аналогов.— Мат. исследования, 1972, т. VII, вып. 2 (24), с. 201—223. 7. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Одна формула для обращения конечных теплицевых матриц.— Мат. исследования, 1972, т. VII, вып. 2 (24), с. 272—283. 8. *Ландер Ф. И.* Безутианта и обращение ганкелевых и теплицевых матриц.— Мат. исследования, 1974, т. IX, вып. 2 (32), с. 69—87. 9. *Иохвидов И. С.* Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы. М., Наука, 1974. 264 с.

Поступила 18 марта 1978 г.