УДК 517.54+519.98

А. Я. ХЕЙФЕЦ

РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ В АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И СОЕДИНЕНИЕ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ. II

§ 2. Абстрактная задача интерполяции. 1. Формулировка задачи. Постановка задачи и ее мотивировка были приведены в [4]*. Здесь мы напомним ее.

Пусть L_1 и L_2 — гильбертовы пространства, X — линейное пространство, T — линейный оператор в X, D — неотрицательная полутора-

* Первая часть статьи опубликована в вып. 49 настоящего сборника. Там же приведен список литературы.

линейная форма на X, E и M — линейные отображения из X в L_1 и L_2 соответственно такие, что имеет место основное тождество (ОТ): $D(x, y) - D(Tx, Ty) = \langle Ex, Ey\rangle - \langle Mx, My\rangle$ **(2.1)**.

Голоморфная в единичном круге функция $w(\zeta)$, значениями которой являются линейные сжимающие операторы из L_1 в L_2, называется решением абстрактной интерполяционной задачи, если существует линейное отображение $F: X \to H^w$ со свойствами

$$\langle Fx, Fx\rangle \leqslant D(x, x); \tag{2.2a}$$

$$FTx \overset{\text{п. в}}{=} t \cdot Fx - \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{L_2} & w \\ w^* & \mathbf{1}_{L_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -Mx \\ Ex\end{bmatrix}, \ (|t| = 1). \tag{2.2b}$$

Требуется доказать существование и описать все решения задачи $w(\zeta)$, а также соответствующие отображения F.

Отметим, что равенство (2.2b) во многих важных частных случаях может быть переписано в несколько иной форме: пусть при некотором ζ, $|\zeta| < 1$, существует $(\zeta - T)^{-1}$, тогда при этом ζ: $(Fx)_+(\zeta) = (w(\zeta)E - M)(\zeta - T)^{-1}x$ **(2.2′+)**; если же при некотором ζ, $|\zeta| < 1$, существует $(\mathbf{1}_X - \bar{\zeta}T)^{-1}$, то при этом ζ $(Fx)_-(\zeta) = \bar{\zeta}(E - w(\zeta)^*M)(\mathbf{1}_X - \bar{\zeta}T)^{-1}x$ **(2.2′—)**.

2. Узел, ассоциированный с задачей. Так же, как и в [4] предыдущего сборника, свяжем с данными задачи (X, T, D, E, M) открытую систему α. Сопоставим каждому $x \in X$ антилинейный функционал на X (который будем обозначать Dx) вида $Dx(y) \equiv D(x, y)$ **(2.3)**. Введем в пространстве $\{Dx\}$ скалярное произведение $\langle Dx_1, Dx_2\rangle \equiv D(x_1, x_2)$ **(2.4)**. В качестве H^α возьмем пополнение пространства $\{Dx\}$ относительно введенного скалярного произведения. Основное тождество позволяет определить изометрию из $H^\alpha \oplus L_1$ в $H^\alpha \oplus L_2$:

$$V\begin{bmatrix} DTx \\ Ex\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Dx \\ Mx\end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Областью определения (d_V) оператора V является замыкание в $H^\alpha \oplus L_1$ векторов вида $DTx \oplus Ex$, а областью значений (Δ_V) — замыкание в $H^\alpha \oplus L_2$ векторов вида $Dx \oplus Mx$. Через N_V и M_V обозначим дефектные подпространства V:

$$N_V = (H^\alpha \oplus L_1) \ominus d_V, \ \ M_V = (H^\alpha \oplus L_2) \ominus \Delta_V. \tag{2.6}$$

Далее изометрия V может быть дополнена (см., например, [1] предыдущего сборника) до унитарного узла, а именно: пусть N_1 и N_2 — вторые экземпляры пространств N_V и M_V соответственно, рассматриваемые как отдельные пространства. Зададим оператор A^α, отображающий $H^\alpha \oplus L_1 \oplus N_2 \equiv d_V \oplus N_V \oplus N_2$ на $H^\alpha \oplus L_2 \oplus N_1 \equiv \Delta_V \oplus M_V \oplus N_1$, следующим образом:

$A^\alpha | d_V = V$;

$A^\alpha | N_V$ — тождественное отображение N_V на N_1;

$A^\alpha | N_2$ — тождественное отображение N_2 на M_V.

Очевидно, A^α — унитарен. Внешними пространствами узла являются: $N_1^\alpha = N_2 \oplus L_1$, $N_2^\alpha = N_1 \oplus L_2$. Очевидно, что $P_{N_1} A^\alpha | N_2 = 0$.

Характеристическую функцию узла α обозначаем через S и разбиваем на блоки:

$$S = \begin{bmatrix} s_{21} & s_{22} \\ s_{11} & s_{12} \end{bmatrix} : N_2 \oplus L_1 \to N_1 \oplus L_2.$$

3. Построение решений путем замыкания ассоциированного узла. Приведем сейчас конструкцию (по существу совпадающую с конструкцией, применявшейся в [1, 4] предыдущего сборника, позволяющую получать решения абстрактной интерполяционной задачи, а затем покажем, что таким способом получаются все решения. Она основана на замыкании описанного в п. 2 узла α, произвольным узлом β с $N_1^\beta = N_1$, $N_2^\beta = N_2$.

Пусть $\omega(\zeta)$ — характеристическая функция узла β, γ — узел, получающийся замыканием узла α, посредством узла β. Характеристическая функция узла γ равна $w = s_{12} + s_{11}\omega(\mathbf{1}_{N_1} - s_{21}\omega)^{-1} s_{22}$ **(2.7).** Она и оказывается решением задачи.

Положим $Fx \equiv G^\gamma Dx$ **(2.8)**, где G^γ — представление Фурье, связанное с простой частью узла γ, описанное в § 1.7 (формула (1.24)). В проверке нуждается лишь соотношение (2.2b). Непосредственно из определений следуют соотношения

$$G_+^\alpha(\zeta) P_{H^\alpha}(\mathbf{1}_{H^\alpha \oplus N_1^\alpha} - \zeta P_{H^\alpha} A^\alpha) = P_{N_2^\alpha} A^\alpha - S(\zeta) P_{N_1^\alpha}; \qquad (2.9+)$$

$$G_-^\alpha(\zeta) P_{H^\alpha}(\mathbf{1}_{H^\alpha \oplus N_2^\alpha} - \bar{\zeta} P_{H^\alpha}(A^\alpha)^*) = \bar{\zeta}(P_{N_1^\alpha}(A^\alpha)^* - S(\zeta)^* P_{N_2^\alpha}). \quad (2.9-)$$

Из этих соотношений с использованием (1.24) (при $h^\gamma = h^\alpha \oplus 0$) (1.21) и (1.21′) получаем

$$G_+^\gamma(\zeta) P_{H^\alpha}(\mathbf{1}_{H^\alpha \oplus N_1^\alpha} - \zeta P_{H^\alpha} A^\alpha) =$$

$$= (\psi(\zeta)\omega(\zeta) P_{N_1} + P_{L_2}) A^\alpha - (\psi(\zeta) P_{N_2} + w(\zeta) P_{L_1}) \qquad (2.10+)$$

и

$$G_-^\gamma(\zeta) P_{H^\alpha}(\mathbf{1}_{H^\alpha \oplus N_2^\alpha} - \bar{\zeta} P_{H^\alpha}(A^\alpha)^*) =$$

$$= \bar{\zeta}(\varphi(\zeta)^* \omega(\zeta)^* P_{N_2} + P_{L_1})(A^\alpha)^* - \bar{\zeta}(\varphi(\zeta)^* P_{N_1} + w(\zeta)^* P_{L_2}). \quad (2.10-)$$

Рассматривая (2.10+) на векторах из d_V вида $DTx \oplus Ex$ и (2.10—) — на векторах из Δ_V вида $Dx \oplus Mx$, получим (2.2b). Таким образом, w — решение.

4. Еще несколько соотношений. Из рассмотрения (2.10+) на векторах из N_V и N_2 и (2.10—) на векторах из M_V и N_1 получается еще несколько соотношений, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$G_+^\gamma(\zeta) P_{H^\alpha}(A^\alpha)^* \mid N_1 = \psi(\zeta)\omega(\zeta) - w(\zeta) \cdot s_{22}(0)^*. \qquad (2.11+)$$

$$\zeta G_+^\gamma(\zeta) P_{H^\alpha} A^\alpha \mid N_2 = \psi(\zeta) - s_{11}(0); \qquad (2.12+)$$

$$G_-^\gamma(\zeta) P_{H^\alpha} A^\alpha \mid N_2 = \bar{\zeta}(\varphi(\zeta)^* \omega(\zeta)^* - w(\zeta)^* s_{11}(0)); \qquad (2.11-)$$

$$G_-^\gamma(\zeta) \mid P_{H^\alpha}(A^\alpha)^* \mid N_1 = \varphi(\zeta)^* - s_{22}(0)^*. \qquad (2.12-)$$

Или, записывая эти соотношения в виде пар

$$G^{\gamma} P_{H^{\alpha}} (A^{\alpha})^{*} \mid N_1 = \begin{bmatrix} \psi\omega \\ \varphi^{*} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w \\ \mathbf{1}_{L_1} \end{bmatrix} s_{22}(0)^{*}; \qquad (2.13)$$

$$G^{\gamma} P_{H^{\alpha}} A^{\alpha} \mid N_2 = \bar{t}\left(\begin{bmatrix} \psi \\ \varphi^{*}\omega^{*} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{L_2} \\ w^{*} \end{bmatrix} s_{11}(0)\right). \qquad (2.14)$$

5. Общий вид решений. Пусть $w(\zeta)$ — голоморфная в единичном круге, сжимающая оператор-функция (из L_1 в L_2), $F: X \to H^{w}$ со свойствами (2.2).

Из свойства (2.2a) следует, что F зависит лишь от Dx и может быть продолжено на H^{α} по непрерывности. Вспоминая соотношения (2.13) и (2.14), положим

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \varphi^{*} \end{bmatrix} \equiv F P_{H^{\alpha}} (A^{\alpha})^{*} \mid N_1 + \begin{bmatrix} w \\ \mathbf{1}_{L_1} \end{bmatrix} s_{22}(0)^{*}; \qquad (2.15)$$

$$\begin{bmatrix} \psi \\ \varphi_1^{*} \end{bmatrix} \equiv t F P_{H^{\alpha}} A^{\alpha} \mid N_2 + \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{L_2} \\ w^{*} \end{bmatrix} s_{11}(0). \qquad (2.16)$$

Из этих определений и свойства (2.2b) отображения F, обращая рассуждения пп. 4 и 3, получим формулы типа (2.10+) и (2.10—):

$$F_{+}(\zeta) P_{H^{\alpha}} (\mathbf{1}_{H^{\alpha} \oplus N_1^{\alpha}} - \zeta P_{H^{\alpha}} A^{\alpha}) =$$

$$= (\psi_1(\zeta) P_{N_1} + P_{\llcorner}\ \ A^{\alpha} - (\psi(\zeta) P_{N_2} + w(\zeta) P_{L_1}) \qquad (2.17)$$

и

$$F_{-}(\zeta) P_{H^{\alpha}} (\mathbf{1}_{H^{\alpha} \oplus N_2^{\alpha}} - \bar{\zeta} P_{H^{\alpha}} (A^{\alpha})^{*}) =$$

$$= \bar{\zeta} (\varphi_1(\zeta)^{*} P_{N_2} + P_{L_1}) (A^{\alpha})^{*} - \bar{\zeta} (\varphi(\zeta)^{*} P_{N_1} + w(\zeta)^{*} P_{L_2}). \quad (2.18)$$

Соотношения (2.17) и (2.18) могут быть переписаны в виде соотношения типа (1.24):

$$F h^{\alpha} = \begin{bmatrix} \psi_1 & \mathbf{1}_{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1^{*} & \mathbf{1}_{L_1} \end{bmatrix} G^{\alpha} h^{\alpha}. \qquad (2.19)$$

Кроме того, из рассмотрения (2.17) на векторах вида $(\mathbf{1}_{H^{\alpha} \oplus N_1^{\alpha}} - \zeta P_{H^{\alpha}} \times$ $\times (A^{\alpha}))^{-1} n_1^{\alpha}$ получаем соотношение типа (1.21′): $[\psi, w] = [\psi_1, \mathbf{1}_{L_2}] S$ **(2.20)** (в силу того что $P_{N_1^{\alpha}} (\mathbf{1}_{H^{\alpha} \oplus N_1^{\alpha}} - \zeta P_{H^{\alpha}} A^{\alpha})^{-1} n_1^{\alpha} = n_1^{\alpha}$). А из рассмотрения (2.18) на векторах вида $(\mathbf{1}_{H^{\alpha} \oplus N_2^{\alpha}} - \bar{\zeta} P_{H^{\alpha}} (A^{\alpha})^{*})^{-1} n_2^{\alpha}$ получаем соотношение типа (1.21): $[\varphi^{*},\ \ ^{*}] = [\varphi_1^{*}, \mathbf{1}_{L_1}] S^{*}$ **(2.21).** Далее вычисления показывают, что

$$K(\zeta, \mu) \equiv \begin{bmatrix} G_{+}^{w}(\zeta) \\ G_{-}^{w}(\zeta) \end{bmatrix} (\mathbf{1}_{H^{w}} - FF^{*}) [G_{+}^{w}(\mu)^{*}, G_{-}^{w}(\mu)^{*}] =$$

$$
= \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\psi(\zeta)\,\psi(\mu)^* - \psi_1(\zeta)\,\psi_1(\mu)^*}{1-\zeta\bar{\mu}} & \dfrac{\psi_1(\zeta)\,\varphi(\mu) - \psi(\zeta)\,\varphi_1(\mu)}{\zeta-\mu}\,\mu \\ \bar{\zeta}\,\dfrac{\varphi_1(\zeta)^*\,\psi(\mu)^* - \varphi(\zeta)^*\,\psi_1(\mu)^*}{\bar{\zeta}-\bar{\mu}} & \bar{\zeta}\,\dfrac{\varphi(\zeta)^*\,\varphi(\mu) - \varphi_1(\zeta)^*\,\varphi_1(\mu)}{1-\zeta\bar{\mu}}\,\mu \end{array} \right), \quad (2.22)
$$

где G^{ω} — модельные операторы (см. § 1.5).

Откуда ввиду сжимаемости F вытекает важное следствие — ядро $K(\zeta, \mu)$ эрмитово — позитивно в поточечном смысле. Но тогда существует голоморфная сжимающая при $|\zeta| < 1$ оператор — функция $\omega(\zeta)$ (из N_1 в N_2) такая, что *) $\psi_1(\zeta) = \psi(\zeta)\,\omega(\zeta)$ и $\varphi_1(\zeta) = \omega(\zeta)\,\varphi(\zeta)$, $(|\zeta| < 1)$ **(2.23)**.

Из (2.20), (2.21) и (2.23) следует, что φ, ψ и ω вычисляются по формулам (1.22), (1.22′) и (1.23) соответственно, а $Fh^{\alpha} = G^{\gamma}h^{\alpha}$, где γ — узел, получающийся замыканием узла α посредством узла β с характеристической функцией $\omega(\zeta)$.

6. Интегральное представление $D(x, x)$. При любом параметре $\omega(\zeta): N_1 \to N_2$ полное представление $D(x, x)$ получается применением равенства Парсеваля для узла γ (см. § 1.10) к векторам $h^{\gamma} = h^{\alpha} \oplus 0$ (где $h^{\alpha} = Dx$):

$$
D(x, x) = \langle F^{\omega}x,\ F^{\omega}x\rangle_{H^{\omega}} + \langle I^{\omega}x,\ I^{\omega}x\rangle_{H^{d\sigma}} + \langle P_{(H^{\alpha})'}Dx,\ Dx\rangle, \quad (2.24)
$$

здесь $P_{(H^{\alpha})'}$ — ортопроектор на подпространство изолированной части узла α; $d\sigma$ — мера, соответствующая функции $a^{\omega}(\zeta)$, задаваемой формулой (1.28); $I^{\omega}x$ в силу формулы (1.29) имеет вид (этим же символом мы обозначили в (2.24) и соответствующую векторную меру):

$$
(I^{\omega}x)(\zeta) = \begin{bmatrix} \omega\mathring{\varphi} & 0 & \mathring{\psi}^* & 0 \\ \mathring{\varphi} & 0 & \omega^*\mathring{\psi}^* & 0 \end{bmatrix}(\zeta) \cdot G^{\alpha}(\zeta)\,Dx -
$$
$$
- \int\limits_{T} \frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2} \begin{bmatrix} \psi^* & \omega\varphi \\ \omega^*\psi^* & \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{L_2} & \omega \\ \omega^* & 1_{L_1} \end{bmatrix}^{[-1]} F^{\omega}x\,dm, \quad (2.25)
$$

где G^{α} — представление Фурье, связанное с простой частью узла α; φ, ψ определяются по ω формулами (1.22) и (1.22′), $\mathring{\varphi}$, $\mathring{\psi}$ — формулами (1.26), скалярное произведение в $H^{d\sigma}$ задается интегралом Хеллингера.

Из формул (2.9) следует, что

$$
G^{\alpha}DTx = tG^{\alpha}Dx - \begin{bmatrix} 1_{N_2^{\alpha}} & S \\ S^* & 1_{N_1^{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -Mx \\ \hdashline 0 \\ Ex \end{bmatrix}. \quad (2.26)
$$

Откуда, в частности, вытекает, что $ITx = tIx$.

---

* Доказательство этого факта, основанное на рассмотрении интерполяционной задачи с ядром $K(\zeta, \mu)$, автору сообщил П. М. Юдицкий.

Свойство (2.26) позволяет преобразовать выражение для $I^{\omega}x$ в некоторых важных частных случаях: пусть ζ ($|\zeta| < 1$) таково, что существует $(\zeta - T)^{-1}$ и $(\mathbf{1}_X - \bar{\zeta}T)^{-1}$, тогда

$$(I^{\omega}x)^{\cdot}(\zeta) = \begin{bmatrix} \psi^* & \omega\varphi \\ \omega^*\psi^* & \varphi \end{bmatrix}(\zeta) \cdot \begin{bmatrix} -\bar{\zeta}M(\mathbf{1}_X - \bar{\zeta}T)^{-1}x \\ E(\zeta - T)^{-1}x \end{bmatrix} -$$

$$- \int_{T} \frac{1 - |\zeta|^2}{|t - \zeta|^2} \begin{bmatrix} \psi^* & \omega\varphi \\ \omega^*\psi^* & \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{L_2} & w \\ w^* & \mathbf{1}_{L_1} \end{bmatrix}^{[-1]} F^{\omega}x\, dm.$$

Как было показано в § 1.9, $I^{\omega}x \equiv 0$ ($\forall x \in X$) тогда и только тогда, когда $d\sigma = 0$ (т. е. $a^{\omega}(\zeta) \equiv 0$).

Последнее же слагаемое в (2.24), отвечающее изолированной части узла α, входит неустранимым образом и не зависит от выбора параметра ω.

Поступила в редколлегию 15.04.86