ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVI. Серия 4 1960

ОБ ИЗОМОРФНЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Э. М. Жмудь

ВВЕДЕНИЕ

Пусть Ω — поле, $\boldsymbol{G}$ — конечная группа порядка h, L_n — мультипликативная группа квадратных матриц n-го порядка над полем Ω. Отображение $Q \to \Gamma(Q)$ группы $\boldsymbol{G}$ в группу L_n называется проективным представлением степени n группы $\boldsymbol{G}$, если для любых элементов P и Q из $\boldsymbol{G}$ имеет место

$$\Gamma(P)\,\Gamma(Q) = \pi_{PQ}\Gamma(PQ), \tag{A}$$

где $\pi_{P,\,Q} \in \Omega$. Отличные от нуля элементы $\pi_{P,\,Q}$ называются факторами проективного представления Γ, заданного соотношениями (A). Само же проективное представление Γ называется принадлежащим к системе факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$.

В дальнейшем мы будем проективные представления сокращенно называть P-представлениями.

Под ядром гомоморфизма $\boldsymbol{I}_\Gamma$ P-представления Γ будем понимать множество всех тех элементов Q группы $\boldsymbol{G}$, для которых матрица $\Gamma(Q)$ является скалярной. I_Γ является, очевидно, нормальным делителем группы $\boldsymbol{G}$. P-представление Γ будем называть изоморфным, если I_Γ совпадает с единицей E группы $\boldsymbol{G}$. Нормальный делитель $\boldsymbol{H}$ группы $\boldsymbol{G}$ назовем π-ядром, если $\boldsymbol{H} = I_\Gamma$, где Γ какое-нибудь P-представление группы $\boldsymbol{G}$, принадлежащее к системе факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$.

Понятия эквивалентности, приводимости, неприводимости и полной приводимости P-представлений определяются точно так же, как и соответствующие понятия теории линейных представлений. В частности, P-представления Γ' и Γ'' одной и той степени n называются эквивалентными ($\Gamma' \sim \Gamma''$), если для любого элемента $Q \in \boldsymbol{G}$.

$$\Gamma''(Q) = T^{-1}\Gamma'(Q)\,T,$$

где T — постоянная неособенная матрица порядка n над полем Ω.

Теория P-представлений конечных групп (над полем комплексных чисел) была развита И. Шуром в 1904—1907 гг. в двух фундаментальних работах [1, 2]. Впоследствии Тазава [3], Асано и Шода [4], используя аппарат теории алгебр, значительно упростили изложение теории P-представлений. В этих работах Ω уже не предполагается полем комплексных чисел. P-представления абелевых групп были рассмотрены Р. Фрактом в работах [5, 6].

В теории представлений конечных групп естественно возникает вопрос о строении конечных групп, допускающих изоморфные неприводимые представления. В то время, как для линейных представлений этот вопрос был полностью решен (работы [7—11]), для проективных представлений его полное решение было получено лишь для случая абелевых групп. Именно, как было показано Р. Фрактом [5], конечная абелева группа тогда и только тогда допускает изоморфные неприводимые P-представления, если она может быть разложена в прямое произведение двух изоморфных между собою групп.

В 1948 г. Р. Кохендорффером в работе [7] были получены достаточные условия для того, чтобы заданная конечная группа (вообще, говоря, неабелева) допускала изоморфные неприводимые P-представления.

В настоящей работе с помощью методов, примененных ранее автором к исследованию изоморфных линейных представлений [9, 12], устанавливается необходимое и достаточное условие существования для заданной конечной группы $\boldsymbol{G}$ изоморфных неприводимых P-представлений, принадлежащих к заданной системе факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$ (теорема 1). Пусть $\boldsymbol{S}_{\pi}^{(N)}$ максимальное из π-ядер, взаимно простых с центром группы $\boldsymbol{G}$ и входящих в ее цоколь $\boldsymbol{S}$. Теорема 1 утверждает:

Группа $\boldsymbol{G}$ тогда и только тогда допускает изоморфные неприводимые P-представления, принадлежащие к заданной системе факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$, если подгруппа $\boldsymbol{S}_{\pi}^{(N)}$ порождается одним классом сопряженных элементов группы $\boldsymbol{G}$, а центр последней не содержит отличных от единицы π-ядер группы $\boldsymbol{G}$.

Кроме этого основного результата, аналогичного известному критерию Гашюца для линейных представлений, в работе получены также критерии существования для заданной конечной группы изоморфных неприводимых P-представлений, факторы которых не подчинены никаким ограничениям (теоремы 6 и 7). Эти результаты носят, однако, сравнительно менее законченный характер и мы здесь на них останавливаться не будем.

Приведем лишь формулировку теоремы 6:

Если цоколь группы $\boldsymbol{G}$ содержится в ее центре, то группа $\boldsymbol{G}$ тогда и только тогда допускает изоморфные неприводимые P-представления, если существует циклическая конечная группа, совпадающая с центром одного из своих расширений с помощью группы $\boldsymbol{G}$.

Первый раздел статьи содержит изложение основных фактов теории проективных представлений конечных групп. В частности, здесь приводится новый вариант доказательства теоремы И. Шура о существовании для заданной группы групп представлений.

Во втором разделе исследуются изоморфные неприводимые P-представления произвольной конечной группы.

В третьем разделе рассматривается частный случай абелевых групп. Здесь даны новые доказательства ряда известных результатов Р. Фрахта (в том числе приведенной выше теоремы об абелевых группах, допускающих изоморфные неприводимые P-представления). Кроме того, в этом разделе устанавливается формула для числа так называемых типов изоморфных неприводимых P-представлений абелевой группы.

I. ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ ТЕОРИИ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

§ 1. КЛАССЫ И ТИПЫ P-ПРЕДСТАВЛЕНИЙ. МУЛЬТИПЛИКАТОР

В дальнейшем под Ω мы будем понимать алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Пусть Γ — P-представление группы $\boldsymbol{G}$, принадлежащее к системе факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$. Тогда, как отмечалось во введении, для любых $P,\ Q \in \boldsymbol{G}$

$$\Gamma(P)\,\Gamma(Q) = \pi_{P,\,Q}\Gamma(PQ) \qquad (1,1)$$

Из закона ассоциативности для операции умножения в группе G вытекает соотношение ассоциативности для факторов $\pi_{P,\,Q}$:

$$\pi_{P,\,Q}\,\pi_{PQ,\,R} = \pi_{P,\,QR}\,\pi_{Q,\,R} \qquad (P,\ Q,\ R \in G). \tag{2.1}$$

Справедливость соотношения (2.1) является, как будет ясно из дальнейшего, не только необходимым, но и достаточным условием для того, чтобы числа $\pi_{P,\,Q}$ образовывали систему факторов некоторого P-представления группы G.

Если $\{\lambda_P\}$ — произвольная система чисел из Ω, то, полагая $\Gamma'(P) = \lambda_P \Gamma(P)$, мы получим новое P-представление Γ' группы G, которое назовем родственным с Γ. Факторы $\pi_{P,\,Q}$ и $\pi'_{P,\,Q}$ P-представлений Γ и Γ' связаны между собой соотношением

$$\pi'_{P,\,Q} = \frac{\lambda_P \lambda_Q}{\lambda_{PQ}}\,\pi_{P,\,Q}. \tag{3.1}$$

Две системы факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$ и $\{\pi'_{P,\,Q}\}$, удовлетворяющие условию (3.1), называются ассоциированными ($\{\pi_{P,\,Q}\} \sim \{\pi'_{P,\,Q}\}$). Два P-представления *называются ассоциированными, если ассоциированы системы факторов,* к которым они принадлежат. Родственные P-представления, очевидно, вместе с тем ассоциированы, но обратное, вообще говоря, не имеет места. Эквивалентные P-представления принадлежат к одной и той же системе факторов и, следовательно, ассоциированы.

Вводятся понятия типа системы факторов и типа P-представления. Две системы факторов относятся к одному и тому же типу, если они ассоциированы. Два P-представления относятся к одному и тому же типу, если к одному и тому же типу относятся системы факторов, к которым они принадлежат. Число типов P-представлений (систем факторов) конечной группы конечно. Доказательство этого факта основывается на следующем важном предложении: *среди систем факторов заданного типа имеется система факторов, состоящая из корней h-й степени из единицы (h-порядок группы G).*

Два P-представления будем относить к одному и тому же классу, если они эквивалентны. Два P-представления одного и того же класса, очевидно, принадлежат к одному и тому же типу.

Если $\{\pi'_{P,\,Q}\}$ и $\{\pi''_{P,\,Q}\}$ — две системы факторов группы G, то $\{\pi_{P,\,Q}\} = \{\pi'_{P,\,Q} \cdot \pi''_{P,\,Q}\}$ также является системой факторов (ибо числа $\pi_{P,\,Q}$ удовлетворяют условию (1.1)). Систему $\{\pi_{P,\,Q}\}$ будем называть произведением систем факторов $\{\pi'_{P,\,Q}\}$, $\{\pi''_{P,\,Q}\}$. Относительно введенной операции умножения системы факторов образуют абелеву группу, которую мы обозначим через Φ. Пусть Φ_0 — подгруппа систем факторов, ассоциированных с единичной системой $\{1\}$. Введенные выше типы систем факторов, очевидно, тождественны со смежными классами разложения группы Φ по подгруппе Φ_0. Фактор-группа Φ/Φ_0 (являющаяся, в силу сделанного выше замечания конечной абелевой группой) есть группа типов систем факторов группы G. Понимаемая в абстрактном смысле, эта группа называется мультипликатором группы G.

§ 2. ОБОБЩЕННАЯ ГРУППОВАЯ АЛГЕБРА R_π.

1. Пусть $\{\pi_{P,\,Q}\}$ — некоторая система отличных от нуля h^2 элементов из Ω. Каждой такой системе сопоставим алгебру $R_\pi = R_\pi(G)$ ранга h над полем Ω с базисными элементами $u_P (P \in G)$, подчиняющимися следующему закону умножения:

$$u_P u_Q = \pi_{P,\,Q} u_{P,\,Q} \quad (P,\ Q \in G). \tag{4.1}$$

Легко проверяется, что алгебра R_π является ассоциативной тогда и только тогда, если система $\{\pi_{P,\,Q}\}$ удовлетворяет условию (2.1). В дальнейшем мы будем предполагать это условие выполненным. Замена базисных элементов u_P элементами $u'_P = \lambda_P u_P$, где $\lambda_P \in \Omega$, $\lambda_P \neq 0$, приводит к закону умножения

$$u'_P u'_Q = \pi'_{P,\,Q}\, u'_{PQ},$$

где $\pi'_{P,\,Q} = \frac{\lambda_P \lambda_Q}{\lambda_{PQ}} \pi_{P,\,Q}$. Таким образом, если $\{\pi'_{P,\,Q}\} \sim \{\pi_{P,\,Q}\}$, то $R_{\pi'} \cong R_\pi$.

С помощью (2.1) и вытекающего из (2.1) соотношения

$$\pi_{E,\,Q} = \pi_{Q,\,E} = \pi_{E,\,E} \quad (Q \in G) \tag{5.1}$$

легко убеждаемся в том, что элемент $\pi_{E,\,E}^{-1} u_E$ является единицей алгебры R_π.

Путем умножения на элементы поля Ω можно нормировать базисные элементы u_P алгебры R_π так, чтобы имело место

$$u_E = 1; \tag{6.1}$$

$$\pi_{E,\,Q} = \pi_{Q,\,E} = 1 \quad (Q \in G). \tag{7.1}$$

В дальнейшем мы будем всегда считать условия (6.1) и (7.1) выполненными.

Элементы u_P обратимы. Именно, учитывая легко вытекающее из (2.1) соотношение

$$\pi_{P,\,P^{-1}} = \pi_{P^{-1},\,P} \tag{8.1}$$

убеждаемся в том, что

$$u_P^{-1} = \pi_{P,\,P^{-1}}^{-1}\, u_{P^{-1}}. \tag{9.1}$$

2. Назовем линейное представление Δ алгебры R_π *невырожденным*, если единице алгебры R_π в этом представлении отвечает единичная матрица. Если Δ — невырожденное представление, то все матрицы $\Delta(u_P)$ являются, очевидно, неособенными. Полагая

$$\Gamma(P) = \Delta(u_P),$$

в силу (4.1) получаем

$$\Gamma(P)\,\Gamma(Q) = \pi_{P,\,Q}\,\Gamma(PQ).$$

Следовательно, отображение $Q \to \Gamma(Q)$ есть P-представление группы G, принадлежащее к системе факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$. Так как алгебра R_π всегда допускает невырожденные линейные представления (например, регулярное представление), то тем самым доказано, что условие (2.1) является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы система $\{\pi_{P,\,Q}\}$ являлась системой факторов некоторого P-представления группы G.

Пусть, наоборот, Γ — какое-нибудь P представление группы G, принадлежащее к системе факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$. Если $x = \sum_{Q \in G} u_Q \xi(Q)$ $(\xi(Q) \in \Omega)$ элемент алгебры R_π, то, полагая

$$\Delta(x) = \sum_{Q \in G} \Gamma(Q)\,\xi(Q),$$

получим невырожденное линейное представление Δ алгебры R_π.

Таким образом, имеет место взаимно однозначное соответствие между невырожденными линейными представлениями алгебры R_π и P-представлениями группы G, принадлежащими к системе факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$. При этом соответствии неприводимые линейные представления и непроводимые P-представления взаимно отвечают друг другу. P-представление $\Gamma_{\text{reg}}^{(\pi)}$ группы G, отвечающее регулярному представлению алгебры R_π, называется регулярным P-представлением группы G, принадлежащим к системе факторов $\{\pi_{P,Q}\}$.

Пусть Δ_{reg} — регулярное представление алгебры R_π, $\Delta_{\text{reg}}(x) = \| \rho_{P,Q}(x) \|$ $(x \in R_\pi; P, Q \in G)$. Если $x = \sum_{Q \in G} u_Q \xi(Q)$, то, как легко видеть,

$$\rho_{P,Q}(x) = \pi_{Q,\, Q^{-1}P}\, \xi(Q^{-1}P). \tag{10.1}$$

Обозначим через Spx след матрицы $\Delta_{\text{reg}}(x)$. Из (10.1) и (7.1) вытекает

$$Spx = h\xi(E). \tag{11.1}$$

В частности,

$$Spu_Q = \begin{Bmatrix} h, & \text{если } Q = E \\ O, & \text{если } Q \neq E \end{Bmatrix} = h\delta_{E,Q}. \tag{12.1}$$

3. *Алгебра R_π является полупростой.* Действительно, если $x = \sum_{P \in G} u_P \xi(P)$ собственно-нильпотентный элемент алгебры R_π, то $Sp(u_Q^{-1}x) = O$ $(Q \in G)$. Замечая, что $u_Q^{-1}x = \pi_{Q,\,Q^{-1}} \sum_{Q \in G} u_{Q^{-1}P} \pi_{Q^{-1}P} \xi(P)$, с помощью (11.1) получаем: $Sp(u_Q^{-1}x) = h\pi^2_{Q,\,Q^{-1}}\xi(Q)$. Следовательно, $\xi(Q) = 0$. Ввиду произвольности элемента Q имеем $x = 0$. Таким образом, алгебра R_π не имеет отличных от нуля собственно-нильпотентных элементов и, значит, является полупростой.

4. В дальнейшем важную роль будет играть центр Z_π алгебры R_π. Элемент x алгебры R_π тогда и только тогда содержится в Z_π, если для каждого Q из G

$$u_Q^{-1} x u_Q = x. \tag{13.1}$$

В силу (4.1) и (9.1)

$$u_Q^{-1} u_P u_Q = \omega(P, Q)\, u_{Q^{-1}PQ}, \tag{14.1}$$

где

$$\omega(P, Q) = \frac{\pi_{Q^{-1},\,P}\,\pi_{Q^{-1}P,\,Q}}{\pi_{Q,\,Q^{-1}}}. \tag{15.1}$$

Пользуясь соотношением (2.1), можно получить также следующие выражения для $\omega(P, Q)$:

$$\omega(P, Q) = \frac{\pi_{Q^{-1},\,Q}}{\pi_{Q,\,Q^{-1}P}} = \frac{\pi_{P,\,Q}}{\pi_{Q,\,Q^{-1}PQ}}. \tag{16.1}$$

Полагая в (13.1)

$$x = \sum_{P \in G} u_P \xi(P) \quad (\xi(P) \in \Omega) \tag{17.1}$$

легко убеждаемся в том, что элемент x тогда и только тогда содержится в Z_π, если при любых $P, Q \in G$ выполняется соотношение

$$\xi(Q^{-1}PQ) = \omega(P, Q)\, \xi(P). \tag{18.1}$$

С помощью (7.1), (14.1) и (4.1) легко проверяется справедливость для любых $P, Q, R \in G$ следующих соотношений:

$$\omega(E, Q) = \omega(Q, E) = 1, \tag{19.1}$$

$$\omega(P, Q_1Q_2) = \omega(P, Q_1)\, \omega(Q_1^{-1}PQ_1, Q_2), \tag{20.1}$$

$$\omega(P_1P_2, Q) = \frac{\pi_{Q^{-1}P_1Q}\,\pi_{Q^{-1}P_2Q}}{\pi_{P_1,\,P_2}}\, \omega(P_1, Q)\, \omega(P_2, Q). \tag{21.1}$$

Обозначим через N_P централизатор элемента P группы G. Если $Q \in N_P$, то в силу (16.1)

$$\omega(P, Q) = \frac{\pi_{P, Q}}{\pi_{Q, P}} = \omega^{-1}(Q, P). \tag{22.1}$$

Если $Q_1, Q_2 \in N_P$, то, как видно из (20.1),

$$\omega(P, Q_1Q_2) = \omega(P, Q_1)\,\omega(P, Q_2). \tag{23.1}$$

Следовательно, при фиксированном P функция $\omega(P, Q)$ элемента Q индуцирует на подгруппе N_P некоторый линейный характер $\chi_P : \chi_P(Q) = \omega(P, Q)$. Непосредственно проверяется, что характер χ_P вполне определяется элементом P и типом системы факторов $\{\pi_{P, Q}\}$.

Назовем элемент P группы G π-элементом, если $\omega(P, Q) = 1$ для любого $Q \in N_P$, т. е. если χ_P является единичным характером подгруппы N_P. Обозначим через G_π множество всех π-элементов группы G. Докажем, что всякий элемент P', сопряженный с π-элементом P, также является π-элементом. Пусть $P' = F^{-1}PF$, где $F \in G$. Так как $N_{P'} = F^{-1}N_PF$, то достаточно показать, что из $Q \in N_P$, $\omega(P, Q) = 1$ следует $\omega(F^{-1}PF, F^{-1}QF) = 1$. С этой целью воспользуемся следующим соотношением, легко получающимся с помощью (14.1):

$$\omega(F^{-1}PF, F^{-1}QF) = \omega(P, Q)\frac{\omega(Q^{-1}PQ, F)}{\omega(P, F)}. \tag{24.1}$$

Из (24.1) получаем

$$\omega(F^{-1}PF, F^{-1}QF) = \omega(P, Q) \quad (P, F \in G, Q \in N_P),$$

откуда и вытекает высказанное только что утверждение.

Итак, существует две категории классов сопряженных элементов группы G: 1) классы, состоящие из одних лишь π-элементов; 2) классы, не содержащие ни одного π-элемента.

Классы первой категории мы будем называть π-классами группы G. Количество их обозначим через r_π.

Докажем теперь, что если $P \in G_\pi$, то $\omega(P, Q)$ зависит лишь от смежного класса N_PQ, в который входит элемент Q. Действительно, положим $Q_1 = NQ$, где $N \in N_P$. Замечая, что $\omega(P, N) = 1$, в силу (19.1) получаем

$$\omega(P, Q_1) = \omega(P, N)\,\omega(N^{-1}PN, Q) = \omega(P, Q).$$

Беря в соотношении (18.1) $Q \in N_P$, получаем

$$\xi(P) = \omega(P, Q)\,\xi(P). \tag{25.1}$$

Если $P \bar{\in} G_\pi$, то в N_P найдется такой элемент Q, что $\omega(P, Q) \neq 1$. В силу (25.1) отсюда заключаем, что $\xi(P) = 0$.

Таким образом, если $x \in Z_\pi$, $x = \sum_{P \in G} u_P \xi(P)$, то $\xi(P) = 0$ для каждого $P \bar{\in} G_\pi$. Следовательно,

$$x = \sum_{P \in G_\pi} u_P \xi(P) \tag{26.1}$$

Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_{k_\pi}$ — классы группы G; h_i — порядок класса C_i; P_i — фиксированный представитель класса C_i. Пусть, наконец, N_i централизатор элемента P_i и

$$G = \sum_{\lambda=1}^{h_i} N_i Q_{i\lambda} \tag{27.1}$$

— разложение группы G по N_i. В силу (26.1) каждый элемент $x \in Z_\pi$ можно представить в виде

$$x = \sum_{i=1}^{r_\pi} \sum_{P \in C_i} u_P \xi(P). \tag{28.1}$$

Пользуясь соотношениями (14.1) и (18.1), легко показать, что

$$\sum_{P \in C_i} u_P \xi(P) = \xi(P_i) \sum_{j=1}^{h_i} u_{Q_{ij}}^{-1} u_{P_i} u_{Q_{ij}} = \frac{h_i}{h} \xi(P_i) \sum_{Q \in G} u_Q^{-1} u_{P_i} u_Q.$$

Полагая

$$k_i = \frac{h_i}{h} \sum_{Q \in G} u_Q^{-1} u_{P_i} u_Q = \sum_{j=1}^{h_i} u_{Q_{ij}}^{-1} u_{P_i} u_{Q_{ij}}, \tag{29.1}$$

получаем

$$\sum_{P \in C_i} u_P \xi(P) = k_i \xi(P_i). \tag{30.1}$$

Элементы k_i $(i = 1, 2, \ldots, r_\pi)$ в силу (29.1) содержатся в Z_π и, как легко проверить, линейно независимы. Из (28.1) и (30.1) вытекает следующее представление элемента x центра Z_π алгебры R_π:

$$x = \sum_{i=1}^{r_\pi} k_i \xi_i,$$

где $\xi_i = \xi(P_i) \in \Omega$. Таким образом, элементы k_i $(i = 1, \ldots, r_\pi)$ образуют базис алгебры Z_π*.

В частности, *ранг центра Z_π алгебры R_π равен числу r_π π-классов группы G.*

§ 3. P-ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ G, ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ К ЗАДАННОЙ СИСТЕМЕ ФАКТОРОВ

1. Доказанная в § 2.3 полупростота алгебры R_π позволяет сделать следующие выводы:

1) Все линейные представления алгебры R_π над полем Ω вполне приводимы.

2) Все неприводимые представления алгебры R_π содержатся в ее регулярном представлении Δ_{reg}; кратность, с которой неприводимое представление Δ алгебры R_π входит в Δ_{reg}, равна степени n представления Δ.

3) Число классов эквивалентных неприводимых представлений алгебры R_π равно рангу r_π ее центра.

4) Если $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{r_\pi}$ — полная система представителей классов неприводимых представлений алгебры R_π, $n_1, n_2, \ldots, n_{r_\pi}$ их степени, то

$$n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_{r_\pi}^2 = h.$$

2. Учитывая установленный в § 2.2 параллелизм между невырожденными линейными представлениями алгебры R_π и P-представлениями группы G, принадлежащими к системе факторов $\{\pi_{P,Q}\}$, получаем следующие результаты:

А) *Все P-представления группы G над полем Ω вполне приводимы.*

* Базис $k_1, \ldots, k_r$ зависит от выбора системы представителей P_i классов C_i. Именно, если заменить элемент P_i на $Q^{-1}P_iQ$, то k_i умножается на $\omega^{-1}(P_iQ)$.

B) *Всякое неприводимое P-представление* Γ *группы* G, *принадлежащее к системе факторов* $\{\pi_{P,Q}\}$, *содержится в регулярном P-представлении* $\Gamma^{\pi}_{\mathrm{reg}}$, *принадлежащем к той же системе факторов; кратность, с которой P-представление* Γ *входит в* $\Gamma^{\pi}_{\mathrm{reg}}$, *равна степени P-представления* Γ.

C) *Число классов неприводимых P-представлений группы* G, *принадлежащих к системе факторов* $\{\pi_{P,Q}\}$, *равно числу* r_π π*-классов группы* G.

D) *Если* $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots, \Gamma_{r_\pi}$ — *полная система представителей классов неприводимых P-представлений группы* G, *принадлежащих к системе факторов* $\{\pi_{P,Q}\}$, $n_1, n_2, \ldots, n_{r_\pi}$ — *соответственно их степени, то*

$$n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_{r_\pi}^2 = h. \qquad (31.1)$$

Пусть Γ — P-представление группы G, принадлежащее к системе факторов $\{\pi_{P,Q}\}$; Δ — линейное представление алгебры R_π, порождающее P-представление Γ (§ 2.2):

$$\Gamma(P) = \Delta(u_P) \quad (P \in G).$$

Характером $\chi(P)$ элемента P в P-представлении Γ называется след матрицы $\Gamma\ (P)$:

$$\chi(P) = Sp\Delta(u_P).$$

Так как $u_Q^{-1}u_P u_Q = \omega(P, Q)\, u_{Q^{-1}PQ}$, то $Sp\Delta(u_P) = \omega(P, Q)\, Sp\Delta(u_{Q^{-1}PQ})$. Следовательно,

$$\chi(P) = \omega(P, Q)\,\chi(Q^{-1}PQ). \qquad (32.1)$$

Беря, в частности, $Q \in N_P$, получаем

$$\chi(P)\,[1 - \omega(P, Q)] = 0. \qquad (33.1)$$

Заметим теперь, что если $P \overline{\in} G_\pi$, то (§ 2, 4) найдется такой элемент $Q \in N_P$, что $\omega(P, Q) \neq 1$. В силу (33.1) отсюда вытекает, что $\chi(P) = 0$. Таким образом, имеет место предложение

E) *Если* χ *характер некоторого P-представления группы* G, *принадлежащего к системе факторов* $\{\pi_{P,Q}\}$, *и если* $P \overline{\in} G_\pi$, *то* $\chi(P) = 0$.

Для характеров неприводимых P-представлений группы G легко устанавливаются соотношения ортогональности, аналогичные соотношениям ортогональности для обычных групповых характеров. Ввиду того, что в настоящей работе указанные соотношения не находят применений, мы их приводить здесь не будем.

§ 4. СВЯЗЬ С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ РАСШИРЕНИЯМИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП. ГРУППЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

И. Шур при построении теории проективных представлений конечных групп исходил из обнаруженной им связи между проективными представлениями и центральными расширениями абелевых групп. В настоящем параграфе мы изложим теорию И. Шура, связав ее с рассмотренными выше алгебрами R_π.

Пусть A — конечная абелева группа, и $\overline{G} = \{A, G\}$ — центральное расширение группы A с помощью группы G (или, как мы будем говорить в дальнейшем — центральное G-расширение группы A). Это значит, что

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ A \text{ содержится в центре } Z_{\overline{G}} \text{ группы } \overline{G} \\ 2.\ \overline{G}/A \cong G \end{array}\right\}. \qquad (34.1)$$

Так как смежным классам разложения группы $\bar{G}$ по подгруппе A взаимно однозначно соответствуют элементы группы G, то

$$\bar{G} = \sum_{Q \in G} A g_Q, \tag{35.1}$$

где Q пробегает группу G. При этом для любых $P, Q \in G$ имеет место

$$g_P g_Q = a_{P, Q} g_{PQ}, \tag{36.1}$$

где $a_{P,Q} \in A$ — факторы расширения $\{A, G\}$. Если, как это будет делаться в дальнейшем, положить элемент g_E равным единице 1 группы $\bar{G}$, то, очевидно, будем иметь

$$a_{E, Q} = a_{Q, E} = 1 \quad (Q \in G). \tag{37.1}$$

Факторы $a_{P, Q}$ удовлетворяют соотношениям ассоциативности

$$a_{P, Q} a_{PQ, R} = a_{P, QR} a_{Q, R} \quad (P, Q, R \in G). \tag{38.1}$$

Пусть Ψ — характер группы A. Полагая

$$\pi^{(\Psi)}_{P, Q} = \Psi(a_{P, Q}), \tag{39.1}$$

в силу (38.1) будем иметь

$$\pi^{(\Psi)}_{P, Q} \pi^{(\Psi)}_{PQ, R} = \pi^{(\Psi)}_{P, QR} \pi^{(\Psi)}_{Q, R}. \tag{40.1}$$

Следовательно, $\{\pi^{(\Psi)}_{P, Q}\}$ есть система факторов P-представлений группы G. Мы будем говорить, что система факторов $\{\pi^{(\Psi)}_{P, Q}\}$, а также ее тип Π_Ψ, порождается характером Ψ группы A. Если Ψ_1 и Ψ_2 — характеры группы A, то, очевидно,

$$\Pi_{\Psi_1 \Psi_2} = \Pi_{\Psi_1} \Pi_{\Psi_2}.$$

Следовательно, когда Ψ пробегает группу характеров $X(A)$ группы A, тип Π_Ψ пробегает некоторую подгруппу M^* мультипликатора $M(G)$ группы G.

Мы будем говорить, что расширение $\{A, G\}$ порождает подгруппу M^*. В случае, если расширение $\bar{G} = \{A, G\}$ порождает весь мультипликатор группы G, оно называется достаточным. Группа $X(A)$, а потому и сама группа A, в этом случае гомоморфна мультипликатору группы G. Следовательно, если расширение $\{A, G\}$ является достаточным, то порядок группы A делится на порядок m мультипликатора группы G. *Достаточное центральное G-расширение $\{A, G\}$ называется группой представлений группы G, если порядок группы A имеет минимальное значение m.* Группа A в этом случае, очевидно, изоморфна мультипликатору группы G.

До сих пор в нашем изложении оставался открытым вопрос о существовании групп представлений. Утвердительный ответ на этот вопрос был дан И. Шуром в работе [1]. Другое, значительно более простое доказательство существования групп представлений было дано К. Асано [4]. Мы приведем здесь еще одно доказательство этой теоремы, близкое по идее к доказательству Асано. Докажем следующее, более общее утверждение:

F) *Для любой заданной подгруппы M^* мультипликатора группы G существует порождающее эту подгруппу центральное G-расширение $\{A, G\}$, обладающее тем свойством, что $A \cong M^*$.*

Доказательство. 1. Пусть Π — тип систем факторов, имеющий, как элемент группы типов, порядок f. Покажем, что существует система факторов $\{\pi_{P,Q}\}$ типа Π, обладающая тем свойством, что $\pi^f_{P,Q}=1$ $(P, Q \in \boldsymbol{G})$. Пусть $\{\overset{\circ}{\pi}_{P,Q}\}$ — какая-нибудь система факторов типа Π. Так как $\{\overset{\circ}{\pi}{}^f_{P,Q}\}\sim\{1\}$, то $\overset{\circ}{\pi}{}^f_{P,Q}=\frac{\lambda_P\lambda_Q}{\lambda_{PQ}}$. Полагая $\pi_{P,Q}=\frac{\mu_P\mu_Q}{\mu_{PQ}}\overset{\circ}{\pi}_{P,Q}$, где μ_R — один из корней f-й степени из λ_R^{-1}, будем иметь $\pi^f_{P,Q}=1$. Вместе с тем, очевидно, $\{\pi_{P,Q}\}\sim\{\overset{\circ}{\pi}_{P,Q}\}$.

2. Введем следующие обозначения: m^* — порядок группы M^*; Π_1, $\Pi_2, \ldots, \Pi_r$ — типы систем факторов, образующие базис абелевой группы M^*; f_i — порядок типа Π_i; $\boldsymbol{A}_i$ — группа корней f_i-й степени из единицы.

Пусть $\{\pi^{(i)}_{P,Q}\}$ — система факторов типа Π_i, удовлетворяющая условию

$$\pi^{(i)}_{P,Q}\in\boldsymbol{A}_i \quad (P,\ Q\in\boldsymbol{G}). \tag{41.1}$$

Сопоставим с системой факторов $\{\pi^{(i)}_{P,Q}\}$ алгебру $R_{\pi^{(i)}}$, базисные элементы $u^{(i)}_P$ которой удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{array}{l} u^{(i)}_E \text{ — единица алгебры } R_{\pi^{(i)}} \\ u^{(i)}_P u^{(i)}_Q = u^{(i)}_{PQ}\pi^{(i)}_{P,Q} \end{array}\right\} \ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$$

и образуем прямую сумму R алгебр $R_{\pi^{(i)}}$

$$R=R_{\pi^{(1)}}+R_{\pi^{(2)}}+\ldots+R_{\pi^{(r)}},$$

Слагаемые $R_{\pi^{(i)}}$ здесь предполагаются попарно ортогональными: если $i\neq j$, $x_i\in R_{\pi^{(i)}}$, $x_j\in R_{\pi^{(j)}}$, то $x_ix_j=0$. Положим

$$u_P=u^{(1)}_P+\ldots+u^{(r)}_P \quad (P\in G),$$

Далее, для любой системы элементов $\alpha_i\in A_i$ определим элемент

$$a=u^{(1)}_E\alpha_1+\ldots+u^{(r)}_E\alpha_r.$$

Элементы a образуют, очевидно, группу $\boldsymbol{A}$, изоморфную группе $\boldsymbol{M}^*$.

В силу (41.1), в $\boldsymbol{A}$ содержатся элементы

$$a_{P,Q}=u^{(1)}_E\pi^{(1)}_{P,Q}+\ldots+u^{(r)}_E\pi^{(r)}_{P,Q}. \tag{42.1}$$

Непосредственно проверяется, что

$$u_Pu_Q=a_{P,Q}u_{PQ}. \tag{43.1}$$

Замечая, что $u_Pa=au_P$ для любых $P\in\boldsymbol{G}$, $a\in\boldsymbol{A}$ (ибо $\boldsymbol{A}$, очевидно, содержится в центре алгебры R), с помощью (43.1) находим, что элементы вида u_Pa образуют конечную группу $\overline{\boldsymbol{G}}$, причем $\boldsymbol{A}$ входит в ее центр. Легко убеждаемся в том, что hm^* элементов вида u_Pa различны между собой. Поэтому порядок группы $\overline{\boldsymbol{G}}$ равен hm^*. Отсюда и из (43.1) вытекает, что $\overline{G}$ есть центральное G-расширение группы $\boldsymbol{A}$, причем элементы $a_{P,Q}$ суть факторы этого расширения. Покажем, что расширение $\overline{\boldsymbol{G}}=\{\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{G}\}$ порождает группу $\boldsymbol{M}^*$.

Заметим сначала, что если $\Pi=\Pi_1^{l_1}\ldots\Pi_r^{l_r}$, $(0\leq l_i<f_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$ — произвольный тип из M^*, то

$$\{\pi_{P,Q}\}=\{\pi^{(1)}_{P,Q}{}^{l_1}\ldots\pi^{(r)}_{P,Q}{}^{l_r}\}$$

есть система факторов типа Π. Полагая для элемента $a=u^{(1)}_E\alpha_1+u^{(2)}_E\alpha_2+ \ldots+u^{(r)}_E\alpha_r$ группы $\boldsymbol{A}$

$$\Psi_\Pi(a)=\alpha_1^{l_1}\ldots\alpha_1^{l_r},$$

мы, очевидно, получим характер Ψ_{Π} группы A. Когда Π пробегает группу M^*, Ψ_{Π}, очевидно, пробегает полную группу характеров группы A. Так как, в силу (42. 1),

$$\Psi_{\Pi}(a_{P,\,Q}) = {\pi_{P,\,Q}^{(1)}}^{l_1} \ldots {\pi_{P,\,Q}^{(r)}}^{l_r} = \pi_{P,\,Q},$$

то характер Ψ_{Π} порождает систему факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$, а потому и тип Π. Таким образом, когда Ψ пробегает группу характеров группы A, тип системы факторов $\{\Psi(a_{P,\,Q})\}$ пробегает группу M^*. Следовательно, группа M^* порождается расширением $\{A,\ G\}$.

В частности, если M^* совпадает с мультипликатором $M(G)$ группы G, расширение $\overline{G} = \{A,\ G\}$ будет порождать весь мультипликатор, а так как порядок группы $\overline{G}$ равен mh, то $\overline{G}$—группа представлений группы G. Тем самым теорема И. Шура доказана.

Примечание. Можно показать, что описанная выше конструкция позволяет получить все возможные группы представлений группы G.

Определение. Назовем минимальным расширением, порождающим подгруппу M^* мультипликатора группы G, всякое центральное расширение $\overline{G} = \{A,\ G\}$, порождающее подгруппу M^*, для которого имеет место $A \cong M^*$ (в частности, минимальными расширениями, порождающими мультипликатор группы G, являются ее группы представлений).

II. ОБ ИЗОМОРФНЫХ НЕПРИВОДИМЫХ P-ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

§ 1. π-ЯДРА ГРУППЫ G.

Определение 1. Подгруппу H группы G назовем π-допустимой, если она содержится в ядре гомоморфизма I_Γ какого-нибудь P-представления Γ группы G, принадлежащего к системе факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$.

Примечание 1. Если $H \subseteq I_\Gamma$, где Γ — принадлежащее к системе факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$ P-представление, то найдется также неприводимое P-представление Γ', принадлежащее к той же системе факторов и обладающее тем свойством, что $H \subseteq I_{\Gamma'}$. Это вытекает из того, что 1) I_Γ содержится в пересечении ядер гомоморфизмов неприводимых компонент P-представления Γ; 2) неприводимые компоненты P-представления Γ принадлежат к той же системе факторов, что и Γ.

Примечание 2. Если H π-допустимая подгруппа, то π-допустимыми являются все подгруппы группы H. В частности, пересечение нескольких π-допустимых подгрупп также является π-допустимой подгруппой.

Определение 2. Ядром J_e идемпотента e центра алгебры R_π назовем множество всех таких элементов P группы G, что $u_P e = \lambda e$, где $\lambda \in \Omega$.

Если $L = R_\pi e$, левый идеал алгебры R_π, порождаемый идемпотентом e, то J_e совпадает, очевидно, с ядром гомоморфизма I_Γ P-представления Γ группы G, связанного с идеалом L. Подгруппа J_e является нормальным делителем группы G. Если e минимальный идемпотент алгебры Z_π, то Γ распадается на эквивалентные неприводимые части, ядра гомоморфизмов которых совпадают с J_e.

Подгруппа H тогда и только тогда является π-допустимой, если существует такой идемпотент $e \in Z_\pi$, что $H \subseteq J_e$, т. е. если для каждого $P \in H$ имеет место

$$u_P e = \lambda_P e \quad (\lambda_P \in \Omega). \tag{1.2}$$

Все элементы π-допустимой подгруппы являются π-элементами. Действительно, если подгруппа $\boldsymbol{H}$ π-допустима и $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{I}_\Gamma$, где Γ — неприводимое P-представление, принадлежащее к системе факторов $\{\pi_{P,Q}\}$ (см. примечание 1), то для каждого $P \in \boldsymbol{H}$ имеет место $\Gamma(P) = \lambda_P U$, где λ_P — отличный от нуля элемент из Ω и U — единичная матрица. Обозначив через χ и n соответственно характер и степень P-представления Γ, получаем $\chi(P) = \lambda_P n \neq 0$. В силу предложения ($E$) из § 3.2 отсюда следует, что $P \in \boldsymbol{G}_\pi$.

Из доказанного, в частности, вытекает, что *множество элементов π-допустимого нормального делителя распадается на π-классы.*

Лемма 1.2. *Нормальный делитель $\boldsymbol{H}$ группы $\boldsymbol{G}$ тогда и только тогда π-допустим, если существует система отличных от нуля элементов λ_P ($P \in \boldsymbol{H}$) поля Ω, удовлетворяющая соотношениям*

$$\left.\begin{aligned} \pi_{P,Q} &= \frac{\lambda_P \lambda_Q}{\lambda_{PQ}} \quad (P, Q \in \boldsymbol{H}) &\quad (2.2)\\ \lambda_{Q^{-1}PQ} &= \omega^{-1}(P, Q)\,\lambda_P \quad (P \in \boldsymbol{H},\ Q \in \boldsymbol{G}) &\quad (3.2)\end{aligned}\right\}$$

Доказательство. 1) Пусть $\boldsymbol{H}$ — π-допустимый нормальный делитель. Тогда в силу (1.2) для любых элементов $P, Q \in \boldsymbol{H}$

$$u_P u_Q e = u_P(\lambda_Q e) = \lambda_P \lambda_Q e.$$

Так как, с другой стороны,

$$u_P u_Q e = \pi_{P,Q} u_{PQ} e = \pi_{P,Q} \lambda_{PQ} e,$$

то $\pi_{P,Q} = \dfrac{\lambda_P \lambda_Q}{\lambda_{PQ}}$.

Далее, если $P \in \boldsymbol{H}$, $Q \in \boldsymbol{G}$, то в силу (14.1) $\lambda_{Q^{-1}PQ} e = u_{Q^{-1}PQ} e = \omega^{-1}(P, Q)\, u_Q^{-1} u_P u_Q = \omega^{-1}(P, Q) u_Q^{-1}(u_P e)\, u_Q = \omega^{-1}(P, Q)\,\lambda_P e$. Следовательно, $\lambda_{Q-1} = \omega^{-1}(P, Q)\,\lambda_P$.

2) Пусть для нормального делителя $\boldsymbol{H}$ выполняются условия (2.2) и (3.2). Положим

$$\xi(P) = \begin{cases} \lambda_P^{-1}, \text{ если } P \in \boldsymbol{H}, \\ 0, \text{ если } P \notin \boldsymbol{H}. \end{cases} \qquad (4.2)$$

$$j_H(\lambda) = \frac{1}{[H]} \sum_{P \in H} u_P \xi(P) = \frac{1}{[H]} \sum_{P \in G} u_P \xi(P), \qquad (5.2)$$

где $[\boldsymbol{H}]$ — порядок подгруппы $\boldsymbol{H}$.

Коэффициент $\xi(P)$, в силу (4.2), (2.2) и (3.2), удовлетворяет соотношениям

$$\xi(Q^{-1}PQ) = \omega(P, Q)\,\xi(P) \quad (P \in \boldsymbol{H},\ Q \in \boldsymbol{G}), \qquad (6.2)$$

$$\xi(P)\,\xi(Q) = \pi_{P,Q}^{-1}\xi(PQ) \quad (P, Q \in \boldsymbol{H}), \qquad (7.2)$$

Из (6.2) и сказанного в разделе I, § 2—3, вытекает, что элемент $j_H(\lambda)$ содержится в Z_π. Далее, с помощью (4.1) и (7.2) легко проверяется, что $j_H(\lambda)$ есть идемпотент. Наконец, при помощи (4.1), (7.2) и (4.2) находим

$$u_P j_H(\lambda) = \lambda_P j_H(\lambda) \quad (P \in \boldsymbol{H}). \qquad (8.2)$$

Следовательно, $\boldsymbol{H}$ содержится в ядре идемпотента $j_H(\lambda)$. Это и показывает, что $\boldsymbol{H}$ — π-допустимая подгруппа.

Определение 3. Пусть $\boldsymbol{H}$ — π-допустимый нормальный делитель группы $\boldsymbol{G}$. Всякую систему $\{\lambda_P\}$ элементов поля Ω, удовлетворяющую условиям (2.2) и (3.2), будем называть λ-системой подгруппы $\boldsymbol{H}$, подчиненной системе факторов $\{\pi_{P,Q}\}$.

Лемма 2.2. Нормальный делитель H тогда и только тогда π-допустим, если он является π-ядром.

Доказательство. Всякое π-ядро, очевидно, π-допустимо. Пусть, наоборот, H — π-допустимый нормальный делитель и $\{\lambda_P\}$ — какая-нибудь его λ-система. Тогда имеет место соотношение (8.2), показывающее, что H содержится в ядре J идемпотента $j_H(\lambda)$. Если, с другой стороны, $P \in J$, то (определение 2)

$$u_P j_H(\lambda) = \mu j_H(\lambda) \quad (\mu \in \Omega,\ \mu \neq 0). \tag{9.2}$$

Отсюда вытекает, в силу (5.2),

$$\sum_{Q \in H} u_{PQ} \pi_{P,\,Q} \xi(Q) = \mu \sum_{Q \in H} u_Q \xi(Q).$$

Так как $\pi_{P,\,Q}\xi(Q) \neq 0$ для всех $Q \in H$, то $PQ \in H$ при любом $Q \in H$. Следовательно, $P \in H$. Тем самым доказано, что $H = J$, т. е., что H есть π-ядро.

Следствие. Если H есть π-ядро, то и всякий входящий в H нормальный делитель группы G также является π-ядром. В частности, пересечение нескольких π-ядер также есть π-ядро (см. примечание 2).

Примечание 3. Доказанные свойства π-ядер аналогичны известным свойствам ядер гомоморфизмов линейных представлений. Имеются, однако, и существенные отличия:

1) π-ядрами не исчерпывается множество всех нормальных делителей группы G.

2) Множество π-ядер не является структурой относительно операций пересечения и объединения.

3) Ядро гомоморфизма P-представления Γ, распадающегося на компоненты $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, вообще говоря, не совпадает с пересечением ядер гомоморфизмов компонент, но лишь содержится в нем*.

2. Из определения π-ядер вытекает

Лемма 3.2. Если H есть π-ядро и система факторов $\{\pi'_{P,\,Q}\}$ ассоциирована с системой $\{\pi_{P,\,Q}\}$, то H является также и π'-ядром.

Пусть Π — тип системы факторов P-представлений группы G.

Определение 4. Подгруппу H будем называть Π-ядром, если H есть π-ядро, где $\{\pi_{P,\,Q}\}$ какая-нибудь система факторов типа Π.

В дальнейшем запись $P \equiv Q \pmod{H}$ будет означать, что $PQ^{-1} \in H$.

Определение 5. Будем называть систему факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$ приведенной по отношению к подгруппе H, если из $P_1 \equiv P_2$, $Q_1 \equiv Q_2 \pmod{H}$ следует $\pi_{P_1,\,Q_1} = \pi_{P_2,\,Q_2}$.

Лемма 4.2. Нормальный делитель H группы G тогда и только тогда является π-ядром, если существует приведенная относительно подгруппы H система факторов P-представлений группы G.

Доказательство. 1) Разложим группу G по подгруппе H. При этом, учитывая то обстоятельство, что смежные классы этого разложения образуют группу, изоморфную фактор-группе G/H, мы обозначим смежный класс, отвечающий элементу a этой фактор-группы, через HG_a. Для представителей G_a, G_b, G_{ab} смежных классов выполняются соотношения

$$G_a G_b = H_{a,\,b} G_{ab}, \tag{10.2}$$

где $H_{a,\,b} \in H$.

---

* Интересно, однако, что если $\Gamma = \Gamma_1 \dot{\times} \Gamma_2$ — кронекеровское произведение P-представлений Γ_1 и Γ_2, то $I_\Gamma = I_{\Gamma_1} \cap I_{\Gamma_2}$.

Пусть $\boldsymbol{H}$ — Π-ядро; $\{\overset{\circ}{\pi}_{P,\,Q}\}$ — любая система факторов типа Π; Γ — P-представление группы $\boldsymbol{G}$, принадлежащее к системе факторов $\{\overset{\circ}{\pi}_{P,\,Q}\}$ и удовлетворяющее условию $\boldsymbol{I}_\Gamma \supseteq \boldsymbol{H}$. Для $P \in \boldsymbol{H}$ будем иметь

$$\Gamma(P) = \lambda_P U. \tag{11.2}$$

В случае, если $P \equiv G_a \,(\mathrm{mod}\, \boldsymbol{H})$, положим

$$\Phi(P) = \Gamma(G_a). \tag{12.2}$$

Если $P \equiv G_a,\ Q \equiv G_b \,(\mathrm{mod}\, \boldsymbol{H})$, то, $PQ \equiv G_{ab}$, и поэтому в силу (10.2), (11.2) и (12.2)

$$\Phi(P)\,\Phi(Q) = \Gamma(G_a)\,\Gamma(G_b) = \overset{\circ}{\pi}_{G_a,\,G_b}\Gamma(H_{a,\,b}G_{ab}) =$$
$$= \overset{\circ}{\pi}_{G_a,\,G_b}\overset{\circ}{\pi}^{-1}_{H_{a,\,b},\,G_{ab}}\lambda_{H_{a,\,b}}\Phi(PQ).$$

Следовательно, Φ является P-представлением группы $\boldsymbol{G}$, принадлежащим к системе факторов

$$\pi_{P,\,Q} = \overset{\circ}{\pi}_{G_a,\,G_b}\overset{\circ}{\pi}^{-1}_{H_{a,\,b},\,G_{ab}}\lambda_{H_{a,\,b}}. \tag{13.2}$$

Так как для $P = HG_a$, где $H \in \boldsymbol{H}$, имеет место

$$\Gamma(P) = \overset{\circ}{\pi}^{-1}_{H,\,G_a}\lambda_H\Gamma(G_a) = \mu_P\Phi(P),$$

где $\mu_P = \overset{\circ}{\pi}^{-1}_{H,\,G_a}\lambda_H$ вполне определяется элементом P, то P-представления Φ и Γ ассоциированы. Следовательно, система факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$ принадлежит к типу Π. Из (13.2) ясно, что эта система является приведенной по отношению к подгруппе $\boldsymbol{H}$.

2) Допустим, что существует приведенная по отношению к подгруппе $\boldsymbol{H}$ система факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$ типа Π. Тогда $\pi_{P,\,Q} = 1$, если хотя бы один из элементов P, Q содержится в $\boldsymbol{H}$. (Действительно, если, например, $P \in \boldsymbol{H}$, то в силу (7.1) $\pi_{P,\,Q} = \pi_{E,\,Q} = 1$). Ввиду этого соотношение (2.2) принимает вид

$$\frac{\lambda_P\lambda_Q}{\lambda_{PQ}} = 1 \quad (P,\ Q \in \boldsymbol{H}). \tag{14.2}$$

Далее, если $P \in \boldsymbol{H}$, $Q \in \boldsymbol{G}$, то $Q^{-1}PQ \in \boldsymbol{H}$ и, следовательно, $\omega(P,\,Q) = \dfrac{\pi_{P,\,Q}}{\pi_{Q,\,Q^{-1}PQ}} = 1$. Поэтому соотношение (3.2) принимает вид

$$\lambda_{Q^{-1}PQ} = \lambda_P \quad (P \in \boldsymbol{H},\ Q \in \boldsymbol{G}). \tag{15.2}$$

Так как соотношениям (14.2) и (15.2) можно удовлетворить, взяв, например, $\lambda_P = 1\ (P \in \boldsymbol{H})$, то в силу лемм 1.2 и 2.2 $\boldsymbol{H}$ есть π-ядро.

Лемма доказана.

Пусть Π_1 и Π_2 — типы систем факторов P-представлений группы $\boldsymbol{G}$.

Лемма 5.2. *Если $\boldsymbol{H}_1$ есть Π_1-ядро, $\boldsymbol{H}_2$ — Π_2-ядро, то $\boldsymbol{H}_1 \cap \boldsymbol{H}_2$ есть $\Pi_1\Pi_2$-ядро.*

Доказательство. Пусть $\{\pi'_{P,\,Q}\}$ и $\{\pi''_{P,\,Q}\}$ системы факторов типов Π_1 и Π_2 соответственно. Если условие леммы выполнено, то в силу леммы 4.2, можно предположить, что системы $\{\pi'_{P,\,Q}\}$ и $\{\pi''_{P,\,Q}\}$ являются приведенными по отношению к подгруппам $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ соответственно. Но тогда система факторов $\{\pi_{P,\,Q}\} = \{\pi'_{P,\,Q}\cdot\pi''_{P,\,Q}\}$, очевидно, является приведенной по отношению к подгруппе $\boldsymbol{H}_1 \cap \boldsymbol{H}_2$. Так как система $\{\pi_{P,\,Q}\}$ относится к типу $\Pi_1\cdot\Pi_2$, то отсюда, в силу леммы 4.2, следует, что $\boldsymbol{H}_1 \cap \boldsymbol{H}_2$ есть $\Pi_1\Pi_2$-ядро.

Лемма доказана*.

Из леммы 5.2 вытекает, что множество типов Π систем факторов, для которых заданный нормальный делитель H группы G является Π-ядром, есть подгруппа мультипликатора группы G. Мы обозначим эту подгруппу через $M_H(G)$ и назовем H-мультипликатором группы G.

Пусть H — нормальный делитель группы G. Имеет место

Лемма 6.2. H-мультипликатор группы G изоморфен мультипликатору фактор-группы G/H.

Доказательство. Пусть $\Pi \in M_H(G)$ и $\{\pi_{P,Q}\}$ — приведенная по отношению к подгруппе H система факторов типа Π. Полагая для элементов a и b фактор-группы G/H

$$\rho_{a,b} = \pi_{G_a, G_b}, \tag{16.2}$$

мы получим систему факторов $\{\rho_{a,b}\}$ фактор-группы G/H.

Действительно, если a, b и $c \in G/H$, то в силу (2.1) $\pi_{G_a, G_b}\pi_{G_aG_b, G_c} = \pi_{G_a, G_bG_c}\pi_{G_b, G_c}$. Замечая, что $G_aG_b \equiv G_{ab}$, $G_bG_c \equiv G_{bc} \pmod{H}$, находим, пользуясь приведенностью системы факторов $\{\pi_{P,Q}\}$:

$$\rho_{a,b}\rho_{ab,c} = \rho_{a,bc}\rho_{b,c}. \tag{17.2}$$

Это и означает, что $\{\rho_{a,b}\}$ есть система факторов фактор-группы G/H. Мы будем говорить, что *система факторов $\{\rho_{a,b}\}$ порождается приведенной системой факторов $\{\pi_{P,Q}\}$*.

Только что описанным способом можно получить все возможные системы факторов группы G/H. Действительно, если $\{\rho_{a,b}\}$ — заданная система факторов группы G/H, то будут в силе соотношения (17.2). Полагая

$$\pi_{P,Q} = \rho_{a,b}\,(P \equiv G_a,\ Q \equiv G_b \pmod{H}), \tag{18.2}$$

получим приведенную по отношению к подгруппе H систему факторов $\{\pi_{P,Q}\}$ группы G. Действительно, если $P \equiv G_a$, $Q \equiv G_b$, $R \equiv G_c \pmod{H}$, то $PQ \equiv G_{ab}$, $QR \equiv G_{bc} \pmod{H}$. Следовательно, $\pi_{PQ,R} = \rho_{ab,c}$, $\pi_{P,QR} = \rho_{a,bc}$. Соотношение (17.2) поэтому дает

$$\pi_{P,Q}\pi_{PQ,R} = \pi_{P,QR}\pi_{Q,R},$$

откуда вытекает, что $\{\pi_{P,Q}\}$ есть система факторов группы G. Из (18.2) видно, что эта система является приведенной по отношению к подгруппе H.

Отсюда, в силу леммы 4.2, вытекает, что H есть Π-ядро. Следовательно, $\Pi \in M_H(G)$. Наконец, в силу (18.2) $\rho_{a,b} = \pi_{G_a, G_b}$. Таким образом, система факторов $\{\rho_{a,b}\}$ порождается приведенной относительно H системой факторов $\{\pi_{P,Q}\}$ типа Π, входящего в группу $M_H(G)$.

Итак, с помощью (16.2) устанавливается взаимно однозначное соответствие между приведенными (относительно H) системами факторов группы G и системами факторов группы G/H. С помощью (16.2) и (18.2) легко проверить, что в указанном соответствии ассоциированным системам факторов группы G отвечают ассоциированные системы факторов фактор-группы G/H. Таким образом, получается взаимно однозначное соответствие между типами систем факторов группы G/H и типами систем факторов группы G, входящими в H-мультипликатор $M_H(G)$. Это соответствие является, как легко видеть, изоморфизмом.

Лемма доказана.

---

* Другое ее доказательство основывается на замечании, сделанном в сноске на стр. 345.

3. Пусть H — π-ядро группы G. Установим связь между различными λ-системами подгруппы H, подчиненными системе факторов $\{\pi_{P,G}\}$ (в дальнейшем последнее обстоятельство больше оговариваться не будет). Пусть $\{\mathring{\lambda}_P\}$ фиксированная и $\{\lambda_P\}$ произвольная λ-система подгруппы H. Полагая

$$\lambda_P = \mathring{\lambda}_P \varphi(P) \quad (P \in H), \tag{19.2}$$

в силу (2.2) и (3.2) получим

$$\varphi(PQ) = \varphi(P)\varphi(Q) \qquad (P, Q \in H), \tag{20.2}$$
$$\varphi(Q^{-1}PQ) = \varphi(P) \qquad (P \in H,\ Q \in G). \tag{21.2}$$

Определение 6. Линейный характер φ нормального делителя H группы G назовем инвариантным, если выполняется условие (21.2).

Из (19.2), (20.2) и (21.2) вытекает, что если $\{\mathring{\lambda}_P\}$ заданная λ-система подгруппы H, то всякая другая ее λ-система получается путем умножения системы $\{\mathring{\lambda}_P\}$ на инвариантный линейный характер подгруппы H. Поэтому количество l_H различных λ-систем π-ядра H равно порядку группы $X_{\text{inv}}(H)$ инвариантных линейных характеров подгруппы H. Замечая, что условие (21.2) можно представить в виде $\varphi(P^{-1}Q^{-1}PQ) = 1$ $(P \in H,\ Q \in G)$, приходим к заключению, что группа $X_{\text{inv}}(H)$ изоморфна группе характеров абелевой фактор-группы $H/K_{H,G}$, где $K_{H,G}$ — взаимный коммутант группы G и подгруппы H. Тем самым доказано следующее равенство:

$$l_H = [X_{\text{inv}}(H)]^{*)} = (H : K_{H,G}). \tag{22.2}$$

4. Пусть $\varphi_0 = 1, \varphi_1, \ldots, \varphi_{l_H-1}$ полная система инвариантных линейных характеров π-ядра H, $\{\lambda_P^{(0)}\}$ — фиксированная λ-система подгруппы H, подчиненная системе факторов $\{\pi_{P,Q}\}$. Умножая систему $\{\lambda_P^{(0)}\}$ на $\{\varphi_0(P)\}$ $\{\varphi_1(P)\}, \ldots, \{\varphi_{l_H-1}(P)\}$, получим все λ-системы $\{\lambda_P^{(i)}\}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, l_H - 1)$ подгруппы H:

$$\lambda_P^{(i)} = \lambda_P^{(0)}\varphi_i(P). \tag{23.2}$$

Для каждого индекса $i = 0, 1, \ldots, l_H - 1$ образуем, согласно (5.2) и (4.2), идемпотент $j_H(\lambda^{(i)}) = j_H^{(i)}$ центра Z_π алгебры R_π:

$$j_H^{(i)} = \frac{1}{[H]}\sum_{P \in H} u_P \xi_i(P), \tag{24.2}$$

$$\xi_i(P) = \lambda_P^{(i)-1} \quad (P \in H). \tag{25.2}$$

Заметим, что та́к как λ-системы $\{\lambda_P^{(i)}\}$ $(i = 0, 1, \ldots, l_H - 1)$ различны между собой, то $j_H^{(i)} \neq j_H^{(k)}$, если $i \neq k$.

Лемма 7.2. *Минимальный идемпотент e центра алгебры R_π тогда и только тогда является компонентой идемпотента $j_H^{(i)}$, если*

$$1)\ J_e \supseteq H, \tag{26.2}$$
$$2)\ u_P e = \lambda_P^{(i)} e \quad (P \in H). \tag{27.2}$$

---

* Здесь, как и везде в настоящей работе, квадратные скобки обозначают порядок заключенной в них группы.

Доказательство. Пусть $j_H^{(i)} e = e$. Тогда в силу (8.2) для каждого $P \in \boldsymbol{H}$ имеет место $u_P e = u_P j_H^{(i)} e = \lambda_P^{(i)} j_H^{(i)} e = \lambda_P^{(i)} e$. Таким образом, выполняются условия (26.2) и (27.2). Наоборот, при выполнении этих условий

$$j_H^{(i)} e = \frac{1}{[H]} \sum_{P \in H} u_P \xi_i (P) \cdot e = \frac{1}{[H]} \sum_{P \in H} \lambda_P^{(i)} \xi_i (P) \cdot e = e,$$

так как, в силу (25.2) $\lambda_P^{(i)} \xi_i (P) = 1$.

Лемма доказана.

Из леммы 7.2 вытекает

Лемма 8.2. *Идемпотент $j_H^{(i)}$ есть сумма всех минимальных идемпотентов e центра алгебры R_π, удовлетворяющих условиям (26.2) и (27.2):*

$$j_H^{(i)} = \sum_{J_e \supseteq H:\quad u_P e = \lambda_P^{(i)} e (P \in H).} e \qquad (28.2)$$

Так как минимальные идемпотенты алгебры Z_π попарно ортогональны, а идемпотенты $j_H^{(i)}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, l_H - 1)$ все различны, то из леммы 8.2 вытекает

Лемма 9.2. *Идемпотенты $j_H^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, l_H - 1)$ попарно ортогональны между собой.*

Положим теперь

$$j_H = \begin{cases} 0, \text{ если } H \text{ не является } \pi\text{-ядром}, \\ \sum_{i=0}^{l_H - 1} j_H^{(i)}, \text{ если } H \text{ есть } \pi\text{-ядро}. \end{cases} \qquad (29.2)$$

Так как идемпотенты $j_H^{(i)}$ попарно ортогональны между собой, то j_H также является идемпотентом алгебры Z_π. *Этот идемпотент не зависит, оказывается, от выбора исходной λ-системы $\{\lambda_P^{(0)}\}$ подгруппы $\boldsymbol{H}$.* Действительно, из леммы 8.2 вытекает

Лемма 10.2. *j_H есть сумма всех тех минимальных идемпотентов алгебры Z_π, ядра которых содержат подгруппу $\boldsymbol{H}$:*

$$j_H = \sum_{J_e \supseteq H} e. \qquad (30.2)$$

Доказательство. Если H не является π-ядром, то множество минимальных идемпотентов e, удовлетворяющих условиям леммы, пусто. Следовательно, в этом случае $\sum_{J_e \supseteq H} e = 0$ и, таким образом, (30.2) имеет место. Если H есть π-ядро, то j_H будет суммой минимальных идемпотентов, являющихся компонентами идемпотентов $j_H^{(i)}$. В силу леммы 7.2 для каждого из этих минимальных идемпотентов e имеет место $J_e \supseteq H$. Наоборот, если $J_e \supseteq H$, то $u_P e = \lambda_P e$, где $\{\lambda_P\}$ — одна из λ-систем подгруппы H, подчиненных системе факторов $\{\pi_{P,Q}\}$. Если, например, $\{\lambda_P\} = \{\lambda_P^{(i)}\}$, то в силу леммы 7.2 e является компонентой идемпотента $j_H^{(i)}$, а потому и идемпотента j_H.

Лемма доказана.

Пусть подгруппа $\boldsymbol{H}$ является π-ядром. В силу (29.2), (24,2), (25.2) и (23.2) имеем

$$j_H = \frac{1}{[H]} \sum_{i=0}^{l_H-1} \sum_{P \in H} u_P \xi_0(P) \overline{\varphi_i(P)} = \frac{1}{[H]} \sum_{P \in H} u_P \xi_0(P) \cdot \sum_{i=0}^{l_H-1} \overline{\varphi_i(P)}\,*.$$

Так как инвариантные линейные характеры подгруппы $\boldsymbol{H}$ можно рассматривать как характеры абелевой группы $\boldsymbol{H}/\boldsymbol{K}_{H,\,G}$, то

$$\sum_{i=0}^{l_H-1} \overline{\varphi_i(P)} = \begin{cases} 0, \text{ если } P \,\bar{\in}\, \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{H},\,\boldsymbol{G}} \\ l_H, \text{ если } P \in \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{H},\,\boldsymbol{G}}. \end{cases}$$

Поэтому, учитывая (22.2), получаем (в случае если $\boldsymbol{H}$ — π-ядро!)

$$j_{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{[\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{H},\,\boldsymbol{G}}]} \sum_{P \in K_{H,\,G}} u_P \xi_0(P). \tag{31.2}$$

Из (31.2) снова видно, что j_H вполне определяется подгруппой $\boldsymbol{H}$. Действительно, так как на $\boldsymbol{K}_{H,\,\boldsymbol{G}}$ $\varphi_i(P) = 1$, то $\xi_i(P) = \xi_0(P)$ $(P \in K_{H,\,G},\ i = 0, 1, \ldots, l_H - 1)$ и, следовательно j_H не зависит от того, какая из λ-систем $\{\lambda_P^{(i)}\}$ принята в качестве исходной. Что функция $\xi_0(P)$ вполне определяется π-ядром $\boldsymbol{H}$, вытекает также из следующих соотношений:

$$\xi_0(P^{-1}Q^{-1}PQ) = \pi^{-1}_{P,\ P^{-1}Q^{-1}PQ}\,\omega^{-1}(P, Q) \qquad (P \in \boldsymbol{H},\ Q \in \boldsymbol{G}),$$
$$\xi_0(P)\,\xi_0(Q) = \pi^{-1}_{P,\,Q}\,\xi_0(PQ) \qquad (P, Q \in \boldsymbol{H}).$$

Полагая $\xi_0(P) = \varkappa_H(P)$ $(P \in \boldsymbol{H})$, получим

$$j_{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{[\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{H},\,\boldsymbol{G}}]} \sum_{P \in K_{\boldsymbol{H},\,\boldsymbol{G}}} u_P \varkappa_H(P). \tag{32.2}$$

Лемма 11.2. Если $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ — нормальные делители группы $\boldsymbol{G}$, то

$$j_{\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2} = j_{\boldsymbol{H}_1} j_{\boldsymbol{H}_2}. \tag{33.2}$$

Доказательство. Вытекает из леммы 10.2 и взаимной ортогональности минимальных идемпотентов алгебры Z_π.

Следствие. Композит $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2$ π-ядер $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ тогда и только тогда является π-ядром, если идемпотенты j_{H_1} и j_{H_2} ортогональны.

Лемма 12.2. *Если π-ядра $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ взаимно просты, то $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{H}_2$ есть π-ядро.*

Доказательство. В силу леммы 11.2 и соотношения (32.2) имеем

$$j_H = \frac{1}{[\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{H}_1,\,\boldsymbol{G}}][\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{H}_2,\,\boldsymbol{G}}]} \sum_{P \in K_{H_1,\,\boldsymbol{G}},\ Q \in K_{H_2,\,\boldsymbol{G}}} u_P u_Q \varkappa_{H_1}(P)\,\varkappa_{H_2}(P) =$$
$$= \frac{1}{[\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{H}_1,\,\boldsymbol{G}}][\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{H}_2,\,\boldsymbol{G}}]} \sum_{P \in K_{H_1,\,\boldsymbol{G}},\ Q \in K_{H_2,\,\boldsymbol{G}}} u_{PQ}\,\pi_{P,\,Q}\,\varkappa_{H_1}(P)\,\varkappa_{H_2}(Q).$$

Замечая, что $\boldsymbol{K}_{H,\,\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{K}_{H_1,\,\boldsymbol{G}} \times \boldsymbol{K}_{H_2,\,\boldsymbol{G}}$, получаем

$$j_H = \sum_{R \in K_{\boldsymbol{H},\,G}} u_R \xi(R),$$

---

* Так как $\varphi_i(P)$ есть корень из единицы, то $\{\varphi_i(P)\}^{-1} = \overline{\varphi_i(P)}$.

где

$$\xi(R)=\frac{1}{[K_{H,\,G}]}\pi_{P,\,Q}\chi_{H_1}(P)\chi_{H_2}(Q)\quad (R=PQ,\ P\in K_{H_1,\,G},\ Q\in K_{H_2G}).$$

Так как $\xi(R)\neq 0$, то $j_H\neq 0$. Следовательно, H есть π-ядро.

§ 2. ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИЗОМОРФНЫХ НЕПРИВОДИМЫХ P-ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ G, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ К ЗАДАННОЙ СИСТЕМЕ ФАКТОРОВ

1. Пусть M — система минимальных нормальных делителей группы G. Введем в рассмотрение элемент

$$v=\prod_{F\in M}(1-j_F) \tag{34.2}$$

алгебры R_π. В силу леммы 11.2 имеет место также следующее представление для элемента v:

$$v=\sum_{T\subseteq M}\mu(T)\,j_{C_T}. \tag{35.2}$$

Здесь T пробегает множество всех подсистем системы M; $\mu(T)=(-1)^t$, где t — число членов подсистемы T; C_T — композит подгрупп подсистемы T. При этом если T пусто, то $\mu(T)=1$, $C_T=E$.

Лемма 13.2. *Элемент v есть идемпотент, равный сумме всех минимальных идемпотентов e алгебры Z_π, ядра которых совпадают с единицей группы G:*

$$v=\sum_{J_e=E}e. \tag{36.2}$$

Доказательство. Пусть $F\in M$. Из леммы 10.2 вытекает, что

$$1-j_F=\sum_{J_e\subseteq F}e. \tag{37.2}$$

Перемножая соотношения (37.2) для всех $F\in M$, получаем (36.2).

Введем следующие обозначения: S — цоколь группы G; M_π — множество всех π-ядер группы G, входящих в систему M. Композит S_π всех подгрупп, входящих в систему M_π, назовем π-цоколем группы G.

Пусть $T\subseteq M_\pi$. Так как подгруппа C_T разлагается в прямое произведение некоторого числа подгрупп системы M_π, то в силу леммы 12.2 C_T есть π-ядро. В частности, π-ядром является π-цоколь S_π группы G.

Лемма 14.2. *π-цоколь группы G есть максимальное ее π-ядро, входящее в цоколь S.*

Доказательство. Подгруппа S_π является, как было показано выше, π-ядром. Пусть H — входящее в S π-ядро группы G. Из полной приводимости цоколя вытекает, что H как входящий в S нормальный делитель группы G, разлагается в прямое произведение некоторого числа подгрупп системы M. Следовательно, $H=C_T$, где $T\subseteq M$. Так как C_T есть π-ядро, то (см. следствие леммы 2.2) $T\subseteq M_\pi$. Следовательно, $H\subseteq S_\pi$. Таким образом, S_π содержит каждое входящее в S π-ядро группы G.

Лемма доказана.

Так как $j_F=0$, если $F\bar{\in} M_\pi$, то соотношения (34.2) и (35.2) переходят в следующие:

$$v=\prod_{F\in M_\pi}(1-j_F)=\sum_{T\subseteq M_\pi}\mu(T)\,j_{C_T} \tag{38.2}$$

2. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_{r_\pi}$ — полная система минимальных идемпотентов алгебры Z_π; Γ_k — неприводимое P-представление группы G, принадлежащее к системе факторов $\{\pi_{P,Q}\}$ и связанное с идемпотентом e_k (Γ_k порождается неприводимым линейным представлением алгебры R_π, связанным с любым минимальным левым идеалом простой алгебры $R_\pi e_k$); n_k — степень P-представления Γ_k.

Через I_k обозначим ядро гомоморфизма P-представления Γ_k, совпадающее, как было отмечено в разделе II, § 1.1, с ядром J_{e_k} идемпотента e_k. Пусть, наконец, как и в I, § 2.2, Spx означает след элемента x алгебры R_π в ее регулярном представлении.

Так как $v = \sum\limits_{I_k=E} e_k$ и $Spe_k = n_k^2$, то

$$Spv = \sum_{I_k=E} n_k^2. \tag{39.2}$$

Далее, если H — π-ядро, то в силу (32.2) и (11.1)

$$Spj_H = \frac{h}{[K_{H,G}]} \chi_H(E) = (G : K_{H,G})^*, \tag{40.2}$$

Принимая во внимание (39.2) и (40.2), из (38.2) получаем

$$\boxed{\sum_{I_k=E} n_k^2 = \sum_{T \subseteq M_\pi} \mu(T)\,(G : K_{C_T,G})} \tag{41.2}$$

3. Пусть H — входящий в цоколь группы G ее нормальный делитель. Как уже отмечалось выше, для H имеет место прямое разложение

$$H = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_s, \tag{42.2}$$

где $F_i \in M$. Воспользуемся теперь следующим хорошо известным предложением.

Лемма 15.2. *Если H_1 и H_2 — нормальные делители группы G, $H = H_1H_2$, то $K_{H,G} = K_{H_1,G}K_{H_2,G}$.*

Применяя эту лемму к разложению (42.2) и учитывая, что $K_{F_k,G} \subseteq F_k$, получаем

$$K_{H,G} = K_{F_1,G} \times K_{F_2,G} \times \ldots \times K_{F_s,G}.$$

Следовательно,

$$(H : K_{H,G}) = (F_1 : K_{F_1,G})(F_2 : K_{F_2,G}) \ldots (F_s : K_{F_s,G}). \tag{43.2}$$

Пусть теперь F — произвольный минимальный нормальный делитель группы G. Как входящий в F нормальный делитель группы G, взаимный коммутант $K_{F,G}$ совпадает с одной из подгрупп F, E. Случай $K_{F,G} = E$ имеет место тогда и только тогда, если F содержится в центре Z_G группы G. Такие минимальные нормальные делители мы будем называть центральными. Из сказанного следует:

$$(F : K_{F,G}) = \begin{cases} 1, \text{ если } F \not\subseteq Z_G, \\ [F], \text{ если } F \subseteq Z_G. \end{cases} \tag{44.2}$$

Пусть в разложении (42.2) $F_k \subseteq Z_G$, если $k \leqslant t$, $F_k \subseteq Z_G$, если $k > t$. Полагая

$$H^{(Z)} = F_1 \times \ldots \times F_t, \tag{45.2}$$

* Из (7.1) легко вытекает, что $\chi_H(E) = \lambda_E^{(0)^{-1}} = 1$. В этом можно убедиться, например, положив в (2.2) $P = Q = E$.

из (43.2), учитывая (44.2), получаем

$$(H : K_{H,\,G}) = [H^{(Z)}]. \tag{46.2}$$

Полагая

$$H^{(N)} = F_{t+1} \times \ldots \times F_s, \tag{47.2}$$

будем иметь

$$H = H^{(Z)} \times H^{(N)}. \tag{48.2}$$

Мы докажем, что несмотря на то, что разложение (42.2) не является единственным, подгруппы $H^{(Z)}$ и $H^{(N)}$ определяются подгруппой H однозначно. Покажем сначала, что каждый входящий в H минимальный нормальный делитель F группы G содержится в одной из подгрупп $H^{(Z)}$, $H^{(N)}$. Действительно, пусть $P \in F$, $P = P_1 \cdot P_2 \ldots, P_s$, где $P_k \in F_k$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$. Отображение $P \to P_k$ является операторным гомоморфизмом φ_k подгруппы F в F_k в том смысле, что $(Q^{-1}PQ)^{\varphi_k} = Q^{-1}P^{\varphi_k}Q$ для любых $P \in F$, $Q \in G$. Из минимальности нормальных делителей F и F_k вытекает, что φ_k является либо операторным изоморфизом, либо нулевым гомоморфизмом (в последнем случае $P^{\varphi_k} = E$ для каждого $P \in F$). Допустим, что среди гомоморфизмов φ_k $(k \leqslant s)$ отличны от нулевого $\varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_2}, \ldots \varphi_{\alpha_r}$. Тогда для $P \in F$ имеет место $P = P_{\alpha_1} \ldots P_{\alpha_r}$ и, следовательно,

$$F \subseteq F_{\alpha_1} \times \ldots \times F_{\alpha_r}. \tag{49.2}$$

При этом минимальные нормальные делители $F, F_{\alpha_1}, \ldots F_{\alpha_r}$ операторно изоморфны между собой. Поэтому из $F \subseteq Z_G$ следует, что $F_{\alpha_i} \subseteq Z_G$ $(i = 1, \ldots, r)$, откуда вытекает (в силу (49.2)), что $F \subseteq H^{(Z)}$. Если же $F \not\subseteq Z_G$, то $F_{\alpha_i} \not\subseteq Z_G$ $(i = 1, \ldots, r)$. Следовательно, в этом случае, $F \subseteq H^{(N)}$. Таким образом, из $F \subseteq H$ вытекает, что F входит в одну из подгрупп $H^{(Z)}$, $H^{(N)}$. Это значит, что разложение (48.2) является расщеплением в смысле статьи [9]:

$$H = H^{(Z)} \cdot H^{(N)}. \tag{50.2}$$

Из предыдущего ясно, что $H^{(Z)}$ является композитом всех входящих в H центральных минимальных нормальных делителей группы G. Таким образом, подгруппа $H^{(Z)}$ определяется подгруппой H однозначно, причем, как легко видеть

$$H^{(Z)} = H \cap Z_G. \tag{51.2}$$

Мы назовем подгруппу $H^{(Z)}$ **центральной компонентой** подгруппы H. Подгруппу $H^{(N)}$, являющуюся композитом всех содержащихся в H минимальных нормальных делителей группы G, не входящих в ее центр, назовем **нормальной компонентой** подгруппы H.

4. Обозначим через $M_\pi^{(Z)}$ множество всех центральных минимальных нормальных делителей из M_π, а через $S_\pi^{(Z)}$ — их композит ($S_\pi^{(Z)}$ является центральной компонентой π-цоколя S_π группы G). Пусть, далее, $M_\pi^{(N)}$ — множество всех не входящих в центр подгрупп из M_π, $S_\pi^{(N)}$ — их композит (нормальная компонента π-цоколя). В силу (50.2)

$$S_\pi = S_\pi^{(Z)} \cdot S_\pi^{(N)}. \tag{52.2}$$

Если $T \subseteq M_\pi$, то в силу (52.2) $T = T_1 U T_2$, где $T_1 \subseteq M_\pi^{(Z)}$, $T_2 \subseteq M_\pi^{(N)}$. Кроме того, $C_T = C_{T_1} \cdot C_{T_2}$ и, следовательно,

$$[C_T] = [C_{T_1}]\,[C_{T_2}]. \tag{53.2}$$

Так как $C_{T_1} = C_T^{(Z)}$, $C_{T_2} = C_T^{(N)}$, то в силу (46.2), (53.2) и (54.2)

$$(G : K_{C_T,\,G}) = (G : C_{T_2}). \tag{54.2}$$

Замечая, что $\mu(T) = \mu(T_1)\,\mu(T_2)$, с помощью (54.2) получаем

$$\sum_{T \subset M_\pi} \mu(T)\,(G : K_{C_T,\,G}) = \sum_{T_1 \subseteq M_\pi^{(Z)},\; T_2 \subseteq M_\pi^{(N)}} \mu(T_1)\,\mu(T_2)\,(G : C_{T_2}) =$$

$$= \sum_{T_1 \subseteq M_\pi^{(Z)}} \mu(T_1) \cdot \sum_{T_2 \subseteq M_\pi^{(N)}} \mu(T_2)\,(G : C_{T_2}). \tag{55.2}$$

Замечая, наконец, что

$$\sum_{T_1 \subseteq M_\pi^{(Z)}} \mu(T_1) = \delta(Z_G) = \begin{cases} 1 \text{ — если } Z_G \text{ не содержит отличных} \\ \quad\ \text{от единицы } \pi\text{-ядер группы } G, \\ 0 \text{ — в противном случае,} \end{cases} \tag{56.2}$$

из (41.2) и (55.2) получаем окончательное выражение для суммы квадратов степеней изоморфных неприводимых P-представлений группы G, принадлежащих к системе факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$:

$$\boxed{\sum_{J_k = E} n_k^2 = \delta(Z_G) \sum_{T \subseteq M_\pi^{(N)}} \mu(T)\,(G : C_T)} \tag{57.2}$$

Можно показать, что сумма $A = \sum_{T \subseteq M_\pi^{(N)}} \mu(T)\,(G : C_T)$ отлична от нуля тогда и только тогда, если подгруппа $S_\pi^{(N)}$ порождается одним классом сопряженных элементов группы G (см., например доказательство теоремы 1 в статье [9]; можно также воспользоваться тем обстоятельством, что $A = (G : S_\pi^{(N)})\,\varphi(S_\pi^{(N)})$, где φ — любая из двух теоретико-групповых функций Эйлера, рассмотренных в статье [10]: в силу теоремы 7 указанной статьи $\varphi(S_\pi^{(N)}) \neq 0$ тогда и только тогда, если подгруппа $S_\pi^{(N)}$ порождается одним классом сопряженных элементов группы G).

Принимая во внимание отмеченный факт, на основании соотношения (57.2) получаем:

Теорема 1. *Группа G тогда и только тогда допускает изоморфные неприводимые P-представления, принадлежащие к заданной системе факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$, если*

1) Нормальная компонента $S_\pi^{(N)}$-цоколя группы G порождается одним ее классом сопряженных элементов,

2) Центр Z_G группы G не содержит отличных от единицы π-ядер последней.

5. Из теоремы 1 вытекает, что необходимым условием существования изоморфных неприводимых P-представлений группы G, принадлежащих к системе факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$, является отсутствие отличных от единицы π-ядер, входящих в центр группы G (мы будем выражать эту ситуацию словами: «центр группы G свободен от нетривиальных π-ядер»). Выясним смысл этого условия.

Если $P \in Z_G$, $Q \in G$, то, как видно из (16.1),

$$\omega(P, Q) = \frac{\pi_{P,\,Q}}{\pi_{Q,\,P}}. \tag{58.2}$$

В частности, если $P, Q \in Z_G$, то

$$\omega(P, Q)\,\omega(Q, P) = 1. \tag{59.2}$$

Соотношения (20.1) и (21.1) показывают, что при фиксированном $P \in Z$ $\chi_P(Q) = \omega(P, Q)$ есть линейный характер группы $\boldsymbol{G}$, причем $\chi_{P_1}\chi_{P_2} = \chi_{P_1P_2}$ $(P_1P_2 \in \boldsymbol{Z}_G)$. Таким образом, отображение $P \to \chi_P$ $(P \in \boldsymbol{Z}_G)$ есть гомоморфизм центра группы $\boldsymbol{G}$ в группу $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{G})$ линейных характеров группы $\boldsymbol{G}$. В силу (59.2)

$$\chi_P(Q)\,\chi_Q(P) = 1 \quad (P, Q \in \boldsymbol{Z}_G). \tag{60.2}$$

Заметим еще, что гомоморфизм $P \to \chi_P$ вполне определяется типом системы факторов $\{\pi_{P, Q}\}$.

Лемма 16.2. *Ядро $\boldsymbol{K}_\pi$ гомоморфизма $P \to \chi_P$ является максимальным π-ядром группы $\boldsymbol{G}$, входящим в ее центр; пересечение с центром группы $\boldsymbol{G}$ ядра гомоморфизма $\boldsymbol{I}_\Gamma$ любого неприводимого P-представления Γ группы $\boldsymbol{G}$, принадлежащего к системе факторов $\{\pi_{P, Q}\}$, не зависит от Γ и совпадает с $\boldsymbol{K}_\pi$:*

$$\boldsymbol{I}_\Gamma \cap \boldsymbol{Z}_G = \boldsymbol{K}_\pi. \tag{61.2}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что $\boldsymbol{K}_\pi$ совпадает с множеством всех π-элементов центра группы $\boldsymbol{G}$. Это непосредственно вытекает из определения π-элементов, данного в 1 § 2.3. Пусть $\boldsymbol{H}$ — π-ядро группы $\boldsymbol{G}$, входящее в ее центр. Так как все элементы π-ядра являются π-элементами (II, § 1.1), то $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{K}_\pi$. Далее, из соотношения (14.1) вытекает, что $P \in \boldsymbol{K}_\pi$ тогда и только тогда, если $u_P \in \boldsymbol{Z}_\pi$. Пусть Γ — неприводимое P-представление группы $\boldsymbol{G}$, принадлежащее к системе факторов $\{\pi_{P, Q}\}$, Δ — порождающее его линейное представление алгебры R_π. Если $P \in \boldsymbol{K}_\pi$, то на основании сделанного выше замечания и леммы Шура имеем: $\Gamma(P) = \Delta(u_P) = \lambda_P U$, где $\lambda_P \in \Omega$ и U — единичная матрица. Следовательно, $P \in \boldsymbol{I}_\Gamma$ и, вместе с тем, $\boldsymbol{K}_\pi \subseteq \boldsymbol{I}_\Gamma$. Поэтому $\boldsymbol{K}_\pi \subseteq \boldsymbol{I}_\Gamma \cap \boldsymbol{Z}_G$. С другой стороны, так как $\boldsymbol{I}_\Gamma$ есть π-ядро, то (следствие леммы 2.2) $\boldsymbol{I}_\Gamma \cap \boldsymbol{Z}_G$ также является π-ядром. Следовательно, на основании ранее доказанного, $\boldsymbol{I}_\Gamma \cap \boldsymbol{Z}_G \subseteq \boldsymbol{K}_\pi$. Сопоставляя этот результат с предыдущим, получаем (61.2).

Из леммы 16.2 вытекает

Лемма 17.2. *Центр группы $\boldsymbol{G}$ тогда и только тогда свободен от нетривиальных π-ядер, если отображение $P \to \chi_P$ $(P \in \boldsymbol{Z}_G)$ является изоморфизмом.*

Если группа $\boldsymbol{G}$ допускает изоморфное неприводимое P-представление Γ, принадлежащее к системе факторов $\{\pi_{P, Q}\}$, то $\boldsymbol{I}_\Gamma = E$. В силу леммы 16.2 поэтому имеем $\boldsymbol{K}_\pi = E$. Таким образом, снова доказано, что условие 2) в формулировке теоремы 1 является необходимым для того, чтобы группа $\boldsymbol{G}$ допускала изоморфные неприводимые P-представления, принадлежащие к системе факторов $\{\pi_{P, Q}\}$.

Примечание. Для того, чтобы отображение $P \to \chi_P$ было изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы оно было изоморфным на цоколе S_Z центра группы $\boldsymbol{G}$. Необходимость этого условия очевидна. Достаточность вытекает из того, что каждая отличная от единицы подгруппа центра содержит по крайней мере одну из минимальных его подгрупп.

Пусть $\overline{\boldsymbol{G}} = \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{G}\}$ центральное $\boldsymbol{G}$-расширение конечной абелевой группы $\boldsymbol{A}$. Сохраняя обозначения, принятые в 1, § 4, положим для $P \in \boldsymbol{Z}_G$, $Q \in \boldsymbol{G}$.

$$\varphi_P(Q) = a_{P, Q}\, a_{Q, P}^{-1}. \tag{62.2}$$

С помощью (36.1) находим

$$\varphi_P(Q_1Q_2) = \varphi_P(Q_1)\,\varphi_P(Q_2) \quad (P \in \boldsymbol{Z}_G;\ Q_1,\ Q_2 \in \boldsymbol{G}), \tag{63.2}$$

$$\varphi_{P_1P_2}(Q) = \varphi_{P_1}(Q)\,\varphi_{P_2}(Q) \quad (P_1,\ P_2 \in \boldsymbol{Z}_G;\ Q \in \boldsymbol{G}). \tag{64.2}$$

Следовательно, при фиксированном $P \in \boldsymbol{Z}_G$ отображение $Q \to \varphi_P(Q)$ является гомоморфизмом группы $\boldsymbol{G}$ в абелеву группу $\boldsymbol{A}$. Обозначим этот гомоморфизм через φ_P. Определим произведение $\varphi' * \varphi''$ гомоморфизмов φ' и φ'' группы G в группу A следующим образом:

$$(\varphi' * \varphi'')(Q) = \varphi'(Q)\varphi''(Q).$$

В силу коммутативности группы A $\varphi' * \varphi''$ также является гомоморфизмом группы G в A. Относительно введенной операции умножения множество $\Phi_{G, A}$ гомоморфизмов группы G в группу A является, очевидно, конечной группой. Из (63.2) вытекает, что

$$\varphi_{P_1} * \varphi_{P_2} = \varphi_{P_1 P_2} \quad (P_1, P_2 \in Z_G).$$

Следовательно, отображение $P \to \varphi_P$ является гомоморфизмом группы Z_G в группу $\Phi_{G, A}$.

Лемма 18.2. *Гомоморфизм $P \to \varphi_P (P \in Z_G)$ тогда и только тогда является изоморфизмом, если центр $Z_{\overline{G}}$ группы $\overline{G}$ совпадает с A.*

Доказательство. Найдем ядро N гомоморфизма $P \to \varphi_P$. Заметим сначала, что в обозначениях, принятых в 1, § 4,

$$g_Q^{-1} g_P g_Q = \varphi_P(Q)\, g_P \quad (p \in Z_G,\ Q \in G).$$

Следовательно, гомоморфизм φ_P является единичным тогда и только тогда, если g_P коммутирует со всеми элементами g_Q $(Q \in G)$, т. е. если $g_P \in Z_{\overline{G}}$. Таким образом, $P \in N$ тогда и только тогда, если $g_P \in Z_{\overline{G}}$. Обозначив через $\overline{H}$ полный прообраз подгруппы $H \subseteq G$ при естественном гомоморфизме группы $\overline{G}$ на группу G, будем поэтому иметь

$$\overline{N} = \sum_{P \in N} A g_P = Z_{\overline{G}}.$$

Отсюда, в частности, следует, что $N = E$ тогда и только тогда, если $Z_{\overline{G}} = A$.

Лемма доказана.

Допустим, что тип Π системы факторов $\{\pi_{P, Q}\}$ порождается центральным расширением $\overline{G} = \{A, G\}$. Это значит, что

$$\{\pi_{P, Q}\} \sim \{\pi_{P, Q}^{(\Psi)}\}, \tag{65.2}$$

где Ψ — некоторый характер группы A. Так как функция $\chi_P(Q)$ $(P \in Z_G)$ зависит лишь от типа системы факторов $\{\pi_{P, Q}\}$, то в силу (65.2), (39.1) и (62.2)

$$\chi_P(Q) = \Psi\{\varphi_P(Q)\}. \tag{66.2}$$

Установим теперь связь между ядром N_Ψ^* гомоморфизма $P \to \chi_P$ и характером Ψ, порождающим этот гомоморфизм. Пусть L_Ψ — ядро гомоморфизма отображения $a \to \Psi(a)$ $(a \in A)$.

Лемма 19.2. *Фактор-группа $\overline{N}_\Psi / L_\Psi$ совпадает с центром $Z_{\overline{G}/L_\Psi}$ фактор-группы $\overline{G}/L_\Psi$.*

Доказательство. Если $P \in N_\Psi$, то $\chi_P(Q) = 1$ для каждого $Q \in G$. Следовательно, в силу (66.2) $\varphi_P(Q) \in L_\Psi$ $(Q \in G)$. Отсюда и из (62.2) вытекает

$$L_\Psi a_{P, Q} = L_\Psi a_{Q, P} \quad (Q \in G). \tag{67.2}$$

* Очевидно. $N_\Psi = K_\pi$

Наконец, из (67.2) получаем, учитывая соотношения $g_P g_Q = a_{P,\,Q} g_{PQ}$, $g_Q q_P = a_{Q,\,P} g_{QP}$, $PQ = QP$:

$$\boldsymbol{L}_\Psi g_P \cdot \boldsymbol{L}_\Psi g_Q = \boldsymbol{L}_\Psi g_Q \cdot \boldsymbol{L}_\Psi g_P \quad (Q \in G).$$

Таким образом, $P \in \boldsymbol{N}_\Psi$ тогда и только тогда, если смежный класс $L_\Psi g_P$ коммутирует со всеми смежными классами $\boldsymbol{L}_\Psi g_Q$ $(Q \in \boldsymbol{G})$. Пусть

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{l} \boldsymbol{L}_\Psi a_i$$

разложение группы $\boldsymbol{A}$ на подгруппе $\boldsymbol{L}_\Psi$. Так как $\boldsymbol{G} = \sum_{P \in G} \boldsymbol{A} q_P = \sum_{i,P} \boldsymbol{L}_\Psi a_i q_P$ и так как $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{Z}_G$, то смежный класс $\boldsymbol{L}_\Psi g_P$ тогда и только тогда коммутирует со всеми смежными классами $\boldsymbol{L}_\Psi g_Q$, если он коммутирует со всеми смежными классами $\boldsymbol{L}_\Psi a_i g_Q$ разложения группы $\bar{\boldsymbol{G}}$ по $\boldsymbol{L}_\Psi$.Следовательно, $P \in \boldsymbol{N}_\Psi$ тогда и только тогда, если смежный класс $\boldsymbol{L}_\Psi g_P$, рассматриваемый как элемент фактор-группы $\bar{\boldsymbol{G}}/\boldsymbol{L}_\Psi$, входит в центр последней. Так как вместе с $\boldsymbol{L}_\Psi g_P$ в $\boldsymbol{Z}_{\bar{G}/L_\Psi}$ входят все смежные классы $\boldsymbol{L}_\Psi a_i g_P (i = 1, \ldots, l)$ и так как

$$\sum_{\substack{i=1,\ \ldots,\ l;\\ P \in N_\Psi}} \boldsymbol{L}_\Psi a_i g_P = \sum_{P \in N_\Psi} \boldsymbol{A} g_P = \bar{\boldsymbol{N}}_\Psi,$$

то

$$\bar{\boldsymbol{N}}_\Psi / \boldsymbol{L}_\Psi = \boldsymbol{Z}_{\bar{G}/L_\Psi}. \tag{68.2}$$

Следствие:

$$[\boldsymbol{N}_\Psi] = (\boldsymbol{Z}_{G \cdot L_\Psi} : \boldsymbol{A}/\boldsymbol{L}_\Psi). \tag{69.2}$$

Из (69.2) вытекает

Лемма 20.2*. Отображение $P \to \chi_P$ тогда и только тогда является изоморфизмом, если $\boldsymbol{Z}_{\bar{G}/L_\Psi} = \boldsymbol{A}/\boldsymbol{L}_\Psi$.*

Из лемм 20.2 и 17.2 вытекает

Теорема 2. *Центр группы $\boldsymbol{G}$ тогда и только тогда свободен от нетривиальных π-ядер, если центр $\boldsymbol{Z}_{\bar{G}/L_\Psi}$ фактор группы $\bar{\boldsymbol{G}}/\boldsymbol{L}_\Psi$ совпадает с подгруппой $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{L}_\Psi$. Здесь $\bar{\boldsymbol{G}} = \{\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{G}\}$ — любое центральное $\boldsymbol{G}$-расширение, порождающее тип Π системы факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$; Ψ — характер группы $\boldsymbol{A}$, порождающий тип Π; $\boldsymbol{L}_\Psi$ — ядро гомоморфизма характера Ψ.*

Теорема 3. *Если группа $\boldsymbol{G}$ допускает изоморфные неприводимые P-представления, принадлежащие к системе факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$ типа Π, то центр каждого расширения $\bar{\boldsymbol{G}} = \{\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{G}\}$, порождающего тип Π, совпадает с подгруппой $\boldsymbol{A}$*.*

Доказательство. Если для группы $\boldsymbol{G}$ выполнены предпосылки сформулированной теоремы, то в силу теоремы 1 ее центр свободен от нетривиальных π-ядер. Поэтому, в силу теоремы 2, $\boldsymbol{Z}_{\bar{G}/L_\Psi} = \boldsymbol{A}/\boldsymbol{L}_\Psi$. С другой стороны, если $g_P \in \boldsymbol{Z}_{\bar{G}}$, то смежный класс $\boldsymbol{L}_\Psi g_P$, рассматриваемый как элемент фактор-группы $\bar{\boldsymbol{G}}/\boldsymbol{L}_\Psi$, входит в ее центр. Так как последний совпадает с $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{L}_\Psi$, то $g_P \in \boldsymbol{A}$. Следовательно, $P = E$, откуда и вытекает, что $\boldsymbol{Z}_{\bar{G}} = \boldsymbol{A}$.

Примечание. Полученный результат вытекает также из леммы 18.2. Действительно, из (66.2) следует, что $N_\Psi \subseteq N$, где N ядро гомоморфизма $P \to \varphi_P$. Поэтому, если $N_\Psi = E$, то и $N = E$. Отсюда, в силу леммы 18.2, $\boldsymbol{Z}_{\bar{G}} = \boldsymbol{A}$.

---

* В частности это будет иметь место, если $\bar{\boldsymbol{G}}$ — группа представлений группы $\boldsymbol{G}$.

Пусть теперь $G = \{A, G\}$ — минимальное расширение, порождающее циклическую группу типов $\{\Pi\}$, генератором которой является тип Π системы факторов $\{\pi_{P,Q}\}$ (см. теорему (F) и определение в конце 1, § 4). В рассматриваемом случае группа характеров $X(A)$ группы A изоморфна группе $\{\Pi\}$ и, следовательно, характер Ψ группы A, порождающий тип Π, является генератором группы $X(A)$. Поэтому $L_{\Psi} = 1$. Теорема 2 переходит в следующую.

Теорема 4. *Центр группы G тогда и только тогда свободен от нетривиальных π-ядер, если центр минимального G-расширения $\{A, G\}$ порождающего тип Π системы факторов $\{\pi_{P,Q}\}$, совпадает с A.*

Теорема 5. *Для того, чтобы существовала система факторов $\{\pi_{P,Q}\}$, такая, что центр группы G свободен от нетривиальных π-ядер, необходимо и достаточно, чтобы существовала циклическая группа A, совпадающая с центром одного из своих G-расширений.*

Доказательство. Если система факторов $\{\pi_{P,Q}\}$ такова, что центр группы G свободен от π-ядер, то в силу теоремы 3 в качестве группы A можно взять группу изоморфную с $\{\Pi\}$, где Π — тип системы $\{\pi_{P,Q}\}$. Пусть, наоборот, $G = \{A, G\}$ центральное G-расширение циклической группы A, такое, что $A = Z_G$. Пусть $\{a_{P,Q}\}$ — система факторов расширения $\{A, G\}$; Ψ — генератор группы характеров группы A; $\pi_{P,Q} = \Psi(a_{P,Q})$. В силу выбора характера Ψ имеем $L_{\Psi} = 1$. Так как по условию $Z_G = A$, то в силу теоремы 2 центр группы G свободен от нетривиальных π-ядер.

Теорема 6. *Если цоколь группы G содержится в ее центре, то для существования изоморфных неприводимых P-представлений группы G необходимо и достаточно, чтобы существовала циклическая группа A, совпадающая с центром одного из своих G-расширений.*

Доказательство. Вытекает из теорем 1 и 5.

§ 3. ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕПРИВОДИМЫХ ИЗОМОРФНЫХ P-ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Настоящий параграф посвящен отысканию условий, при которых заданная конечная группа допускает изоморфные неприводимые P-представления, факторы которых уже не подчинены никаким ограничениям.

Пусть Π — любой тип систем факторов P-представлений группы G. Так как степени n_k неприводимых P-представлений, принадлежащих к системе факторов $\{\pi_{P,Q}\}$ типа Π, вполне определяются этим типом, то мы введем для этих степеней обозначение $n_k(\Pi)$ ($k = 1, \ldots, r_{\pi}$). Точно так же, поскольку система M_{π} есть система Π-ядер из M, мы вместо M_{π} будем писать M_{Π}. Полагая

$$s(\Pi) = \sum_{I_k = E} n_k^2(\Pi), \tag{70.2}$$

перепишем (41.2) в виде

$$s(\Pi) = \sum_{T \subseteq M_{\Pi}} \mu(T)\,(G : K_{C_T, G}). \tag{71.2}$$

Суммируя (71.2) по всем типам Π (т. е. по мультипликатору $M(G)$ группы G), получаем

$$\sum_{\Pi \in M(G)} s(\Pi) = \sum_{T \subseteq M} \mu(T)\,(G : K_{C_T, G})\, m_{C_T}(G), \tag{72.3}$$

где $m_{C_T}(G)$ — порядок C_T-мультипликатора $M_{C_T}(G)$ группы G. Так как в силу леммы 6.2 $m_{C_T}(G)$ равно порядку мультипликатора фактор-группы G/C_T, то

$$\boxed{\sum_{\Pi\in \overline{M}(G)} s(\Pi) = \sum_{T\subseteq M} \mu(T)\,(G : K_{C_T,\,G})\, m(G/C_T)} \qquad (73.2)$$

Правая часть соотношения (73.2) может быть упрощена, если ввести в рассмотрение группу представлений группы G. Пусть центральное G-расширение $\overline{G} = \{A, G\}$ является группой представлений группы G. Если H — подгруппа группы G, то, как и в § 2, через $\overline{H}$ обозначим ее полный прообраз в естественном гомоморфизме группы $\overline{G}$ на группу G. Сохраняя прежние обозначения, получим

$$\overline{H} = \{A, H\} = \sum_{P\in H} A g_P.$$

Лемма 21.2. Нормальный делитель H группы G тогда и только тогда является Π-ядром, если характер Ψ группы A, порождающий тип Π, индуцируется некоторым инвариантным линейным характером подгруппы $\overline{H}$.

Доказательство. 1) Пусть $\{\lambda_P\}$ — λ-система Π-ядра H, подчиненная системе факторов $\{\pi^{(\Psi)}_{P,\,Q}\} = \{\Psi(a_{P,\,Q})\}$. В силу (2.2) имеем

$$\Psi(a_{P,\,Q}) = \frac{\lambda_P\lambda_Q}{\lambda_{PQ}} \quad (P, Q \in H).$$

Каждый элемент p подгруппы $\overline{H}$ допускает единственное представление в виде $p = ag_P$, где $a\in A$, $P\in H$. Положим

$$\chi(p) = \Psi(a)\lambda_P$$

и покажем, что χ есть инвариантный линейный характер подгруппы $\overline{H}$. Действительно, если $p = ag_P$, $q = bg_Q$, $a, b\in A$; $P, Q\in H$, то $pq = aba_{P,\,Q}g_{PQ}$. Следовательно,

$$\chi(p)\chi(q) = \Psi(a)\lambda_P\cdot\Psi(b)\lambda_Q = \Psi(aba_{P,\,Q}) = \chi(pq).$$

Если $p = ag_P\in\overline{H}$, $t = bg_Q\in\overline{G}$ $(a, b\in A,\ P\in H,\ Q\in G)$, то

$$t^{-1}pt = ag_Q^{-1}g_Pg_Q = a\cdot a_{P,\,Q}a^{-1}_{Q,\,Q^{-1}PQ}g_{Q^{-1}PQ}.$$

Отсюда вытекает в силу (16.1) и (3.2)

$$\chi(t^{-1}pt) = \Psi(aa_{P,\,Q}a^{-1}_{Q,\,Q^{-1}PQ})\lambda_{Q^{-1}PQ} = \Psi(a)\pi^{(\Psi)}_{P,\,Q}\pi^{(\Psi)-1}_{Q,\,Q^{-1}PQ}\lambda_{Q^{-1}PQ} =$$
$$= \Psi(a)\,\omega(P, Q)\lambda_{Q^{-1}PQ} = \Psi(a)\lambda_P = \chi(p).$$

Следовательно, χ — инвариантный линейный характер подгруппы $\overline{H}$. Если, в частности, $a\in A$, то $\chi(a) = \Psi(a)\lambda_E = \Psi(a)$. Таким образом, характер Ψ индуцируется линейным характером χ.

2) Пусть χ — инвариантный линейный характер подгруппы $\overline{H}$. Полагая для $a\in A$ и $P\in H$

$$\Psi(a) = \chi(a), \quad \lambda_P = \chi(g_P),$$

легко убеждаемся в справедливости соотношений (2.2) и (3.2) для системы факторов $\{\pi^{(\Psi)}_{P,\,Q}\}$. Действительно, из $g_Pg_Q = a_{P,\,Q}g_{P,Q}$ вытекает $\chi(g_P)\chi(g_Q) = \Psi(a_{P,\,Q})\chi(g_{PQ})$, откуда $\pi^{(\Psi)}_{P\,Q} = \dfrac{\lambda_P\lambda_Q}{\lambda_{PQ}}$ $(P, Q\in H)$. Далее, если $P\in H$, $Q\in G$, то $\lambda_{Q^{-1}PQ} = \chi(g_{Q^{-1}PQ}) = \chi(a^{-1}_{P,\,Q}a_{Q,\,Q^{-1}PQ}g_Q^{-1}g_Pg_Q) = \omega^{-1}(P, Q)\lambda_P$. Таким образом, H есть Π-ядро, где Π — тип системы факторов $\{\pi^{(\Psi)}_{P,\,Q}\}$.

Так как $\overline{G}$ есть группа представлений группы G, то типы систем факторов и порождающие их характеры Ψ группы A взаимно однозначно соответствуют друг другу. В силу леммы 21.2 отсюда следует, что порядок $m_H(G)$ H-мультипликатора группы G равен порядку группы тех характеров Ψ группы A, которые индуцируются инвариантными линейными характерами подгруппы $\overline{H}$. Если $X_{\text{inv}}(\overline{H})$ — группа инвариантных линейных характеров подгруппы $\overline{H}$, $\overset{\circ}{X}_{\text{inv}}(\overline{H})$ — подгруппа инвариантных линейных характеров, обращающихся на A в единицу, то, очевидно,

$$m_H(G) = (X_{\text{inv}}(\overline{H}) : \overset{\circ}{X}_{\text{inv}}(H)). \tag{74.2}$$

Точно так же, как и в II, § 1.3, покажем, что

$$[X_{\text{inv}}(H)] = (\overline{H} : K_{\overline{H}, \overline{G}}). \tag{75.2}$$

Замечая, что $\overset{\circ}{X}_{\text{inv}}(\overline{H}) \simeq X_{\text{inv}}(H)$, в силу (22.2) имеем:

$$[\overset{\circ}{X}_{\text{inv}}(H)] = (H : K_{H, G}). \tag{76.2}$$

Из (74.2) — (76.2), учитывая соотношения

$$(\overline{H} : A) = [H], \quad [\overline{G}] = m(G) \cdot [G], \quad [A] = m(G),$$

получаем

$$m(G/H) = m_H(G) = \frac{(\overline{G} : K_{\overline{H}, \overline{G}})}{(G : K_{H, G})}. \tag{77.2}$$

Соотношения (72.2) и (73.2) поэтому принимают следующий вид:

$$\boxed{\sum_{\Pi \in M(G)} s(\Pi) = \sum_{T \subseteq M} \mu(T)\,(\overline{G} : K_{\overline{C}_T \overline{G}})} \tag{78.2}$$

Из (78.2) вытекает

Теорема 7. *Группа G тогда и только тогда допускает изоморфные неприводимые P-представления, если отлично от нуля выражение $\sum\limits_{T \subseteq M} \mu(T)\,(\overline{G} : K_{\overline{C}_T \overline{G}})$.*

Примечание 1. *Квазиядром* $Q_{\overline{\Gamma}}$ линейного представления $\overline{\Gamma}$ группы представлений $\overline{G} = \{A, G\}$ назовем множество всех элементов p из $\overline{G}$ таких, что $\overline{\Gamma}(p)$ есть скалярная матрица. Если $\overline{\Gamma}$ неприводимо, то, очевидно $Q_{\overline{\Gamma}} \supseteq A$. Можно доказать следующее предложение, с помощью которого затем, в свою очередь, выводится соотношение (78.2):

Группа G тогда и только тогда допускает изоморфные неприводимые P-представления, если ее группа представлений $\overline{G} = \{A, G\}$ допускает неприводимое линейное представление, квазиядро которого совпадает с A.

Примечание 2. С помощью теоретико-групповой функции Мебиуса-Дельсарта [10] соотношению (73 2) можно придать следующий вид:

$$\boxed{\sum_{\Pi \in M(G)} s(\Pi) = \sum_{H} \mu_D(H)\,(G : K_{H, G})\, m(G/H)} \tag{80.2}$$

где H пробегает множество всех нормальных делителей группы G. Для доказательства достаточно заметить, что $\mu_D(H) = 0$, если $H \subseteq S$ и $\mu_D(H) = \sum\limits_{T \subseteq M,\, C_T = H} \mu(T)$, если $H \subseteq S$. Если, в частности, цоколь группы G содержится в ее центре, то

$$\boxed{\sum_{\Pi \in M(G)} s(\Pi) = h \sum_{H} \mu_D(H)\, m(G/H)} \tag{81.2}$$

Для абелевых групп соотношение (81.2) будет получено другим способом в следующем разделе статьи.

III. ОБ ИЗОМОРФНЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

В дальнейшем всюду под G мы будем понимать конечную абелеву группу, а под Ω — поле комплексных чисел.

§ 1. БИНАРНЫЕ ХАРАКТЕРЫ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

Мультипликатор абелевой группы

1. *Определение.* Функцию $\chi(P, Q)$ элементов P и Q группы G назовем бинарным характером последней, если

(1). $\chi(P, Q)$ является характером группы G, как функция каждого из аргументов P, Q.

(2). $\chi(P, P) = 1$ при любом $P \in G$.

Из (1) и (2) вытекает, что

$$\chi(P, Q) = \overline{\chi(Q, P)}. \tag{1.3}$$

Действительно, $\chi(P, Q) = \chi(Q, Q)\chi(P, Q) = \chi(PQ, Q)$ и, точно так же, $\chi(Q, P) = \chi(P, P)\chi(Q, P) = \chi(PQ, P)$. Следовательно, $\chi(P, Q)\chi(Q, P) = \chi(PQ, Q)\chi(PQ, P) = \chi(PQ, PQ) = 1$, откуда и вытекает (1.3).

2. Пусть $\{\pi_{P, Q}\}$ система факторов P-представлений группы G. В силу (16.1) и коммутативности группы G

$$\omega(P, Q) = \frac{\pi_{P, Q}}{\pi_{Q, P}}. \tag{2.3}$$

Из (2.3) и (20.1) вытекает, что функция $\omega(P, Q)$ является бинарным характером группы G. Назовем этот бинарный характер связанным с системой факторов $\{\pi_{P, Q}\}$, а также с каждым P-представлением, принадлежащим к этой системе факторов.

Лемма 1.3. *Две системы факторов $\{\pi_{P, Q}\}$ и $\{\pi'_{P, Q}\}$ ассоциированы тогда и только тогда, если совпадают связанные с ними бинарные характеры.*

Доказательство. Пусть $\omega(P, Q) = \frac{\pi_{P, Q}}{\pi_{Q, P}}$ и $\omega'(P, Q) = \frac{\pi'_{P, Q}}{\pi'_{Q, P}}$. Если $\{\pi'_{P, Q}\} \sim \{\pi_{P, Q}\}$, то $\pi'_{P, Q} = \frac{\lambda_P \lambda_Q}{\lambda_{PQ}} \pi_{P, Q}$, откуда в силу $PQ = QP$ вытекает $\omega'(P, Q) = \omega(P, Q)$. Если, наоборот, $\omega'(P, Q) = \omega(P, Q)$, то, полагая $\rho_{P, Q} = \frac{\pi'_{P, Q}}{\pi_{P, Q}}$, будем иметь $\rho_{P, Q} = \rho_{Q, P}$. Так как $\{\rho_{P, Q}\}$ является, очевидно, системой факторов группы G, то существует неприводимое P-представление Γ, для которого имеет место $\Gamma(P)\Gamma(Q) = \rho_{P, Q}\Gamma(PQ)$. Легко проверить, что $\Gamma(Q)^{-1}\Gamma(P)\Gamma(Q) = \frac{\rho_{P, Q}}{\rho_{Q, P}}\Gamma(P) = \Gamma(P)$. В силу леммы Шура отсюда следует, что степень Γ равна единице и $\Gamma(P) = \lambda_P$, где $\lambda_P \in \Omega$. Следовательно, $\lambda_P \lambda_Q = \rho_{P, Q}\lambda_{PQ}$. Это значит, что $\{\rho_{P, Q}\} \sim \{1\}$, откуда вытекает, что $\{\pi'_{P, Q}\} \sim \{\pi_{P, Q}\}$.

Лемма доказана.

Бинарный характер (2.3), зависящий в силу леммы 1.3 лишь от типа Π системы факторов $\{\pi_{P, Q}\}$, мы будем называть связанным с типом Π.

Лемма 2.3. *Каждый бинарный характер группы G связан с некоторой ее системой факторов.*

Доказательство. Пусть $\chi(P, Q)$ — произвольный бинарный характер группы G, и $B_1, \ldots, B_1$ — базис последней. Положим

$$\chi_{ik} = \chi(B_i, B_k) \quad (i, k = 1, \ldots, k). \tag{3.3}$$

Замечая, что $\prod\limits_{r\geqslant i>k\geqslant 1}\chi_{ik}^{v_iu_r}$ однозначно определяется элементами

$$P=B_1^{u_1}\ \dots\ B_r^{u_r}\ \text{и}\ Q=B_1^{v_1}\ \dots\ B_r^{v_r}\,*,$$

положим

$$\pi_{P,\,Q}=\prod_{r\geqslant i>k\geqslant 1}\chi_{ik}^{u_iv_k}. \tag{4.3}$$

Покажем, что для системы $\{\pi_{P,\,Q}\}$ выполняются соотношения ассоциативности (2.1). Действительно, если $R=B_1^{w_1}\ \dots\ B_r^{w_r}$, то

$$\pi_{P,\,Q}\pi_{PQ,\,R}=\prod_{r\geqslant i>k\geqslant 1}\chi_{ik}^{u_iv_k}\cdot\prod_{r\geqslant i>k\geqslant 1}\chi_{ik}^{(u_i+v_i)w_i}=\prod_{r\geqslant i>k\geqslant 1}\chi_{ik}^{u_iv_k+u_iw_k+v_iw_k},$$

$$\pi_{P,\,QR}\pi_{Q,\,R}=\prod_{r\geqslant i>k\geqslant 1}\chi_{ik}^{u_i(v_k+w_k)}\cdot\prod_{r\geqslant i>k\geqslant 1}\chi_{ik}^{v_iw_k}=\prod_{r\geqslant i>k\geqslant 1}\chi_{ik}^{u_iv_k+u_iw_k+v_iw_k}.$$

Соотношение (2.1), таким образом, удовлетворяется. Следовательно, $\{\pi_{P,\,Q}\}$ есть система факторов. Бинарный характер $\chi(P,\,Q)$ связан с этой системой. Действительно, в силу (3.3)

$$\chi(P,\,Q)=\prod_{i,\,k=1}^{r}\chi_{ik}^{u_1v_k}.$$

Отсюда, замечая, что $\chi_{ii}=1$ и $\chi_{ik}=\overline{\chi}_{ki}=\overset{-1}{\chi_{ik}}$, получаем

$$\chi(P,\,Q)=\prod_{r\geqslant i>k\geqslant 1}\chi_{ik}^{u_iv_k}\prod_{1\leqslant i<k\leqslant r}\chi_{ik}^{u_iv_k}=\prod_{r\geqslant i>k\geqslant 1}\chi_{ik}^{u_iv_k}\prod_{r\geqslant i>k\geqslant 1}\chi_{ik}^{-v_iu_k}=\pi_{P,\,Q}\overset{-1}{\pi_{Q,\,P}},$$

что и доказывает утверждение.

3. Леммы 1.3 и 2.3 показывают, что имеет место взаимно однозначное соответствие между типами систем факторов группы G и ее бинарными характерами. Нетрудно, кроме того, проверить, что это соответствие имеет характер изоморфизма.

Итак, имеет место

Теорема 8. *Мультипликатор абелевой группы изоморфен группе ее бинарных характеров.*

Пусть e_i *— порядок базисного элемента* B_i группы G. Если $\chi(P,\,Q)$ — бинарный характер и $P=B_1^{u_1}\ \dots\ B_r^{u_r}$, $Q=B_1^{v_1}\ \dots\ B_r^{v_r}$ то, сохраняя обозначения леммы 2.3, имеем

$$\chi(P,\,Q)=\prod_{1\leqslant i<k\leqslant r}\chi_{ik}^{u_iv_k-u_kv_i}. \tag{5.3}$$

Так как $\chi_{ik}^{e_i}=\chi(B_i^{e_i},\ B_k)=\chi(E,\ B_k)=1$ и точно так же $\chi_{ik}^{e_k}=1$, то χ_{ik} есть корень d_{ik}-й степени из единицы, где $d_{ik}=(e_i,\ e_k)$. Наоборот, если χ_{ik} — произвольный корень d_{ik}-й степени из единицы, то равенством (5.3) определяется бинарный характер группы G. На основании этого легко заключить, что группа бинарных характеров группы G имеет ранг $\frac{r(r-1)}{2}$, причем ее базисные элементы имеют порядки $(e_i,\ e_k)$ $(1\leqslant i<k\leqslant r)$.

Таким образом доказана

Теорема 9. *Если $e_1, e_2, \dots, e_r$ — инварианты группы G, то инвариантами ее мультипликатора являются числа $(e_i,\ e_k)$, где $1\leqslant i<k\leqslant r$. В частности, ранг мультипликатора равен $\frac{r(r-1)}{2}$.*

§ 2. СВОЙСТВА НЕПРИВОДИМЫХ P-ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

Из леммы 16.2 вытекает

Теорема 10. *Все неприводимые P-представления абелевой группы G, принадлежащие к заданной системе факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$, имеют одно и то же ядро гомоморфизма, совпадающее с максимальным π-ядром K_π груп-*

* Это вытекает из того, что $\chi_{ik}^{u_iv_k}=\chi(B_i^{u_i}B_k^{v_k})$.

...ы G. *Подгруппа* K_π *является вместе с тем ядром гомоморфизма* $P \to \chi_P$, *где* $\chi_P(Q) = \omega(P, Q) = \frac{\pi_{P,Q}}{\pi_{Q,P}}$ — *бинарный характер группы* G, *связанный с системой факторов* $\{\pi_{P,Q}\}$.

Определение 1. Ядром бинарного характера $\omega(P, Q) = \chi_P(Q)$ *группы* G *назовем ядро* $K^{(\omega)}$ *гомоморфизма* $P \to \chi_P$. ($K^{(\omega)} = K_\pi$, *если характер* $\omega(P, Q)$ *связан с системой факторов* $\{\pi_{P,Q}\}$).

Теорема 11. *Число классов неприводимых P-представлений абелевой группы* G, *принадлежащих к системе факторов* $\{\pi_{P,Q}\}$, *равно порядку ядра* K_π *бинарного характера* $\omega(P, Q)$, *связанного с этой системой факторов.*

Доказательство. Так как G — абелева группа, то ее π-классы совпадают с π-элементами. Поэтому, в силу предложения C) из I, § 3.2, число классов неприводимых P-представлений группы G равно числу ее π-элементов. Замечая, что множество π-элементов группы G совпадает с ядром $K^{(\omega)} = K_\pi$ бинарного характера $\omega(P, Q)$, приходим к утверждению теоремы.

Определение 2. Бинарный характер $\omega(P, Q)$ *группы* G *назовем точным, если* $K^{(\omega)} = E$.

Из теоремы 10 вытекает

Лемма 3.3. *Неприводимое P-представление* Γ *группы* G *тогда и только тогда является изоморфным, если связанный с ним бинарный характер группы* G *является точным.*

Из леммы 3.3 и 2.3 вытекает

Лемма 4.3. *Группа* G *тогда и только тогда допускает изоморфные неприводимые P-представления, если существуют точные бинарные характеры группы* G.

Из теоремы 11 и леммы 3.3 вытекает

Теорема 12. *Если абелева группа допускает изоморфные неприводимые P-представления, принадлежащие к системе факторов* $\{\pi_{P,Q}\}$, *то имеется только один класс неприводимых P-представлений, принадлежащих к этой системе факторов.*

Из теоремы 12 и соотношения (31.1) вытекает

Теорема 13. *Если* Γ — *изоморфное неприводимое P-представление абелевой групы* G, n — *его степень и* h — *порядок группы* G, *то*

$$h = n^2. \tag{6.3}$$

Теоремы 12 и 13 могут быть получены и непосредственно, если воспользоваться следующим предложением, вытекающим из предложения E) в I, § 3.2.

Лемма 5.3. *Если* Γ — *неприводимое изоморфное P-представление степени* n *группы* G, χ — *его характер, то*

$$\chi(P) = \begin{cases} 0, & \text{если } P \neq E^* \\ n, & \text{если } P = E. \end{cases}$$

Приступая к доказательству теоремы 12, мы без ограничения общности можем предположить факторы $\pi_{P,Q}$ корнями из единицы. Если Γ — изоморфное неприводимое P-представление группы G, принадлежащее к системе факторов $\{\pi_{P,Q}\}$, то комплексно сопряженное P-представление $\bar{\Gamma}$ принадлежит к сопряженной системе факторов $\{\bar{\pi}_{P,Q}\}$ и также неприводимо и изоморфно. Так как $\pi_{P,Q} \cdot \bar{\pi}_{P,Q} = 1$, то кронекеровское произведение $\Phi = \Gamma \times \bar{\Gamma}$ P-представлений Γ и $\bar{\Gamma}$ принадлежит к единичной системе

* Для доказательства этого предложения можно исходить также из соотношения $\Gamma(Q)^{-1}\Gamma(P)\Gamma(Q) = \omega(P, Q)\Gamma(P)$, справедливого, если G — абелева группа.

факторов *. Следовательно, Φ — линейное представление группы $\boldsymbol{G}$. Степень его равна n. Так как $Sp\Phi(P) = Sp\Gamma(P)\,\overline{Sp\Gamma}(P)$, то в силу леммы 5

$$Sp\Phi(P) = \begin{cases} n^2, & \text{если } P = E \\ 0, & \text{если } P \neq E \end{cases}.$$

Отсюда вытекает, что представление Φ кратно регулярному представлению R группы $\boldsymbol{G} : \Phi \sim kR$. Так как $k = \frac{n^2}{h}$ есть целое положительное число, то $n^2 \geqslant h$. С другой стороны, так как Γ неприводимо, то в силу теоремы Бернсайда $n^2 \leqslant h$. Следовательно, $n^2 = h$.

Рассматривая кронекеровское произведение $\Gamma_1 \times \overline{\Gamma}_2$, где Γ_1 и Γ_2 — неприводимые P-представления, принадлежащие к системе факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$, причем Γ_1 изоморфно, получим доказательство теоремы 12.

Пусть $\boldsymbol{H}$ — ядро гомоморфизма неприводимого P-представления группы $\boldsymbol{G}$, принадлежащего к системе факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$. В силу теоремы 10 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{K}_\pi$. Так как K_π зависит лишь от типа системы факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$, то эту систему можно предположить приведенной по отношению к подгруппе $\boldsymbol{H}$ *(II, § 1.2, определение 5)*.

Пусть $\rho_{a,\,b}$ — система факторов фактор-группы $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$, рассмотренная при доказательстве леммы 6.2. Если Γ — принадлежащее к системе факторов $\{\pi_{P,\,Q}\}$ неприводимое P-представление группы $\boldsymbol{G}$ (его ядро гомоморфизма совпадает с $\boldsymbol{H}$), то, полагая

$$\Psi(a) = \Gamma(G_a),$$

мы получим изоморфное неприводимое P-представление фактор-группы $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$, принадлежащее к системе факторов $\rho_{a,\,b}$. Так как степень P-представления Ψ равна степени n P-представления Γ, то в силу теоремы 13, $n^2 = (\boldsymbol{G} : \boldsymbol{H})$.

Доказана, таким образом

Теорема 14. *Если Γ — неприводимое P-представление абелевой группы $\boldsymbol{G}$, n — его степень и $\boldsymbol{H}$ — ядро гомоморфизма, то*

$$n^2 = (\boldsymbol{G} : \boldsymbol{H})\,^{**}. \tag{7.3}$$

§ 3. СТРУКТУРА АБЕЛЕВЫХ ГРУПП, ДОПУСКАЮЩИХ ИЗОМОРФНЫЕ НЕПРИВОДИМЫЕ P-ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

1. Докажем отмеченную во введении теорему Р. Фракта об абелевых группах, допускающих изоморфные неприводимые проективные представления.

Лемма 6.3. *Бинарный характер $\omega(P, Q) = \chi_P(Q)$ группы $\boldsymbol{G}$ тогда и только тогда является точным, если гомоморфизм $P \to \chi_P$ является изоморфизмом на цоколе $\boldsymbol{S}$ группы $\boldsymbol{G}$.*

Доказательство. Вытекает из того факта, что ядро гомоморфизма $P \to \chi_P$ отлично от единицы тогда и только тогда, если оно имеет отличное от единицы пересечение с цоколем группы $\boldsymbol{G}$.

Пусть $\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{G}_2, \ldots, \boldsymbol{G}_l$ — силовские подгруппы группы $\boldsymbol{G}$; $p_i^{g_i}$ — порядок группы $\boldsymbol{G}_i$.

Лемма 7.3. *Если $\omega(P, Q)$ — бинарный характер группы $\boldsymbol{G}$, $Q_i \in \boldsymbol{G}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$,* то

$$\omega(Q_i, Q_k) = 1 \quad (i \neq k). \tag{8.3}$$

---

* Если P-представления Γ_1 и Γ_2 принадлежат соответственно к системам факторов $\{\pi'_{P,\,Q}\}$ и $\{\pi''_{PQ}\}$, то $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ принадлежит к системе $\{\pi'_{P,\,Q}\pi_{P,\,Q}\}$.

** Отсюда снова получается, что $r_\pi = [H]$.

Доказательство. Заметим сначала, что $\{\omega(Q_i, Q_k)\}^{p_i^{g_i}} = \omega(Q^{p_i^{g_i}}, Q_k) = \omega(E, Q_k) = 1$ и, точно так же, $\{\omega(Q_i, Q_k)\}^{p_k^{g_k}} = 1$. Отсюда, принимая во внимание равенство $(p_i^{g_i}, p_k^{g_k}) = 1$, получаем (8.3).

Обозначим через $\omega_i(P, Q)$ бинарный характер подгруппы G_i, индуцируемый на ней бинарным характером $\omega(P, Q)$:

$$\omega_i(P, Q) = \omega(P, Q) \quad (P, Q \in G_i). \tag{9.3}$$

Пусть $P, Q \in G$, $P = P_1 \dots P_l$, $Q = Q_1 \dots Q_l$ $(P_i, Q_i \in G_i)$. В силу леммы 7.3 имеем

$$\omega(P, Q) = \omega(P_1, Q_1)\,\omega(P_2, Q_2) \dots \omega(P_l, Q_l).$$

Следовательно,

$$\omega(P, Q) = \prod_{i=1}^{l} \omega_i(P_i, Q_i). \tag{10.3}$$

Если, наоборот, $\omega_1(P, Q), \dots, \omega_l(P, Q)$ — любые бинарные характеры подгрупп $G_1, \dots, G_l$, то соотношением (10.3) определяется, как легко проверить, бинарный характер $\omega(P, Q)$ группы G.

Определение 3. Бинарные характеры $\omega_i(P, Q)$ назовем компонентами бинарного характера $\omega(P, Q)$.

Лемма 8.3. *Бинарный характер $\omega(P, Q)$ является точным тогда и только тогда, если точными являются все его компоненты.*

Доказательство. 1) Если, например, характер $\omega_1(P, Q)$ не является точным, то для некоторого $P_1 \neq E$, $P_1 \in G_1$ и любого $Q_1 \in G_1$ будет иметь место $\omega_1(P_1, Q_1) = 1$. Но тогда в силу (10.3) $\omega(P_1, Q) = 1$ для любого $Q \in G$. Следовательно, бинарный характер $\omega(P, Q)$ не является точным.

2) Если бинарный характер $\omega(P, Q)$ группы G не является точным, то для некоторого $P \in G$, $P \neq E$ и любого $Q \in G$ имеет место $\omega(P, Q) = 1$. Пусть $P = P_1P_2 \dots P_l$ $(P_i \in G_i)$. Так как $P \neq E$, то отличен от единицы хотя бы один из элементов P_i. Если, например $P_1 \neq E$, то в силу (10.3) для каждого $Q \in G_1$ имеет место $\omega(P, Q) = \omega_1(P_1, Q)$. Следовательно, $\omega_1(P_1, Q) = 1$ для каждого $Q \in G_1$. Так как $P_1 \neq E$, то компонента ω_1 не является точной.

Из лемм 4.3 и 8.3 вытекает

Лемма 9.3. *Группа G тогда и только тогда допускает изоморфные неприводимые P-представления, если этим свойством обладают все ее силовские подгруппы.*

Пусть $B_1, \dots, B_r$ — базисные элементы группы G; e_i — порядок B_i. Положим для бинарного характера $\omega(P, Q)$ группы G

$$\omega_{\lambda\mu} = \omega(B_\lambda, B_\mu). \tag{11.3}$$

Замечая, что $\omega_{\lambda\mu}^{e_\lambda} = \omega_{\lambda\mu}^{e_r} = 1$, получаем

$$\omega_{\lambda\mu} = e^{2\pi i \frac{f_{\lambda\mu}}{d_{\lambda\mu}}}, \tag{12.3}$$

где

$$d_{\lambda\mu} = (e_\lambda, e_\mu), \tag{13.3}$$

а $f_{\lambda\mu}$ — целочисленный показатель, однозначно определенный по модулю $d_{\lambda\mu}$. Из (13.3) вытекает

$$d_{\lambda\mu} = d_{\mu\lambda}. \tag{14.3}$$

Так как в силу (1.3) $\omega_{\lambda\mu}=\overline{\omega}_{\mu\lambda}=e^{-2\pi i\frac{f_{\mu\lambda}}{d_{\lambda\mu}}}$, $\omega_{\lambda\lambda}=1$, то

$$f_{\lambda\mu}\equiv -f_{\mu\lambda}\pmod{_{\lambda\mu}}\ (\lambda\neq\mu), \tag{15.3}$$
$$f_{\lambda\lambda}\equiv 0\pmod{d_{\lambda\lambda}}. \tag{16.3}$$

Таким образом, бинарному характеру $\omega(P, Q)$ поставлена в соответствие квадратная матрица $F_\omega=\|f_{\lambda\mu}\|$ порядка r, целочисленные элементы $f_{\lambda\mu}$ которой удовлетворяют условию (15.3) и (16.3). Наоборот, каждой такой матрице F отвечает некоторый бинарный характер группы $\boldsymbol{G}$. Именно, определив числа $\omega_{\lambda\mu}$ с помощью (12.3), положим

$$\omega(P, Q)=\prod_{\lambda,\,\mu=1}^{r}\omega_{\lambda\mu}^{u_\lambda v_\mu}, \tag{17.3}$$

где $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_r$ определяются из условий

$$P=P_1^{u_1}\ldots P_r^{u_r},\ Q=Q_1^{v_1}\ldots Q_r^{v_r}\ (P_i\in\boldsymbol{G}_i,\ Q_i\in\boldsymbol{G}_i).$$

Легко проверить, что $\omega(P, Q)$ есть бинарный характер группы $\boldsymbol{G}$, причем $F_\omega=F$.

Две целочисленные матрицы $F'=\|f'_{\lambda\mu}\|$ и $F''=\|f''_{\lambda\mu}\|$, элементы которых удовлетворяют условиям (15.3) и (16.3), будем относить к одному и тому же классу ($F'\overline{\overline{\sim}}F''$), если $f'_{\lambda\mu}\equiv f''_{\lambda\mu}\pmod{d_{\lambda\mu}}$.

Если $\omega'(P, Q)$ и $\omega''(P, Q)$ — бинарные характеры группы $\boldsymbol{G}$, то $\omega'=\omega''$ тогда и только тогда, если $F_{\omega'}\overline{\overline{\sim}}F_{\omega''}$. Кроме того, $F_{\omega'\omega''}\overline{\overline{\sim}}F_{\omega'}+F_{\omega''}$.

Классы матриц F, удовлетворяющие условиям (15.3) и (16.3), естественным образом определяют аддитивную абелеву группу Φ, изоморфную, на основании предыдущего, группе бинарных характеров группы $\boldsymbol{G}$ (т. е. мультипликатору группы $\boldsymbol{G}$).

Начиная с этого момента, мы будем считать $\boldsymbol{G}$ абелевой p-группой (p — простое число).

Найдем условия, которым должна удовлетворять матрица F_ω, для того чтобы бинарный характер $\omega(P, Q)$ группы $\boldsymbol{G}$ был точным. Пусть $e_i=p^{\varepsilon_i}$ $(i=1, \ldots r)$, причем

$$\varepsilon_1\geqslant\varepsilon_2\geqslant\ldots\geqslant\varepsilon_r. \tag{18.3}$$

В силу леммы 6.3 бинарный характер $\omega(P, Q)$ группы $\boldsymbol{G}$ является точным тогда и только тогда, если единственным элементом Q цоколя $\boldsymbol{S}$ группы $\boldsymbol{G}$, удовлетворяющим системе условий

$$\omega(B_\lambda, Q)=1\quad(\lambda=1, \ldots, r), \tag{19.3}$$

является единица группы $\boldsymbol{G}$. Замечая, что элементы $A_\lambda=B_\lambda^{\frac{e_\lambda}{p}}$ $(\lambda=1, 2, \ldots, r)$ образуют базис цоколя, положим

$$Q=A_1^{\xi_1}\ldots A_r^{\xi_r},$$

где целочисленные показатели $\xi_1, \ldots, \xi_r$ однозначно определены по модулю p. Полагая

$$\tau_{\lambda\mu}=\omega(B_\lambda, A_\mu)\quad(\lambda, \mu=1, \ldots, r), \tag{20.3}$$

будем иметь

$$\omega(B_\lambda, Q)=\prod_{\mu=1}^{r}\tau_{\lambda\mu}^{\xi_\mu}. \tag{21.3}$$

Так как порядки элементов A_λ равны p, то $\tau^p_{\lambda\mu} = \omega(B_\lambda, A^p_\mu) = \omega(B_\lambda, E) = 1$. Следовательно,

$$\tau_{\lambda\mu} = e^{2\pi i \frac{w_{\lambda\mu}}{p}} \quad (\lambda, \mu = 1, \ldots, r) \tag{22.3}$$

где $w_{\lambda\mu}$ — однозначно определены по модулю p.

В силу (22.3) соотношение (21.3) принимает вид

$$\omega(B_\lambda, Q) = e^{\frac{2\pi i}{p}\sum\limits_{\mu=1}^{r} w_{\lambda\mu}\xi_\mu}.$$

Следовательно, условие (19.3) равносильно системе линейных сравнений

$$\sum_{\mu=1}^{r} w_{\lambda\mu}\xi_\mu \equiv 0 \pmod p \quad (\lambda = 1, \ldots, r). \tag{23.3}$$

Таким образом, бинарному характеру $\omega(P, Q)$ сопоставлена некоторая однозначно определенная по модулю p целочисленная матрица $W_\omega = \| w_{\lambda\mu} \|$. При этом характер $\omega(P, Q)$ является точным тогда и только тогда, если система сравнений (23.3) имеет лишь тривиальное решение $\xi_1 \equiv \ldots \equiv \xi_r \equiv 0 \pmod p$. Следовательно, имеет место

Лемма 10.3. *Бинарный характер* $\omega(P, Q)$ *тогда и только тогда является точным, если* $|W_\omega| \not\equiv 0 \pmod p$.

Установим связь между матрицами F_ω и W_ω. В силу (15.3) и (12.3)

$$\tau_{\lambda\mu} = \omega\left(B_\lambda, B_\mu^{\frac{e_\mu}{p}}\right) = \omega_{\lambda\mu}^{\frac{e_\mu}{p}} = e^{2\pi i \frac{f_{\lambda\mu} e_\mu}{d_{\lambda\mu} p}}. \tag{24.3}$$

Сравнивая (24.3) с (22.3), получаем

$$w_{\lambda\mu} \equiv \frac{f_{\lambda\mu} e_\mu}{d_{\lambda\mu}} \pmod p \quad (\lambda, \mu = 1, \ldots, r). \tag{25.3}$$

Так как, в силу (13.3) и (18.3)

$$d_{\lambda\mu} = \begin{cases} e_\mu, & \text{если } \lambda < \mu, \\ e_\lambda, & \text{если } \lambda \geq \mu, \end{cases} \tag{26.3}$$

то

$$w_{\lambda\mu} \equiv \begin{cases} f_{\lambda\mu}, & \text{если } \lambda < \mu, \\ \dfrac{f_{\lambda\mu} e_\mu}{e_\lambda}, & \text{если } \lambda \geq \mu. \end{cases} \tag{27.3}$$

Пусть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_{r_1} > \varepsilon_{r_1+1} = \varepsilon_{r_1+2} = \ldots = \varepsilon_{r_2} > \ldots > \varepsilon_{r_{s-1}+1} = \\ = \varepsilon_{r_{s-1}+2} = \ldots = \varepsilon_{r_s}. \tag{28.3}$$

Из (27.3) и (28.3) вытекает

$$w_{\lambda\mu} \equiv f_{\lambda\mu} \pmod p, \text{ если } r_{\alpha-1} + 1 \leq \lambda, \mu \leq r_\alpha. \tag{29.3}$$

$$w_{\lambda\mu} \equiv 0 \pmod p, \text{ если } \alpha > \beta, \; r_{\alpha-1} + 1 \leq \lambda \leq r_\alpha, \; r_{\beta-1} + 1 \leq \mu \leq r_\beta. \tag{30.3}$$

Здесь $\alpha = 0, 1, \ldots, s$, причем $r_0 = 0$.

Из (29.3), (15.3) и (16.3) следует, что матрицы $W_\omega^{(\alpha)} = \| w_{\lambda\mu} \|$ $(r_{\alpha-1} + 1 \leqslant \lambda, \mu \leqslant r_\alpha)$ являются кососимметрическими по модулю p. Из (30.3) вытекает, что

$$W_\omega \equiv \left\| \begin{matrix} W_\omega^{(1)} & * & \dots & * \\ 0 & W_\omega^{(2)} & \dots & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & W_\omega^{(s)} \end{matrix} \right\| \pmod p. \tag{31.3}$$

Вдоль главной диагонали матрицы, стоящей в правой части (31.3), стоят клетки $W_\omega^{(1)}, \dots, W_\omega^{(s)}$, а под этими клетками — нули.

В силу (29.3) имеем

$$F_\omega \equiv \left\| \begin{matrix} W_\omega^{(1)} & F_{12} & \dots & F_{1s} \\ F_{21} & W_\omega^{(2)} & \dots & F_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{s1} & F_{s2} & \dots & W_\omega^{(s)} \end{matrix} \right\| \pmod p, \tag{32.3}$$

где $F_{\alpha\beta}$ — клетка с $r_\alpha - r_{\alpha-1} = d_\alpha$ строками и $r_\beta - r_{\beta-1} = d_\beta$ колоннами. Квазидиагональную матрицу

$$\overset{\circ}{F}_\omega = \left\| \begin{matrix} F_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & F_{ss} \end{matrix} \right\| \tag{33.3}$$

где $F_{\alpha\alpha} = \| f_{\lambda\mu} \|$ $(r_{\alpha-1} + 1 \leqslant \lambda, \mu \leqslant r_\alpha)$ назовем *квазидиагональной компонентой* матрицы F_ω.

Переходя в (31.3) к определителям, получаем

$$| W_\omega | \equiv | W_\omega^{(1)} | \cdot | W_\omega^{(2)} | \dots | W_\omega^{(s)} | \pmod p,$$

или

$$| W_\omega | \equiv | F_{11} | \cdot | F_{22} | \dots | F_{ss} | \pmod p. \tag{34.3}$$

Из (34.3) и леммы 10.3 вытекает

Лемма 11.3. *Бинарный характер $\omega(P, Q)$ группы $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда является точным, если квазидиагональная компонента $\overset{\circ}{F}_\omega$ матрицы F_ω является по модулю p неособенной матрицей.*

Теорема 15. (Р. Фракт). *Абелева группа тогда и только тогда допускает изоморфные неприводимые P-представления, если она разлагается в прямое произведение двух изоморфных групп.*

*Доказательство**. Лемма 9.3 позволяет при доказательстве теоремы Фракта ограничиться рассмотрением абелевых p-групп. В силу лемм 4.3 и 11.3 абелева p-группа $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда допускает изоморфные неприводимые P-представления, если существует целочисленная матрица F, удовлетворяющая условиям (15.3), (16.3) и имеющая неособенную по модулю p квазидиагональную компоненту $\overset{\circ}{F}$. Так как клетки $F_{\alpha\alpha}$ являются по модулю p кососимметрическими матрицами, то условие $| F_{\alpha\alpha} | \not\equiv 0 \pmod p$ может выполняться лишь при условии, что по-

* Приведенное ниже доказательство теоремы Р. Фракта, имея много общего с оригинальным доказательством статьи [5], отличается от последнего большей элементарностью, так как не опирается, во-первых, на шуровскую теорию центральных расширений и, во-вторых, не использует результатов Г. Фробениуса об элементарных делителях целочисленных кососимметрических матриц.

рядок $d_\alpha = r_\alpha - r_{\alpha-1}$ клетки $F_{\alpha\alpha}$ есть четное число. Таким образом, если группа G допускает изоморфные неприводимые P-представления, то $d_1 = r_1$, $d_2 = r_2 - r_1$, ..., $d_s = r_s - r_{s-1}$ суть четные числа. В силу (28.3) отсюда вытекает, что

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \ \varepsilon_3 = \varepsilon_4, \ \ldots, \ \varepsilon_{s-1} = \varepsilon_s.$$

Следовательно, группа G разлагается в прямое произведение двух изоморфных между собой подгрупп H_1 и H_2, где H_1 порождается базисными элементами $B_1, B_3, \ldots, B_{s-1}$, а H_2 — базисными элементами $B_2, B_4, \ldots, B_s$. Таким образом, необходимость условия Фракта доказана. Наоборот, при выполнении этого условия все числа $d_1, d_2, \ldots, d_s$ являются четными. Поэтому существуют матрицы F, удовлетворяющие условиям (15.3) и (16.3) и имеющие неособенную по модулю p квазидиагональную компоненту. В качестве матрицы F может быть взята матрица вида (33.3), где клетки $F_{11}, \ldots, F_{ss}$ суть любые неособенные по модулю p кососимметрические матрицы порядков $d_1, \ldots, d_s$. Можно, например, положить

$$F_{\alpha\alpha} = \left\| \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & -1 & 0 \end{array} \right\| \quad (\alpha = 1, \ldots, s).$$

Тем самым доказана и достаточность условия Фракта.

2. В III, § 2, было показано, что ядро гомоморфизма неприводимого P-представления абелевой группы вполне определяется его типом (или типом системы факторов, к которому оно принадлежит).

Возникает вопрос о числе $t(G)$ типов изоморфных неприводимых P-представлений абелевой группы G. В силу леммы 3.3 $t(G)$ равно количеству точных бинарных характеров группы G.

Пусть Π-тип P-представлений группы G. Если существуют изоморфные неприводимые P-представления типа Π, то в силу соотношения (70.2) (II, § 3) и теорем 11 и 12 (III, § 2) имеем $s(\Pi) = h$. Если же изоморфных неприводимых P-представлений типа Π не существует, то, очевидно, $s(\Pi) = 0$. Поэтому левая часть соотношения (81.2) оказывается равной $ht(G)$ и соотношение (81.2) переходит в следующее

$$\boxed{t(G) = \sum_H \mu_D(H)\, m(G/H)} \tag{35.3}$$

Здесь H пробегает множество всех подгрупп группы G. Соотношение (35.3) можно доказать и непосредственно. Заметим сначала, что если H подгруппа группы G, то последняя тогда и только тогда допускает неприводимые P-представления с ядром гомоморфизма H, если фактор-группа G/H допускает изоморфные неприводимые P-представления; при этом будет иметь место взаимно однозначное соответствие между типами неприводимых P-представлений группы G с ядром H и типами изоморфных P-представлений фактор-группы G/H (см. доказательство теоремы 13). Из сделанного замечания вытекает, что $t(G/H)$ равно числу типов неприводимых P-представлений группы G с заданным ядром H. Следовательно, $\sum\limits_{H \subseteq G} t(G/H) = m(G)$. Применяя формулу обращения Дедекинда — Дельсарта [10, 12], отсюда получаем (35.3).

Допустим теперь, что G — элементарная абелева p-группа ранга r. Если H — подгруппа группы G, $\varkappa$ — ее ранг, то, как известно, $\mu_D(H) = (-1)^{\varkappa} p^{\frac{\varkappa(\varkappa-1)}{2}}$. Замечая, что количество подгрупп H заданного ранга $\varkappa$ равно

$$A_r^{\varkappa}(p) = \frac{(p^r-1)(p^{r-1}-1)\ldots(p^{r-\varkappa+1}-1)}{(p^{\varkappa}-1)(p^{\varkappa-1}-1)\ldots(p-1)}, \tag{36.3}$$

и, кроме того, что в силу теоремы 9

$$m(G/H) = p^{\frac{(r-\varkappa)(r-\varkappa-1)}{2}},$$

из (35.3) после простых преобразований получаем

$$t(G) = p^{\frac{r(r-1)}{2}} \sum_{\varkappa=0}^{r} (-1)^{\varkappa} A_r^{\varkappa}\left(\frac{1}{p}\right). \tag{37.3}$$

Замечая, что

$$A_r^{\varkappa}(u) = A_r^{r-\varkappa}(u)$$

из (37.3) при нечетном r получаем $t(G) = 0$, как и должно быть в силу теоремы Р. Фракта. Если же r четное, то с помощью рекуррентного соотношения

$$A_r^{\varkappa}(u) = u^{\varkappa} A_{r-1}^{\varkappa}(u) + A_{r-1}^{\varkappa-1}(u),$$

применяя метод индукции, получаем

$$t(G) = p^{\frac{r(r-1)}{2}} f_r\left(\frac{1}{p}\right), \tag{38.3}$$

где

$$f_r(u) = \prod_{k=1}^{\frac{r}{2}} (1 - u^{2k-1}). \tag{39.3}$$

Таким образом, при четном r $t(G) \neq 0$. Тем самым получено новое доказательство теоремы Р. Фракта для частного случая абелевых элементарных групп. С помощью (35.3) можно было бы получить теорему Р. Фракта и для общего случая. Мы, однако, пойдем обратным путем: отправляясь от результатов, найденных в § 3.1, выразим $t(G)$ через инварианты группы G. Пусть G — абелева p-группа. Из леммы 1.3 вытекает, что $t(G)$ равно числу классов матриц F, удовлетворяющих условиям (15.3) и (16.3) и имеющих неособенную по модулю p квазидиагональную компоненту $\mathring{F}$. Классы матриц F, для которых имеет место $\mathring{F} \equiv 0 \pmod{p}$ образуют, очевидно, подгруппу $\mathring{\Phi}$ группы Φ классов всех матриц F, удовлетворяющих условиям (15.3) и (16.3). Фактор группа $\Phi/\mathring{\Phi}$, очевидно, изоморфна аддитивной группе D классов вычетов по модулю p, образованных квазидиагональными матрицами вида

$$\mathring{F} = \left\| \begin{matrix} F_{11} & & & \\ & F_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_{ss} \end{matrix} \right\| \tag{40.3}$$

где $F_{\alpha\alpha}$ $(\alpha = 1, \ldots, s)$ — кососимметрическая по модулю p матрица порядка $d_\alpha = r_\alpha - r_{\alpha-1}$.

Так как порядок группы D, очевидно, равен $p^{\frac{d_1(d_1-1)}{2}} p^{\frac{d_2(d_2-1)}{2}} \ldots$ $\ldots p^{\frac{d_s(d_s-1)}{2}}$, а порядок группы Φ равен порядку мультипликатора группы G (III, § 3.1), то

$$[\mathring{\Phi}] = \frac{m(G)}{p^{\sum\limits_{\nu=1}^{s} \frac{d_\nu(d_\nu-1)}{2}}}. \qquad (41.3)$$

Обозначив через $N_p(d_1, d_2, \ldots, d_s)$ число классов вычетов по модулю p, образованных неособенными по модулю p матрицами вида (40.3), будем иметь, очевидно,

$$N_p(d_1, \ldots, d_s) = N_p(d_1) N(d_2) \ldots N_p(d_s). \qquad (42.3)$$

Общее число классов матриц F, удовлетворяющих условиям (15.3) и (16.3), содержащихся в смежных классах разложения группы Φ по $\mathring{\Phi}$, порожденных матрицами F с неособенными по модулю p квазидиагональными компонентами, равно, очевидно,

$$[\mathring{\Phi}] N_p(d_1, d_2, \ldots. d_s).$$

В силу (41.3) и (42.3), принимая во внимание сказанное выше, имеем

$$t(G) = \frac{m(G)}{p^{\sum \frac{d_\nu(d_\nu-1)}{2}}} N_p(d_1) \ldots N_p(d_s). \qquad (43.3)$$

Если, в частности, G — элементарная p-группа четного ранга r, то $s = 1$ $d_1 = r$, $m(G) = p^{\frac{r(r-1)}{2}}$ и, следовательно,

$$t(G) = N_p(r) \qquad (44.3)$$

Сравнивая (44 3) с (38.3), находим выражение для числа $N_p(r)$ классов вычетов $\operatorname{mod} p$, образованных неособенными кососимметрическими целочисленными матрицами порядка r:

$$N_p(r) = p^{\frac{r(r-1)}{2}} f_r\left(\frac{1}{p}\right). \qquad (45.3)$$

Предполагая, в соответствии с теоремой Р. Фракта, числа $d_1, d_2, \ldots, d_s$ четными, из (43.3) и (45.3) получаем окончательно

$$\boxed{t(G) = m(G) f_{d_1}\left(\frac{1}{p}\right) f_{d_2}\left(\frac{1}{p}\right) \ldots f_{d_s}\left(\frac{1}{p}\right)} \qquad (46.3)$$

В общем случае, если $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_l$, где G_i — силовские подгруппы группы G

$$t(G) = t(G_1) t(G_2) \ldots t(G_l). \qquad (47.3)$$

Примечание. Результаты, выражаемые теоремами 7—14 настоящего раздела в той или иной форме содержатся в статье [5]. Соотношения (35.3) и (46.3), по-видимому, являются новыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schur, J. Über die Darstellung der endlicher Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. Reine Angew. Math. 127 (1904), 20—50.

2. Schur, J. *Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch* gebrochene lineare Substitutionen, J. Reine Angew. Math. 132 (1907), 85—137.

3. Tazawa, M. Über die Darstellung der endlicher verallgemeinerten Gruppen, Science Reports of the Imperial Tôhoku Univers, vol. I, № 23 (1934), 76—88.

4. Asano, K. und Shoda, K. Zur Theorie der Darstellungen einer endlichen Gruppe durch Kollineationen, Compositio Math., Vol 2. № 2 (1935), 230—240.

5. Frucht, R. Über die Darstellung endlicher abelscher Gruppen durch Kollineationen, J. Reine Angew. Math. 166 (1932), 16—29.

6. Frucht, R. Zur Darstellung endlicher Abelscher Gruppen durch Kollineationen, Mathem. Zeitschr. Bd. 63, № 1—4 (1955).

7. Kochendörffer, R. Über treue irreduzible Darstellungen endlicher Gruppen. Mathem. Nachrichten. Bd. 1 (1948), 25—39.

8. Gaschütz, W. Endliche Gruppen mit treuen absolut—irreduziblen Darstellungen, Mathem. Nachrichten, Bd. 12, № 3/4 (1954).

9. Жмудь, Э. Об изоморфных линейных представлениях конечных групп, Матем. сборник, том 38, № 4 (1956), 417—430.

10. Жмудь. Э. Теоретико-групповая функция Мебиуса—Дельсарта и теория линейных представлений конечных групп, Изв. высших учебных заведений. Математика, № 1 (1957), 133—141.

11. Жмудь Э. О ядрах гомоморфизмов линейных представлений конечных групп, Матем. сборник, том 44, № 3 (1958), 353—408.

12. Delsarte, S, Fonctions de Möbius sur les group Abelian finis, Annals of Math., 49 (1948), 600—609.