I.

О ПРИБЛИЖЕННЫХЪ ВЫРАЖЕНІЯХЪ

одних интеграловъ черезъ другіе,

ВЗЯТЫЕ ВЪ ТѢХЪ-ЖЕ ПРЕДѢЛАХЪ.

П. Л. Чебышева.

Въ томъ случаѣ, когда извѣстны значенія функціи $F(x)$ при всѣхъ величинахъ перемѣнной x отъ $x=a$ до $x=b$, послѣдняя изъ выведенныхъ нами формулъ въ мемуарѣ *о непрерывныхъ дробяхъ*[1], по замѣнѣ суммъ интегралами, даетъ такое разложеніе функціи $F(x)$:

$$F(x)=\frac{\int F\psi_0\vartheta dx}{\int\psi_0{}^2\vartheta dx}\psi_0+\frac{\int F\psi_1\vartheta dx}{\int\psi_1{}^2\vartheta dx}\psi_1+$$
$$+\frac{\int F\psi_2\vartheta dx}{\int\psi_2{}^2\vartheta dx}\psi_2+\ldots\ldots,$$

гдѣ ϑ какая нибудь функція, прерывная или непрерывная, но сохраняющая знакъ $+$ между $x=a$, $x=b$, предѣлами, между которыми берутся всѣ интегралы, а ψ_0, ψ_1, ψ_2, ... суть знаменатели подходящихъ дробей интеграла

$$\int_a^b\frac{\vartheta(z)}{x-z}dz,$$

получаемыхъ разложеніемъ его въ непрерывную дробь.

---

[1] Журналъ Ліувилля, 2-я серія, Т. III, 1858, p. 289—323.

Разлагая по этой формулѣ двѣ какія нибудь функціи u, v и интегрируя произведеніе $uv\vartheta dx$ отъ $x=a$, до $x=b$, находимъ, что интегралъ

$$\int_a^b uv\vartheta dx$$

приводится къ ряду, состоящему изъ такихъ членовъ:

$$\frac{\int u\psi_m\vartheta dx . \int v\psi_n\vartheta dx}{\int \psi_m{}^2\vartheta dx . \int \psi_n{}^2\vartheta dx} . \int \psi_m\psi_n\vartheta dx,$$

гдѣ числа m, n принимаютъ всѣ значенія отъ 0 до ∞.

Замѣчая, что, по извѣстному свойству функцій $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots.$ при m не равномъ n интегралъ

$$\int \psi_m\psi_n\vartheta dx$$

обращается въ нуль, мы изъ этого ряда выводимъ такое разложеніе интеграла $\int uv\vartheta dx$:

$$\int uv\vartheta dx = \frac{\int u\psi_0\vartheta dx . \int v\psi_0\vartheta dx}{\int \psi_0{}^2\vartheta dx} +$$

$$+\frac{\int u\psi_1\vartheta dx . \int v\psi_1\vartheta dx}{\int \psi_1{}^2\vartheta dx} + \frac{\int u\psi_2\vartheta dx \int v\psi_2\vartheta dx}{\int \psi_2{}^2\vartheta dx} + \ldots\ldots$$

Останавливая этотъ рядъ на членѣ

$$\frac{\int u\psi_{n-1}\vartheta dx . \int v\psi_{n-1}\vartheta dx}{\int \psi_{n-1}{}^2\vartheta dx}$$

и называя черезъ R_n дополнительный членъ, мы получаемъ равенство

$$\int uv\vartheta dx = \frac{\int u\psi_0\vartheta dx . \int v\psi_0\vartheta dx}{\int \psi_0{}^2\vartheta dx} + \frac{\int u\psi_1\vartheta dx . \int v\psi_1\vartheta dx}{\int \psi_1{}^2\vartheta dx} +$$

$$+ \ldots.. + \frac{\int u\psi_{n-1}\vartheta dx . \int v\psi_{n-1}\vartheta dx}{\int \psi_{n-1}{}^2\vartheta dx} + R_n.$$

Опредѣляя выраженіе дополнительнаго члена R_n въ этомъ разложеніи интеграла $\int uv\vartheta dx$, мы нашли, что онъ обладаетъ такими свойствами:

1) *Числовая величина его не превосходитъ*

$$\frac{\int \psi_n^2 \vartheta dx}{\left(\frac{\partial^n \psi_n(x)}{dx^n}\right)^2} AB,$$

гдѣ A, B суть наибольшія числовыя величины производныхъ $\frac{\partial^n u}{dx^n}$, $\frac{\partial^n v}{dx^n}$ *въ предѣлахъ интегрированія.*

2) *Если въ этихъ предѣлахъ производныя* $\frac{\partial^n u}{dx^n}$, $\frac{\partial^n v}{dx^n}$ *не мѣняютъ своего знака, дополнительный членъ* R_n *имѣетъ одинакій знакъ съ произведеніемъ* $\frac{\partial^n u}{dx^n} \cdot \frac{\partial^n v}{dx^n}$.

Чтобы показать приложеніе этого, мы разсмотримъ случай $n=1$.

Такъ какъ первыя подходящія дроби интеграла

$$\int_a^b \frac{\vartheta(z)}{x-z} dz,$$

получаемыя разложеніемъ его въ непрерывную дробь, суть

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{\int \vartheta dx}{\int \vartheta dx \,.\, x - \int x\vartheta dx},$$

то функціи ψ_0, ψ_1, входящія въ наши формулы, имѣютъ слѣдующія величины:

$$\psi_0 = 1; \; \psi_1 = \int \vartheta dx \,.\, x - \int x\vartheta dx.$$

Полагая въ нашихъ формулахъ

$$n=1$$

и внося въ нихъ эти величины функцій ψ_0, ψ_1, мы получаемъ равенство

$$\int uv\vartheta dx = \frac{\int u\vartheta\, dx \,.\, \int v\vartheta\, dx}{\int \vartheta dx} + R_1$$

и такое выраженіе для высшаго предѣла числовыхъ величинъ дополнительнаго члена R_1:

$$\frac{\int \vartheta dx \,.\, \int x^2 \vartheta dx - (\int x\vartheta dx)^2}{\int \vartheta dx} AB,$$

гдѣ A, B суть наибольшія числовыя величины производныхъ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ въ предѣлахъ интегрированія. — Въ томъ случаѣ, когда производныя $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ въ предѣлахъ интегрированія не мѣняютъ своихъ знаковъ, дополнительный членъ R_1 по вышесказанному будетъ имѣть одинакій знакъ съ произведеніемъ $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$.

Полагая $\vartheta = 1$ и принимая за предѣлы интегрированій 0 и 1, мы по вышенайденной формулѣ получаемъ равенство

$$\int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 u dx \,.\, \int_0^1 v dx + R_1,$$

и такое выраженіе для высшаго предѣла числовыхъ величинъ R_1:

$$\frac{1}{12} A\,B.$$

Для другого приложенія мы разсмотримъ случай, когда

$$\vartheta = 1$$

и предѣлы интегрированій суть -1 и $+1$. Въ этомъ случаѣ, какъ извѣстно, функціи ψ_0, ψ_1, ψ_2,.... приводятся къ функціямъ Лежандра X_0, X_1, X_2,...... и вслѣдствіе того по нашей формулѣ получается такое равенство:

$$\int_{-1}^{+1} uv\,dx = \frac{\int_{-1}^{+1} uX_0 dx \,.\, \int_{-1}^{+1} vX_0 dx}{\int_{-1}^{+1} X_0{}^2 dx} +$$

$$+ \frac{\int_{-1}^{+1} uX_1 dx \,.\, \int_{-1}^{+1} vX_1 dx}{\int_{-1}^{+1} X_1{}^2 dx} + \ldots + \frac{\int_{-1}^{+1} uX_{n-1} dx \,.\, \int_{-1}^{+1} vX_{n-1} dx}{\int_{-1}^{+1} X_{n-1}{}^2 dx} + R_n,$$

откуда по внесеніи величинъ интеграловъ

$$\int_{-1}^{+1} X_0^2 dx, \int_{-1}^{+1} X_1^2 dx, \ldots \int_{-1}^{+1} X_{n-1}^2 dx$$

выходитъ

$$\int_{-1}^{+1} uvdx = \frac{1}{2.}\int_{-1}^{+1} uX_0\,dx.\int_{-1}^{+1} vX_0\,dx + \frac{3}{2.}\int_{-1}^{+1} uX_1\,dx.\int_{-1}^{+1} vX_1\,dx +$$

$$\ldots + \frac{2n-1}{2}\int_{-1}^{+1} uX_{n-1}\,dx\,.\int_{-1}^{+1} vX_{n-1}\,dx + R_n.$$

Замѣчая же, что въ разсматриваемомъ случаѣ

$$\int_{-1}^{+1} \psi_n^2 \vartheta\, dx = \int_{-1}^{+1} X_n^2\,dx = \frac{2}{2n+1},$$

$$\frac{\partial^n \psi_n(x)}{\partial x^n} = \frac{\partial^n X_n}{\partial x^n} = 1.\ 3.\ 5 \ldots (2n-1),$$

мы по вышепоказанному выраженію высшаго предѣла числовой величины дополнительнаго члена R_n, находимъ, что въ выведенномъ нами разложеніи интеграла

$$\int uv\,dx$$

числовая величина дополнительнаго члена не будетъ превосходить количества

$$\frac{2AB}{1^2,\ 3^2,\ 5^2 \ldots (2n-1)^2\,(2n+1)},$$

гдѣ A, B наибольшія числовыя величины производныхъ $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^n v}{\partial x^n}$ между $x=-1$ и $x=+1$. Что касается до знака дополнительнаго члена, то, по вышесказанному, онъ несомнѣнно будетъ одинакій съ знакомъ произведенія $\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^n v}{\partial x^n}$, если производныя $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^n v}{\partial x^n}$ между $x=-1$ и $x=+1$ не мѣняютъ своихъ знаковъ.

Въ заключеніе замѣтимъ, что показанное нами относительно дополнительнаго члена въ разложеніи интеграла

$$\int uv\vartheta\, dx$$

можетъ послужить для опредѣленія степени точности, съ которой вышесказанное разложеніе функціи $F(x)$, остановленное на какомъ либо членѣ, даетъ ея величину.

П. Чебышевъ.

С.-Петербургъ.
29-го января 1883 года.

ПОПРАВКА.

Стран.	*Стр.*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
95	9 *снизу*	$\frac{\int \theta dx}{\int \theta dx . x - \int x\theta dx}$	$\frac{[\int \theta dx]^2}{\int \theta dx . x - \int x\theta dx}$