# Объ одномъ преобразованіи гиперэллиптическихъ интеграловъ.

К. А. Торопова.

Въ настоящей замѣткѣ я намѣренъ разсмотрѣть преобразованіе гиперэллиптическихъ интеграловъ

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

[$R(x)$ цѣлый полиномъ $x$, $f$ есть знакъ раціональной функціи] посредствомъ введенія въ нихъ новой перемѣнной $y$ уравненіемъ

$$y = U(x),$$

гдѣ $U(x)$ цѣлый полиномъ $x$.

Изслѣдованіе этого преобразованія даетъ возможность составить безчисленное множество гиперэллиптическихъ интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ.

## I.

Положимъ, что, вводя въ интегралъ

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

вмѣсто $x$ новую перемѣнную $y$ уравненіемъ

$$y = U(x),$$

мы получаемъ интегралъ

$$\int\frac{f_1(y)\,dy}{\sqrt{R_1(y)}}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

Пусть

$$R_1(y)=(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\ldots(y-\alpha_m),$$

гдѣ $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots\ \alpha_m$ различны между собою; тогда, по введеніи въ интегралъ (2) $x$, будемъ имѣть

$$\int\frac{f_1(U)\,U'dx}{\sqrt{(U-\alpha_1)(U-\alpha_2)\ldots(U-\alpha_m)}}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

Полиномы $U-\alpha_1,\ U-\alpha_2,\ldots,\ U-\alpha_m$ можно представить въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{array}{l} U-\alpha_1=p_1{}^2\gamma_1\,,\\ U-\alpha_2=p_2{}^2\gamma_2\,,\\ .\;.\;.\;.\;.\;.\\ U-\alpha_m=p_m{}^2\gamma_m\,, \end{array}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(a)$$

гдѣ полиномы $\gamma_1,\ \gamma_2,\ldots\gamma_m$ не имѣютъ кратныхъ множителей; они не имѣютъ также общихъ множителей, на основаніи сдѣланнаго предположенія о постоянныхъ $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots\alpha_m$, ибо разность

$$p_i^2\gamma_i-p_k^2\gamma_k=\alpha_k-\alpha_i$$

не можетъ имѣть этого множителя.

Интегралъ (3) представится въ такомъ видѣ:

$$\int\frac{f_1(U)\,U'dx}{p_1p_2\ldots p_m\sqrt{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}}\,.$$

Полиномы $p_1,\ p_2,\ldots p_m$, какъ видно изъ равенствъ $(a)$, суть дѣлители производной $U'$ и потому функція

$$\frac{U'}{p_1p_2\ldots p_m}=\varrho$$

есть цѣлый полиномъ $x$.

*

Сравнивая полученный интегралъ съ (1), мы должны положить:

$$\left.\begin{aligned}\varrho f_1(U) &= f(x)\\ \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m &= R(x)\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

Возьмемъ изъ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ какіе-нибудь $i$ полиномовъ, напримѣръ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_i$, и положимъ:

$$\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_i = R_i(x);$$

тогда въ интегралѣ

$$\int\frac{\lambda dx}{\sqrt{R_i(x)}}$$

раціональную функцію $\lambda$ можно подобрать на безчисленное множество манеръ такъ, чтобы этотъ интегралъ приводился къ интегралу низшаго класса.

Въ самомъ дѣлѣ, помножая числителя и знаменателя подъ интеграломъ на произведеніе $p_1\, p_2 \ldots p_i$, получимъ интегралъ

$$\int\frac{\lambda p_1\, p_2 \ldots p_i dx}{\sqrt{(U-\alpha_1)(U-\alpha_2)\ldots(U-\alpha_i)}}.$$

Полагая

$$\lambda = \frac{U'}{p_1 p_2 \ldots p_i} f(U), \quad U = y,$$

гдѣ $f$ знакъ произвольной раціональной функціи, будемъ имѣть интегралъ

$$\int\frac{f(y)\,dy}{\sqrt{(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\ldots(y-\alpha_i)}},$$

гдѣ подъ знакомъ корня есть полиномъ степени $i$, меньшей, вообще, чѣмъ степень полинома $\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_i$.

Очевидно, если $i = 2$, то получается интегралъ, выражающійся въ логариѳмахъ и алгебраическихъ функціяхъ.

Отсюда слѣдуетъ такая теорема: если гиперэллиптическій интегралъ

$$\int\frac{f(x)dx}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}}$$

приводится къ интегралу низшаго класса (посредствомъ указаннаго преобразованія), то интегралъ

$$\int \frac{\lambda dx}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_i}} \quad (i < m)$$

также приводится къ интегралу низшаго класса; а интегралъ

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{\gamma_k \gamma_e}} \quad (k < m,\ e < m) \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

выражается въ логариѳмахъ и алгебраическихъ функціяхъ.

Не трудно найти выраженіе интеграла (4) въ логариѳмахъ, когда $\varrho$ есть цѣлый полиномъ (случай, разсмотрѣнный еще Абелемъ).

Въ самомъ дѣлѣ, интегралъ (4) равенъ

$$\int \frac{\varrho\, p_k p_e\, dx}{\sqrt{(U-\alpha_k)(U-\alpha_e)}};$$

положивъ

$$\varrho = \frac{U'}{p_k p_e},$$

найдемъ

$$\int \frac{U' dx}{\sqrt{(U-\alpha_k)(U-\alpha_e)}},$$

выраженіе котораго чрезъ логариѳмы таково:

$$\frac{1}{2} \lg \frac{U - \frac{\alpha_k + \alpha_e}{2} + \sqrt{(U-\alpha_k)(U-\alpha_e)}}{U - \frac{\alpha_k + \alpha_e}{2} - \sqrt{(U-\alpha_k)(U-\alpha_e)}} =$$

$$= \frac{1}{2} \lg \frac{p_k^2 \gamma_k + p_e^2 \gamma_e + 2 p_k p_e \sqrt{\gamma_k \gamma_e}}{p_k^2 \gamma_k + p_e^2 \gamma_e - 2 p_k p_e \sqrt{\gamma_k \gamma_k}} = \lg \frac{p_k \sqrt{\gamma_k} + p_e \sqrt{\gamma_e}}{p_k \sqrt{\gamma_k} - p_e \sqrt{\gamma_e}}.$$

Слѣдовательно,

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{\gamma_k \gamma_e}} = \lg \frac{p_k \sqrt{\gamma_k} + p_e \sqrt{\gamma_e}}{p_k \sqrt{\gamma_k} - p_e \sqrt{\gamma_c}}.$$

Такъ какъ степени полиномовъ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ всѣ одинаковой четности, то въ интегралѣ, выражающемся въ логариѳмахъ, мы имѣемъ подъ знакомъ корня полиномъ четной степени.

Разсмотримъ сказанное на примѣрѣ.

Данъ гиперэллиптическій интегралъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ

$$R(x) = (x^4 + 12x^3 + 40x^2 + 48x + 1)(x^2 + 10x + 19)(x^2 + 8x + 4)(x^2 + 4).$$

Введемъ въ этомъ интегралъ новую перемѣнную $y$ уравненіемъ

$$y = x^4 + 12x^3 + 40x^2 + 48x + 1.$$

Если будемъ дѣлить многочленъ $x^4 + 12x^3 + 40x^2 + 48x + 1$ послѣдовательно на $x^2 + 10x + 19$, $x^2 + 8x + 4$, $x^2 + 4$, то увидимъ, что остатки отъ этихъ дѣленій не зависятъ отъ $x$ и въ частныхъ получаются полные квадраты. Отсюда, на основаніи вышеизложеннаго, заключаемъ, что данный гиперэллиптическій интегралъ приводится къ интегралу низшаго класса.

Въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что

$$y + 18 = (x + 1)^2 (x^2 + 10x + 19),$$

$$y + 15 = (x + 2)^2 (x^2 + 8x + 4),$$

$$y + 143 = (x + 6)^2 (x^2 + 4).$$

Слѣдовательно, помножая подъ интеграломъ числителя и знаменателя на $(x + 1)$ $(x + 2)$ $(x + 6)$, получимъ эллиптическій интегралъ

$$\frac{1}{4} \int \frac{dy}{\sqrt{y(y + 18)(y + 15)(y + 143)}}.$$

Вмѣстѣ съ этимъ заключаемъ, что интегралы:

$$\int \frac{(x + 6)\, dx}{\sqrt{(x^4 + 12x^3 + 40x^2 + 48x + 1)(x^2 + 10x + 19)(x^2 + 8x + 4)}},$$

$$\int \frac{(x + 1)\, dx}{\sqrt{(x^4 + 12x^3 + 40x^2 + 48x + 1)(x^2 + 8x + 4)(x^2 + 4)}},$$

$$\int \frac{(x + 2)\, dx}{\sqrt{(x^4 + 12x^3 + 40x^2 + 48x + 1)(x^2 + 10x + 19)(x^2 + 4)}}$$

тою же подстановкою приводятся соотвѣтственно къ эллиптическимъ:

$$\frac{1}{4}\int\frac{dy}{\sqrt{y(y+18)(y+15)}},$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{dy}{\sqrt{y(y+15)(y+143)}}, \qquad \frac{1}{4}\int\frac{dy}{\sqrt{y(y+18)(y+143)}}.$$

Точно также гиперэллиптическій интегралъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+10x+19)(x^2+8x+4)(x^2+4)}}$$

приводится къ эллиптическому

$$\frac{1}{4}\int\frac{dy}{\sqrt{(y+18)(y+15)(y+143)}}.$$

Кромѣ того, мы имѣемъ выраженія въ логариѳмахъ слѣдующихъ интеграловъ:

$$\int\frac{4(x^2+8x+12)dx}{\sqrt{(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+10x+19)}}=$$

$$=\lg\frac{p_1\sqrt{\gamma_1}+p_2\sqrt{\gamma_2}}{p_1\sqrt{\gamma_1}-p_2\sqrt{\gamma_2}}$$

$$\int\frac{4(x^2+7x+6)\,dx}{\sqrt{(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+8x+4)}}=$$

$$=\lg\frac{p_1\sqrt{\gamma_1}+p_3\sqrt{\gamma_3}}{p_1\sqrt{\gamma_1}-p_3\sqrt{\gamma_3}}$$

$$\int\frac{4(x^2+3x+2)dx}{\sqrt{(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+4)}}=$$

$$=\lg\frac{p_1\sqrt{\gamma_1}+p_4\sqrt{\gamma_4}}{p_1\sqrt{\gamma_1}-p_4\sqrt{\gamma_4}}$$

$$\int\frac{4(x+6)dx}{\sqrt{(x^2+10x+19)(x^2+8x+4)}}=$$

$$=\lg\frac{p_2\sqrt{\gamma_2}+p_3\sqrt{\gamma_3}}{p_2\sqrt{\gamma_2}-p_3\sqrt{\gamma_3}}$$

$$\int\frac{4(x+2)dx}{\sqrt{(x^2+10x+19)\,(x^2+4)}}=\lg\frac{p_2\sqrt{\gamma_2}+p_4\sqrt{\gamma_4}}{p_2\sqrt{\gamma_2}-p_4\sqrt{\gamma_4}}$$

$$\int\frac{4(x+1)dx}{\sqrt{(x^2+8x+4)\,(x^2+4)}}=\lg\frac{p_3\sqrt{\gamma_3}+p_4\sqrt{\gamma_4}}{p_3\sqrt{\gamma_3}-p_4\sqrt{\gamma_4}}.$$

Здѣсь

$$p_1=1,\qquad \gamma_1=x^4+12x^3+40x^2+48x+1,$$

$$p_2=x+1,\qquad \gamma_2=x^2+10x+19,$$

$$p_3=x+2,\qquad \gamma_3=x^2+8x+4,$$

$$p_4=x+6,\qquad \gamma_4=x^2+4.$$

Подобныхъ примѣровъ можно составить, конечно, сколько угодно; для этого стоитъ только взять за $y$ полиномъ

$$\int(x+a_1)^{2l_1-1}(x+a_2)^{2l_2-1}\ldots(x+a_q)^{2l_q-1}dx+C.$$

Понятное дѣло, что въ указанномъ примѣрѣ, какъ и вообще, кромѣ перечисленныхъ интеграловъ, мы имѣемъ еще множество другихъ вида

$$\int\frac{ldx}{\sqrt{R_1(x)}},$$

[гдѣ $R_1(x)=R(x)\,(y-a_k)\,(y-a_{k+1})\ldots$] приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ; въ этихъ интегралахъ разностямъ

$$y-a_k=p_k^{\,2}\gamma_k,\quad y-a_{k+1}=p^2_{k+1}\gamma_{k+1},\ldots$$

соотвѣтствуютъ значенія для $p_k$, $p_{k+1}\ldots$ независящія отъ $x$. Такіе интегралы мы въ счетъ принимать не будемъ.

Изъ предыдущаго видимъ, что, если намъ удастся посредствомъ указаннаго преобразованія найти одинъ гиперэллиптическій интегралъ

$$\int\frac{ldx}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}},$$

приводящійся къ интегралу низшаго класса, то мы сейчасъ же найдемъ еще $\frac{m(m-1)}{1.2}$ интеграловъ, выражающихся въ логариѳмахъ и $2^m-\frac{m(m+1)}{1.2}-2$ интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ; въ этомъ послѣднемъ числѣ заключается $\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4}$ интеграловъ, приводящихся къ эллиптическимъ, $\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5.6}$ интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ перваго класса, и т. д. Эти числа выведены мною на основанiи извѣстныхъ свойствъ числа сочетанiй изъ $m$ элементовъ по $n$.

Въ приведенномъ выше примѣрѣ $m=4$ и потому мы нашли, кромѣ даннаго, еще 6 интеграловъ, выражающихся въ логариѳмахъ и 4 интеграла, приводящихся къ эллиптическимъ.

## II.

Для составленiя гиперэллиптическихъ интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ, можно пользоваться также слѣдующимъ прiемомъ.

Возьмемъ интегралъ

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}},$$

(гдѣ $\varrho$ и $R$ цѣлые полиномы $x$) выражающiйся въ логариѳмахъ. Такихъ интеграловъ мы знаемъ сколько угодно.

Въ этомъ случаѣ, какъ извѣстно, существуютъ два полинома $P$ и $Q$, удовлетворяющiе равенству

$$P^2-Q^2R=C=\text{пост.}$$

Полиномы $P$ и $Q$ найдутся посредствомъ разложенiя $\sqrt{R}$ въ непрерывную дробь, именно $\frac{P}{Q}$ будетъ одна изъ подходящихъ дробей этого разложенiя.

Положимъ

$$P=U,$$

тогда

$$Q^2R=U^2-C.$$

Помножая числителя и знаменателя подъ интеграломъ на $Q$, получимъ

$$\int\frac{\varrho Q dx}{\sqrt{[U^2-C]}}.$$

Положивъ здѣсь

$$\varrho = \frac{U'}{Q} = \frac{P'}{Q},$$

найдемъ

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{2}\lg\frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}.$$

Такъ какъ степень $P$ на $m$ единицъ выше степени полинома $Q$ (если $R$ есть $2m$-ой степени), то, очевидно, $\varrho = \frac{P'}{Q}$ будетъ $(m - 1)$-ой степени.

Замѣтимъ, что интегралъ

$$\int\frac{f(x)dx}{\sqrt{R}}$$

выражается въ логариѳмахъ и алгебраическихъ функціяхъ и въ томъ случаѣ, когда

$$f(x) = \frac{P'}{Q}F(P),$$

гдѣ $F$ знакъ произвольной раціональной функціи, а $P$ и $Q$ вышеупомянутые полиномы; иначе говоря, *если мы имѣемъ $\sqrt{R}$, разлагающійся въ непрерывную дробь, то вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ безчисленное множество интеграловъ вида*

$$\int\frac{f(x)dx}{\sqrt{R}},$$

*выражающихся въ логариѳмахъ и алгебраическихъ функціяхъ.*

Не трудно доказать также слѣдующую теорему.

Теорема. Если интегралъ

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}},$$

гдѣ $\varrho$ и $R$ цѣлые полиномы, выражается въ логариѳмахъ, то гиперэллиптическій интегралъ перваго вида

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{P.R}},$$

гдѣ $P$ полиномъ, удовлетворяющій равенству

$$P^2 - Q^2 R = \text{пост.},$$

приводится къ эллиптическому.

Для доказательства замѣчаемъ, что по предыдущему $\varrho = \frac{P'}{Q}$ и, слѣдовательно,

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{P \cdot R}} = \int \frac{P' dx}{Q\sqrt{R \cdot P}} = \int \frac{P' dx}{\sqrt{P(P^2 - C)}}.$$

Полагая

$$P = y,$$

получимъ

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{P \cdot R}} = \frac{dy}{\sqrt{y(y^2 - C)}},$$

что и требовалось доказать.

Кромѣ этого гиперэллиптическаго интеграла можно найти еще нѣсколько другихъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ нѣсколько постоянныхъ $C_1$, $C_2 \ldots C_n$ и разложимъ разности $P - C_1$, $P - C_2, \ldots$ на множители; можемъ написать:

$$U - C_1 = p_1{}^2 \gamma_1,$$
$$U - C_2 = p_2{}^2 \gamma_2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$U - C_n = p_n{}^2 \gamma_n.$$

Тогда интегралъ

$$\int \frac{\lambda dx}{\sqrt{R \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n}}$$

приводится къ интегралу низшаго класса положеніемъ

$$\lambda = \frac{U'}{Q p_1 p_2 \ldots p_n} = \frac{P'}{Q p_1 p_2 \ldots p_n}$$

и

$$U = y,$$

и вмѣстѣ съ нимъ, по вышеизложенному, приводится къ интегралу низшаго класса и какой угодно изъ интеграловъ

$$\frac{\lambda dx}{\sqrt{R\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_i}} \quad (i < n).$$

Полиномы $p_1$, $p_2, \ldots p_n$, очевидно, должны быть, какъ и $Q$, дѣлителями полинома $P'$. Число ихъ, слѣдовательно, не превышаетъ $m-1$, если $2m$ есть степень полинома $R$. (Замѣтимъ опять, что здѣсь мы не принимаемъ въ расчетъ значеній $p_1$, $p_2, \ldots$, не зависящихъ отъ $x$).

Изъ сказаннаго получаемъ слѣдующій пріемъ для составленія гиперэллиптическихъ интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ.

Беремъ какой-нибудь интегралъ

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$$

($\varrho$ и $R$ цѣлые полиномы), выражающійся въ логариѳмахъ.

Извѣстнымъ способомъ найдемъ полиномы $P$ и $Q$, удовлетворяющіе равенству

$$P^2 - Q^2R = C.$$

Производный полиномъ $P'$ дѣлимъ на $Q$ и частное представляемъ въ видѣ произведенія $p_1p_2\ldots p_n$. Затѣмъ дѣлимъ $P$ послѣдовательно на $p_1{}^2$, $p_2{}^2, \ldots p_n{}^2$. Частныя будутъ $\gamma_1$, $\gamma_2, \ldots \gamma_n$ и остатки $C_1, C_2, \ldots C_n$. (Эти остатки, необходимо, будутъ величины, независящія отъ $x$).

Тогда интегралъ

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}}$$

приведется къ интегралу низшаго класса, а вмѣстѣ съ нимъ приведется къ интеграламъ низшихъ классовъ извѣстное число другихъ интеграловъ и, кромѣ того, найдется нѣсколько интеграловъ, выражающихся въ логариѳмахъ.

Прослѣдимъ сказанное сейчасъ на примѣрѣ.

Возьмемъ интегралъ

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}}.$$

Этотъ интегралъ выражается въ логариѳмахъ, такъ какъ

$$\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}=$$
$$=x^2+ax+b+\cfrac{1}{\cfrac{x+a}{-2ab}+\cfrac{1}{-2a(x+a)+\cfrac{1}{\cfrac{x^2+ax+b}{2a^2b}+\dots}}}$$

Находимъ полиномы $P$ и $Q$:

$$\frac{P}{Q}=x^2+ax+b+\cfrac{1}{\cfrac{x+a}{-2ab}+\cfrac{1}{-2a(x+a)}}=$$

$$=\frac{(x^2+ax+b)([x+a]^2+b)-2ab(x+a)}{(x+a)^2+b}.$$

Слѣдовательно, имѣемъ

$$P=(x^2+ax+b)([x+a]^2+b)-2ab(x+a),$$

$$Q=(x+a)^2+b,$$

и $$P^2-Q^2R=-4a^2b^3.$$

По раздѣленіи $P'$ на $Q$ у насъ получится частное первой степени: $4x+a$.

Такимъ образомъ, прежде всего имѣемъ

$$\int\frac{(4x+a)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}}=\frac{1}{2}\lg\frac{P+Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}}{P-Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}}$$

и интегралъ

$$\int\frac{(4x+a)\,dx}{\sqrt{[(x^2+ax+b)^2-4abx][(x^2+ax+b)((x+a)^2+b)-2ab(x+a)]}}=$$

$$=\int\frac{dy}{\sqrt{y(y^2+4a^2b^3)}},$$

гдѣ $y=(x^2+ax+b)((x+a)^2+b)-2ab(x+a)$.

Полагаемъ $p_1=x+\frac{a}{4}$ и дѣлимъ $p$ на $\left(x+\frac{a}{4}\right)^2$, найдемъ частное

$$\gamma_1 = x^2 + \frac{5ax}{2} + 2b + \frac{27a^2}{16}$$

и остатокъ

$$C_1 = b^2 - \frac{9a^2b}{8} - \frac{27a^4}{256}.$$

На основанiи вышеизложеннаго получаемъ слѣдующiя выраженiя интеграловъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P\gamma_1}} = 4\int \frac{dy}{\sqrt{(y^2 + 4a^2b^3)\left(y - b^2 + \frac{9}{8}a^2b + \frac{27}{256}a^4\right)}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{PR\gamma_1}} = 4\int \frac{dy}{\sqrt{y(y^2 + 4a^2b^3)\left(y - b^2 + \frac{9}{8}a^2b + \frac{27}{256}a^4\right)}},$$

$$\int \frac{(x^2 + 2ax + a^2 + b)}{\sqrt{P\gamma_1}}\,dx = \lg \frac{\sqrt{P} + p_1\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{P} - p_1\sqrt{\gamma_1}}.$$

Кромѣ того, можно выразить въ логариѳмахъ и алгебраическихъ функцiяхъ интегралы:

$$\int \frac{(4x + a)\,f(P)dx}{\sqrt{(x^2 + ax + b)^2 - 4abx}},$$

$$\int \frac{(x^2 + 2ax + a^2 + b)\,f(P)dx}{\sqrt{P\gamma_1}},$$

гдѣ $f(P)$ произвольная рацiональная функцiя $P$.

Точно такъ же можемъ выразить въ эллиптическихъ интегралахъ и такiе гиперэллиптическiе:

$$\int \frac{f(P)\,dx}{\sqrt{R\gamma_1}}, \quad \int \frac{f(P)\,dx}{\sqrt{PR\gamma_1}}.$$

Очевидно, такимъ образомъ, что и посредствомъ разсмотрѣннаго сейчасъ прiема можемъ найти сколько угодно гиперэллиптическихъ интеграловъ, выражающихся чрезъ эллиптическiе.

## III.

Положимъ, намъ данъ интегралъ

$$\int \frac{l\,dx}{\sqrt{N(x)}},$$

гдѣ $N(x)$ цѣлый полиномъ $x$, и требуется узнать, не приводится ли онъ къ интегралу низшаго класса.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ вопросъ этотъ можетъ быть рѣшенъ въ положительномъ смыслѣ, на основанiи вышеизложеннаго.

Разлагаемъ подкоренной полиномъ $N(x)$ на множители

$$M_1 M_2 \ldots M_n,$$

при чемъ степени этихъ множителей должны быть одинаковой четности, и смотримъ, не получается ли при нѣкоторой комбинацiи полиномовъ $M_1 M_2, \ldots$, напр. $M_1 M_2 \ldots M_i$, въ разложенiи $\sqrt{M_1 M_2 \ldots M_i}$ непрерывная перiодическая дробь (предполагается, что степень произведенiя $M_1 M_2 \ldots M_i$ выше 2). Допустимъ, что получается. Ищемъ тогда полиномы $P$ и $Q$, удовлетворяющiе равенству

$$P^2 - Q^2 M_1 M_2 \ldots M_i = C.$$

Дѣлимъ $P'$ на $Q$ и пусть частное будетъ $p_1 p_2 \ldots p_k$. Тогда, если данный интегралъ приводится къ болѣе простому посредствомъ нашего преобразованiя, то въ частныхъ отъ дѣленiя $P$ на $p_1{}^2, p_2{}^2, \ldots$ должны получиться полиномы $M_{i+1}, M_{i+2}, \ldots M_n$ и въ остаткахъ величины, независящiя отъ $x$.

Для приведенiя даннаго интеграла къ интегралу низшаго класса слѣдуетъ ввести въ него новую перемѣнную $y$ уравненiемъ

$$y = P.$$

Разсмотримъ это на гиперэллиптическомъ интегралѣ Эрмита [1])

$$\int \frac{l dx}{\sqrt{(x^2 - a)(4x^3 + 3ax + b)}}.$$

Для удобства замѣнимъ въ немъ $a$ чрезъ $a^2$

$$\int \frac{l dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(4x^3 + 3a^2 x + b)}}.$$

Представивъ подкоренной полиномъ въ видѣ произведенiя

$$(x - a)(x + a)(4x^3 + 3a^2 x + b),$$

[1]) Sur un exemple de réduction des intégrales Abeliennes aux fonctions elliptiques. (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1876).

пробуемъ разложить

$$\sqrt{(x+a)(4x^3+3a^2x+b)}$$

въ непрерывную дробь:

$$\sqrt{(x+a)(4x^3+3a^2x+b)}=\sqrt{(2x^2+ax-a^2)^2+(b-a^3)(x+a)}=$$
$$=2x^2+ax-a^2+\cfrac{1}{\cfrac{2(2x-a)}{b-a^3}+\cfrac{1}{2(2x^2+ax-a^2)+\cfrac{1}{\cfrac{2(2x-a)}{b-a^3}+\ldots}}}$$

Видимъ, что получается періодическая дробь. Опредѣляемъ полиномы $P$ и $Q$

$$\frac{P}{Q}=2x^2+ax-a^2+\frac{b-a^3}{2(2x-a)}=\frac{8x^3-6a^2x+b+a^3}{2(2x-a)}.$$

Частное отъ дѣленія $P'$ на $Q$ есть $3(2x+a)=3p_1$. Дѣлимъ $P$ на $(2x+a)^2$; получимъ частное, равное какъ разъ $2(x-a)$ и остатокъ $b+3a^3$.

Заключаемъ отсюда, что гиперэллиптическій интегралъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(4x^3-3a^2x+b)}}$$

приводится къ эллиптическому. Для нахожденія этого эллиптическаго интеграла слѣдуетъ числителя и знаменателя въ данномъ интегралѣ помножить на $p_1Q$ и потомъ положить

$$y=8x^3-6a^2x+b+a^3.$$

Точно такъ же приводится къ эллиптическому такой интегралъ

$$\int\frac{f(P)dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(4x^3-3a^2x+b)}},$$

гдѣ $f$ есть знакъ произвольной раціональной функціи.

Выше мы предполагали, что степень произведенія $M_1M_2\ldots M_i$ выше двухъ. Случай, когда она равняется 2, особенно интересенъ, и мы разберемъ его отдѣльно въ слѣдующемъ $n^0$.

# IV.

Пусть гиперэллиптическій интегралъ:

$$\int \frac{l dx}{\sqrt{R(x)}}$$

положеніемъ

$$y = U(x)$$

приводится къ интегралу нисшаго класса

$$\int \frac{l_1 dy}{\sqrt{(y - a_1)(y - a_2)\dots(y - a_k)}}.$$

Представимъ разности подкоренного полинома въ видѣ

$$U - a_1 = p_1{}^2 \gamma_1,$$

$$U - a_2 = p_2{}^2 \gamma_2,$$

$$\dots\dots$$

$$U - a_k = p_k{}^2 \gamma_k.$$

Степени полиномовъ $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_k$ должны быть одинаковой четности, т. е. эти полиномы или всѣ нечетныхъ степеней, или всѣ четныхъ. Если $R(x)$ нечетной степени, то, необходимо, $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_k$ будутъ нечетныхъ степеней, если же $R(x)$ четной степени, то $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_k$ могутъ быть и четныхъ, и нечетныхъ степеней.

Если всѣ полиномы $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_k$ нечетныхъ степеней, то первой степени могутъ быть только два изъ нихъ, напр. $\gamma_1$ и $\gamma_2$, не болѣе. Въ самомъ дѣлѣ, тогда степень $U(x)$ есть $2m + 1$ (нечетная) и потому $p_1$ и $p_2$ оба будутъ степени $m$ и, такъ какъ $p_1$ и $p_2$ суть дѣлители производной $U'(x)$, то остальные полиномы $p_3, p_4, \dots p_k$ будутъ величины постоянныя, не зависящія отъ $x$, и, стало быть, $\gamma_3, \gamma_4, \dots \gamma_k$ каждый будетъ степени $2m + 1$.

Этотъ случай, когда два изъ полиномовъ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots \gamma_k$ первой степени, я и намѣренъ здѣсь разобрать. Въ этомъ случаѣ видъ полинома $U$ опредѣляется вполнѣ, а потому опредѣляется и видъ $R(x)$.

Пусть

$$\gamma_1 = x + a\,,$$

$$\gamma_2 = x + b\,.$$

Такъ какъ $p_1$ и $p_2$ суть дѣлители полинома $U'(x)$, то заключаемъ

$$U'(x) = (2m+1)\,p_1 p_2\,.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{U'}{\sqrt{(U-a_1)(U-a_2)}} = \frac{2m+1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}\,.$$

Интегрируя это дифференціальное уравненіе, получимъ

$$U - \frac{a_1+a_2}{2} + \sqrt{(U-a_1)(U-a_2)} =$$

$$= C\left[x + \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x+a)(x+b)}\right]^{2m+1}.$$

Постоянную $C$, вошедшую при интегрированіи, опредѣляемъ изъ условія, что при $x+a=0$ должно быть $U=a_1$. Это условіе даетъ намъ такое равенство

$$C = \frac{\frac{a_1-a_2}{2}}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2m+1}}\,.$$

Мѣняя знаки у радикаловъ, будетъ имѣть въ то же время

$$U - \frac{a_1+a_2}{2} - \sqrt{(U-a_1)(U-a_2)} =$$

$$= C\left(x + \frac{a+b}{2} - \sqrt{(x+a)(x+b)}\right)^{2m+1}.$$

Складывая два полученныя равенства, найдемъ

$$2U - (a_1+a_2) = \frac{\frac{a_1-a_2}{2}}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2m+1}}\left\{\left(x + \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x+a)(x+b)}\right)^{2m+1} + \right.$$

$$\left. + \left(x + \frac{a+b}{2} - \sqrt{(x+a)(x+b)}\right)^{2m+1}\right\},$$

откуда

$$U(x)=\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{\frac{a_1+a_2}{2}}{2\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2m+1}}\left\{\left(x+\frac{a+b}{2}+\sqrt{(x+a)(x+b)}\right)^{2m+1}+\right.$$

$$\left.+\left(x+\frac{a+b}{2}-\sqrt{(x+a)(x+b)}\right)^{2m+1}\right\}.$$

Зная, что

$$\cos n \arccos z=\frac{(z+\sqrt{z^2-1})^n+(z-\sqrt{z^2-1})^n}{2},$$

мы можемъ полиномъ $U$ сокращенно написать такъ

$$U(x)=\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1-a_2}{2}\cos(2m+1)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}.$$

Полиномы $p_1$ и $p_2$ будутъ

$$p_1=\cos m \arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\cos(m-1)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\ldots+\frac{1}{2},$$

$$p_2=\cos m \arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}-\cos(m-1)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\ldots+(-1)^m\frac{1}{2},$$

такъ что

$$U-a_1=4\,\frac{a_1-a_2}{b-a}(x+a)p_1{}^2,$$

$$U-a_2=4\,\frac{a_1-a_2}{b-a}(x+b)p_2{}^2.$$

Если бы мы разсмотрѣли случай, когда одинъ изъ полиномовъ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ нулевой степени, а другой второй степени, то нашли бы подобнымъ же образомъ выраженіе

$$U(x)=\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1-a_2}{2}\cos 2m \arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}},$$

тогда

$$U(x)-a_1=(a_1-a_2)(x+a)(x+b)\left(\operatorname{cs}(m-1)\operatorname{arccs}\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\operatorname{cs}(m-3)\operatorname{arccs}\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\right)^2$$

и

$$U(x)-a_2=(a_1-a_2)\left(\cos m\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)^2.$$

Изъ сказаннаго заключаемъ, что гиперэллиптическій интегралъ какого угодно класса

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)\left(A+B\operatorname{cs}n\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}}$$

приводится къ эллиптическому.

Для приведенія можно положить

$$y=\cos n\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ выраженія въ логариѳмахъ для интеграловъ:

$$\int\frac{p_1dx}{\sqrt{(x+b)\left(A+B\cos(2m+1)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}}=$$

$$\frac{1}{2m+1}\lg\frac{p_2\sqrt{(x+b)}+\sqrt{\left(A+B\cos(2m+1)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}}{p_2\sqrt{(x+b)}-\sqrt{\left(A+B\cos(2m+1)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}},$$

$$\int \frac{\cos m \arccos \frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\, dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)\left(A+B\cos 2m\arccos \frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}} =$$

$$\frac{1}{2m}\lg \frac{P\sqrt{(x+a)(x+b)}+\sqrt{\left(A+B\cos 2\, m\arccos \frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}}{P\sqrt{(x+a)(x+b)}-\sqrt{\left(A+B\cos 2\, m\arccos \frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}}$$

$$\left[\text{здѣсь } P=\cos(m-1)\arccos \frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\cos(m-3)\arccos \frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\ldots\right]$$

и др.

Послѣднія разсужденія даютъ возможность доказать слѣдующую теорему.

Теорема. Если гиперэллиптическій интегралъ перваго класса

$$\int \frac{\lambda dx}{\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ $R(x)$ полиномъ 5-й степени, приводится къ эллиптическиму преобразованіемъ

$$y = \text{цѣлой функціи } x\,,$$

то *необходимо* должно быть

$$R(x)=(x+a)(x+b)\left(A+B\cos 3\arccos \frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right),$$

Для доказательства замѣтимъ сначала, что данный интегралъ не можетъ приводиться къ такому эллиптическому

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)(y-a_4)}},$$

такъ какъ, полагая

$$y - a_1 = p_1{}^2\gamma_1\,,$$

$$y - a_2 = p_2{}^2\gamma_2\,,$$

$$y - a_3 = p_3{}^2\gamma_3\,,$$

$$y - a_4 = p_4{}^2\gamma_4\,,$$

мы найдемъ

$$R(x) = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\,,$$

но произведенiе четырехъ полиномовъ $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, которыхъ степени одинаковой четности, не можетъ быть полиномомъ 5-й степени.

Слѣдовательно, если данный интегралъ приведется къ эллиптическому, то такому:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)}}.$$

Полагая опять

$$y - a_1 = p_1{}^2\gamma_1\,,$$

$$y - a_2 = p_2{}^2\gamma_2\,,$$

$$y - a_3 = p_3{}^2\gamma_3\,,$$

мы будемъ имѣть

$$R(x) = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\,.$$

Значитъ полиномы $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ должны быть нечетныхъ степеней, а такъ какъ сумма этихъ степеней равняется 5, то, очевидно, одинъ изъ этихъ полиномовъ будетъ 3-й степени, а остальныя два первой степени.

Пусть

$$\gamma_1 = x + a\,,$$

$$\gamma_2 = x + b\,,$$

тогда, на основанiи сказаннаго въ этомъ n$^0$, заключаемъ

$$y = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2}\cos(2m+1)\arccos\frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\,,$$

а такъ какъ $p_3$ въ этомъ случаѣ не зависитъ отъ $x$ ($p_1$, $p_2$ и $p_3$ дѣлители полинома $2m$-й степени $y'$), то $y$ должно быть 3-й степени, ибо $\gamma_3$, какъ сказано выше, есть полиномъ 3-й степени.

Слѣдовательно,

$$y = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \cos 3 \arccos \frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}},$$

а это и доказываетъ теорему.

И такъ, изъ гиперэллиптическихъ интеграловъ перваго класса

$$\int \frac{(kx+1)\,dx}{\sqrt{(mx^5 + nx^4 + px^3 + qx^2 + rx + s)}},$$

преобразованіемъ

$$y = \text{цѣлому полиному } x,$$

къ эллиптическому приводится только одинъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 2xm + n)(x^3 + 3mx^2 + \frac{3}{4}(3m^2 + n)\,x + c)}}.$$

(Здѣсь мы обозначили $a + b$ чрезъ $2m$, $ab$ чрезъ $n$).

Для приведенія можно положить

$$y = x^3 + 3mx^2 + \frac{3}{4}(3m^2 + n)x.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $m = 0$, мы получаемъ интегралъ Эрмита

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + n)(x^2 + \frac{3}{4}nx + c)}},$$

о которомъ мы уже упоминали.

Подобная теорема не имѣетъ мѣста для гиперэллиптическихъ интеграловъ второго, третьяго и т. д. классовъ.

Пермь.
Ноябрь 1887 г.