ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 32 1966

Записки механико-математического факультета
и Харьковского математического общества

О ПОТЕНЦИАЛАХ М. РИССА. I.

Н. С. Ландкоф

Настоящая статья является развитием идей замечательного мемуара М. Рисса [1]. В этом мемуаре М. Рисс впервые провел весьма глубокое исследование потенциалов порядка α, $0 < \alpha \leq 2$, ввел понятие α-супергармонической функции и доказал основную теорему о представлении α-супергармонических функций потенциалами порядка α. Многие доказательства, как указывает М. Рисс во введении к этому мемуару, лишь намечены им, и позднее, насколько нам известно, не воспроизводились.

Несколько позже О. Фростман [2], опираясь на разработанный им вариационный метод, дал другое доказательство основной теоремы.

Наконец, значительно позднее Ж. Дени [3] в рамках так называемой грубой теории потенциала, в которой как потенциалы, так и ядра являются мерами, а не функциями точки пространства, установил весьма общую теорему типа теоремы М. Рисса. Следует, однако, отметить, что доказательство того, что ядра М. Рисса входят в класс ядер Ж. Дени, вовсе не тривиально.

Мы получим теорему М. Рисса, используя более или менее систематически метод теории обобщенных функций. Едва ли нужно указывать, что образцом нам послужило изящное доказательство Л. Шварца классической теоремы Ф. Рисса о представлении ньютоновых потенциалов (см. [4], стр. 76).

Кроме того, мы вводим понятие α-гармонической функции и соответствующей обобщенной задачи Дирихле, в которой, однако, роль границы области G играет все ее дополнение. Возможно, что эти понятия также представляют некоторый интерес.

§ 1. Леммы об обобщенных функциях. Ядра М. Рисса

1. Под *обобщенной функцией* T мы будем понимать линейный непрерывный функционал в классе D финитных неограниченно дифференцируемых функций $f(x)$, $x \in R^p$. При этом сходимость $f_n(x) \to f(x)$ в D определяется требованиями *.

$$\partial^k f_n \to \partial^k f, \quad |k| = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

равномерно в R^p и условием равномерной финитности функций f_n.

* $k = (k_1, k_2, \ldots, k_p)$ обозначает целочисленный вектор в R^p с неотрицательными компонентами,

$$\partial^k \equiv \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\, \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_p^{k_p}}, \quad |k| = \sum_1^p k_i.$$

Множество всех обобщенных функций будем обозначать через D^*. Необходимые для дальнейшего определения и свойства элементов D^* можно найти, например, в работах [4] или [5].

Во многих случаях и, в частности, когда обобщенная функция T задана аналитическим выражением, оказывается возможным расширить ее с сохранением линейности и непрерывности на некоторое функциональное пространство $E \supset D$ с более слабой топологией, чем в D. Этот расширенный функционал мы будем обозначать тем же символом T. С другой стороны, если под E^* понимать множество всех линейных непрерывных функционалов в E, то, очевидно, $E^* \subset D^*$. Таким образом, можно в D^* выделять различные классы обобщенных функций, характеризуемые погружением D в некоторое функциональное пространство E.

Лемма 1. *Пусть* $T_1 \in E_1^*$, $T_2 \in E_2^*$, *и для некоторого пространства* $E_{12} \supset D_{xy}$* *выполнены условия*:

a) *из* $f(x, y) \in E_{12}$ *следует, что при фиксированном* y *имеем* $f(x, y) \in E_1$, *а при фиксированном* x *имеем* $f(x, y) \in E_2$;

в) $T_1^{(x)} f(x, y) \in E_2$, $T_2^{(y)} f(x, y) \in E_1$, *причем оба эти оператора из* E_{12} *в* E_2 *и соответственно в* E_1 *непрерывны*,

c) D_{xy} *плотно в* E_{12}.

Тогда существует единственный функционал $T_1 \times T_2 \in E_{12}^*$, *удовлетворяющий условию*

$$(T_1 \times T_2)[f_1(x) f_2(y)] = T_1 f_1(x) \cdot T_2 f_2(y), \tag{1}$$

где $f_1(x) \in D_x$, $f_2(y) \in D_y$.

Обобщенная функция $T_1 \times T_2$ называется *прямым произведением* T_1 и T_2, и для нее имеет место «формула Фубини»

$$(T_1 \times T_2) f(x, y) = T_1 [T_2^{(y)} f(x, y)] = T_2 [T_1^{(x)} f(x, y)] \tag{2}$$

для любой $f(x, y) \in E_{12}$.

Предположим еще, что выполнено условие

d) *для любой* $f(x) \in D$

$$f(x+y) \in E_{12},$$

причем $f(x) \to f(x+y)$ *есть непрерывный оператор из* D *в* E_{12}.

Тогда формула

$$(T_1 \times T_2) f(x+y) = T_1 [T_2^{(y)} f(x+y)] = T_2 [T_1^{(x)} f(x+y)] \tag{3}$$

определяет обобщенную функцию из D^*, которую обозначают $T_1 * T_2$ и называют *сверткой* обобщенных функций T_1 и T_2.

Замечание. Если условие *d*) выполняется для любой функции $f(x)$ из $E \supset D$, то свертка $T_1 * T_2$ будет принадлежать классу E^*.

Лемма 2. *Пусть* $T_i \in E_i^*$, $(i = 1, 2, 3)$; $T_i \times T_k \in E_{ik}^*$, $(i, k = 1, 2, 3;$ $i \neq k)$, $T_1 \times T_2 \times T_3 \in E_{123}^*$. *Предположим, что для всех трех* E_{ik} *удовлетворяются условия* a) — d) *и, кроме того,*

a') *из* $f(x, y, z) \in E_{123}$ *следует, что при фиксированном* x *имеем* $f(x, y, z) \in E_{23}$ *и аналогичные включения имеют место при фиксации* y *или* z;

b') $T_1^{(x)} f(x, y, z) \in E_{23}$, $T_2^{(y)} f(x, y, z) \in E_{13}$, $T_3^{(z)} f(x, y, z) \in E_{12}$,

причем эти операторы непрерывны:

c') D_{xyz} *плотно в* E_{123},

d') *если* $f(x) \in D$, *то* $f(x+y+z) \in E_{123}$, *причем отображение* $f(x) \to f(x+y+z)$ *непрерывно.*

---

*D_{xy} обозначает пространство D, определенное в $R^{2p} = R^p \times R^p$; элементы D_{xy} будем обозначать $f(x, y)$.

Тогда справедлива формула

$$(T_1 * T_2) * T_3 = T_1 * (T_2 * T_3). \tag{4}$$

Доказательства лемм 1 и 2 достаточно просты и поэтому могут быть здесь опущены.

Из этих лемм можно извлечь такое известное следствие:

Лемма 3. *Для существования свертки $T_1 * T_2$ достаточно финитности одного из множителей; для существования свертки $T_1 * T_2 * T_3$, которая определяется, как общее значение (4), достаточно финитности двух из множителей.*

Символ $T_n \to T$ будет обозначать *слабую сходимость*, т. е. сходимость $T_n(f) \to T(f)$ для любой $f \in D$. Тогда, как известно, справедлива

Лемма 4. *Пусть $T_n \to T$ и выполнено одно из двух предположений:*

(i) обобщенная функция U финитна,

(ii) T_n равномерно финитны.

Тогда

$$U * T_n \to U * T.$$

2. При $\alpha > 0$ будем называть *ядром М. Рисса* порядка α функцию

$$k_\alpha(x) = A(p, \alpha) |x|^{\alpha - p}, \quad x \in R^p, \tag{5}$$

где

$$A(p, \alpha) = \pi^{\alpha - \frac{p}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{p-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \tag{5'}$$

Если $0 < \alpha < \frac{p}{2}$, $0 < \beta < \frac{p}{2}$, то, применяя преобразования Фурье, можно установить так называемую *формулу композиции*:

$$k_\alpha(x) * k_\beta(x) = k_{\alpha+\beta}(x). \tag{6}$$

Для дальнейшего важно освободиться от излишних ограничений на параметры α и β. Применяя метод аналитического продолжения (см., например, [5] стр. 110), можно определить при $\operatorname{Re}\alpha \leqslant 0$ обобщенную функцию k_α, которая в полосе

$$-2m - 2 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant -2m, \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

может быть представлена формулой

$$k_\alpha(\varphi) = A(p, \alpha) \int\limits_{R^p}\!\!\int \left\{ \varphi(x) - \sum_{k=0}^{m} H_k \Delta^k \varphi(0) |x|^{2k} \right\} \frac{dx}{|x|^{p-\alpha}}, \tag{7}$$

где

$$H_k = \frac{\omega_p}{2^k k!\, p(p+2) \ldots (p+2k-2)},$$

а $\omega_p = \dfrac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}$ — площадь единичной сферы в R^p. При этом

$$k_{-2m} = \left(-\frac{1}{4\pi^2}\right)^m \Delta^m, \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

а

$$k_0 = \varepsilon,$$

где ε — мера Дирака, сосредоточенная в точке $x=0$. Формула (8) дает повод рассматривать $k_{-\alpha}$, как лапласиан дробного порядка.

Важно заметить, что если $\varphi(x) \bar{\in} D$, но имеет непрерывные производные порядка $2m$ и при $|x| \to \infty$

$$\varphi(x) = O(|x|^{-N}),$$

то $k_\alpha(\varphi)$ также может быть определена, как аналитическая функция α, регулярная в полосе

$$-2m < \operatorname{Re}\alpha < N$$

(за исключением точек $\alpha = p + 2n$, $n = 0,1,\ldots$). Это обстоятельство позволяет произвести «аналитическое продолжение» формулы (6) и доказать ее справедливость при всех α, β, удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{Re}(\alpha+\beta) < p, \ \alpha, \ \beta \neq p + 2n, \ (n = 0, 1, \ldots). \tag{9}$$

В частности, при всех $\alpha \neq p + 2n$

$$k_\alpha * k_{-\alpha} = \varepsilon. \tag{10}$$

В дальнейшем мы параметр α будем считать вещественным.

В соотношениях (6) и (10) мы рассматриваем обе части, как элементы D^*. Но в действительности все члены этих равенств определены на более широких пространствах, чем D, и поэтому возникает вопрос о справедливости (6) и (10) в более широком смысле.

Будем обозначать D^m пространство финитных m раз непрерывно дифференцируемых функций, в котором сходимость $f_n(x) \to f(x)$ определяется условиями

$$\partial^k f_n \to \partial^k f, \ |k| = 0, 1, \ldots, m,$$

равномерно в R^p и условием равномерной финитности семейства $\{f_n\}$.

Лемма 5. *Обозначим $2m_\alpha \geqslant 0$ наименьшее четное число, которое при $\alpha < 0$ удовлетворяет неравенству $2m > |\alpha|$; при $\alpha \geqslant 0$ положим $2m_\alpha = 0$. Аналогичный смысл имеет $2m_\beta$. Тогда равенство*

$$k_\alpha * k_\beta = k_{\alpha+\beta} \tag{6}$$

имеет место, как равенство обобщенных функций класса $[D^{2m_\alpha + 2m_\beta}]^*$.

Доказательство. Так как $D^{2m_\alpha + 2m_\beta}$ плотно в D, то достаточно установить, что обе стороны (6) принадлежат $[D^{2m_\alpha + 2m_\beta}]^*$.

Пусть $E_\alpha \supset D^{2m_\alpha}$ есть линейное пространство непрерывных функций $f(x)$, имеющих в окрестности нуля непрерывные производные порядка $2m_\alpha$, и суммируемых с весом $(1 + |x|^{p-\alpha})^{-1}$.

Сходимость $f_n(x) \to f(x)$ в E_α обозначает, что

$$\int_{R^p} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |x|^{p-\alpha}} dx \to 0,$$

и в некоторой окрестности нуля равномерно

$$\partial^k f_n(x) \to \partial^k f(x), \ |k| \leqslant 2m_\alpha.$$

Эта сходимость слабее, чем сходимость в D^{2m_α}, и поэтому $E_\alpha^* \subset [D^{2m_\alpha}]^*$. Из представления (7) вытекает, что $k_\alpha \in E_\alpha^*$.

Следовательно, $k_{\alpha+\beta} \in [D^{2m_{\alpha+\beta}}]^*$. Но нетрудно видеть, что $m_{\alpha+\beta} \leqslant \leqslant m_\alpha + m_\beta$, так что

$$D^{2m_{\alpha+\beta}} \supset D^{2m_\alpha+2m_\beta},$$

и поэтому $k_{\alpha+\beta} \in [D^{2m_\alpha+2m_\beta}]^*$.

Далее, с помощью леммы 1 устанавливаем, что $k_\alpha \times k_\beta$ будет определено в пространстве $E_{\alpha\beta}$ функций $f(x, y)$ в $R^p \times R^p$, имеющих $2m_\alpha + 2m_\beta$ непрерывных производных и суммируемых вместе со всеми упомянутыми производными с весом $(1+|x|^{p-\alpha})^{-1}(1+|y|^{p-\beta})^{-1}$. Сходимость $f_n(x, y) \to f(x, y)$ в $E_{\alpha\beta}$ обозначает, что

$$\int\limits_{R^p \times R^p} \frac{|\partial^k f_n(x, y) - \partial^k f(x, y)|}{(1+|x|^{p-\alpha})(1+|y|^{p-\beta})}\, dx dy \to 0; \ |k| \leqslant 2m_\alpha + 2m_\beta,$$

и в некоторой окрестности нуля равномерно

$$\partial^k f_n(x, y) \to \partial^k f(x, y), \ |k| \leqslant 2m_\alpha + 2m_\beta.$$

Согласно замечанию к лемме 1, для утверждения $k_\alpha * k_\beta \in [D^{2m_\alpha+2m_\beta}]^*$ достаточно проверить, что для любой $f(x) \in D^{2m_\alpha+2m_\beta}$ отображение $f(x) \to f(x+y)$ есть непрерывный оператор из $D^{2m_\alpha+2m_\beta}$ в $E_{\alpha\beta}$.

Если K — носитель $f(x)$, а $M = \max|f(x)|$, то

$$\int\limits_{R^p} \frac{|f(x+y)|}{1+|y|^{p-\beta}}\, dy \leqslant M \int\limits_{K+x} \frac{dy}{1+|y|^{p-\beta}} = O\left(\frac{1}{1+|x|^{p-\beta}}\right),$$

откуда

$$\int\limits_{R^p \times R^p} \frac{|f(x+y)|\, dx dy}{(1+|x|^{p-\alpha})(1+|y|^{p-\beta})} \leqslant M_1 \int\limits_{R^p} \frac{dx}{1+|x|^{2p-\alpha-\beta}}.$$

Так как, в силу (9) $\alpha + \beta < p$, то это вместе с совершенно аналогичными оценками для $\partial^k f(x+y)$ показывает, что $f(x+y) \in E_{\alpha\beta}$. Непрерывность отображения $f(x) \to f(x+y)$ также легко следует из полученных оценок.

Лемма доказана.

Следствие. При $\alpha > 0$ и любой $\varphi(x) \in D^{2m_{-\alpha}}$ функция

$$\nu(x) = k_{-\alpha} * \varphi(x) = k_{-\alpha}^{(y)} \varphi(x-y)$$

удовлетворяет соотношению

$$\varphi(x) = k_\alpha * \nu(x).$$

Полезно заметить также, что при $|x| \to \infty$

$$\nu(x) = O(|x|^{-p-\alpha}),$$

§ 2. Супергармонические и гармонические функции дробного порядка

3. Всюду в дальнейшем мы будем считать, что $0 < \alpha < 2$. Введем, следуя М. Риссу, меру $\varepsilon_\varepsilon^{(r)}$, $(r > 0)$, с плотностью

$$\varepsilon_\alpha^{(r)}(x) = \begin{cases} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\pi^{-\frac{p}{2}-1} \sin\frac{\pi\alpha}{2} r^\alpha (|x|^2 - r^2)^{-\frac{\alpha}{2}} |x|^{-p} & \text{при } |x| > r, \\ 0 & \text{при } |x| < r. \end{cases} \qquad (11)$$

Основное свойство этой функции состоит в том, что при $|x| \geqslant r$

$$U_\alpha^{\varepsilon_\alpha^{(r)}}(x) = \int_{R^p} k_\alpha(x-y)\, \varepsilon_\alpha^{(r)}(y)\, dy = k_\alpha(x), \tag{12}$$

а при $|x| < r$

$$U_\alpha^{\varepsilon_\alpha^{(r)}}(x) \leqslant k_\alpha(x)^*. \tag{12'}$$

Кроме того,

$$\varepsilon_\alpha^{(r)}(1) = \int_{R^p} \varepsilon_\alpha^{(r)}(x)\, dx = 1.$$

Мера $\varepsilon_\alpha^{(r)}$ определяет операцию усреднения

$$\varepsilon_\alpha^{(r)}(f) = \int_{R^p} f(x)\, \varepsilon_\alpha^{(r)}(x)\, dx,$$

применимую к локально суммируемым функциям $f(x)$, подчиненным условию

$$\int_{|x|>1} \frac{|f(x)|}{|x|^{p+\alpha}}\, dx < \infty. \tag{13}$$

Обозначим $\mathbf{M}^+$ класс мер μ, удовлетворяющих условию

$$\int_{|x|>1} \frac{d\mu(x)}{|x|^{p+\alpha}}\, dx < \infty. \tag{14}$$

Для этих мер потенциал

$$U_\alpha^\mu(x) = \int_{R^p} k_\alpha(x-y)\, d\mu(y) \leqslant +\infty$$

(который мы иногда будем обозначать $k_\alpha * \mu$) локально суммируем и удовлетворяет условию (13). В самом деле

$$\int_{|x|>1} \frac{U_\alpha^\mu(x)}{|x|^{p+\alpha}}\, dx = \int d\mu(y) \int_{|x|>1} \frac{dx}{|x|^{p+\alpha}\, |x-y|^{p-\alpha}}.$$

Но нетрудно проверить, что внутренний интеграл есть $O(|y|^{\alpha-p})$ и это вместе с (14) доказывает утверждение.

Теперь легко, опираясь на (12) и (12′), показать, что всюду в R^p

$$\varepsilon_\alpha^{(r)} * U_\alpha^\mu(x) = \int U_\alpha^\mu(x-y)\, \varepsilon_\alpha^{(r)}(y)\, dy \leqslant U_\alpha^\mu(x), \tag{15}$$

причем в точках x, не принадлежащих носителю $S(\mu)$ меры μ, при r меньших расстояния от x до $S(\mu)$

$$\varepsilon_\alpha^{(r)} * U_\alpha^\mu(x) = U_\alpha^\mu(x). \tag{15'}$$

4. Введем теперь следующие определения.

Функция $f(x)$ называется α-супергармонической в R^p, если

a) $0 \leqslant f(x) \not\equiv +\infty$;

в) $f(x)$ полунепрерывна снизу;

c) $f(x)$ удовлетворяет условию (13), и для любой точки $x \in R^p$ и любого $r > 0$

$$\varepsilon_\alpha^{(r)} * f(x) = \varepsilon_{\alpha x}^{(r)}(f) \leqslant f(x).$$

---

* См. [1].

Функция $f(x)$, определенная во всем пространстве R^p называется α-гармонической в открытом множестве G, если она удовлетворяет условию (13), непрерывна в G, и для любой точки $x \in G$

$$f(x) = \varepsilon_\alpha^{(r)} * f(x) = \varepsilon_{\alpha x}^{(r)}(f) \tag{16}$$

при условии, что r меньше расстояния от x до ∂G.

Заметим, что эти определения не имеют локального характера, поскольку носителем $\varepsilon_\alpha^{(r)}$ является вся внешность сферы $|x| < r$.

Выше мы установили, что потенциал $U_\alpha^\mu(x)$ меры μ является α-супергармонической функцией в R^p и α-гармонической функцией в дополнении к $S(\mu)$.

Укажем несколько простых свойств α-супергармонических функций.

(i) В каждой точке $x \in R^p$

$$\lim_{r \to 0} \varepsilon_\alpha^{(r)} * f(x) = f(x).$$

(ii) Если $f(x_0) = \inf\limits_{R^p} f(x)$, то $f(x) \equiv f(x_0)$.

(iii) Если $\{f_n(x)\}$ неубывающая последовательность α-супергармонических функций, то

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

либо $\equiv +\infty$, либо α-супергармонична.

(iV) Если $\mu \in \mathfrak{M}^+$, а $f(x)$ α-супергармонична, то

$$f * \mu(x) = \int\limits_{R^p} f(x-y)\, d\mu(y)$$

либо $\equiv +\infty$, либо α-супергармонична.

Отсюда, в частности, следует, что при фиксированном $r > 0$ функция

$$f^{(r)}(x) = f * \varepsilon_\alpha^{(r)}(x)$$

будет α-супергармонична.

Установим теперь обобщение принципа гармонической миноранты.

Теорема 1. *Пусть в R^p заданы две функции: α-супергармоническая функция $f(x)$ и функция $h(x)$, α-гармоническая в открытом множестве G, не содержащем внутри бесконечной точки, и непрерывная в G Тогда, если*

$$f(x) \geqslant h(x). \ x \in CG,$$

то это неравенство справедливо и в G.

Если в какой-либо точке $x_0 \in G$ имеем равенство $f(x_0) = h(x_0)$, то $f(x) = h(x)$ почти всюду в R^p,

Доказательсто. Рассмотрим разность

$$d(x) = f(x) - h(x).$$

Она полунепрерывна снизу на $\overline{G}$ и в любой точке s границы G

$$\varliminf_{x \to s} d(x) \geqslant 0, \ x \in G,$$

ибо

$$\varliminf_{x \to s} d(x) = \varliminf_{x \to s} f(x) - \varliminf_{x \to s} h(x) \geqslant f(s) - h(s).$$

Следовательно, если $d(x)$ принимает отрицательные значения, то найдется точка $x_0 \in G$ где $d(x)$ достигнет своего абсолютного минимума. В таком случае

$$d(x_0) < \varepsilon_{\alpha x_0}^{(r)}(d) = \varepsilon_{\alpha x_0}^{(r)}(f) - \varepsilon_{\alpha x_0}^{(r)}(h).$$

Но $f(x_0) \geqslant \varepsilon_{\alpha x_0}^{(r)}(f)$ и, вычитая это неравенство из предыдущего, получаем

$$-h(x_0) < -\varepsilon_{\alpha x_0}^{(r)}(h).$$

При достаточно малом r это противоречит α-гармоничности $h(x)$ в точке x_0 и, таким образом, всюду в R^p $d(x) \geqslant 0$.

Если допустить, что $d(x_0) = 0$ при $x_0 \in G$, то при достаточно малом $r > 0$ имеем

$$0 = d(x_0) \geqslant \varepsilon_{\alpha x_0}^{(r)}(d),$$

и поэтому $d(x) = 0$ почти всюду.

С помощью этой теоремы и некоторых аппроксимационных приемов (см. [8], стр. 30) можно доказать следующий принцип мажорирования.

Теорема 2*. *Пусть $\mu \in \mathfrak{M}^+$, и потенциал $U_\alpha^\mu(x)$ конечен μ-почти всюду. Если неравенство*

$$U_\alpha^\mu(x) \leqslant f(x),$$

где $f(x)$ — α-супергармоническая функция, выполнено на $S(\mu)$, то оно справедливо всюду.

5. Установим теперь связь между α-супергармоничностью и обобщенной функцией $k_{-\alpha}$ Она основана на следующих леммах.

Лемма 6. *При $r \to 0$*

$$\frac{1}{r^\alpha}\left(\varepsilon - \varepsilon_\alpha^{(r)}\right) \to Qk_{-\alpha},$$

где $Q > 0$ зависит лишь от α и p.

Доказательство. Для любой функции $\varphi(x) \in D$ имеем

$$(\varepsilon - \varepsilon_\alpha^{(r)})(\varphi) = \int\limits_{|x|>r} [\varphi(0) - \varphi(x)]\, \varepsilon_\alpha^{(r)}(x)\, dx =$$

$$= \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\pi^{-\frac{p}{2}-1} \sin\frac{\pi\alpha}{2} r^\alpha \int\limits_r^\infty \frac{d\rho}{\rho(\rho^2-r^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \int\limits_{|x|=1} [\varphi(0) - \varphi(\rho x)]\, d\omega =$$

$$= \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\pi^{-\frac{p}{2}-1} \sin\frac{\pi\alpha}{2} r^\alpha \omega_p \int\limits_r^\infty \frac{\varphi(0) - \tilde{\varphi}(0, \rho)}{\rho(\rho^2-r^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\, d\rho,$$

где

$$\tilde{\varphi}(0, \rho) = \frac{1}{\omega\rho} \int\limits_{|x|=\rho} \varphi(x)\, d\omega$$

---

* Эта теорема известна в более сильной формулировке: когда предполагается, что основное неравенство имеет место не во всех точках носителя $S(\mu)$, а μ-почти всюду (если $f(x)$ непрерывна, то обе формулировки эквивалентны). Однако нам неизвестно доказательство этого более сильного результата, не опирающееся на теорему 4.

есть среднее значение $\varphi(x)$ на сфере радиуса ρ с центром в точке O. Следовательно,

$$\frac{1}{r^\alpha}(\varepsilon-\varepsilon_\alpha^{(r)})(\varphi)=-\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\pi^{-\frac{p}{2}-1}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\,\omega_p\int\limits_r^\infty\frac{\tilde{\varphi}(0,\rho)-\varphi(0)}{\rho(\rho^2-r^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\,d\rho,$$

и в силу гладкости $\varphi(x)$

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^\alpha}(\varepsilon-\varepsilon_\alpha^{(r)})(\varphi)=-\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\pi^{-\frac{p}{2}-1}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\,\omega_p\int\limits_0^\infty\frac{\tilde{\varphi}(0,\rho)-\varphi(0)}{\rho^{\alpha+1}}\,d\rho.$$

Так как согласно (7)

$$k_{-\alpha}(\varphi)=A(p,\alpha)\,w_p\int\limits_0^\infty\frac{\tilde{\varphi}(0,\rho)-\varphi(0)}{\rho^{\alpha+1}}\,d\rho,$$

то в силу (5′)

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^\alpha}(\varepsilon-\varepsilon_\alpha^{(r)})(\varphi)=\frac{2\pi^\alpha}{\alpha}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+\alpha}{2}\right)}\,k_{-\alpha}(\varphi).$$

Замечание. Для справедливости последней формулы достаточно предположить, что $\varphi(x)\in E_{-\alpha}$, т. е., поскольку $0<\alpha<2$, что $\varphi(x)$ имеет в окрестности нуля две непрерывные производные и удовлетворяет условию (13).

Лемма 7. *Если $f(x)$ α-супергармоническая функция, то*

$$\mu=k_\alpha * f$$

есть мера. При этом свертка $k_{-\alpha}*f$ понимается, как обобщенная функция, определяемая равенством

$$(k_{-\alpha}*f)(\varphi)=k_{-\alpha}\int f(y)\,\varphi(x+y)\,dy.$$

Доказательство. Согласно теореме Л. Шварца, достаточно установить, что для всякой функции $\varphi(x)\in D$, $\varphi(x)\geqslant 0$,

$$(k_{-\alpha}*f)(\varphi)\geqslant 0.$$

Так как

$$\psi(x)=\int f(y)\,\varphi(x+y)\,dy\in E_{-\alpha},$$

то в силу последнего замечания

$$(k_{-\alpha}*f)(\varphi)=k_{-\alpha}(\psi)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{Qr^\alpha}(\varepsilon-\varepsilon_\alpha^{(r)})(\psi),$$

и поэтому достаточно убедиться в том, что $\psi(x)$ есть α-супергармоническая функция. Но это следует из свойства (IV).

§ 3. Обобщенная теорема Эванса

6. Сформулированное ниже предложение указано М. Риссом. Доказательство, которое мы приводим, является новым.

Теорема 3. *Пусть* $\{U_\alpha^{\mu_n}(x)\}$ *неубывающая последовательность потенциалов мер. Тогда либо*

$$\lim_{n\to\infty} U_\alpha^{\mu_n}(x) \equiv +\infty,$$

либо всюду в R^p

$$\lim_{n\to\infty} U_\alpha^{\mu_n}(x) = U_\alpha^{\mu}(x) + A, \tag{17}$$

где $\mu \in \mathfrak{M}^+$, *и* $A \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} U_\alpha^{\mu_n}(x) \not\equiv +\infty$. Докажем сначала, что (17) имеет место почти всюду в R^p.

Для этого заметим, что

1) последовательность мер $\{\mu_n\}$ слабо ограничена, т. е. для всякого компакта $K \subset R^p$ $\mu_n(K) < \mathrm{const}$.

2) при всяком $r > 0$

$$\int\limits_{|x|>r} \frac{d\mu_n(x)}{|x|^{p-\alpha}} < \mathrm{const}$$

В самом деле, если 1) не выполнено, то для некоторого K и последовательности $\{n_i\}$ $\mu_{n_i}(K) \to \infty$. Но тогда

$$\lim_{i\to\infty} U_\alpha^{\mu_{n_i}}(x) \geqslant A(p,\alpha) \varlimsup_{i\to\infty} \int\limits_K \frac{d\mu_{n_i}(x)}{|x-y|^{p-\alpha}} \equiv +\infty,$$

что противоречит предположению. Аналогично доказывается 2), если учесть следующее легко проверяемое неравенство

$$\int\limits_{R^p} \frac{d\mu_n(y)}{|x-y|^{p-\alpha}} \geqslant \left(\frac{|x|+1}{2|x|+1}\right)^{p-\alpha} \int\limits_{|y|>|x|+1} \frac{d\mu_n(y)}{|y|^{p-\alpha}}.$$

В силу теоремы о слабой компактности мер мы можем считать, что $\mu_n \to \mu$.

Положим теперь

$$\lim_{n\to\infty} U_\alpha^{\mu_n}(x) = F(x),$$

и рассмотрим произвольную непрерывную финитную функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию

$$\int\limits_{R^p} f(x)\,dx = 0.$$

Из 1) и 2) следует локальная суммируемость $F(x)$, так как при любом n

$$\int\limits_{|x|<r} U_\alpha^{\mu_n}(x)\,dx = A(p,\alpha)\int d\mu_n(y) \int\limits_{|x|<r} \frac{dx}{|x-y|^{p-\alpha}} < \mathrm{const}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{R^p} U_\alpha^{\mu_n}(x) f(x)\,dx = \int\limits_{R^p} F(x) f(x)\,dx.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{R^p} U_\alpha^{\mu_n}(x) f(x)\,dx = \int\limits_{R^p} U_\alpha^{f}(x)\,d\mu_n(x).$$

Но нетрудно убедиться, раскладывая $|x-y|^{\alpha-p}$ в ряд по отрицательным степеням $|x|$, что

$$U_\alpha^f(x)=A(p,\alpha)\int\frac{f(y)\,dy}{|x-y|^{p-\alpha}}=O\left(\frac{1}{|x|^{p+1-\alpha}}\right).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{|x|>r}U_\alpha^f(x)\,d\mu_n(x)<Q_1\int\limits_{|x|>r}\frac{d\mu_n(x)}{|x|^{p+1-\alpha}}<\frac{Q_1}{r}\int\limits_{|x|>r}\frac{d\mu_n(x)}{|x|^{p-\alpha}},$$

и это выражение в силу 2) равномерно стремится к нулю при $r\to\infty$. Если учесть еще непрерывность $U_\alpha^f(x)$, то мы получим

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{R^p}U_\alpha^f(x)\,d\mu_n(x)=\int\limits_{R^p}U_\alpha^f(x)\,d\mu(x)=\int\limits_{R^p}U_\alpha^\mu(x)f(x)\,dx.$$

Итак, для всякой непрерывной финитной функции $f(x)$, ортогональной к 1,

$$\int\limits_{R^p}F(x)f(x)\,dx=\int\limits_{R^p}U_\alpha^\mu(x)f(x)\,dx.$$

Отсюда, как известно, вытекает, что почти всюду в R^p

$$F(x)=U_\alpha^\mu(x)+A,$$

где A постоянная. Так как

$$U_\alpha^\mu(x)\leqslant\lim_{n\to\infty}U_\alpha^{\mu_n}(x)=F(x),$$

то $A\geqslant 0$.

Итак, (17) доказано почти всюду в R^p. Но согласно свойству (iii), n°4, $F(x)$ есть α-супергармоническая функция, и поэтому из (i) следует, что (17) имеет место во всех точках R^p.

Замечание. Теорема 3 верна также при $\alpha\geqslant 2$. Основная часть приведенного доказательства не использует предположения $\alpha<2$. В заключительном рассуждении следует учесть, что при $\alpha\geqslant 2$ $U_\alpha^\mu(x)$ и $F(x)$ являются обычными супергармоническими функциями.

§ 4. Обобщенный интеграл Пуассона

7. Следующую функцию $\check{P}_r(y,x)$, введенную М. Риссом, можно рассматривать как аналог ядра Пуассона для внешности сферы S_r радиуса r:

$$\check{P}_r(y,x)=\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\pi^{-\frac{p}{2}-1}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\,\frac{(|x|^2-r^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{(r^2-|y|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{1}{|x-y|^p},$$

$$|y|<r,\ |x|>r. \tag{18}$$

Как указано в [1], для любой точки y_0 внутри S_r имеем

$$\frac{1}{|y_0-x|^{p-\alpha}}=\int\limits_{|y|<r}\frac{1}{|y_0-y|^{p-\alpha}}\check{P}_r(y,x)\,dy,$$

$$(|x|>r). \tag{19}$$

Пусть ν — заряд с носителем $S(\nu)$, лежащим вне сферы S_r. Определим абсолютно непрерывный заряд ν' с носителем $S(\nu')$, принадлежащим S_r, формулой

$$\nu'(y) = \int\limits_{S(\nu)} \check{P}_r(y, x)\, d\nu(x), \quad |y| < r.$$

Тогда, проинтегрировав (19) по $d\nu(x)$, получим

$$U_\alpha^\nu(y_0) = U_\alpha^{\nu'}(y_0), \quad |y_0| < r \tag{20}$$

Этим решена так называемая проблема выметания на сферу S_r: любой заряд ν вне S_r может быть заменен зарядом на S_r, причем так, что потенциал внутри S_r не изменяется. Подобным же образом можно ввести аналог ядра Пуассона для внутренности сферы S_r. Им является функция

$$\hat{P}_r(y, x) = \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\pi^{-\frac{p}{2}-1} \sin\frac{\pi\alpha}{2} \frac{(r^2 - |x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{(|y|^2 - r^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{|x - y|^p}, \tag{21}$$

$$|y| > r, \quad |x| < r,$$

которая при $x = 0$ совпадает с $\varepsilon_\alpha^{(r)}(y)$ (см. (11)).

Для любой точки y_0, $|y_0| > r$, имеем внутри сферы S_r равенство (см. [1])

$$\frac{1}{|y_0 - x|^{p-\alpha}} = \int\limits_{|y|>r} \frac{1}{|y_0 - y|^{p-\alpha}} \hat{P}_r(y, x)\, dy, \tag{22}$$

$$|x| < r.$$

Из него, как и выше, можно получить решение проблемы выметания заряда ν внутри S_r на внешность сферы;

$$U_\alpha^\nu(y_0) = U_\alpha^{\nu'}(y_0), \quad |y_0| > r, \tag{23}$$

где

$$\nu'(y) = \int\limits_{S(\nu)} \hat{P}_r(y, x)\, d\nu(x), \quad |y| > r,$$

заряд на $|y| \geqslant r$.

Аналогия функции $\check{P}_r(y, x)$ с ядром Пуассона наиболее полно обнаруживается в следующей лемме.

Лемма 8. *Пусть $f(x)$ любая измеримая функция* в S_r, *для которой*

$$\int\limits_{|x|<r} \frac{|f(x)|}{(r^2 - |x|^2)^{\frac{\varepsilon}{2}}}\, dx < \infty.$$

Положим

$$\check{f}(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leqslant r, \\ \int\limits_{|y|<r} f(y)\, \check{P}_r(y, x)\, dy, & |x| > r. \end{cases} \tag{24}$$

Тогда $\check{f}(x)$ будет α-гармонической функцией в области $|x| > r$.

Доказательство. Функция $\check{f}(x)$ очевидно непрерывна при $|x| > r$, и при $x \to \infty$

$$\check{f}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{p-\alpha}}\right), \tag{25}$$

так что условие (13) выполнено.

Покажем, что для любого δ, $0 < \delta < |x| - r$,

$$\check{f}(x) = \varepsilon_{\alpha x}^{(\delta)}(\check{f}), \tag{26}$$

откуда и будет следовать справедливость леммы.

Пусть сначала

$$f(x) = U_\alpha^\nu(x),$$

где заряд ν сосредоточен в шаре $|x| < r$. Интегрируя равенство (19) с $d\nu(y_0)$, получим, что при $|x| > r$ справедливо равенство

$$U_\alpha^\nu(x) = \int\limits_{|y|<r} U_\alpha^\nu(y)\,\check{P}_r(y,\ x)\,dy.$$

Иначе говоря,

$$\check{U}_\alpha^\nu(x) \equiv U_\alpha^\nu(x).$$

Но, как мы видели в $n^0 4$, $U_\alpha^\nu(x)$ является α-гармонической функцией вне $S(\nu)$ и, в частности, при $|x| > r$.

Пусть теперь функция $f(x)$, заданная в шаре $|x| \leqslant r$, имеет там две непрерывных производных. Сохраняя непрерывность этих производных, ее можно продолжить до финитной функции $f_1(x)$, определенной во всем R^p. По следствию из леммы 5

$$f_1(x) = U_\alpha^\psi(x),\ x \in R^p.$$

Пусть ψ_1 — часть заряда ψ вне сферы S_r. Выметая согласно (20) ψ_1 на сферу S_r, получим новый заряд ψ_1'. Положив $\nu = \psi - \psi_1 + \psi_1'$, получим заряд, сосредоточенный в шаре $|x| < r$, причем

$$f(x) = U_\alpha^\nu(x),\ |x| < r.$$

Как мы видели, $\check{f}(x)$ будет в этом случае α-гармонической функцией в области $|x| > r$.

Пусть, наконец, $f(x)$ любая функция, удовлетворяющая условиям леммы. Существует последовательность функций $f_n(x)$, имеющих две непрерывных производных и сходящаяся к $f(x)$ в пространстве $L(S_r)$ с весом $(r^2 - |x|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$, т. е. такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{|x|<r} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{(r^2 - |x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\,dx = 0. \tag{27}$$

По доказанному при любом n $f_n(x)$ удовлетворяет условию (26)

$$\check{f}_n(x) = \varepsilon_{\alpha x}^{(r)}(\check{f}_n),\ |x| > r.$$

Но из (27) следует, во-первых, что при всяком фиксированном x, $|x| > r$,

$$\lim_{n\to\infty} \check{f}_n(x) = \check{f}(x), \tag{28}$$

а во-вторых, что

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{\alpha x}^{(\delta)}(\check{f}_n) = \varepsilon_{\alpha x}^{(\delta)}(\check{f}). \tag{29}$$

Первое достаточно очевидно; докажем второе.

Имеем (см. (24))

$$\varepsilon_{\alpha x}^{(\delta)}(\check{f}_n) = \int \varepsilon_\alpha^{(\delta)}(x-y)\check{f}_n(y)\,dy = \int\limits_{|y|<r} \varepsilon_\alpha^{(\delta)}(x-y) f_n(y)\,dy +$$

$$+\int\limits_{|y|>r} \varepsilon_\alpha^{(\delta)}(x-y)\,dy \int\limits_{|z|<r} f_n(z)\check{P}_r(z,\ y)\,dz = \int\limits_{|y|<r} \varepsilon_\alpha^{(\delta)}(x-y) f_n(y)\,dy +$$

$$+\int\limits_{|z|<r} f_n(z)\,dz \int\limits_{|y|>r} \varepsilon_\alpha^{(\delta)}(x-y)\check{P}_r(z,\ y)\,dy.$$

Так как функция $\varepsilon_\alpha^{(\delta)}(x-y)$ ограничена в шаре $|y|<r$, то первый интеграл стремится, в силу (27), к $\int\limits_{|y|<r} \varepsilon_\alpha^{(\delta)}(x-y) f(y)\,dy$. Далее,

$$\int\limits_{|y|>r} \varepsilon_\alpha^{(\delta)}(x-y)\check{P}_r(z,\ y)\,dy =$$

$$=\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\pi^{-\frac{p}{2}-1}\sin\frac{\pi\alpha}{2}(r^2-|z|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \int\limits_{|y|>r} \varepsilon_\alpha^{(\delta)}(x-y)(|y|^2-r^2)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{dy}{|z-y|^p}.$$

При любом $\eta>0$ и $|z|<r$

$$\int\limits_{|y|>r+\eta} \varepsilon_\alpha^{(\delta)}(x-y)(|y|^2-r^2)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{dy}{|z-y|^p} = O(1).$$

Взяв η так, чтобы сферы $|y|<r+\eta$ и $|x-y|<\delta$ не пересекались, и учитывая ограниченность $\varepsilon_\alpha^{(\delta)}(x-y)$ в кольце $r<|y|<r+\eta$, получим

$$\int\limits_{r<|y|<r+\eta} \varepsilon_\alpha^{(\delta)}(x-y)(|y|^2-r^2)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{dy}{|z-y|^p} <$$

$$< Q \int\limits_{r<|y|<r+\eta} (|y|^2-r^2)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{dy}{|z-y|^p} = O(1),$$

так как последний интеграл равномерно сходится при $|z|\leqslant r$.

Итак,

$$\int\limits_{|z|<r} f_n(z)\,dz \int\limits_{|y|>z} \varepsilon_\alpha^{(\delta)}(x-y) P_r(z,\ y)\,dy = \int\limits_{|z|<r} f_n(z)\cdot O\left((r^2-|z|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\right)dz$$

и в силу (27), этот интеграл стремится к

$$\int\limits_{|z|<r} f(z)\,dz \int\limits_{|y|>r} \varepsilon_\alpha^{(\delta)}(x-y)\check{P}_r(z,\ y)\,dy.$$

Тем самым доказано (29). Вместе с (28) это дает (26), и лемма доказана.

Аналогичный результат может быть доказан и для внутренности сферы S_r: функция

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & |x|\geqslant r \\ \int\limits_{|y|>r} f(y)\hat{P}_r(y,\ x)\,dy, & |x|<r, \end{cases} \tag{30}$$

будет при естественных ограничениях на функцию $f(x)$, заданную вне S_r, α-гармонической внутри S_r.

8. Вернемся к α-супергармоническим функциям и докажем еще несколько их свойств.

Лемма 9. *Пусть $f(x)$ — α-супергармоническая функция в R^p, а $\check{f}(x)$ и $\hat{f}(x)$ определены равенствами (24) и, соответственно, (30). Тогда*

$$\check{f}(x) \leqslant f(x);\ \hat{f}(x) \leqslant f(x). \tag{31}$$

Доказательство. Если $f(x)$ непрерывна, то (31) является следствием леммы 8 и теоремы 1 *.

В общем случае рассмотрим последовательность

$$f_n(x) = f * m^{\left(\frac{1}{n}\right)}(x) \quad **$$

непрерывных функций, которые, согласно свойству (IV), п. 4, будут α-супергармоничны. Как только что указывалось,

$$\check{f}_n(x) \leqslant f_n(x),\ \hat{f}_n(x) \leqslant f_n(x). \tag{31'}$$

При $n \to \infty$ $f_n(x) \to f(x)$ почти всюду в R^p и, кроме того,

$$\int\limits_{|x|<r} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{(r^2 - |x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\, dx \to 0, \quad \int\limits_{|x|<r} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{|x|^p (|x|^2 - r^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\, dx \to 0.$$

Из последних соотношений вытекает, что

$$\hat{f}_n(x) \to \hat{f}(x),\ |x| < r,$$
$$\check{f}_n(x) \to \check{f}(x),\ |x| > r.$$

Переходя в (31′) к пределу при $n \to \infty$ получим, что (30) имеют место почти всюду в R^p. Для того чтобы доказать их справедливость в любой точке R^p, достаточно подвергнуть проверке только точки $|x| > r$ для неравенства $\check{f}(x) \leqslant f(x)$ и только точки $|x| < r$ для неравенства $\hat{f}(x) \leqslant f(x)$. Так как из доказанного вытекает справедливость неравенств

$$\varepsilon_{\alpha x}^{(r)}(\hat{f}) \leqslant \varepsilon_{\alpha x}^{(r)}(f);\ \varepsilon_{\alpha x}^{(r)}(\hat{f}) \leqslant \varepsilon_{\alpha x}^{(r)}(f),$$

а в указанных точках функции $\check{f}(x)$, соответственно $\hat{f}(x)$ непрерывны, то при $r \to 0$ в силу свойства (i), n.4, получим

$$\check{f}(x) \leqslant f(x),\quad \hat{f}(x) \leqslant f(x),$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если $f(x)$ α-супергаморническая функция, то при фиксированном x

$$\varepsilon_{\alpha}^{(r)} * f(x) = \varepsilon_{\alpha x}^{(r)}(f)$$

есть невозрастающая функция переменной r.

В самом деле, пусть $r_1 < r$. Будем, для простоты записи, считать, что $x = 0$. Построив по (30) функцию $\hat{f}(x)$, α-гармоническую в шаре $|x| < r$, и пользуясь (31), получим

$$\hat{f}(0) = \varepsilon_{\alpha}^{(r)}(f) = \varepsilon_{\alpha}^{(r_1)}(\hat{f}) \leqslant \varepsilon_{\alpha}^{(r_1)}(f).$$

---

* В случае $\check{f}(x)$ теорему 1 следует применять к области $r < |x| < \infty$.

** $m^{(r)}$ обозначает меру, полученную равномерным распределением единичной массы по шару радиуса r с центром в нуле.

Для последующего важно заменить свойство с) в определении α-супергармонической функции более слабым по форме требованием:

с$'$) $f(x)$ *удовлетворяет условию (13), и для любой точки* $x \in R^p$ *найдется такое* $r(x)$, *что для всякого* r, $0<r<r(x)$

$$\varepsilon_\alpha^{(r)} * f(x) = \varepsilon_{\alpha x}^{(r)}(f) \leqslant f(x).$$

Обозначим для краткости σ_α класс α-супергармонических функций, а σ_α' — класс функций, удовлетворяющих условиям а), в) п. 4 и только что введенному условию c').

Включение $\sigma_\alpha \subset \sigma_\alpha'$ очевидно. Но на самом деле $\sigma_\alpha \equiv \sigma_\alpha'$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно установить, что

1) функции из σ_α' подчиняются принципу α-гармонической миноранты (теорема 1);

2) функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям а), в), (13), п. 4 и принципу α-гармонической миноранты, входит в σ_α.

Утверждение 1) вытекает из того, что при доказательстве теоремы 1 было использовано именно свойство с$'$), а не с).

Докажем 2). Пусть $\{f_n(x)\}$ неубывающая последовательность непрерывных в R^p функций, сходящаяся к $f(x)$. Тогда функции $\hat{f}_n(x)$ будут также непрерывны в R^p и α-гармоничны внутри сферы S_r. Так как при $|x| \geqslant r$

$$\hat{f}_n(x = f_n(x) \leqslant f(x),$$

то применяя принцип α-гармонической миноранты, получим

$$\hat{f}_n(0) = \varepsilon_\alpha^{(r)}(f_n) \leqslant f(0),$$

и отсюда в силу монотонной сходимости $f_n(x)$ к $f(x)$

$$\varepsilon_\alpha^{(r)}(f) \leqslant f(0).$$

Но $r > 0$ любое, и точка 0 может быть, конечно, заменена любой точкой R^p. Следовательно, $f(x)$ α-супергармонична.

Итак, доказано, что

$$\sigma_\alpha' \equiv \sigma_\alpha.$$

Это обстоятельство позволит весьма просто доказать следующее утверждение.

Лемма 10. *Если $f(x)$ α-супергармоническая функция, то функции $\hat{f}(x)$ и $\check{f}(x)$ также α-супергармоничны.*

Доказательство. Будем для определенности рассматривать функцию $\check{f}(x)$. Покажем, что она полунепрерывна снизу. В проверке нуждаются только точки на сфере $|x| = r$. Следовательно, нужно показать, что если $x_n \to x$, $|x_n| > r$, $|x| = r$, то

$$\check{f}(x) = f(x) \leqslant \lim_{n \to \infty} \check{f}(x_n).$$

Но это легко следует из формулы

$$\check{f}(x_n) = \int\limits_{|y|<r} f(y)\, \check{P}_r(y, x_n)\, dy,$$

полунепрерывности $f(y)$ и того, что при $x_n \to x$

$$\check{P}_r(y, x_n) \to \varepsilon_x.$$

Проверим теперь условие c'). В точках x, $|x| \leqslant r$, выполняется даже более сильное условие c), ибо при любом $\delta > 0$ в силу (31)

$$\check{f}(x) = f(x) \geqslant \varepsilon_{\alpha x}^{(\delta)}(f) \geqslant \varepsilon_{\alpha x}^{(\delta)}(\check{f}).$$

В точках же x, $|x| > r$, функция $\check{f}(x)$ в силу леммы 8 будет α-гармонической, т. е. при $r < r(x)$

$$\check{f}(x) = \varepsilon_{\alpha x}^{(r)}(\check{f}).$$

Следовательно, условие c′) выполнено всюду, и $\check{f}(x) \in \sigma'_\alpha \equiv \sigma_\alpha$. Лемма доказана.

§ 5. Теорема М. Рисса о представлении α-супергармонических функций

Основная теорема М. Рисса состоит в следующем.

Теорема 4. *Пусть $f(x)$ α-супергармоническая функция в* $R^p, (p \geqslant 3)$. *Тогда имеет место единственное представление вида*

$$f(x) = U_\alpha^\mu(x) + A, \tag{32}$$

где $\mu \in \mathfrak{M}^+$, а постоянная A неотрицательна.

При этом, если $f(x)$ α-гармонична в G, то $\mu(G) = 0$.

Основой доказательства теоремы 4 являются следующие леммы.

Лемма 11. *Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < p$ и $f(x)$—локально суммируемая функция, удовлетворяющая условию*

$$f(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{p-\beta}}\right), \quad |x| \to \infty. \tag{33}$$

Тогда почти всюду в R^p

$$f(x) = k_\alpha * (k_{-\alpha} * f). \tag{34}$$

Доказательство. Следует доказать, что равенство

$$(k_\alpha * k_{-\alpha}) * f = k_\alpha * (k_{-\alpha} * f) \tag{34'}$$

имеет место как равенство обобщенных функций. Для этого нужно рассмотреть пространства E_1, E_2, E_3, E_{12}, E_{23}, E_{123}, на которых можно определить обобщенные функции k_α, $k_{-\alpha}$, f, $k_\alpha \times k_{-\alpha}$, $k_{-\alpha} \times f$, $k_\alpha \times k_{-\alpha} \times f$ соответственно и проверить для них выполнение условий a), в), c), d) и a′), b′), c′), d′). Нетрудно видеть, что эти пространства можно выбрать следующим образом:

(*i*) E_1 состоит из непрерывных функций $\varphi(x)$, для которых

$$\int_{R^p} \frac{|\varphi(x)|}{|x|^{p-\alpha}}\, dx < \infty.$$

При этом $\varphi_n \to \varphi$ в E_1, если

$$\int_{R^p} \frac{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|}{|x|^{p-\alpha}}\, dx \to 0.$$

E_3 определяется точно так же с заменой α на β.

(ii) E_2 состоит из непрерывных функций, имеющих в окрестности нуля две непрерывных производных и удовлетворяющих условию

$$\int_{R^p} \frac{|\varphi(x)|}{1+|x|^{p+\alpha}}\, dx < \infty,$$

При этом $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в E_2, если

$$\int_{R^p} \frac{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|}{1+|x|^{p+\alpha}}\, dx \to 0$$

и

$$\partial^k \varphi_n \to \partial^k \varphi, \quad |k| \leq 2$$

равномерно в некоторой окрестности нуля.

(iii) E_{12} состоит из функций $\varphi(x, y)$, имеющих две непрерывные производные в $R^p \times R^p$ и удовлетворяющих условию

$$\iint_{R^p \times R^p} \frac{|\partial^k \varphi(x, y)|}{|x|^{p-\alpha}(1+|y|^{p+\alpha})}\, dxdy < \infty, \quad |k| \leq 2.$$

При этом $\varphi_n(x, y) \to \varphi(x, y)$ в E_{12}, если

$$\iint_{R^p \times R^p} \frac{|\partial^k \varphi_n(x, y) - \partial^k \varphi(x, y)|}{|x|^{p-\alpha}(1+|y|^{p+\alpha})}\, dxdy \to 0, \quad |k| \leq 2,$$

и

$$\partial^k \varphi_n(x, y) \to \partial^k \varphi(x, y), \quad |k| \leq 2,$$

равномерно в некоторой окрестности нуля в $R^p \times R^p$.

(iv) E_{23} состоит из функций $\varphi(y, z)$, имеющих две непрерывные производные в $R^p \times R^p$ и удовлетворяющих условию

$$\iint_{R^p \times R^p} \frac{|\partial^k \varphi(y, z)|}{(1+|y|^{p+\alpha})|z|^{p-\beta}}\, dy\, dz < \infty, \quad |k| \leq 2.$$

Сходимость в E_{23} определяется так же, как (iii).

(v) E_{123} состоит из функций $\varphi(x, y, z)$ имеющих две непрерывные производные в $R^p \times R^p \times R^p$ и удовлетворяющих условию

$$\iiint_{R^p \times R^p \times R^p} \frac{|\partial^k \varphi(x, y, z)|}{|x|^{p-\alpha}(1+|y|^{p+\alpha})|z|^{p-\beta}}\, dxdydz < \infty, \quad |k| \leq 2.$$

Сходимость в E_{123} определяется таким же способом, как в (iii).

Проверка условий a), в), c) d); a′), b′), c′) достаточно проста, и мы ее опустим. Проверим d′). Пусть $\varphi(x) \in D$, и нам нужно убедиться в том, что $\varphi(x+y+z) \in E_{123}$.

Имеем

$$\int_{R^p} \frac{|\varphi(x+y+z)|\, dx}{|x|^{p-\alpha}} = \int_{S(\varphi)} \frac{|\varphi(\xi)|\, d\xi}{|\xi - y - z|^{p-\alpha}} = O\left(\frac{1}{1+|y+z|^{p-\alpha}}\right),$$

$$\iint_{R^p \times R^p} \frac{|\varphi(x+y+z)|\, dxdy}{|x|^{p-\alpha}(1+|y|^{p+\alpha})} = \int_{R^p} O\left(\frac{1}{1+|y+z|^{p-\alpha}}\right) \frac{dy}{1+|y|^{p+\alpha}} =$$

$$= O\left(\frac{1}{1+|z|^{p-\alpha}}\right),$$

$$\iiint\limits_{R^p \times R^p \times R^p} \frac{|\varphi(x+y+z)|\, dx\, dy\, dz}{|x|^{p-\alpha}(1+|y|^{p+\alpha})|z|^{p-\beta}} = \int\limits_{R^p} O\left(\frac{1}{1+|z|^{2p-\alpha-\beta}}\right) dz.$$

Следовательно, при условии леммы этот интеграл конечен. Аналогично проверяются производные $\partial^k \varphi(x+y+z)$, $|k| \leq 2$, и непрерывность отображения $\varphi(x) \to \varphi(x+y+z)$, и, таким образом, условие d′) выполнено.

Итак, равенство (34′) имеет место и лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть $f(x)$ α-супергармоническая функция, удовлетворяющая при $x \to \infty$ условию*

$$f(x) = \frac{a}{|x|^{p-\alpha}} + O\left(\frac{1}{|x|^{p-\beta}}\right), \quad \beta < p - \alpha.$$

Тогда

$$f(x) = k_\alpha * \mu = U_\alpha^\mu(x), \tag{35}$$

где $\mu = k_{-\alpha} * f$.

Доказательство. Положим

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a}{|x|^{p-\alpha}}.$$

Эта функция удовлетворяет условию (33), и по лемме 11 почти всюду

$$f_1(x) = k_\alpha * (k_{-\alpha} * f_1).$$

Но

$$k_{-\alpha} * f_1 = k_{-\alpha} * f - a_1 \varepsilon,$$

где $a_1 = \dfrac{a}{A(p, \alpha)}$. Следовательно,

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a}{|x|^{p-\alpha}} = k_\alpha * (k_{-\alpha} * f) - a_1 k_\alpha$$

или

$$f(x) = k_\alpha * \mu = U_\alpha^\mu(x)$$

почти всюду. Но тогда, в силу свойства (i), п. 4 и α-супергармоничности потенциала $U_\alpha^\mu(x)$ мы получаем равенство (35) во всех точках R^p.

Теперь мы приведем

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим функцию $f_n(x)$ совпадающую с $\check{f}(x)$, построенной для $|x| > n$. Согласно лемме 10 она α-супергармонична. Кроме того, при $x \to \infty$

$$\check{P}_r(y, x) = \frac{c_1(y)}{|x|^{p-\alpha}} + O\left(\frac{1}{|x|^{p+1-\alpha}}\right),$$

что нетрудно получить из (18) разложением правой части в ряд. Следовательно, согласно (24)

$$f_n(x) = \frac{a}{|x|^{p-\alpha}} + O\left(\frac{1}{|x|^{p+1-\alpha}}\right),$$

и так как $\alpha < 2$, то $2\alpha - 1 < p$, и по лемме 12

$$f_n(x) = U_\alpha^{\mu_n}(x),$$

где $\mu_n = k_{-\alpha} * f_n$ есть финитная мера, сосредоточенная в шаре $|x| \leqslant n$. Покажем, что

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x); \tag{36}$$

тогда в силу очевидного соотношения

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

результат будет вытекать из теоремы 3.

Так как $f_{n+1}(x)$ α-супергармоническая, а $f_n(x)$ непрерывна и α-гармонична на множестве $|x| > n+1$, то в силу теоремы 1 неравенство (36) достаточно проверить при $|x| \leqslant n+1$ и на бесконечности.

Но при $|x| \leqslant n$ (36) превращается в равенство, ибо $f_n(x) = f_{n+1}(x) = f(x)$; при $n < |x| \leqslant n+1$ оно следует из (31), так как в этой области $f_{n+1}(x) = f(x)$, а на бесконечности обе функции обращаются в нуль. Следовательно, неравенство (36), а вместе с тем и теорема 4 в части существования представления (32) доказаны.

Далее, нетрудно показать, что

$$\lim_{r\to\infty} \varepsilon_\alpha^{(r)}(U_\alpha^\mu) = 0.$$

Поэтому величина

$$A = \lim_{r\to\infty} \varepsilon_\alpha^{(r)}(f)$$

представляет собой именно ту константу, которая фигурирует в представлении (32). Это доказывает единственность представления (32).

Последнее утверждение теоремы легко следует из конструкции меры μ.

§ 6. Обобщенная задача Дирихле

10. Мы используем метод, изложенный для классического случая $\alpha = 2$ в [6].

Пусть G — произвольное открытое множество, для которого $C\overline{G} \neq \varnothing$. Обозначим $\mathfrak{C}_{CG}$ пространство всех непрерывных на замкнутом множестве CG функций, стремящихся на бесконечности к нулю (если ∞ принадлежит CG). Метрика в $\mathfrak{C}_{CG}$ предполагается равномерной. Пусть далее $\mathfrak{H}_{CG} \subset L_{CG}$ линейное многообразие функций, которые можно продолжить до функций, непрерывных во всем R^p и α-гармонических в G. Будем говорить, что для функций $f(x) \in \mathfrak{H}_{CG}$ проблема Дирихле разрешима, а упомянутое продолжение $h_f(x)$ функции $f(x)$ будем называть решением проблемы Дирихле для $f(x)$.

Из следующей простой леммы вытекает единственность такого решения, а также замкнутость $\mathfrak{H}_{CG}$ в $\mathfrak{C}_{CG}$.

Лемма 13. *Пусть $h(x) \not\equiv 0$ непрерывна в R^p, α-гармоническая в G и стремится к нулю на бесконечности. Тогда для любой точки $x \in G$*

$$|h(x)| < \max_{R^p} |h(y)| \tag{37}$$

и, следовательно,

$$\max_{R^p} |h(y)| = \max_{CG} |h(y)|.$$

Доказательство. Предположим, что

$$|h(x_0)| = \max_{R^p} |h(y)|, \quad x_0 \in G,$$

и для определенности допустим, что $h(x_0) > 0$. Тогда для всех точек $y \in R^p$ имеем $h(y) \leqslant h(x_0)$. С другой стороны, согласно (16) при достаточно малом $r > 0$

$$h(x_0) = \varepsilon^{(r)}_{\alpha x_0}(h).$$

Отсюда, учитывая непрерывность $h(y)$, легко получим, что $h(y) \equiv \equiv h(x_0)$, что невозможно, ибо $h(y) \to 0$ на бесконечности.

Теорема 5. *Пусть* ν — *произвольный конечный заряд в* R^p. *Существует заряд* $A\nu$ *с носителем на* CG *такой, что для любой функции* $f(x) \in \mathfrak{H}_{CG}$

$$\int_{R^p} h_f(x)\, d\nu(x) = \int_{CG} f(x)\, dA\nu(x) \tag{38}$$

и

$$\operatorname{var} A\nu \leqslant \operatorname{var} \nu.$$

Доказательство. В силу леммы 13 выражение

$$F[f] = \int h_f(x)\, d\nu(x)$$

представляет собой линейный непрерывный функционал в пространстве $\mathfrak{H}_{CG}$. Его можно продолжить с сохранением нормы на $\mathfrak{C}_{CG}$ и после этого представить в виде

$$F[f] = \int_{CG} f(x)\, dA\nu(x).$$

Замечания. 1) Заряд $A\nu$ будем называть ассоциированным с ν.

2) Если μ мера, то, применяя теорему о продолжении позитивного функционала, получим, что $A\mu$ также является мерой.

3) Для единственности $A\nu$ при любом ν необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{H}_{CG} \equiv \mathfrak{C}_{CG}$, т. е. чтобы задача Дирихле была разрешима для любой непрерывной на CG функции, стремящейся к нулю на бесконечности. В этом случае будем множество G называть регулярным.

Теорема 6. *Для любой точки* $y \in C\overline{G}$

$$U_\alpha^{A\nu}(y) = U_\alpha^{\nu}(y). \tag{39}$$

Доказательство. Достаточно проверить это равенство, предполагая ν мерой.

Рассмотрим шар T_r с центром в y радиуса r, настолько малого, что $T_r \subset C\overline{G}$. Если $m^{(r)}$ есть единичная масса, равномерно распределенная на T_r, то нетрудно видеть, что

$$U_\alpha^{m^{(r)}}(x) \in \mathfrak{H}_{CG}.$$

В таком случае согласно (38)

$$\int U_\alpha^{m^{(r)}}(x)\, d\nu(x) = \int U_\alpha^{m^{(r)}}(x)\, dA\nu(x)$$

или

$$\int U_\alpha^{\nu}(x)\, dm^{(r)}(x) = \int U_\alpha^{A\nu}(x)\, dm^{(r)}(x).$$

Отсюда при $r \to 0$ получаем требуемое.

Следствие. Предположим, что выполнено следующее условие Пуанкаре:

(P) Каждая точка $x \in \partial G$ является вершиной конуса вращения, лежащего в некоторой окрестности x в CG.

Тогда равенство (39) имеет место во всех точках ∂G.

Таким образом, в последнем случае, ассоциированный заряд $A\nu$ решает проблему выметания заряда ν на CG.

Если потенциал $U_\alpha^\nu(x)$ ограничен на CG, то $A\nu$ будет определен однозначно.

11. В этом пункте мы будем предполагать, что проблема выметания на CG разрешима (например, выполнено условие (P)).

Пусть $y \in G$; образуем функцию Грина

$$G(x, y) = U_\alpha^{\varepsilon_y}(x) - U_\alpha^{A\varepsilon_y}(x).$$

Нетрудно, пользуясь α-гармоничностью $G(x, y)$ в $G \setminus \{y\}$ и рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 1, показать, что $G(x, y) > 0$, $x \in G$. Легко также проверить симметрию функции Грина:

$$G(x, y) = G(y, x).$$

Лемма 14. *Пусть $y \in G$ и $y \to y_0 \in \partial G$. Тогда имеет место слабая сходимость*

$$A\varepsilon_y \to \varepsilon_{y_0}.$$

Доказательство. Достаточно проверить соотношение

$$A\varepsilon_y(\varphi) \to \varphi(y_0)$$

для всех финитных неограниченно дифференцируемых функций. Согласно следствию из леммы 5 такая функция $\varphi(x)$ допускает представление

$$\varphi(x) = \int_{R^p} k_\alpha(x - z)\psi(z)\,dz,$$

где $\psi(z) = O(|z|^{-p-\alpha})$. В таком случае,

$$\varphi(y_0) - A\varepsilon_y(\varphi) = \int_{R^p} \psi(z)\,[k_\alpha(y_0 - z) - U_\alpha^{A\varepsilon_y}(z)]\,dz =$$

$$= \int_{R^p} \psi(z)\,[k_\alpha(y - z) - U_\alpha^{A\varepsilon_y}(z)]\,dz + \int_{R^p} \psi(z)\,[k_\alpha(y_0 - z) - k_\alpha(y - z)]\,dz.$$

При $y \to y_0$ второй интеграл стремится к нулю. Первый интеграл перепишем в виде

$$\int_G \psi(z)\,[k_\alpha(y - z) - U_\alpha^{A\varepsilon_y}(z)]\,dz = \int_G \psi(z) G(y, z)\,dz,$$

и так как

$$\left|\int_G \psi(z) G(y, z)\,dz\right| \leqslant \max_G |\psi(z)| \int_G G(y, z)\,dz,$$

то нужно лишь показать, что

$$\lim_{y \to y_0} \int_G G(y, z)\,dz = 0.$$

Но

$$\int\limits_{G} G(y, z)\,dz = \int\limits_{|y_0 - z| < \delta} G(y, z)\,dz + \int\limits_{|y_0 - z| > \delta} G(y, z)\,dz <$$

$$< \int\limits_{|y_0 - z| < \delta} k_\alpha(y - z)\,dz + \int\limits_{|y_0 - z| > \delta} G(y, z)\,dz.$$

при достаточно малом δ первый интеграл делается сколь угодно малым равномерно по y, между тем как во втором интеграле при $|y - y_0| < \frac{1}{2}\delta$ имеем $G(y, z) < \left(\frac{2}{\delta}\right)^{p-\alpha}$, так что можно сделать предельный переход $y \to y_0$ под знаком интеграла и получить нуль.

Замечание. Если $y_0 \in G$, то при $y \to y_0$ легко устанавливается слабая сходимость

$$A\varepsilon_y \to A\varepsilon_{y_0}.$$

Теорема 7. *Пусть для множества G разрешима проблема выметания на CG. Тогда G регулярно, т. е. для любой функции $f(x)$ из $\mathfrak{C}_{CG}$ обобщенная проблема Дирихле разрешима, и ее решение дается формулой*

$$h_f(y) = \int\limits_{CG} f(x)\,dA\varepsilon_y(x);\quad y \in G. \tag{40}$$

Доказательство. Из леммы 14 и замечания к ней следует непрерывность $h_f(y)$.

Неравенство

$$|h_f(y) - h_g(y)| \leqslant \int\limits_{CG} |f(x) - g(x)|\,dA\varepsilon_y(x) \leqslant \max_{CG} |f(x) - g(x)|$$

показывает, что из равномерной на CG сходимости $f_n(x) \to f(x)$ следует равномерная во всем пространстве сходимость $h_{f_n}(y) \to h_f(y)$. Поэтому α-гармоничность $h_f(y)$ в G достаточно установить для какого-либо класса функций, плотного в $\mathfrak{C}_{CG}$. В качестве такого класса мы возьмем множество всех финитных дважды непрерывно дифференцируемых функций в R^p (точнее, их сужения на CG). Если $\varphi(x)$ такая функция, то согласно следствию из леммы 5 она допускает представление

$$\varphi(x) = U_\alpha^\nu(x).$$

Пусть ν_1 — часть ν в области G. Проведя выметание ν_1 на CG, образуем заряд

$$\nu_2 = (\nu - \nu_1) + A\nu_1,$$

сосредоточенный на CG. Очевидно, на CG

$$\varphi(x) = U_\alpha^{\nu_2}(x).$$

Теперь мы можем написать

$$h_\varphi(y) = \int\limits_{CG} U_\alpha^{\nu_2}(x)\,dA\varepsilon_y(x) =$$

$$= \int\limits_{CG} U_\alpha^{A\varepsilon_y}(x)\,d\nu_2(x) = \int\limits_{CG} k_\alpha(x - y)\,d\nu_2(x) = U_\alpha^{\nu_2}(y),$$

и это показывает, что $h_\varphi(y)$ α-гармонична в G.

Замечание. Можно показать, что если $C\overline{G}$ есть компакт, то $h_f(y)$, определенная формулой (40), стремится к нулю при $y \to \infty$.

12. Если G есть шар $|x| < r$, то мера $A\varepsilon_y$, $(|y| < r)$, в силу упомянутой в конце n° 10 единственности, совпадает с ядром Пуассона $\hat{P}_r(x, y)$.

Предположим теперь, что G — какое либо ограниченное множество, для которого проблема выметания на CG разрешима. Пусть T — шар $|x| < r$, содержащий G. Тогда для любой точки x, $|x| > r$,

$$A\varepsilon_y(x) \leqslant \hat{P}_r(x, y),$$

так как $\hat{P}_r(x, y)$ можно (в силу того же замечания о единственности) получить из $A\varepsilon_y$, выметая часть $A\varepsilon_y$ в T на CT. Это показывает, что при $x \to \infty$

$$A\varepsilon_y(x) = O(|x|^{-p-\alpha}).$$

С помощью теоремы 7 можно получить следующий более общий результат.

Теорема 7′. *Пусть для ограниченного множества G проблема выметания на CG разрешима. Тогда для любой функции $f(x)$, непрерывной на CG и удовлетворяющей условию*

$$\int\limits_{CG} \frac{|f(x)|}{1 + |x|^{p+\alpha}} dx < \infty, \tag{41}$$

обобщенная задача Дирихле разрешима, и решение ее дается формулой (40).

Справедливо также предложение, обратное теореме 7. А именно, если G регулярно, то проблема выметания на CG разрешима.

Теорема 8. *Пусть $f(x)$ — α-супергрмоническая функция, и G — регулярное множество с компактной границей. Тогда для любой конечной меры μ имеем*

$$\int f(x)\, d\mu(x) \geqslant \int\limits_{CG} f(x)\, dA\mu(x). \tag{42}$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ непрерывна на CG. Тогда, в силу теоремы 7′, существует решение $h_f(x)$. Внутри G, согласно теореме 1* имеет место неравенство $h_f(x) \leqslant f(x)$, и поэтому, в силу (38)

$$\int f(x)\, d\mu(x) \geqslant \int h_f(x)\, d\mu(x) = \int\limits_{CG} f(x)\, dA\mu(x).$$

В общем случае $f(x)$ есть предел неубывающей последовательности (см. (IV), п° 4 и следствие из леммы 9)

$$f_n(x) = \varepsilon_{\alpha x}^{\left(\frac{1}{n}\right)}(f)$$

непрерывных α-супергармонических функций, и неравенство

$$\int f_n(x)\, d\mu(x) \geqslant \int\limits_{CG} f_n(x)\, dA\mu(x)$$

после предельного перехода $n \to \infty$ дает (42).

* Если G — бесконечная область, то теорему 1 следует применить к $C - \{\infty\}$ и учесть замечание к теореме 7.

Следствие. Внутри G

$$U_\alpha^{A\mu}(x) \leqslant U_\alpha^{\mu}(x). \tag{43}$$

Теперь мы можем с помощью указанной ниже аппроксимационной техники произвести выметание на произвольное замкнутое множество $F \subset R^p$.

Всякое замкнутое множество F можно представить, как предел убывающей последовательности замкнутых множеств $\{F_k\}_1^\infty$ с компактными границами и с регулярным дополнением. Это можно сделать, например, следующим образом. Пусть $S_k(x)$ есть открытый шар с центром в x радиуса k^{-1}, а $T_k = \{x : |x| \geqslant k\}$. Тогда можно положить

$$F_k = T_k \cup (\overline{\bigcup_{x \in F} S_k(x)}).$$

Опишем кратко дальнейшую конструкцию. Если μ произвольная конечная мера, то мы можем произвести выметание части μ из CF_1 на F_1, оставляя часть μ на F_1 без изменения. Обозначим μ_1 полученную меру. Затем мы переходим к μ_1 и F_2 и продолжаем этот процесс. В силу (43) потенциалы $\{U_\alpha^{\mu_k}(x)\}$ образуют невозрастающую последовательность, и по теореме Брело (см. [7]) имеет место слабая сходимость $\mu_k \to A\mu$, причем

$$\lim_{k \to \infty} U_\alpha^{\mu_k}(x) = U_\alpha^{A\mu}(x)$$

квази всюду, т. е. всюду, кроме, возможно, множества нулевой α-емкости.

Полученная нами мера $A\mu$ обладает следующими свойствами:

(i) $U_\alpha^{A\mu}(x) = U_\alpha^{\mu}(x)$ квази всюду на F,

(ii) $U_\alpha^{A\mu}(x) \leqslant U_\alpha^{\mu}(x)$ всюду,

(iii) мера $A(\mu - \mu_F)$, где μ_F — часть μ на F, C-абсолютно непрерывна, т. е. равна нулю на любом множестве нулевой α-емкости.

Эти свойства полностью характеризуют меру $A\mu$, которая, таким образом, не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $\{F_k\}$.

Из (iii) следует, что если F имеет нулевую α-емкость, то

$$A(\mu - \mu_F) \equiv 0.$$

Теперь для произвольного открытого множества G мы определяем функцию Грина формулой

$$G(x, y) = U_\alpha^{\varepsilon_y}(x) - U_\alpha^{A\varepsilon_y}(x), \quad y \in G,$$

(если CG имеет нулевую α-емкость, то $G(x, y) = k_\alpha(x - y)$).

Те точки $x \in F$, для которых при некотором $y \in G$ $G(x, y) > 0$, называются иррегулярными точками F. Их множество имеет нулевую α-емкость.

Формула (40) определяет теперь для любой непрерывной функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (41), α-гармоническую функцию $h_f(y)$, которая во всех точках ∂G, кроме иррегулярных точек CG, непрерывна и равна $f(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Riesz. Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels. Acta Sci. Szeged, 9 (1938), 1—42.

2. O. Frostman. Les fonctions surharmoniques d'ordre fractionnaire. Ark. Mat. Astr. Fys., 26A (1939).

3. J. Deny. Familles fondamentales. Noyaux associés. Ann. Inst. Fourier, 3 (1952), 73—101.

4. L. Schwarz. Théorie des distribution, t. I, II. Paris, 1950—51.

5. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, М., 1958.

6. Н. С. Ландкоф. Некоторые применения функционального анализа в теории гармонических функций. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 1 (1965), 182—193.

7. M. Brelot, G. Choquet. Le théorème de convergence en théorie du potentiel. J. Madras Univ., B 27, № 1, (1957), 277—286.

8. M. Brelot. Lectures on potential theory. Bombay, 1960.

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 32 1966

Записки механико-математического факультета
и Харьковского математического общества

ОБ ОБРАТНОМ УСЛОВИИ ГЕЛЬДЕРА

А. Д. Мышкис

А. И. Перов в устной беседе поставил интересный вопрос о существовании непрерывных векторнозначных функций $f(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, удовлетворяющих для некоторых $C > 0$, $N > 1$ «обратному условию Гельдера»

$$|f(t_1) - f(t_2)| \geqslant C|t_1 - t_2|^{\frac{1}{N}} \tag{1}$$

при любых $t_1, t_2 \in [0, 1]$. Здесь будет дан положительный ответ на этот вопрос и указана зависимость N от размерности $n \geqslant 1$ пространства R^n значений $f(t)$. Под $|x|$ при $x \in R^n$ мы будем для определенности понимать обычную эвклидову норму.

Теорема. *При $N > n$ функции с указанным свойством нет (даже если не требовать ее непрерывности); при любом $N < n$ такая функция имеется.*

Доказательство. Допустим, что функция $f(t)$ со значениями в R^n удовлетворяет неравенству (1). На основании известной теоремы Бэра существует такое множество T, всюду плотное на некотором отрезке $[a, b]$ $(0 \leqslant a < b \leqslant 1)$, что $\sup\limits_{t \in T} |f(t)| = R < \infty$. Зададимся натуральным M и выделим значения $t_1, \ldots, t_M \in T$ так, чтобы $t_{i+1} - t_i > \frac{b-a}{M}$ $(i = 1, \ldots, M-1)$. Тогда в силу (1) попарные расстояния точек $f(t_i)$ превосходят

$$\rho = C\left(\frac{b-a}{M}\right)^{\frac{1}{N}}.$$

Сумма (n-мерных) объемов шаров радиуса $\frac{\rho}{2}$ с центрами в этих точках равна

$$M\omega_n\left(\frac{\rho}{2}\right)^n = \omega_n\left(\frac{c}{2}\right)^n (b-a)^{\frac{n}{N}} M^{1-\frac{n}{N}},$$

где ω_n — объем единичного n-мерного шара. Но эта сумма не может превосходить $\omega_n\left(R + \frac{\rho}{2}\right)^n$ и мы приходим к неравенству

$$\left(\frac{c}{2}\right)^n (b-a)^{\frac{n}{N}} M^{1-\frac{n}{N}} \leqslant \left[R + \frac{c}{2}\left(\frac{b-a}{M}\right)^{\frac{1}{N}}\right]^n,$$

откуда при $N > n$ и $M \to \infty$ получаем противоречие. Первое утверждение теоремы доказано.

Доказательство второго утверждения будет проведено с помощью непосредственной конструкции, напоминающей кривую Пеано. Зададимся натуральным n и будем под $K[x, y]$ понимать n-мерный куб в R^n с ребрами, параллельными осям координат, и диагональю xy. Выберем некоторое натуральное $q \geqslant 2$ и рассмотрим какую-либо конечную последовательность точек $x_0, \ldots, x_Q \in R^n$, обладающую следующими свойствами:

1) $x_0 = (0; 0; \ldots; 0)$, $x_Q = (1; 1; \ldots; 1)$;

2) координаты каждой из точек $x_1, \ldots, x_{Q-1}$ содержатся среди чисел $\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}$; таким образом, все точки x_i содержатся в кубе $K = K[x_0, x_Q]$;

3) каждая из координат точки x_i $(i = 0, \ldots, Q-1)$ отличается от соответствующей координаты точки x_{i+1} на $\frac{1}{q}$;

4) все точки $x_0, \ldots, x_Q$ попарно различны;

5) все кубы $K_i = K[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, Q-1)$ попарно различны.

Положим

$$f\left(\frac{i}{Q}\right) = x_i \quad (i = 0, \ldots, Q).$$

Дальнейшую конструкцию будем проводить так, чтобы образ каждого отрезка $\left[\frac{i}{Q}, \frac{i+1}{Q}\right]$ содержался в K_i. Чтобы определить $f\left(\frac{i}{Q} + \frac{j}{Q^2}\right)$ $(j = 1, \ldots, Q-1)$, уменьшим подобно куб K с нанесенными на него точками x_i в q раз и совместим его с K_i так, чтобы бывшие точки x_0, x_Q совпали с x_i, x_{i+1}; после этого положим

$$f\left(\frac{i}{Q} + \frac{j}{Q^2}\right) = x_{ij},$$

где x_{ij} — точка, полученная из x_j после указанного совмещения. (Отметим, что это совмещение неоднозначно, однако это для дальнейшего не существенно; впрочем, чтобы избежать применения аксиомы Цермело, нетрудно было бы указать единообразный способ совмещения). В дальнейшем будем следить за тем, чтобы образ отрезка $\left[\frac{i}{Q} + \frac{j}{Q^2}, \frac{i}{Q} + \frac{j+1}{Q^2}\right]$ $(j = 0, \ldots, Q-1)$ целиком содержался в кубе $K_{ij} = K[x_{ij}, x_{i, j+1}]$.

Далее с помощью подобного уменьшения куба K в q^2 раз и совмещения его с K_{ij} определяем точки $f\left(\frac{i}{Q} + \frac{j}{Q^2} + \frac{l}{Q^3}\right)$ и т. д. Тем самым определяются образы всех Q-ично рациональных точек отрезка $[0, 1]$. При этом для любых двух таких точек t_1, t_2, принадлежащих одному отрезку $\left[\frac{k}{Q^r}, \frac{k+1}{Q^r}\right]$ (k, r целые $\geqslant 0$) $f(t_1)$ и $f(t_2)$ принадлежат одному кубу со стороной q^{-r}. Это дает возможность перейти к пределу и определить значения $f(t)$ для Q-ично иррациональных $t \in (0, 1)$, причем получающаяся функция $f(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ будет непрерывной.

Перейдем к проверке неравенства (1). Пусть Q^r — минимальный знаменатель всех Q-ично рациональных точек отрезка $[t_1, t_2]$ $(t_1 < t_2)$ (сокращение не производится!). Допустим сначала, что на этом отрезке имеется по крайней мере две точки со знаменателем Q^r. Тогда

$$t_2 - t_1 < Q^{-r+1}. \tag{2}$$

Пусть

$$\frac{l}{Q^{r-1}} \leqslant \frac{Ql+m}{Q^r} \leqslant t_1 \leqslant \frac{Ql+m+1}{Q^r} < \frac{Ql+s}{Q^r} \leqslant t_2 \leqslant \leqslant \frac{Ql+s+1}{Q^r} \leqslant \frac{l+1}{Q^{r-1}} \tag{3}$$

(все числа l, m, s целые $\geqslant 0$). Тогда, если t_1 отличается от какой-либо из указанных в (3) его ближайших границ меньше чем на Q^{-r-1} и t_2 обладает тем же свойством, то в силу свойства 4)

$$|f(t_1) - f(t_2)| > \frac{1}{q^r}\left(\sqrt{2} - 2\frac{\sqrt{n}}{q}\right)$$

(так как $\dfrac{\sqrt{2}}{q}$ — минимально возможное расстояние между различными точками x_i). Если же t_1 или t_2 не обладают указанным свойством, то в силу свойств 5) и 2)

$$|f(t_1) - f(t_2)| \geqslant \frac{1}{q^{r+1}}.$$

Приняв, что $q \geqslant 2\sqrt{2n}$, получаем с помощью (2) в обоих случаях

$$|f(t_1) - f(t_2)| \geqslant C(q)\,|t_1 - t_2|^{\frac{1}{N}}, \quad \text{где } q^N = Q. \tag{4}$$

Допустим теперь, что на отрезке $[t_1, t_2]$ имеется лишь одна точка со знаменателем Q^r, именно,

$$t_1 \leqslant \frac{l}{Q^r} \leqslant t_2.$$

Обозначим через Q^s $(s \geqslant r+1)$ наименьший из знаменателей Q-ично рациональных дробей на $[t_1, \frac{l}{Q^r})$ и $(\frac{l}{Q^r}, t_2]$. Тогда

$$t_2 - t_1 < \frac{2}{Q^{s-1}}, \quad |f(t_1) - f(t_2)| \geqslant \frac{1}{q^s}$$

и мы вновь приходим к неравенству (4), которое, таким образом, доказано во всех случаях.

Остается проверить, что при достаточно большом q можно выбрать последовательность $x_0, \ldots, x_Q$ так, чтобы имели место свойства 1) — 5) и показатель $N = \dfrac{\ln Q}{\ln q}$ был как угодно близок к n. Мы непосредственно укажем координаты точек последовательности, для простоты записи умножив эти координаты на q. Начальными точками будут (0; 0; ... ; 0), (1; 1; ... ; 1), (2; 2; ... ;2), (1; 1; ... ; 1; 1; 3), (2; 2; ... 2; 2; 4) и т. д. до (2; 2; ... ; 2; r), где $r = q-1$ или $q-2$. Затем следует (1; 1; ... ; 1; 3; r—1), (2; 2; ... ; 2; 4; r—2), (1; 1; ... ; 1; 3; r—3) и т. д. вплоть до (2; 2; ... ; 2; 4; 2). Далее следует (1; 1; ... ; 1; 5; 1), (2; 2; ... ; 2; 6; 2), (1; 1; ... ; 1; 5; 3) и т. д. Так мы доходим до (2; 2; ... ; 2; r; r) либо (2; 2; ... ; 2; r; 2), после чего следуют (1; 1; ... ; 1; 3; r—1; r—1), (2; 2; ... ; 2; 4; r; r—2), (1; 1; ... ; 1; 3; r—1; r—3) и т. д. (соответственно (1; 1;...; 1; 3; r—1; 1), (2; 2; ... ; 2; 4; r; 2), (1; 1; ... ; 1; 3; r—1; 3) и т. д.). С помощью такого видоизмененного алфавитного принципа мы продолжаем построение последовательности, в конце которой находятся точки (q—2; ... ; q—2), (q—1; ... ; q—1) и (q; ... ; q). Хотя подсчет точного числа членов этой последовательности может вызвать затруднение, но очевидно, что при большом q это число имеет порядок q^n, например, превосходит $\frac{1}{2}q^n$. Отсюда вытекает наше утверждение о значении N. Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Естественно ожидать, что при $N = n$ функция с требуемым свойством также существует, однако этот вопрос остается открытым. Тем более не ясны точные условия, при которых подобная функция существует, если (1) заменить на

$$|f(t_1)-f(t_2)| \geqslant \varphi(|t_1-t_2|), \tag{5}$$

где $\varphi(t)$ $(t \geqslant 0)$ заданная неубывающая функция $(\varphi(0) = 0)$.

2. Аналогичный вопрос можно поставить для отображений отрезка [0, 1] в произвольное метрическое пространство R; тогда вместо (1) и (5) надо рассматривать неравенства

$$\rho_R(f(t_1),\ f(t_2)) \geqslant C|t_1-t_2|^{\frac{1}{N}} \text{ и } \rho_R(f(t_1),\ f(t_2)) \geqslant$$
$$\geqslant \varphi(|t_1-t_2|)\ \ (0 \leqslant t_1,\ t_2 \leqslant 1), \tag{6}$$

причем можно дополнительно потребовать непрерывность отображения f. Из доказанной теоремы видно, что получающееся сечение в множестве N является характеристикой размерности R. Эту характеристику, инвариантную относительно преобразований, удовлетворяющих в обе стороны условию Липшица, можно добавить к ряду уже имеющихся (см., например, [1]). Весьма возможно, что для любого (не обязательно целого) $n > 1$ существует пространство «размерности» n в смысле данного замечания (и даже «размерности» n во всех своих точках); однако соответствующие примеры могут оказаться довольно сложными.

Естественно рассматривать также отображения произвольного метрического пространства S в метрическое пространство R; тогда вместо (5) ставится условие

$$\rho_R(f(s_1),\ f(s_2)) \geqslant \varphi(\rho_S(s_1,\ s_2))\ \ (s_1,\ s_2 \in S).$$

В частности, представляет интерес случай, когда S и R — кубы в эвклидовых пространствах.

3. Рассмотренная в замечании 2 характеристика размерности связана с понятиями ε-энтропии и ε-емкости множеств (см., например, [2]). Так, Б. С. Митягин обратил мое внимание на то, что из второго неравенства (6) сразу следует оценка для ε-емкости $C_\varepsilon(R)$

$$C_{\varphi(m^{-1})-h}(R) \geqslant \log_2(m+1)$$

при любых натуральном m и положительном h. Отсюда в силу хорошо известной оценки для ε-емкости множества в n-мерном пространстве вытекает первое утверждение доказанной теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Яглом. Приложение II в книге Л. Тот. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. Физматгиз, 1958, стр. 337—340.

2. А. Н. Колмогоров и В. М. Тихомиров. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах. «Усп. матем. наук», XIV : 2 (86), 1959, 3—86.

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 32 Записки механико-математического факультета и Харьковского математического общества 1966

ОБ УСЛОВИЯХ ИНЕРЦИАЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Я. Л. Геронимус

Пусть наблюдатель, связанный с некоторой системой отсчета S, изучает движения нескольких свободных материальных точек относительно этой системы; пусть некоторые точки движутся относительно S инерциальным движением (т. е. при отсутствии действующих на них сил движутся относительно S прямолинейно и равномерно); можно ли в этом случае утверждать, что S — инерциальная система? Иными словами — ***может ли S быть неинерциальной системой, если для нескольких материальных точек справедлив в S закон инерции***? При этом мы исключаем из рассмотрения тот тривиальный случай, когда все рассматриваемые точки движутся по одной прямой в S, а S вращается вокруг этой прямой по любому закону.

Настоящая заметка посвящена рассмотрению этих вопросов. Мы будем говорить об общем случае, если скорости и начальные координаты наших точек выбраны совершенно произвольно, и об особом случае, если указанные величины должны быть связаны некоторыми соотношениями.

§ 1

Рассмотрим сперва движение трех точек. Закон движения свободной материальной точки относительно любой системы отсчета, как известно, таков:

$$m\bar{w} = \bar{F} - m\bar{w}_0 - m\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) - m\bar{\varepsilon}\times\bar{r} - 2m\bar{\omega}\times\bar{v}, \tag{1.1}$$

где $\bar{v}$, $\bar{w}$ — векторные скорость и ускорение точки M относительно S; $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon}$ — векторные угловая скорость и угловое ускорение переносного движения системы S относительно некоторой инерциальной системы отсчета S_0; $\bar{w}_0$ — векторное ускорение начала координат O системы S относительно S_0; $\bar{r} = \overline{OM}$ — радиус вектор точки M. Так как в рассматриваемом случае $\bar{w} \equiv \bar{F} \equiv 0$, то уравнение

$$\bar{w}_0 + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_s) + \bar{\varepsilon}\times\bar{r}_s + 2\bar{\omega}\times\bar{v}_s = 0, \quad (s = 1, 2, 3) \tag{1.2}$$

всегда допускают „тривиальное“ решение

$$\bar{w}_0 \equiv 0, \quad \bar{\omega} \equiv 0, \quad \bar{\varepsilon} \equiv 0; \tag{1.3}$$

нужно найти условия, при которых оно единственно. Вводя обозначения

$$\bar{r}_s = \bar{v}_s t + \bar{r}_{s0}, \quad (s = 1, 2, 3), \tag{1.4}$$

$$\bar{r}_s - \bar{r}_1 = \bar{\rho}_s, \quad \bar{v}_s - \bar{v}_1 = \bar{u}_s, \quad \bar{\rho}_s = \bar{u}_s t + \bar{\rho}_{s0}, \quad (s = 2, 3),$$

[*] Через $\bar{a}\times\bar{b}$ обозначено векторное, через $\bar{a}\cdot\bar{b}$ — скалярное, через $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = (\overline{abc})$ — смешанное произведения векторов.

находим из (1.2)

$$\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{\rho}_s)+\bar{\varepsilon}\times\bar{\rho}_s+2\bar{\omega}\times\bar{u}_s=0,\quad (s=2,3); \tag{1.5}$$

если из этих уравнений будут найдены векторы $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon}$, то вектор $\overline{w_0}$ можно затем найти по формуле

$$\bar{w}_0=-\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_1)-\bar{\varepsilon}\times\bar{r}_1-2\bar{\omega}\times\bar{v}_1. \tag{1.6}$$

Выясним сперва возможность нетривиального решения, для которого выполнялось бы условие $\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon}\neq 0$. Умножая скалярно (1.5) на вектор $\bar{\omega}$, получим

$$(\bar{\varepsilon}\times\bar{\rho}_s)\cdot\bar{\omega}=(\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon})\cdot\bar{\rho}_s=(\bar{\omega}\,\bar{\varepsilon}\,\bar{\rho}_s)=0,\quad (s=2,\ 3), \tag{1.7}$$

т. е. векторы $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\rho}_2$, $\bar{\rho}_3$ должны быть параллельны некоторой плоскости P_0. Если через $\bar{\sigma}_0$ обозначить орт нормали к ней

$$\bar{\sigma}_0=\frac{\bar{\rho}_2\times\bar{\rho}_3}{|\bar{\rho}_2\times\bar{\rho}_3|},\quad \bar{\rho}_2\times\bar{\rho}_3\neq 0, \tag{1.8}$$

то очевидно, имеем

$$\{\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{\rho}_s)+2(\bar{\omega}\times\bar{\sigma}_0)(\bar{u}_s\cdot\bar{\sigma}_0)\}+\{2\bar{\omega}\times[\bar{u}_s-(\bar{u}_s\cdot\bar{\sigma}_0)\bar{\sigma}_0+\bar{\varepsilon}\times\bar{\rho}_s\}=0,$$
$$(s=2,\ 3).$$

Вектор в первых фигурных скобках параллелен плоскости P_0, а во вторых — перпендикулярен ей; поэтому получаем

$$\bar{\omega}\times[\bar{\omega}\times\bar{\rho}_s+2\bar{\sigma}_0\ \bar{u}_s\cdot\bar{\sigma}_0)]=0,\quad (s=2,\ 3);$$

вектор в квадратных скобках не может быть параллельным вектору $\bar{\omega}$ — следовательно, он должен равняться нулю и мы имеем

$$\bar{\omega}\times\bar{\rho}_s+2(\bar{u}_s\cdot\bar{\sigma}_0)\bar{\sigma}_0=0,\quad (s=2,3). \tag{1.9}$$

Так как векторы $\bar{\omega}$, $\bar{\rho}_2$, $\bar{\rho}_3$ компланарны, то мы можем положить

$$\bar{\omega}=\alpha\bar{\rho}_2+\beta\bar{\rho}_3;$$

неизвестные скалярные множители α, β найдем из условий (1.9)

$$\alpha(\bar{\rho}_2\times\bar{\rho}_3)+2(\bar{u}_3\cdot\bar{\sigma}_0)\bar{\sigma}_0=0,\quad \beta(\bar{\rho}_3\times\bar{\rho}_2)+2(\bar{u}_2\,\bar{\sigma}_0)\bar{\sigma}_0=0, \tag{1.10}$$

откуда будем иметь

$$\bar{\omega}=-\frac{2[(\bar{u}_3\cdot\bar{\sigma}_0)\bar{\rho}_2-(\bar{u}_2\cdot\bar{\sigma}_0)\bar{\rho}_3]\,\bar{\sigma}_0}{\bar{\rho}_2\times\bar{\rho}_3}=\frac{2[(\bar{\rho}_2\,\bar{\rho}_3\,\bar{u}_2)\bar{\rho}_3-(\bar{\rho}_2\,\bar{\rho}_3\,\bar{u}_3)\bar{\rho}_2]}{|\bar{\rho}_2\times\bar{\rho}_3|^2}. \tag{1.11}$$

Таким образом, при условии $\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon}\neq 0$ уравнения (1.5) допускают кроме тривиального решения единственное нетривиальное решение*

$$\bar{\omega}=\frac{2(\dot{\bar{D}}\times\bar{D})}{D^2},\quad \bar{\varepsilon}=\dot{\bar{\omega}}=\frac{2\{D(\ddot{\bar{D}}\times\bar{D})-2\dot{D}(\dot{\bar{D}})\times\bar{D}\}}{D^3}, \tag{1.12}$$

где мы положили

* Точка сверху означает производную по времени; для векторов производная берется в системе отсчета S.

$$\bar{D} = \bar{\rho}_2 \times \bar{\rho}_3 = (\bar{u}_2 t + \bar{\rho}_{20}) \times (\bar{u}_3 t + \bar{\rho}_{30}) = \bar{A}t^2 + \bar{B}t + \bar{C}, \tag{1.13}$$

причем векторы

$$\bar{A} = \bar{u}_2 \times \bar{u}_3,\ \ \bar{B} = \bar{u}_2 \times \bar{\rho}_{30} + \bar{\rho}_{20} \times \bar{u}_3,\ \ \bar{C} = \bar{\rho}_{20} \times \bar{\rho}_{30}. \tag{1.14}$$

не зависят от времени.

§ 2

Нетрудно убедиться непосредственным вычислением в том, что *при единственном условии* $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ *функции* (1.12) *являются решением уравнений* (1.5). Действительно, после подстановки (1.12) в (1.5) левая часть приобретает такой вид:

$$\frac{2}{D^4}\left\{2(\dot{\bar{D}} \times \bar{D}) \times [(\dot{\bar{D}} \times \bar{D}) \times \bar{\rho}_s] + D^2 [(\ddot{\bar{D}} \times \bar{D}) \times \bar{\rho}_s] -\right.$$

$$\left. - 2D\dot{D}\,[(\dot{\bar{D}} \times \bar{D}) \times \bar{\rho}_s] + 2D^2\,[(\dot{\bar{D}} \times \bar{D}) \times \bar{u}_s)\right.. \quad (s = 2, 3).$$

Это выражение можно упростить, если раскрыть двойные векторные произведения и воспользоваться тем, что $\bar{D} \cdot \bar{\rho}_s = 0$:

$$\frac{2}{D^4}\left\{\bar{D}\,[D^2(\ddot{\bar{D}} \cdot \bar{\rho}_s) + 2(\dot{\bar{D}} \cdot \dot{\bar{D}}\ (\dot{\bar{D}} \cdot \bar{\rho}_s) + 2D^2(\dot{\bar{D}} \cdot \bar{u}_s) -\right.$$

$$\left. - 2D\dot{D}\,(\dot{\bar{D}} \cdot \bar{\rho}_s)] - 2D^2\,\dot{\bar{D}}\,[\bar{D} \cdot \bar{u}_s + \dot{\bar{D}} \cdot \bar{\rho}_s],\right. \quad (s = 2, 3); \tag{2.1}$$

дифференцируя указанное равенство дважды по времени, получим

$$\dot{\bar{D}} \cdot \bar{\rho}_s + \bar{D} \cdot \bar{u}_s = 0,\ \ \ddot{\bar{D}} \cdot \bar{\rho}_s + 2\,\dot{\bar{D}} \cdot \bar{u}_s = 0;$$

так как, кроме того, $\bar{D} \cdot \dot{\bar{D}} = D\dot{D}$, то выражение (2.1) действительно равно нулю.

Нетрудно проверить также справедливость формулы

$$\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon} = \frac{4\bar{D}}{D^4}\,(\bar{D}\,\dot{\bar{D}}\,\ddot{\bar{D}}), \tag{2.2}$$

вытекающей из (1.12); пользуясь (1.13), (1.14), выразим все величины через заданные

$$\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon} = -\frac{8\bar{D}}{D^4}\,(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}) = \frac{8\bar{D}}{D^4}\left\{(\bar{\rho}_{20}\,\bar{\rho}_{30}\,\bar{u}_2)(\bar{u}_2\,\bar{\rho}_{30}\,\bar{u}_3) -\right.$$

$$\left. - (\bar{\rho}_{20}\,\bar{\rho}_{30}\,\bar{u}_3)(\bar{\rho}_{20}\,\bar{u}_3\,\bar{u}_2)\right\}. \tag{2.3}$$

Таким образом, *при дополнительном условии*

$$(\bar{\rho}_{20}\,\bar{\rho}_{30}\,\bar{u}_2)(\bar{u}_2\,\bar{\rho}_{30}\,\bar{u}_3) \neq (\bar{\rho}_{20}\,\bar{\rho}_{30}\,\bar{u}_3)(\bar{\rho}_{20}\,\bar{u}_3\,\bar{u}_2) \tag{2.4}$$

произведение $\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon}$ *и вектор* $\bar{D}$ *не обращаются в нуль во все время движения, а из приведенных нами геометрических соображений ясно, что решение (1.12) — единственное из нетривиальных.*

Рассмотрим теперь случай, когда выполняются условия

$$\begin{gathered} \bar{A} \times \bar{C} = (\bar{u}_2 \times \bar{u}_3) \times (\bar{\rho}_2 \times \bar{\rho}_3) \neq 0, \\ (\bar{\rho}_{20}\,\bar{\rho}_{30}\,\bar{u}_2)(\bar{u}_2\,\bar{\rho}_{30}\,\bar{u}_3) = (\bar{\rho}_{20}\,\bar{\rho}_{30}\,\bar{u}_3)(\bar{\rho}_{20}\,\bar{u}_3\,\bar{u}_2), \end{gathered} \tag{2.5}$$

т. е. четыре заданных вектора $\bar\rho_2$, $\bar\rho_3$, $\bar u_2$, $\bar u_3$ не компланарны, а векторы $\bar A$, $\bar B$, $\bar C$ параллельны некоторой плоскости P_1. Формулы (1.12), как было показано, и в этом случае дают решение, причем во все время движения векторы $\bar D$, $\dot{\bar D}$ параллельны неизменной относительно S плоскости P_1; следовательно, в этом случае векторы $\bar\omega$, $\bar\varepsilon$ перпендикулярны плоскости P_1, т. е. имеют неизменное направление относительно S. Из (1.12) имеем

$$\bar\omega = \frac{2\{(\bar A\times\bar B)t^2 + 2(\bar A\times\bar C)t + \bar B\times\bar C\}}{D^2}; \tag{2.6}$$

при этом все три вектора

$$\begin{gathered}\bar A\times\bar B = -\bar u_2(\bar u_2\bar\rho_{30}\bar u_3) + \bar u_3(\bar\rho_{20}\bar u_3\bar u_2),\\ \bar A\times\bar C = \bar u_3(\bar\rho_{20}\bar\rho_{30}\bar u_2) - \bar u_2(\bar\rho_{20}\bar\rho_{30}\bar u_3) = \bar\rho_{20}(\bar u_2\bar u_3\bar\rho_{30}) - \bar\rho_{30}(\bar u_2\bar u_3\bar\rho_{20}),\\ \bar B\times\bar C = \bar\rho_{30}(\bar\rho_{20}\bar\rho_{30}\bar u_2) - \bar\rho_{20}(\bar\rho_{20}\bar\rho_{30}\bar u_3)\end{gathered} \tag{2.7}$$

должны быть коллинеарны, как это вытекает и из условия (2.5); вектор $\bar\omega$ в этом случае направлен по прямой пересечения двух плоскостей, определяемых векторами $\bar\rho_{20}$, $\bar\rho_{30}$, и, соответственно, $\bar u_2$, $\bar u_3$.

Так как в данном случае векторы $\bar A$, $\bar B$, $\bar C$ компланарны, то можно положить

$$\bar B = \lambda\bar A + \mu\bar C,\quad \bar u_2\times\bar\rho_{30} + \bar\rho_{20}\times\bar u_3 = \lambda(\bar u_2\times\bar u_3) + \mu(\bar\rho_{20}\times\bar\rho_{30}).$$

Неизвестные скалярные множители λ, μ легко найдем, умножая скалярно все векторы сперва на $\bar u_2$, затем на $\bar\rho_{30}$

$$\lambda = \frac{(\bar\rho_{20}\bar u_3\bar\rho_{30})}{(\bar u_2\bar u_3\bar\rho_{30})},\quad \mu = \frac{(\bar\rho_{20}\bar u_3\bar u_2)}{(\bar\rho_{20}\bar\rho_{30}\bar u_2)},\quad \lambda\neq 0; \tag{2.8}$$

на основании условия (2.5) имеем $\lambda\mu = 1$; поэтому числитель (2.6) примет такой вид:

$$2\mu(\bar A\times\bar C)(t+\lambda)^2.$$

С другой стороны, вектор $\bar D$ в данном случае таков:

$$\bar D = t\bar A(t+\lambda) + \bar C(\mu t + 1) = \mu\{(\bar A\lambda t + \bar C)(t+\lambda)\};$$

поэтому *при условии* (2.5) *вектор* $\bar\omega$ *выражается более простой формулой*

$$\bar\omega = \frac{2\lambda(\bar A\times\bar C)}{|\bar A\lambda t + \bar C|^2} = \frac{2[\bar\rho_{20}(\bar\rho_{20}\bar u_3\bar\rho_{30}) + \bar\rho_{30}(\bar\rho_{20}\bar\rho_{30}\bar u_2)}{at^2 + 2bt + c}, \tag{2.9}$$

$$a = \lambda^2|\bar u_2\times\bar u_3|^2,\quad b = \lambda(\bar u_2\times\bar u_3)\cdot(\bar\rho_{20}\times\bar\rho_{30}),\quad c = |\bar\rho_{20}\times\bar\rho_{30}|^2.$$

§ 3

Рассмотрим теперь случай $D = 0$, т. е. пусть мы имеем

$$\bar u_2\times\bar u_3 = 0,\quad \bar u_2\times\bar\rho_{30} + \bar\rho_{20}\times\bar u_3 = 0,\quad \bar\rho_{20}\times\bar\rho_{30} = 0; \tag{3.1}$$

мы можем положить $\bar u_3 = \alpha\bar u_2$, $\bar\rho_{30} = \beta\bar\rho_{20}$, откуда получим

$$(\beta - \alpha)(\bar u_2\times\bar\rho_{20}) = 0.$$

Пусть сперва $\bar{u}_2 \times \bar{\rho}_{20} \neq 0$; тогда $\alpha = \beta$ и мы имеем

$$\bar{\rho}_3 = \bar{u}_3 t + \bar{\rho}_{30} = \alpha(\bar{u}_2 t + \bar{\rho}_{20}) = \alpha\bar{\rho}_2, \quad \bar{u}_3 = \alpha\bar{u}_2;$$

в этом случае два уравнения (1.5) сведутся к одному, ибо

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_3) + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_3 + 2\bar{\omega} \times \bar{u}_3 = \alpha[\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_2) + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_2 + 2\bar{\omega} \times \bar{u}_2].$$

Возьмем два произвольных вектора $\bar{u}'_3$, $\bar{\rho}'_{30}$, подчиненных условиям $\bar{u}'_3 \times \bar{u}_2 \neq 0$, $\bar{\rho}'_3 \times \bar{\rho}_2 \neq 0$, и рассмотрим систему уравнений

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_2) + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_2 + 2\bar{\omega} \times \bar{u}_2 = 0 \quad \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}'_3) + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}'_3 + 2\bar{\omega} \times \bar{u}'_3 = 0;$$

мы сможем построить вектор $\bar{D}' = \bar{\rho}_2 + \bar{\rho}'_3 \neq 0$ и найти нетривиальное решение по формуле (1.12) (с заменой $\bar{D}$ на $\bar{D}'$); благодаря произвольности векторов $\bar{u}'_3$, $\bar{\rho}'_{30}$ таких решений бесчисленное множество.

Пусть теперь $\bar{u}_2 \times \bar{\rho}_{20} = 0$, т. е. пусть все четыре вектора $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$, $\bar{\rho}_{20}$, $\bar{\rho}_{30}$ коллинеарны. Введем систему отсчета S_1, имеющую начало в движущейся точке M_1 и движущуюся поступательным движением относительно системы S. Ясно, что обе системы отсчета S, S_1 могут быть инерциальными лишь одновременно. В нашем случае точки M_2, M_3 движутся относительно S_1 по одной прямой, имеющей неизменное направление — очевидно, система S_1 может при этом вращаться вокруг этой прямой по любому закону, т. е. мы придем к случаю, исключенному нами с самого начала.

Итак, *при условии* (3.1) *существует бесчисленное множество нетривиальных решений*.

§ 4

Система S, таким образом, будет инерциальной, лишь тогда, когда $D \neq 0$ и когда решения (1.12) и (2.9) не будут отличаться от тривиальных, т. е. когда выполняется любое из шести эквивалентных между собой условий:

1) $\bar{\omega} \equiv 0$;

2) направление вектора $\bar{D}$ не изменяется с течением времени;

3) векторы $\bar{A}$ и $\bar{C}$ коллинеарны (отсюда вытекает коллинеарность всех трех векторов $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$);

4) векторы $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$, $\bar{\rho}_{20}$, $\bar{\rho}_{30}$ компланарны;

5) плоскость, в которой лежат в любой момент времени три движущиеся точки, сохраняет неизменное направление относительно S;

6) плоскость, в которой лежат три движущиеся точки в начальный момент времени, параллельна плоскости, проведенной через концы векторных скоростей этих точек, если эти векторы отложить от общего начала.

Итак, *если три свободные материальные точки движутся относительно системы отсчета S инерциальным движением, то в общем случае нельзя утверждать, что система S инерциальна; это верно лишь в том особом случае, когда $D \neq 0$* и *выполняется любое из условий* 1)—6).

Рассмотрим пример: пусть в начальный момент времени все три точки находятся в одной точке и пусть в какой-нибудь один дальнейший момент времени они не лежат на одной прямой. Если в этой начальной точке поместить начало координат системы S, то будем иметь

$$\rho_{20} = \rho_{30} = 0, \ B = C = 0, \ A \neq 0, \ \overline{D} = \overline{A} t^2; \tag{4.1}$$

таким образом, в этом случае выполняется условие 2), а, следовательно, и условие 1); поэтому в этом особом случае система S инерциальна. Интересно отметить, что Л. Ланге * принял условия, рассмотренные в этом примере, за определение инерциальности системы отсчета.

Возвращаясь к общему случаю, рассмотрим теперь движение четырех точек. В этом случае для возможности нетривиального решения необходимо, чтобы вектор $\overline{\omega}$ (1.12), или (2.6), найденный по трем точкам, был бы одним и тем же, какие бы три из четырех точек мы ни взяли — это возможно лишь в особом случае при наличии дополнительных соотношений между заданными величинами.

---

* L. Lange. Nochmals über das Beharrungsgesetz. Phil. Stud., herausgegeben von Wundt, II, 539—545, Leipzig, 1885.