3. Квадратурные формулы интерполяционного типа для сингулярных интегралов с ядром котангенс и интегралов с логарифмическим ядром.

Речь пойдет об интегралах

$$(Hf)(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2} f(\varphi)d\varphi, \tag{3.1}$$

$$(Lf)(\varphi_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right| f(\varphi)d\varphi \tag{3.2}$$

В первом разделе выведены квадратурные формулы интерполяционного типа с *(2n+1)* равноотстоящими узлами для интегралов от периодических функций. Эти формулы точны для тригонометрических полиномов порядка *n*.

Разработанный во втором разделе математический аппарат, связанный с интегральным оператором Гильберта, позволяет построить интерполяционные квадратуры с *(2n+1)* равноотстоящими узлами для интегралов (1), (2) и эти квадратурные формулы точны для $f = f_n(\varphi)$ – тригонометрических полиномов порядка *n*. Особо отметим, что квадратурная формула для интеграла (2) используется при вычислении потенциалов простого слоя.

3.1. Квадратурная формула интерполяционного типа с *(2n+1)* равноотстоящими узлами для интеграла (1) получена нами с использованием (доказанного в пункте 2.4) тождества.

$$ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\left(e^{ik\varphi} - e^{ik\varphi_0}\right) \equiv \pm i\left(e^{ik\varphi} + 2e^{\pm i(|k|-1)\varphi}e^{\pm i\varphi_0} + \ldots + 2e^{\pm i\varphi}e^{\pm i(|k|-1)\varphi_0} + e^{ik\varphi_0}\right), \tag{3.3}$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Вот как это делается.

Для тригонометрического полинома $f_n(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\varphi}$ в силу (3) имеем тождество

$$ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\left[f_n(\varphi) - f_n(\varphi_0)\right] \equiv \sum_{k=-n}^{n} c_k ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\left[e^{ik\varphi} - e^{ik\varphi_0}\right] \equiv$$

$$\equiv \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \pm ic_k \left(e^{ik\varphi} + 2e^{\pm i(|k|-1)\varphi} e^{\pm i\varphi_0} + \ldots + 2e^{\pm i\varphi} e^{\pm i(|k|-1)\varphi_0} + e^{ik\varphi_0} \right),$$

таким образом, мы убедились, что произведение

$$ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}[f_n(\varphi)-f_n(\varphi_0)]$$

– тригонометрический полином степени *n*. Поэтому интеграл от него по отрезку [0,2π] может быть вычислен по квадратурной формуле (1.16), а, учитывая представление (2.18) для интеграла (1) получаем такую квадратурную формулу с *(2n+1)* равноотстоящими узлами

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2} f_n(\varphi)d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} ctg\frac{\varphi_k^n-\varphi_0}{2}\left[f_n(\varphi_k^n)-f_n(\varphi_0)\right]\frac{1}{2n+1}, \qquad (3.4)$$

где $\varphi_k^n = \frac{2\pi k}{2n+1}$, $\varphi_0 \in \mathrm{R}$.

Если же $\varphi_0 \notin \{\varphi_k^n\}_{k\in Z}$, то (4) перепишем в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2} f_n(\varphi)d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} ctg\frac{\varphi_k^n-\varphi_0}{2} f_n(\varphi_k^n)\frac{1}{2n+1} + \frac{f_n(\varphi_0)}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} ctg\frac{\varphi_0-\varphi_k^n}{2}$$

и преобразуем последнюю сумму в правой части.

Замечая, что нули многочлена $z^{2n+1} - e^{-i(2n+1)\varphi_0}$ суть $z_k = e^{i(\varphi_k^n-\varphi_0)}, k = 0,1,\ldots,2n$, разложим его на множители:

$$z^{2n+1} - e^{-i(2n+1)\varphi_0} = \prod_{k=0}^{2n}\left(z - e^{i(\varphi_k^n-\varphi_0)}\right),$$

и поскольку $\left|1-e^{i\alpha}\right| = 2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$, получаем $\left|\sin\frac{2n+1}{2}\varphi_0\right| = 2^{2n}\prod_{k=0}^{2n}\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi_k^n}{2}\right|$.

Логарифмируя, а затем, дифференцируя обе части этого тождества, находим

$$\sum_{k=0}^{2n} ctg\frac{\varphi_0-\varphi_k^n}{2} = (2n+1)ctg\frac{2n+1}{2}\varphi_0 .$$

Окончательно (4) при $\varphi_0 \notin \{\varphi_k^n\}_{k\in Z}$ запишем в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2} f_n(\varphi)d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} ctg\frac{\varphi_k^n-\varphi_0}{2} f_n(\varphi_k^n)\frac{1}{2n+1} + f_n(\varphi_0)ctg\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi_0 \quad (3.5)$$

и множитель при $f_n(\varphi_0)$ обращается в нуль, если φ_0– корень тригонометрического уравнения $ctg\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi_0 = 0$.

Эти корни суть $\varphi_{0j}^{n}=\frac{2j+1}{2n+1}\pi,\ j\in Z$

Теперь, наряду с системой узлов $\{\varphi_k^n\}_{k=0}^{2n}\subset[0,2\pi)$, введем еще одну систему точек $\{\varphi_{0j}^n\}_{j=0}^{2n}\subset(0,2\pi)$

$$\varphi_{0j}^{n}=\frac{2j+1}{2n+1}\pi,\ j=0,1,\ldots,2n \tag{3.6}$$

и будем рассматривать (5) только в точках этой системы.

На единичной окружности точки с естественными координатами φ_{0j}^n, нижние индексы *j* которых отличаются на целое кратное 2*n+1*

$$\varphi_{0j+(2n+1)m}^{n}-\varphi_{0j}^{n}=2\pi m,\ m\in Z \tag{3.7}$$

совпадают, и мы будем их отождествлять.

Имеем такую квадратурную формулу в *(2n+1)* точках

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_{0j}^n}{2}f_n(\varphi)d\varphi=\sum_{k=0}^{2n} ctg\frac{\varphi_k^n-\varphi_{0j}^n}{2}f_n\left(\varphi_k^n\right)\frac{1}{2n+1},\ j=0,1,\ldots,2\mathrm{n}} \tag{3.8}$$

Эта квадратурная формула играет решающую роль при дискретизации “методом дискретных особенностей” сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта.

3.2. Если $f(\varphi)$ 2π–периодическая непрерывная функция и $\left(P_n^{(1)}f\right)(\varphi)$ ее интерполяционный тригонометрический полином порядка *n* (1.14), то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}f(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\left(P_n^{(1)}f\right)(\varphi)d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\left[f(\varphi)-\left(P_n^{(1)}f\right)(\varphi)\right]d\varphi$$

и, используя для вычисления первого слагаемого в правой части квадратурную формулу (4), получаем вариант квадратурной формулы интерполяционного типа с остаточным членом для интеграла (1):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}f(\varphi)d\varphi=\sum_{k=0}^{2n} ctg\frac{\varphi_k^n-\varphi_0}{2}\left[f(\varphi_k^n)-f(\varphi_0)\right]\frac{1}{2n+1}+r_n(\varphi_0), \tag{3.9}$$

где $r_n(\varphi_0) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\left[f(\varphi)-\left(P_n^{(1)}f\right)(\varphi)\right]d\varphi$.

Оценки для скорости убывания остаточного члена $r_n(\varphi_0)$ в классах $C^{r,\alpha}$ гладких функций f приведены в заключительном пункте настоящего раздела.

При $\varphi_0 = \varphi_{0j}^n$ из (9) получаем интерполяционную квадратурную формулу “метода дискретных особенностей”

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_{0j}^n}{2}f(\varphi)d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} ctg\frac{\varphi_k^n-\varphi_{0j}^n}{2}f\left(\varphi_k^n\right)\frac{1}{2n+1}+r_n\left(\varphi_{0j}^n\right), \qquad (3.10)$$

3.3. При выводе квадратурной формулы интерполяционного типа для интеграла с логарифмическим ядром (2) используются некоторые свойства оператора $L:\Pi\to\Pi,$ определенного интегральным представлением (2). В настоящем пункте изучается этот оператор.

Установим сначала связь между интегралами (1) и (2) в классе $C^{1,\alpha}$ 2π-периодических функций $f(\varphi)$. Имеем

$$\int\limits_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|f'(\varphi)\,d\varphi = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_0^{\varphi_0-\varepsilon}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|f'(\varphi)\,d\varphi + \right.$$

$$\left.+\int\limits_{\varphi_0+\varepsilon}^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|f'(\varphi)\,d\varphi\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[f(\varphi)\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi_0-\varepsilon} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\varphi_0-\varepsilon} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}f(\varphi)\,d\varphi + \right.$$

$$\left.+f(\varphi)\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|\Bigg|_{\varphi=\varphi_0+\varepsilon}^{\varphi=2\pi} - \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_0+\varepsilon}^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}f(\varphi)\,d\varphi\right] =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\frac{1}{2}\left[\int\limits_0^{\varphi_0-\varepsilon} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}f(\varphi)\,d\varphi + \int\limits_{\varphi_0+\varepsilon}^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}f(\varphi)\,d\varphi\right] + \right.$$

$$\left.+\left[f(\varphi_0+\varepsilon)-f(\varphi_0-\varepsilon)\right]\ln\sin\frac{\varepsilon}{2}\right\} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}f(\varphi)\,d\varphi.$$

Доказано, что если 2π-периодическая функция $f(\varphi)$ принадлежит классу гладкости $C^{1,\alpha}$, то

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|f'(\varphi)\,d\varphi=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}f(\varphi)\,d\varphi} \qquad (3.11)$$

На пространстве П тригонометрических полиномов $f(\varphi)$ можно записать (11) так

$$(Lf')(\varphi_0)=-(Hf)(\varphi_0), \qquad (3.12)$$

или, вводя оператор дифференцирования

$$\boxed{D:\Pi\to\Pi^0:f(\varphi)\mapsto f'(\varphi)} \qquad (3.13)$$

в операторной форме

$$\boxed{LD=-H} \qquad (3.14)$$

Отметим, что оператор дифференцирования D действует на базисные элементы пространства П следующим образом:

$$\boxed{D:e^{ik\varphi}\mapsto ike^{ik\varphi},k\in Z} \qquad (3.15)$$

Соотношение (11) позволяет вычислить интеграл (2) для базисных элементов $e^{ik\varphi}$, $\mathrm{k}=\pm1,\pm2,...$ пространства Π^0.

Положим в (11) $f(\varphi)=e^{ik\varphi}$. Используя (2.20), получаем:

$$\frac{ik}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|e^{ik\varphi}\,d\varphi=-i\frac{k}{|k|}e^{ik\varphi_0},\ k=\pm1,\pm2,...$$

или

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|e^{ik\varphi}\,d\varphi=-\frac{e^{ik\varphi_0}}{|k|},\ k=\pm1,\pm2,... \qquad (3.16)$$

или коротко

$$\boxed{L:e^{ik\varphi}\mapsto-\frac{1}{|k|}e^{ik\varphi_0},\ k=\pm1,\pm2,...} \qquad (3.17)$$

и, отделяя вещественную и мнимую части, имеем при $k\in\mathrm{N}$:

$$\boxed{L:\cos k\varphi \mapsto -\frac{\cos k\varphi_0}{k}} \tag{3.18}$$

$$\boxed{L:\sin k\varphi \mapsto -\frac{\sin k\varphi_0}{k}} \tag{3.19}$$

Наконец, вычислим интеграл (2) при $f(\varphi)\equiv 1$. Обозначим

$$I_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right| d\varphi \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\psi}{2}\right| d\psi.$$

Имеем

$$\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\psi}{2}\right| d\psi = \int_0^{\pi} \ln\left|\sin\frac{\psi}{2}\right| d\psi + \int_0^{\pi} \ln\left|\cos\frac{\psi}{2}\right| d\psi = \int_0^{\pi}\left[\ln|\sin\psi| - \ln 2\right] d\psi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi - \pi\ln 2,$$

откуда следует, что $I_0 = \frac{1}{2}I_0 - \ln 2$, и, окончательно, имеем

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right| d\varphi = -2\ln 2} \tag{3.20}$$

или коротко

$$\boxed{L:1 \mapsto -2\ln 2} \tag{3.21}$$

3.4. Пусть теперь $f_n(\varphi)$–произвольный тригонометрический полином (1.2), тогда в силу (17) и (21) получаем

$$L:\ \sum_{p=-n}^{n} c_p e^{ip\varphi} \mapsto -2c_0\ln 2 - \sum_{\substack{p=-n\\ p\neq 0}}^{n} \frac{c_p}{|p|} e^{ip\varphi_0}.$$

Если $f_n(\varphi)\equiv S_{n,k}(\varphi)$– фундаментальный интерполяционный тригонометрический полином (1.7), то

$$c_0 = \frac{1}{2n+1},\ \ c_p = \frac{1}{2n+1} e^{-ip\varphi_k^n},\ \ p = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

и имеем

$$L: S_{n,k}(\varphi) \mapsto -\frac{2}{2n+1}\left\{\ln 2 + \sum_{p=1}^{n} \frac{\cos p\left(\varphi_0 - \varphi_k^n\right)}{p}\right\},$$

или подробно

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|S_{n,k}(\varphi)\,d\varphi=-\frac{2}{2n+1}\left\{\ln 2+\sum_{p=1}^{n}\frac{\cos p\left(\varphi_0-\varphi_k^n\right)}{p}\right\}} \qquad (3.22)$$

Теперь можем вывести квадратурную формулу интерполяционного типа для интеграла (2).

Пусть $f(\varphi)$ – 2π-периодическая достаточно гладкая функция и $\left(P_n^{(1)}f\right)(\varphi)$ – ее интерполяционный тригонометрический полином (1.14).

Используя (22), получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|\left(P_n^{(1)}f\right)(\varphi)\,d\varphi=\sum_{k=0}^{2n}f(\varphi_k^n)\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|S_{n,k}(\varphi)\,d\varphi=$$

$$=-\sum_{k=0}^{2n}f(\varphi_k^n)\cdot\left[\ln 2+\sum_{p=1}^{n}\frac{\cos p\left(\varphi_0-\varphi_k^n\right)}{p}\right]\frac{2}{2n+1},$$

или окончательно

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|f(\varphi)\,d\varphi=-\sum_{k=0}^{2n}f(\varphi_k^n)\cdot\left[\ln 2+\sum_{p=1}^{n}\frac{\cos p\left(\varphi_0-\varphi_k^n\right)}{p}\right]\frac{2}{2n+1}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|\left[f(\varphi)-\left(P_n^{(1)}f\right)(\varphi)\right]d\varphi, \qquad (3.23)$$

3.5. В заключение выпишем основные соотношения для операторов H, D и получим новые.

Основное соотношение (12) $LD = -H$ или подробно (11)

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|f'(\varphi)\,d\varphi=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\,f(\varphi)\,d\varphi}$$

это *правило интегрирования по частям для 2π- периодических функций f класса* $C^{1,\alpha}$.

С другой стороны, формальное дифференцирование интеграла (2) по φ_0 приводит к равенству

$$\boxed{\frac{d}{d\varphi_0}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|f(\varphi)\,d\varphi=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}f(\varphi)\,d\varphi} \tag{3.24}$$

Докажем это *правило дифференцирования по параметру под знаком интеграла* (2) для конечных тригонометрических сумм. Достаточно проверить справедливость (24) для базисных элементов $e^{ik\varphi}$, $k=\pm1,\pm2,...$. Имеем

$$\frac{d}{d\varphi_0}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|e^{ik\varphi}\,d\varphi=\frac{d}{d\varphi_0}\left(-\frac{e^{ik\varphi_0}}{|k|}\right)=-i\frac{k}{|k|}e^{ik\varphi_0}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}e^{ik\varphi}\,d\varphi,$$

что и т.д.

Запишем доказанное соотношение (24) в операторной форме (на Π^0):

$$\boxed{DL=-H} \tag{3.25}$$

Сравнивая (25) и (12), констатируем: операторы D и L коммутируют

$$\boxed{DL=LD} \tag{3.26}$$

3.6. Наконец, кратко опишем, как получить квадратурную формулу интерполяционного типа для интеграла с переменным верхним пределом.

Пусть $f(\varphi),\varphi\in R$– 2π-периодическая функция, а $\left(P_n^{(1)}f\right)(\varphi)$– ее интерполяционный тригонометрический многочлен.

Тогда

$$\int\limits_0^{\varphi_0}f(\varphi)d\varphi=\sum_{k=0}^{2n}f\left(\varphi_k^n\right)\int\limits_0^{\varphi_0}S_{n,k}(\varphi)d\varphi+r_n(\varphi), \tag{3.27}$$

где $r_n(\varphi)\equiv\int\limits_0^{\varphi_0}\left[f(\varphi)-\left(P_n^{(1)}f\right)(\varphi)\right]^2\,d\varphi$

Сначала вычислим интеграл с переменным верхним пределом от фундаментального тригонометрического полинома. Подставляя явное выражение для $S_{n,k}(\varphi)$ и интегрируя, получаем

$$\int_0^{\varphi_0} S_{n.k}(\varphi)d\varphi = \left[\varphi_0 + 4\sum_{q=1}^{n} \frac{\sin\frac{q\varphi_0}{2}\cos q\left(\frac{\varphi_0}{2} - \varphi_k^n\right)}{q}\right]\frac{1}{2n+1}, \tag{3.28}$$

и, подставляя (28) в формулу (27), получаем искомую квадратуру.

Квадратурная формула (27) точна для тригонометрических полиномов порядка *n*.

В общем случае об оценке остаточного члена $r_n(\varphi_0)$ в (27) – смотрите следующий пункт настоящего раздела.

3.7. Остановимся теперь на вопросе об оценках остаточных членов в квадратурных формулах интерполяционного типа, выведенных в этом разделе. И сначала приведем без доказательства оценки для $r_n(\varphi_0)$ в квадратурной формуле (9) для интеграла (1) с ядром котангенс и для $r_n\left(\varphi_{0j}^n\right)$ в соответствующей квадратурной формуле “метода дискретных особенностей” (10) в предположении, что функция $f(\varphi)$ в указанных формулах принадлежит классу $C^{r,\alpha}$.

Из соображений, приведенных в главе 14 (пункт 14.1) фундаментальной монографии И.К. Лифанова *) по численным методам в сингулярных интегральных уравнениях, следует, что для всех φ_0 имеем

$$\boxed{r_n(\varphi_0) = \underline{O}\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-1}}\right)} \tag{3.29}$$

а для всех *j* в квадратурной формуле “метода дискретных особенностей” (10) имеет место оценка

$$r_n\left(\varphi_{0j}^n\right) = \underline{O}\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right) \tag{3.30}$$

Далее оценим остаточный член в формуле (23) для интеграла (2) с логарифмическим ядром:

$$R_n(\varphi_0) \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right|\left[f(\varphi) - \left(P_n^{(1)} f\right)(\varphi)\right] d\varphi .$$

---

* Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.– М.: ТОО “Янус”,1995.–520с.

Используя неравенство Буняковского и, в предположении, что $f \in C^{r,\alpha}$, оценку (1.27), получаем для всех φ_0

$$|R_n(\varphi_0)| \le 2\sqrt{2\pi}CE_n \ , \tag{3.31}$$

где

$$C \equiv \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} \ln^2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi\right)^{1/2} , \tag{3.32}$$

причем "грубую" оценку *) для константы C можно получить следующим образом:

$$(\pi C)^2 \equiv \int_0^{2\pi} \ln^2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 2\int_0^{\pi} \ln^2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi < 2\int_0^{\pi} \ln^2 \frac{\varphi}{\pi} d\varphi =$$

$$= 2\pi\int_0^1 \ln^2 x\, dx = 2\pi\left[x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right)\right]\Big|_{x=0}^{1} = 4\pi ,$$

таким образом, имеем для всех φ_0

$$|R_n(\varphi_0)| < 4\sqrt{2}E_n \ , \tag{3.33}$$

и, при сделанном предположении $f \in C^{r,\alpha}$, в силу джексоновской оценки (1.22) для E_n, получаем окончательно:

$$|R_n(\varphi_0)| < \frac{4\sqrt{2}\cdot 12^{r+1} M_r}{n^{r+\alpha}} \tag{3.34}$$

В заключение отметим, что оценка для остаточного члена в интерполяционной квадратурной формуле (27) для интеграла с переменным верхним пределом, в предположении $f \in C^{r,\alpha}$, может быть получена следующим образом.

Имеем

---

* Точное значение интеграла в (32) можно вычислить с помощью равенства Парсеваля для квадрата нормы 2π-периодической четной функции $\ln\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|$, коэффициенты Фурье которой находим из формул (20) и (18):

$$-\ln\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| = \ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\varphi}{k} .$$

Имеем $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln^2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 2\ln^2 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 2\ln^2 2 + \frac{\pi^2}{6} < 0{,}83\pi.$

Так что, на самом деле, $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln^2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi < 0{,}83\pi$.

$$\left|r_n(\varphi_0)\right| \le \int_0^{\varphi_0} \left| f(\varphi) - \left(P_n^{(1)} f\right)(\varphi)\right| d\varphi \le \int_0^{2\pi} \left| f(\varphi) - \left(P_n^{(1)} f\right)(\varphi)\right| d\varphi ,$$

и, с учетом (1.30), находим окончательно для всех $\varphi_0 \in [0,2\pi]$:

$$\left|r_n(\varphi_0)\right| \le \frac{4\pi 12^{r+1} M_r}{n^{r+\alpha}} . \qquad (3.35)$$