

Contact problem of elastodynamics for a penny-shaped crack under an oblique loading

O.V. Menshykov, I.A. Guz

Timoshenko Institute of Mechanics, Kiev, Ukraine

Centre for Micro- and Nanomechanics, University of Aberdeen, Scotland, UK

The paper concerns the contact interaction of the opposite faces of a penny-shaped crack under oblique incidence of a harmonic tension-compression wave. The problem is solved by the method of boundary integral equations using an iterative algorithm. The dependence of stress intensity factors on the wave frequency and the friction coefficient is studied.

2000 Mathematics Subject Classification 74R10, 74M99, 45E99.

The achievements of the material science such as the new high-tech materials make it possible to significantly increase the strength and stiffness of designed structures. On the other hand, the level of the safety requirements increases consequently because the cost of the unpredictable fracture is always enormously high. Apart from the economic value it is necessary to remember that in the extreme cases the material or structural fracture can put human health at risk. Therefore the ultimate milestone of the modern engineering fracture mechanics is the fracture control in order to predict the construction behaviour and avoid the sudden collapse.

The presence of defects (cracks, delaminations, etc.), which always appear in real-life materials during the fabrication or in-service, considerably decreases the strength and the lifetime of structures as well as significantly increases the cost of exploitation. A crack acts as a local stress concentrator, which can lead to a sudden fracture under unexpectedly small loading. Unfortunately, the micro-defects cannot be fully avoided. Therefore it is necessary to ensure the residual strength of the structure will not fall below an acceptable level over the required service life [1, 2].

Let us consider a three-dimensional homogeneous, isotropic and linear elastic unbounded solid which contains a flat penny-shaped crack. We suppose that only small deformations occur, therefore the crack can be described by the middle surface $\Omega = \{x_1^2 + x_2^2 \leq a^2, x_3 = 0\}$, where a is the radius of the crack.

The incident time-harmonic wave is defined by the scalar potential function

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0 e^{i(k_1(x_1 \cos \alpha + x_3 \sin \alpha) - \omega t)},$$

which generates the displacement field $u(\mathbf{x}, t) = \text{grad}_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, t)$.

Here $\omega = 2\pi/T$ is the frequency, T is the period of oscillation; Φ_0 is the amplitude; $k_1 = \omega/c_1$ is the wave number; $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ is the velocity of the longitudinal wave; λ and μ are the Lamé constants; ρ is the density of the material; and α is the angle of incidence of the wave (see Figure 1).

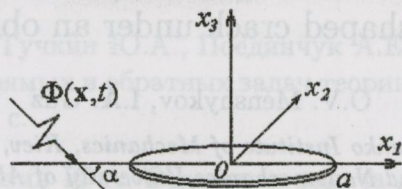


Figure 1: A crack under harmonic wave

Inside the solid the behaviour of the material is governed by the linear Lamé equations of elastodynamics for the displacement field subject to some initial and boundary conditions

When the material is subjected to an incident wave, the movement of crack faces results in the contact interaction on the crack surface. The opposite faces of the existing cracks interact with each other under external loading, altering significantly the stress fields near the crack tips. The nature of the contact interaction between two crack surfaces is very complex. However, the direct observation and measurement of the contact characteristics is impossible since the area of interest is hidden in the solid. Under deformation of the material, the contact region changes in time, its shape is unknown beforehand and must be determined as a part of solution. The allowance for friction in the contact domain leads to the appearance of adherence and sliding subdomains. The complexity of the problem is further compounded by the fact that the contact behaviour is very sensitive to the material properties of two contacting surfaces and the type of the external loading. Such dependences make the contact crack problem highly non-linear [2, 3, 4, 5].

The vector of contact forces on the crack faces during the interaction is denoted by $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, and the displacement discontinuity vector across the crack is denoted by $[u(\mathbf{x}, t)] = u^+(\mathbf{x}, t) - u^-(\mathbf{x}, t)$, where superscripts "+" and "-" refer to the upper and the lower crack faces.

We assume that the contact interaction satisfies the following Signorini constraints:

$$[u_n(\mathbf{x}, t)] \geq 0, \quad q_n(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad [u_n(\mathbf{x}, t)]q_n(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1)$$

and the Coulomb friction law with the friction coefficient k_τ :

$$|q_\tau(\mathbf{x}, t)| < k_\tau q_n(\mathbf{x}, t) \implies \frac{\partial [u_\tau(\mathbf{x}, t)]}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

$$|q_\tau(\mathbf{x}, t)| = k_\tau q_n(\mathbf{x}, t) \implies \frac{\partial [u_\tau(\mathbf{x}, t)]}{\partial t} = -\frac{q_\tau(\mathbf{x}, t)}{|q_\tau(\mathbf{x}, t)|} \left| \frac{\partial [u_\tau(\mathbf{x}, t)]}{\partial t} \right|,$$

here $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \in T = [0, T]$.

The constraints (1) mean there is no interpenetration of the opposite crack faces and the contact force is unilateral. The physical sense of constraints (2) is that the opposite crack faces remain immovable with respect to each other in the tangential direction until they are held by the friction force, however, as soon as the modulus of the contact forces reaches a certain limit depending on the friction coefficient, the crack faces begin to move: the sliding occurs.

The traction on the crack faces has the form

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t) + \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \quad \text{for } \mathbf{x} \in \Omega, t \in T,$$

where $\mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t)$ is the load caused by the incident tension-compression wave [6]:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t) &= \begin{pmatrix} -k_1^2 \Phi_0 \mu \sin 2\alpha \operatorname{Re} \left(e^{i(k_1 x_1 \cos \alpha - \omega t)} \right) \\ 0 \\ -k_1^2 \Phi_0 (\lambda + 2\mu \sin^2 \alpha) \operatorname{Re} \left(e^{i(k_1 x_1 \cos \alpha - \omega t)} \right) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -k_1^2 \Phi_0 \mu \sin 2\alpha (\cos(k_1 x_1 \cos \alpha) \cos(\omega t) - \sin(k_1 x_1 \cos \alpha) \sin(\omega t)) \\ 0 \\ -k_1^2 \Phi_0 (\lambda + 2\mu \sin^2 \alpha) (\cos(k_1 x_1 \cos \alpha) \cos(\omega t) - \sin(k_1 x_1 \cos \alpha) \sin(\omega t)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Due to the contact interaction the resulting process is a steady-state periodic, but not a harmonic one. Therefore, according to [2], we expand the components of the displacement discontinuity and traction vectors into the exponential Fourier series

$$p_j(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_j^k(\mathbf{x}) e^{i\omega_k t} \right\}, \quad [u_j(\mathbf{x}, t)] = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [u_j^k(\mathbf{x})] e^{i\omega_k t} \right\},$$

where $\omega_k = 2\pi k/T$ and

$$p_j^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T p_j(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega_k t} dt, \quad [u_j^k(\mathbf{x})] = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T [u_j(\mathbf{x}, t)] e^{-i\omega_k t} dt,$$

$j = 1, 2, 3; k \in \mathbb{Z}$ (the integers).

The Fourier coefficients $p_j^k(\mathbf{x})$ and $[u_j^k(\mathbf{x})]$ are related to each other by the following system of boundary integral equations:

$$p_m^k(\mathbf{x}) = - \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} F_{mj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) [u_j^k(\mathbf{y})] d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega; m = 1, 2, 3; k \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

which was obtained in [2, 6] for the considered 3-D case.

The kernels $F_{mj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ are the fundamental solutions of the elastodynamic problems in the frequency domain. For a flat crack we can present them in the following form [4, 5]:

$$F_{13}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = F_{31}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = F_{23}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = F_{32}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = 0,$$

$$m, j = 1, 2 \quad F_{mj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \frac{\mu}{4\pi} \left[\delta_{mj} \left(\frac{2}{r^2} \chi - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \right. \\ \left. + \frac{(y_m - x_m)(y_j - x_j)}{r^2} \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{3}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{6}{r^2} \chi \right) \right],$$

$$F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\lambda^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{4\lambda(\lambda + \mu)}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{2(\lambda^2 + 4\lambda\mu + 4\mu^2)}{r^2} \chi - \lambda^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{2(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right],$$

where δ_{mj} is the Kronecker delta and

$$\psi = \left(\frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_2} + 1 \right) \frac{e^{-l_2}}{r} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_1} \right) \frac{e^{-l_1}}{r}, \\ \chi = \left(\frac{3}{l_2^2} + \frac{3}{l_2} + 1 \right) \frac{e^{-l_2}}{r} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(\frac{3}{l_1^2} + \frac{3}{l_1} + 1 \right) \frac{e^{-l_1}}{r},$$

$l_1 = i\omega_k r/c_1$, $l_2 = i\omega_k r/c_2$; $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ is the velocity of the transversal wave; and r is the distance between the observation point $\mathbf{x}$ and the load point $\mathbf{y}$.

For computational convenience we rewrite the complex-valued boundary integral system (3) in the form

$$m = 1, 2, 3; k \in \mathbb{N}_0 \text{ (the naturals and zero)} \quad p_{m,cos}^k(\mathbf{x}) - ip_{m,sin}^k(\mathbf{x}) = \\ = - \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} (F_{mj}^{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) + iF_{mj}^{Im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)) ([u_{j,cos}^k(\mathbf{y})] - i[u_{j,sin}^k(\mathbf{y})]) d\mathbf{y}, \quad (4)$$

where $F_{mj}^{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ and $F_{mj}^{Im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ are the real and imaginary parts of the kernel $F_{mj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ and

$$p_{j,cos}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p_j(\mathbf{x}, t) \cos(\omega_k t) dt, \quad p_{j,sin}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p_j(\mathbf{x}, t) \sin(\omega_k t) dt,$$

$$[u_{j,cos}^k(\mathbf{x})] = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T [u_j(\mathbf{x}, t)] \cos(\omega_k t) dt, \quad [u_{j,sin}^k(\mathbf{x})] = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T [u_j(\mathbf{x}, t)] \sin(\omega_k t) dt.$$

The physical values of $p_j(\mathbf{x}, t)$ and $[u_j(\mathbf{x}, t)]$ are given by the following Fourier trigonometric series:

$$p_j(\mathbf{x}, t) = \frac{p_{j,cos}^0(\mathbf{x})}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(p_{j,cos}^k(\mathbf{x}) \cos(\omega_k t) + p_{j,sin}^k(\mathbf{x}) \sin(\omega_k t) \right),$$

$$[u_j(\mathbf{x}, t)] = \frac{[u_{j,cos}^0(\mathbf{x})]}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left([u_{j,cos}^k(\mathbf{x})] \cos(\omega_k t) + [u_{j,sin}^k(\mathbf{x})] \sin(\omega_k t) \right).$$

Thus the considered problem has been transformed into the infinite system of boundary integral equations (4), which is solved by taking into account the contact constraints (1) and (2).

We approximate the surface of the crack Ω by a set of plane rectangular elements Ω_l^h , $l = \overline{1, N}$; and use a piecewise constant approximation.

Note, that the normal and tangential components of the traction and the displacement discontinuity vectors are related only by the Coulomb friction law (2). Therefore, the system (4) can be divided into two mutually independent systems for normal and tangential components. In a short matrix form the foregoing systems read as

$$\mathbf{F}_\tau^k \mathbf{U}_\tau^k = \mathbf{P}_\tau^k \quad \text{for } k \in \mathbb{N}_0, \quad (5)$$

$$\mathbf{F}_n^k \mathbf{U}_n^k = \mathbf{P}_n^k \quad \text{for } k \in \mathbb{N}_0, \quad (6)$$

where

$$\mathbf{F}_\tau^k = \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{11}^{k,Re} & -\mathbf{F}_{11}^{k,Im} & -\mathbf{F}_{12}^{k,Re} & -\mathbf{F}_{12}^{k,Im} \\ \mathbf{F}_{11}^{k,Im} & -\mathbf{F}_{11}^{k,Re} & \mathbf{F}_{12}^{k,Im} & -\mathbf{F}_{12}^{k,Re} \\ -\mathbf{F}_{21}^{k,Re} & -\mathbf{F}_{21}^{k,Im} & -\mathbf{F}_{22}^{k,Re} & -\mathbf{F}_{22}^{k,Im} \\ \mathbf{F}_{21}^{k,Im} & -\mathbf{F}_{21}^{k,Re} & \mathbf{F}_{22}^{k,Im} & -\mathbf{F}_{22}^{k,Re} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}_\tau^k = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{1,cos}^k \\ \mathbf{U}_{1,sin}^k \\ \mathbf{U}_{2,cos}^k \\ \mathbf{U}_{2,sin}^k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_\tau^k = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{1,cos}^k \\ \mathbf{P}_{1,sin}^k \\ \mathbf{P}_{2,cos}^k \\ \mathbf{P}_{2,sin}^k \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_n^k = \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{33}^{k,Re} & -\mathbf{F}_{33}^{k,Im} \\ \mathbf{F}_{33}^{k,Im} & -\mathbf{F}_{33}^{k,Re} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_n^k = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{3,cos}^k \\ \mathbf{U}_{3,sin}^k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_n^k = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{3,cos}^k \\ \mathbf{P}_{3,sin}^k \end{bmatrix},$$

where

$$\mathbf{F}_{mj}^{k,Re(Im)} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega_1^h} F_{mj}^{Re(Im)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} & \dots & \int_{\Omega_N^h} F_{mj}^{Re(Im)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Omega_1^h} F_{mj}^{Re(Im)}(\mathbf{x}_N, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} & \dots & \int_{\Omega_N^h} F_{mj}^{Re(Im)}(\mathbf{x}_N, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}_{j,\cos(\sin)}^k = \begin{bmatrix} [u_{j,\cos(\sin)}^k(\mathbf{y}_1)] \\ \vdots \\ [u_{j,\cos(\sin)}^k(\mathbf{y}_N)] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{j,\cos(\sin)}^k = \begin{bmatrix} [p_{j,\cos(\sin)}^k(\mathbf{x}_1)] \\ \vdots \\ [p_{j,\cos(\sin)}^k(\mathbf{x}_N)] \end{bmatrix}.$$

One of the major difficulties of the treatment of contact elastodynamics problem with boundary integral equations is the evaluation of divergent integrals with different types of singularity. The order of the singularity and the structure of integrals depend on the type of weight functions. These integrals are often hyper-singular and should be treated in the sense of the Hadamard finite part. For example, in the considered case, in order to assemble the coefficients of the systems (5) and (6), the following integrals were evaluated

$$J_{\gamma}^{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \Omega_j^h) = \int_{\Omega_j^h} \frac{(x_1 - y_1)^{\alpha}(x_2 - y_2)^{\beta}}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} \gamma d\mathbf{y},$$

where

$$\alpha, \beta = 0, 1, 2; \quad \alpha + \beta = 0, 2; \quad \gamma = 1, 3, 5; \quad \gamma - \alpha - \beta = 1, 3.$$

In [7] the second Green theorem was used for the regularization of the divergent integrals and explicit formulas were given for polygonal elements.

To solve the problem we use the iteration algorithm presented in [3, 8]. During the iterative process, the Fourier coefficients change from one iteration to the next until the distribution of physical values satisfying the constraints (1) and (2) is found. Due to the independence of normal components of the solution on the tangential components, the normal components of contact forces and displacement discontinuity vectors were calculated first and afterwards the tangential components were calculated by using the already corrected values of the normal components.

As an example, let us consider a crack located in the material with the following mechanical properties: the Young modulus $E = 200 \text{ GPa}$, the Poisson ratio $\nu = 0.25$, the mass density $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$. The crack is subjected to the tension-compression wave of unit amplitude, the angle of incidence of the wave $\alpha = \pi/4$.

At that the unilateral constraints (1) and (2) are valid for normal and tangential components of the displacement discontinuity and the contact forces vectors on the crack surface during the oscillation period [6].

The results for the stress intensity factors (SIFs) (opening, sliding and tearing modes) are given in Figures 2-4. The dynamic SIFs are normalised by the maximal static SIFs obtained for the normal wave incidence [1]. The results confirms that the crack faces contact interaction significantly influences the stress-strain state in the vicinity of the crack tips, and affects the distribution of the SIFs. The maximal values of the comparable quantities do not coincide (in some cases, especially for the opening mode, see Figure 2, the difference can reach 30-50%) and are achieved at different wave frequencies. The shear SIFs (Figures 3 and 4) diminish when

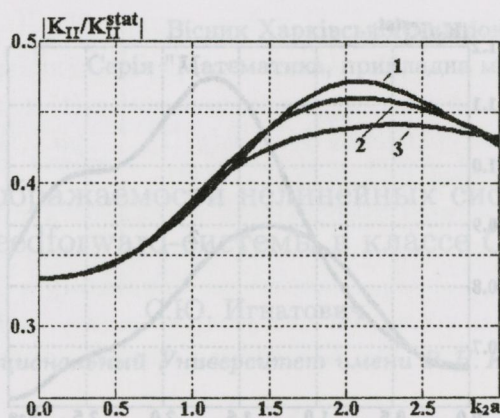


Figure 2: SIF (transverse shear mode): 1 - without contact interaction ($k_\tau = 0$), 2 - with contact interaction ($k_\tau = 0.1$), 3 - with contact interaction ($k_\tau = 0.2$)

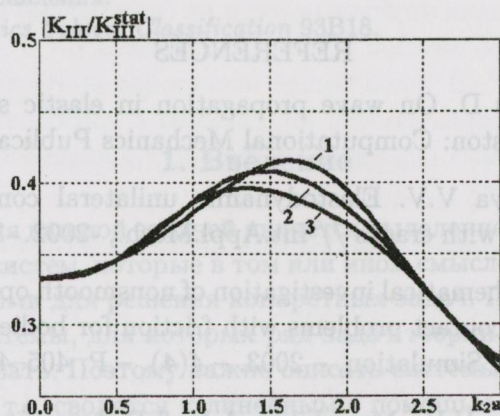


Figure 3: SIF (longitudinal shear mode): 1 - without contact interaction ($k_\tau = 0$), 2 - with contact interaction ($k_\tau = 0.1$), 3 - with contact interaction ($k_\tau = 0.2$)

the friction coefficient increases. And, the most importantly, the "real" maximal values of SIFs evaluated taking into account the contact of crack faces is much smaller, than previously predicted (i.e. disregarding the contact interaction). In the same time, for structures working within certain ranges of the external loading the values of the SIFs can be higher than previously predicted.

Hence, extra extensive investigations are necessary to ensure safety of the exploited structures.

Acknowledgement. Authors thank Prof. V.V. Zozulya for helpful discussions.

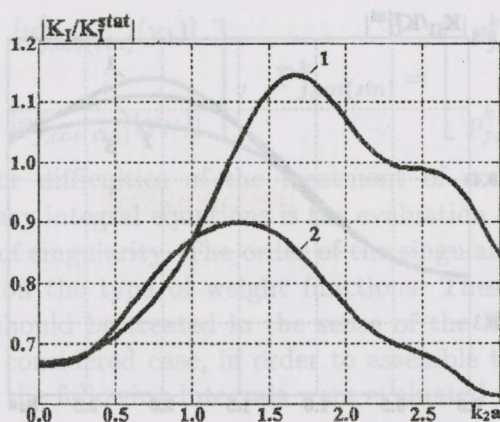


Figure 4: SIF (opening mode): 1 - without contact interaction, 2 - with contact interaction

REFERENCES

1. Zhang Ch., Gross D. On wave propagation in elastic solids with cracks. - Southampton, Boston: Computational Mechanics Publications, 1998. - 251 p.
2. Guz A.N., Zozulya V.V. Elastodynamic unilateral contact problems with friction for bodies with cracks // *Int.Appl.Mech.*, -2002. -38(8). - P. 895 - 932.
3. Zozulya V.V. Mathematical investigation of nonsmooth optimization algorithm in elastodynamic contact problems with friction for bodies with cracks // *Int. J. Nonl. Sci. Num. Simulation*, - 2003. - 4(4). - P. 405-422.
4. Guz A.N., Zozulya V.V., Men'shikov A.V. 3-D dynamic contact problem for an elliptic crack interacting with a normally incident harmonic compression-expansion wave // *Int. Appl. Mech.*, - 2003. - 39(12). - P. 1425-1428.
5. Guz A.N., Zozulya V.V., Men'shikov A.V. General spatial dynamic problem for an elliptic crack under the action of a normal shear wave, with consideration for the contact interaction of the crack faces // *Int. Appl. Mech.*, - 2004. - 40(2). - P. 156-159.
6. Menshykov O.V. The allowance for the contact of the faces of a stationary penny-shaped crack under harmonic loading // *Rep. Nation. Acad. Sci. Ukraine*, - 2004. - 8. - P. 43-47.
7. Zozulya V.V., Gonzalez-Chi P.I. Weakly singular, singular and hypersingular integrals in elasticity and fracture mechanics // *J. Chinese Inst. Engrs.*, - 1999. - 22(6). - P. 763-775.
8. Mistakidis E.S., Stavroulakis G.E. Nonconvex optimization in mechanics. Algorithms, heuristics and engineering applications by FEM. - Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1998. - 300 p.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

УДК 517.977.1

№ 749, 2006, с.65–79

Об отображаемости нелинейных систем на feedforward-системы в классе C^1

С.Ю. Игнатович

Харьковский Национальный Университет имени В. Н. Каразина, Украина

Получены критерии отображаемости нелинейных систем с одномерным управлением на feedforward-системы класса C^1 с заменой управления и без замены управления.

2000 *Mathematics Subject Classification* 93B18.

1. Введение

В теории управления важной задачей является выделение и исследование специальных классов систем, которые в том или ином смысле являются наиболее "простыми", удобными для решения конкретных задач. Примером могут служить линейные системы, для которых ряд задач теории управления удается полностью исследовать. Поэтому важно описать системы, которые отображаются на линейные, т.е. сводятся к линейным с помощью подходящей замены переменных и, быть может, замены управления. Указанная "задача линеаризуемости" активно исследовалась в 70-80-е годы, начиная с работы [1]. Ей посвящена обширная литература; укажем, например, [2, 3, 4, 5].

В данной работе мы рассматриваем класс feedforward-систем вида

$$\dot{y}_k = \psi_k(y_1, \dots, y_{k-1}, u), \quad k = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Замечательным свойством feedforward-систем является возможность при заданном управлении $u = u(t)$ найти траекторию, последовательно выполняя интегрирование: если $y_1(t), \dots, y_{i-1}(t)$ уже найдены, то $y_i(t)$ находится по формуле $y_i(t) = y_i(0) + \int_0^t \psi_i(y_1(\tau), \dots, y_{i-1}(\tau), u(\tau)) d\tau$. Feedforward-системы активно исследуются в математической литературе (см., например, [6, 7, 8]), а также часто используются в приложениях. В частности, заметим, что однородные системы, которые аппроксимируют нелинейные аффинные системы в задаче быстрогодействия [9], также являются feedforward-системами. Обобщением указанного класса служат "нестрогие" feedforward-системы вида

$$\dot{y}_k = \psi_k(y_1, \dots, y_k, u), \quad k = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Для таких систем при заданном управлении $u = u(t)$ можно найти траекторию, последовательно решая дифференциальные уравнения: если $y_1(t), \dots, y_{i-1}(t)$ уже найдены, то для нахождения $y_i(t)$ достаточно решить *одно* дифференциальное уравнение $\dot{y}_i = \psi_i(y_1(t), \dots, y_{i-1}(t), y_i, u(t)) = \hat{\psi}_i(t, y_i)$ относительно неизвестной функции $y_i = y_i(t)$.

При этом естественным требованием к гладкости правой части систем вида (1) и (2) является требование *однократной* непрерывной дифференцируемости функций $\psi_1, \dots, \psi_n$, аналогичное принятому в работах [1, 5].

В параграфе 2 мы исследуем следующую задачу: найти необходимые и достаточные условия того, что нелинейная система с одномерным управлением

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in Q \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^1, \quad (3)$$

отображается на feedforward-систему или нестрогую feedforward-систему класса C^1 с помощью замены переменных $y = F(x)$ класса C^2 . В параграфе 3 рассмотрена задача отображаемости на (нестрогую) feedforward-систему класса C^1 с помощью замены переменных класса C^2 и замены управления $v = g(x, u)$ класса C^1 . В такой общей постановке критерии отображаемости, как и критерии линеаризуемости [5], связаны с требованием существования векторных полей класса C^1 , удовлетворяющих определенным условиям.

2. Отображаемость без замены управления

Далее $[Q]_k$ обозначает проекцию области $Q \subset \mathbb{R}^n$ на k -мерное подпространство, натянутое на первые k координатных векторов, т.е. $[Q]_k = \{(x_1, \dots, x_k) : x = (x_1, \dots, x_n) \in Q\}$.

Определение 1 Мы говорим, что нелинейная система вида (3) локально отображается на feedforward-систему класса C^1 в области Q , если существует замена переменных

$$y = F(x) \in C^2(Q), \quad \det F'_x(x) \neq 0, \quad x \in Q, \quad (4)$$

которая сводит систему (3) к виду (1), где $\psi_k \in C^1([F(Q)]_{k-1} \times \mathbb{R})$, $k = 1, \dots, n$.

Замечание 1. Термин “локальная отображаемость в области Q ” означает, что отображение $y = F(x)$ обратимо, вообще говоря, локально, в некоторой окрестности каждой точки области Q .

Замечание 2. Если система (3) локально отображается на feedforward-систему класса C^1 в области Q в смысле определения 1, то

$$\psi_k(F_1(x), \dots, F_{k-1}(x), u) = F'_x(x)f(x, u),$$

где $\psi_k(F_1(x), \dots, F_{k-1}(x), u) \in C^1(Q \times \mathbb{R})$. Так как $F(x) \in C^2(Q)$ и $\det F'_x(x) \neq 0$, то $f(x, u) \in C^1(Q \times \mathbb{R})$, то есть система (3) также принадлежит классу C^1 .

Далее $[X(x), Y(x)]$ обозначает скобку Ли векторных полей $X(x), Y(x) \in C^1(Q)$, т.е. $[X(x), Y(x)] = Y'_x(x)X(x) - X'_x(x)Y(x)$.

Теорема 1 Нелинейная система вида (3) локально отображается на feedforward-систему класса C^1 в области Q тогда и только тогда, когда $f(x, u) \in C^1(Q \times \mathbb{R})$ и существуют векторные поля $Z^1(x), \dots, Z^n(x) \in C^1(Q)$, такие, что

i) для некоторых функций $\mu_{ki}(x, u) \in C(Q \times \mathbb{R})$ выполнено

$$[Z^k(x), f(x, u)] = \sum_{i=k+1}^n \mu_{ki}(x, u) Z^i(x), \quad k = 1, \dots, n;$$

ii) для любого $k = 1, \dots, n$ система

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x) Z^k(x) &= 1, \\ \varphi'_x(x) Z^j(x) &= 0, \quad j = k+1, \dots, n, \end{aligned} \quad (S_k)$$

имеет решение в классе $C^2(Q)$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что условия теоремы 1 выполнены. Пусть $\varphi_k(x) \in C^2(Q)$ – решение системы (S_k) , $k = 1, \dots, n$. Рассмотрим замену переменных $y_k = F_k(x) = \varphi_k(x)$, $k = 1, \dots, n$, в системе (3). Из условия ii) следует, что

$$F'_x(x)(Z^1(x), \dots, Z^n(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

где символом $*$ обозначены некоторые (вообще говоря, различные) функции класса C^1 . В частности, равенство (5) означает, что $\det F'_x(x) \neq 0$, $x \in Q$. Тогда

$$\dot{y}_k = \varphi'_k(x) f(x, u), \quad k = 1, \dots, n.$$

Покажем, что $\varphi'_k(x) f(x, u)$ является функцией от $F_1(x), \dots, F_{k-1}(x)$ и u . Поскольку $\varphi_k(x) \in C^2(Q)$ и $f(x, u) \in C^1(Q \times \mathbb{R})$, $Z^j(x) \in C^1(Q)$, то

$$(\varphi'_k(x) f(x, u))'_x Z^j(x) = \varphi'_k(x) [Z^j(x), f(x, u)] + (\varphi'_k(x) Z^j(x))'_x f(x, u). \quad (6)$$

Так как $\varphi_k(x)$ является решением системы (S_k) , то $\varphi'_k(x) Z^j(x) = \text{const}$ при $j \geq k$, следовательно, $(\varphi'_k(x) Z^j(x))'_x = 0$, $j \geq k$. Используя условие i), получаем из (6), что

$$(\varphi'_k(x) f(x, u))'_x Z^j(x) = \varphi'_k(x) [Z^j(x), f(x, u)] = \sum_{i=j+1}^n \mu_{ji}(x, u) \varphi'_k(x) Z^i(x) = 0$$

при $j \geq k$. Это означает, что при каждом фиксированном u функция $\varphi(x) = \varphi'_k(x)f(x, u)$ является решением системы

$$\varphi'_x(x)Z^j(x) = 0, \quad j = k, \dots, n. \quad (7)$$

Система (7) имеет $k-1$ независимых решений $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{k-1}(x)$. Из (5) следует, что $\text{rank}\{Z^k(x), \dots, Z^n(x)\} = n - k + 1$, $x \in Q$, так что любое решение системы (7) (класса C^1) является функцией (класса C^1) от этих решений. Итак, существует функция $\psi_k \in C^1([F(Q)]_{k-1} \times \mathbb{R})$, такая, что

$$\varphi'_k(x)f(x, u) = \psi_k(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{k-1}(x), u).$$

Таким образом, замена переменных $y_k = F_k(x) = \varphi_k(x)$, $k = 1, \dots, n$, приводит систему (3) к feedforward-системе (1) класса C^1 .

Достаточность. Предположим, что система (3) локально отображается на feedforward-систему (1) класса C^1 в области Q с помощью замены переменных (4). Это означает, что

$$F'_k(x)f(x, u) = \psi_k(F_1(x), \dots, F_{k-1}(x), u), \quad k = 1, \dots, n,$$

где $f(x, u)$ и $\psi_1, \dots, \psi_n$ принадлежат классу C^1 (см. замечание 2). Положим

$$\begin{aligned} Z^k(x) &= (F'_x(x))^{-1}e_k \in C^1(Q), \quad k = 1, \dots, n, \\ \varphi_k(x) &= F_k(x) \in C^2(Q), \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (8)$$

и покажем, что эти векторные поля $Z^1, \dots, Z^n$ и функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ удовлетворяют условиям i) и ii) теоремы 1. Вначале рассмотрим условие ii). Имеем

$$\varphi'_k(x)Z^j(x) = F'_k(x)(F'_x(x))^{-1}e_j = \delta_{kj},$$

откуда следует ii). Рассмотрим теперь условие i). Так как $F(x) \in C^2(Q)$, то

$$F'_x(x)[Z^k(x), f(x, u)] = (F'_x(x)f(x, u))'_x Z^k(x) - (F'_x(x)Z^k(x))'_x f(x, u). \quad (9)$$

По определению (8), $F'_x(x)Z^k(x) = e_k$, следовательно, $(F'_x(x)Z^k(x))'_x f(x, u) = 0$. Рассмотрим далее

$$(F'_x(x)f(x, u))'_x Z^k(x) = \sum_{j=1}^n e_j (F'_j(x)f(x, u))'_x Z^k(x).$$

Так как $F'_j(x)f(x, u) = \psi_j(F_1(x), \dots, F_{j-1}(x), u)$, то

$$(F'_j(x)f(x, u))'_x = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\partial \psi_j(y_1, \dots, y_{j-1}, u)}{\partial y_i} \Big|_{y=F(x)} F'_i(x).$$

Обозначим

$$\mu_{ij}(x, u) = \frac{\partial \psi_j(y_1, \dots, y_{j-1}, u)}{\partial y_i} \Big|_{y=F(x)} \in C(Q \times \mathbb{R}),$$

тогда

$$\begin{aligned} (F'_{jx}(x)f(x,u))'_x Z^k(x) &= \sum_{i=1}^{j-1} \mu_{ij}(x,u) F'_{ix}(x) (F'_x(x))^{-1} e_k = \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \mu_{ij}(x,u) \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{если } j \leq k, \\ \mu_{kj}(x,u), & \text{если } j \geq k+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак,

$$(F'_x(x)f(x,u))'_x Z^k(x) = \sum_{j=1}^n e_j (F'_{jx}(x)f(x,u))'_x Z^k(x) = \sum_{j=k+1}^n \mu_{kj}(x,u) e_j.$$

Окончательно, получаем из (9)

$$\begin{aligned} [Z^k(x), f(x,u)] &= (F'_x(x))^{-1} (F'_x(x)f(x,u))'_x Z^k(x) = \\ &= \sum_{j=k+1}^n \mu_{kj}(x,u) (F'_x(x))^{-1} e_j = \sum_{j=k+1}^n \mu_{kj}(x,u) Z^j(x), \end{aligned}$$

что совпадает с i). $\square$

Замечание 3. В условии ii) теоремы 1 вместо равенств $\varphi'_x(x)Z^k(x) = 1$ достаточно требовать, чтобы

$$\varphi'_x(x)Z^k(x) = c_k(\varphi(x)), \quad (10)$$

где $c_k(\tau) \in C^1(\varphi(Q))$ – некоторые функции, такие, что $c_k(\tau) \neq 0$, $\tau \in \varphi(Q)$. В самом деле, пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнениям $\varphi'_x(x)Z^j(x) = 0$, $j = k+1, \dots, n$, и условию (10). Тогда функция $\tilde{\varphi}(x) = \Phi_k(\varphi(x)) \in C^2(Q)$, где $\Phi_k(t) = \int \frac{1}{c_k(\tau)} d\tau \in C^2(\varphi(Q))$, очевидно, удовлетворяет системе (S_k) .

Замечание 4. В теореме 1 системы (S_k) можно заменить на системы

$$\varphi'_x(x)Z^j(x) = \delta_{kj}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Действительно, пусть векторные поля $Z^1, \dots, Z^n$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и пусть $\varphi_k(x) \in C^2(Q)$, $k = 1, \dots, n$, – решения систем (S_k) . Построим такие векторные поля $\tilde{Z}^1, \dots, \tilde{Z}^n$, которые удовлетворяют условию i) теоремы 1 и равенствам $\varphi'_k(x)\tilde{Z}^j(x) = \delta_{kj}$ при $k, j = 1, \dots, n$. Для этого положим $\tilde{Z}^k(x) = Z^k(x) + \sum_{i=k+1}^n \alpha_{ki}(x)Z^i(x)$ и подберем соответствующим образом $\alpha_{ki}(x) \in C^1(Q)$. Условие i) для векторных полей $\tilde{Z}^1, \dots, \tilde{Z}^n$, очевидно, выполнено. Далее, для каждого $k = 1, \dots, n$ имеем $\varphi'_k(x)\tilde{Z}^k(x) = 1$ и $\varphi'_j(x)\tilde{Z}^k(x) = 0$ при $j \leq k-1$. Наконец, для $j = k+1, \dots, n$ потребуем, чтобы

$$\varphi'_j(x)\tilde{Z}^k(x) = \varphi'_j(x)Z^k(x) + \sum_{i=k+1}^{j-1} \alpha_{ki}(x)\varphi'_j(x)Z^i(x) + \alpha_{kj}(x) = 0,$$

откуда последовательно находим $\alpha_{kj}(x) \in C^1(Q)$, $j = k+1, \dots, n$.

Определение 2 Мы говорим, что нелинейная система вида (3) локально отображается на нестрогую feedforward-систему класса C^1 в области Q , если существует замена переменных (4), которая сводит систему (3) к виду (2), где $\psi_k \in C^1([F(Q)]_k \times \mathbb{R})$, $k = 1, \dots, n$.

Как и в случае отображаемости на feedforward-систему, система (3), которая локально отображается на нестрогую feedforward-систему класса C^1 , также принадлежит классу C^1 .

Теорема 2 Нелинейная система вида (3) локально отображается на нестрогую feedforward-систему класса C^1 в области Q тогда и только тогда, когда $f(x, u) \in C^1(Q \times \mathbb{R})$ и существуют векторные поля $Z^1(x), \dots, Z^n(x) \in C^1(Q)$, такие, что

i) для некоторых функций $\mu_{ki}(x, u) \in C(Q \times \mathbb{R})$ выполнено

$$[Z^k(x), f(x, u)] = \sum_{i=k}^n \mu_{ki}(x, u) Z^i(x), \quad k = 1, \dots, n;$$

ii) для любого $k = 1, \dots, n$ система (S_k) имеет решение в классе $C^2(Q)$.

Доказательство повторяет доказательство теоремы 1 с очевидными изменениями.

Замечание 5. В условии ii) теоремы 2 вместо равенства $\varphi'_x(x)Z^k(x) = 1$ (в системе (S_k)) достаточно требовать, чтобы $\varphi'_x(x)Z^k(x) \neq 0$ при $x \in Q$. Действительно, пусть векторные поля $Z^1(x), \dots, Z^n(x)$ таковы, что системы

$$\varphi'_x(x)Z^j(x) = 0, \quad j = k+1, \dots, n,$$

имеют решения $\varphi_k(x) \in C^2(Q)$, такие, что $\varphi_{kx}'(x)Z^k(x) \neq 0$ при $x \in Q$. Введем функции $\alpha_k(x) = (\varphi_{kx}'(x)Z^k(x))^{-1} \in C^1(Q)$ и рассмотрим векторные поля $\tilde{Z}^k(x) = \alpha_k(x)Z^k(x) \in C^1(Q)$. Эти векторные поля и функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, очевидно, удовлетворяют системам (S_k) , $k = 1, \dots, n$, т.е.

$$\varphi_{kx}'(x)\tilde{Z}^k(x) = 1, \quad \varphi_{kx}'(x)\tilde{Z}^j(x) = 0, \quad j = k+1, \dots, n.$$

Далее,

$$\begin{aligned} [\tilde{Z}^k(x), f(x, u)] &= \alpha_k(x)[Z^k(x), f(x, u)] - \alpha_{kx}'(x)f(x, u)Z^k(x) = \\ &= \left(\mu_{kk}(x, u) - \frac{\alpha_{kx}'(x)f(x, u)}{\alpha_k(x)} \right) \tilde{Z}^k(x) + \sum_{i=k+1}^n \frac{\alpha_k(x)}{\alpha_i(x)} \mu_{ki}(x, u) \tilde{Z}^i(x), \end{aligned}$$

откуда следует выполнение условия i) теоремы 2 для векторных полей $\tilde{Z}_1(x), \dots, \tilde{Z}_n(x)$.

Для нелинейных аффинных систем получаем такие следствия.

Следствие 1 *Аффинная система вида*

$$\dot{x} = a(x) + ub(x), \quad x \in Q \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^1, \quad (11)$$

локально отображается на feedforward-систему класса C^1 в области Q тогда и только тогда, когда $a(x), b(x) \in C^1(Q)$ и существуют векторные поля $Z^1(x), \dots, Z^n(x) \in C^1(Q)$, такие, что

i) для некоторых функций $\mu_{ki}^1(x), \mu_{ki}^2(x) \in C(Q)$ выполнено

$$[Z^k(x), a(x)] = \sum_{i=k+1}^n \mu_{ki}^1(x) Z^i(x), \quad k = 1, \dots, n,$$

$$[Z^k(x), b(x)] = \sum_{i=k+1}^n \mu_{ki}^2(x) Z^i(x), \quad k = 1, \dots, n;$$

ii) для любого $k = 1, \dots, n$ система (S_k) имеет решение в классе $C^2(Q)$.

В этом случае feedforward-система также аффинна, т.е. имеет вид

$$\dot{y}_k = \psi_k^1(y_1, \dots, y_{k-1}) + u \psi_k^2(y_1, \dots, y_{k-1}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что условие i) следствия следует из условий теоремы 1. Из условия i) теоремы 1 для системы (11) получаем

$$[Z^k(x), a(x)] + u[Z^k(x), b(x)] = \sum_{i=k+1}^n \mu_{ki}(x, u) Z^i(x), \quad k = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим матричнозначную функцию $M(x) = (Z^1(x), \dots, Z^n(x)) \in C^1(Q)$. Из условия ii) теоремы 1 следует, что $\det M(x) \neq 0$. Имеем $(M(x))^{-1} Z^i(x) = e_i$, так что

$$(M(x))^{-1} [Z^k(x), a(x)] + u(M(x))^{-1} [Z^k(x), b(x)] = \sum_{i=k+1}^n \mu_{ki}(x, u) e_i,$$

откуда получаем $\mu_{ki}(x, u) = \mu_{ki}^1(x) + u \mu_{ki}^2(x)$, где $\mu_{kj}^1(x), \mu_{kj}^2(x) \in C(Q)$, что дает условие i) следствия 1. $\square$

Следствие 2 *Аффинная система вида (11) локально отображается на нестрогую feedforward-систему класса C^1 в области Q тогда и только тогда, когда $a(x), b(x) \in C^1(Q)$ и существуют векторные поля $Z^1(x), \dots, Z^n(x) \in C^1(Q)$, такие, что*

i) для некоторых функций $\mu_{ki}^1(x), \mu_{ki}^2(x) \in C(Q)$ выполнено

$$[Z^k(x), a(x)] = \sum_{i=k}^n \mu_{ki}^1(x) Z^i(x), \quad k = 1, \dots, n,$$

$$[Z^k(x), b(x)] = \sum_{i=k}^n \mu_{ki}^2(x) Z^i(x), \quad k = 1, \dots, n;$$

ii) для любого $k = 1, \dots, n$ система (S_k) имеет решение в классе $C^2(Q)$. В этом случае нестрогая feedforward-система также аффинна, т.е.

$$\dot{y}_k = \psi_k^1(y_1, \dots, y_k) + u \psi_k^2(y_1, \dots, y_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Пример 1. Рассмотрим аффинную систему класса C^1

$$\dot{x} = a(x) + ub(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + \phi(x_2) \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi(x_2) \neq 0, \quad x \in Q,$$

где $Q \subset \mathbb{R}^2$ – некоторая область. Эта система является нестрогой feedforward-системой. Покажем, что она не отображается на feedforward-систему ни в какой области. Предположим противное, тогда условия следствия 1 выполнены. Имеем

$$[Z^2(x), b(x)] = - \begin{pmatrix} Z_1^{2'}(x) & Z_1^{2'}(x) \\ Z_2^{2'}(x) & Z_2^{2'}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

откуда получаем, что $Z^2(x)$ не зависит от x_1 , т.е. $Z^2(x) = Z^2(x_2)$. Далее,

$$[Z^2(x), a(x)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \phi'(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1^2(x_2) \\ Z_2^2(x_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & Z_1^{2'}(x_2) \\ 0 & Z_2^{2'}(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + \phi(x_2) \end{pmatrix} = 0,$$

откуда получаем равенства

$$-Z_1^{2'}(x_2)(x_1 + \phi(x_2)) = 0, \quad (12)$$

$$Z_1^2(x_2) + \phi'(x_2)Z_2^2(x_2) - Z_2^{2'}(x_2)(x_1 + \phi(x_2)) = 0, \quad (13)$$

по предположению, имеющие место в области Q . Зафиксируем произвольное $x = (x_1, x_2)^* \in Q$ и рассмотрим точки $x_\varepsilon = (x_1 + \varepsilon, x_2)^* \in Q$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малы. Так как равенство (12) имеет место для точек x_ε , получаем, что $Z_1^{2'}(x_2)(x_1 + \varepsilon + \phi(x_2)) = 0$ для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что $Z_1^{2'}(x_2) = 0$, т.е. $Z_1^2(x_2)$ постоянно, $Z_1^2(x_2) \equiv Z_1^2$. Аналогично, равенство (13) имеет место для точек x_ε , откуда получаем $Z_2^{2'}(x_2) = 0$, т.е. $Z_2^2(x_2) \equiv Z_2^2$. Подставляя $Z_1^2(x)$ и $Z_2^2(x)$ в (13), получаем $Z_1^2 + \phi'(x_2)Z_2^2 = 0$, откуда $\phi'(x_2) = c$, причем $Z_1^2 = -cZ_2^2$. По условию $\phi(x_2) \neq 0$, поэтому без ограничения общности положим $\phi(x_2) = cx_2$, $Z_1^2 = -c$, $Z_2^2 = 1$, где $c \neq 0$ (и тогда рассмотрим такую область, в которой $x_2 \neq 0$). Далее, по условию i) следствия 1,

$$[Z^1(x), b(x)] = - \begin{pmatrix} Z_1^{1'}(x) & Z_1^{1'}(x) \\ Z_2^{1'}(x) & Z_2^{1'}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu_{12}^2(x) Z^2(x) = \begin{pmatrix} -c\mu_{12}^2(x) \\ \mu_{12}^2(x) \end{pmatrix},$$

откуда $Z_1^{1'}(x) = -c Z_2^{1'}(x)$. Это означает, что $(Z_1^1(x) + c Z_2^1(x))'_{x_1} = 0$, т.е. функция $Z_1^1(x) + c Z_2^1(x)$ не зависит от x_1 . Так как $\phi(x_2) = c x_2$, то

$$\begin{aligned} [Z^1(x), a(x)] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1^1(x) \\ Z_2^1(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Z_1^{1'}(x) & Z_1^{1'}(x) \\ Z_2^{1'}(x) & Z_2^{1'}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + c x_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -Z_1^{1'}(x)(x_1 + c x_2) \\ Z_1^1(x) + c Z_2^1(x) - Z_2^{1'}(x)(x_1 + c x_2) \end{pmatrix} = \mu_{12}^1(x) Z^2(x) = \begin{pmatrix} -c \mu_{12}^1(x) \\ \mu_{12}^1(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$Z_1^{1'}(x)(x_1 + c x_2) = c (Z_1^1(x) + c Z_2^1(x) - Z_2^{1'}(x)(x_1 + c x_2)),$$

или, что то же самое, $(Z_1^1(x) + c Z_2^1(x))'_{x_2}(x_1 + c x_2) = c (Z_1^1(x) + c Z_2^1(x))$. Поскольку $Z_1^1(x) + c Z_2^1(x)$ не зависит от x_1 , то, подставляя в последнее равенство точки $x_\varepsilon = (x_1 + \varepsilon, x_2) \in Q$, получаем, что $(Z_1^1(x) + c Z_2^1(x))'_{x_2} = 0$, а значит, $Z_1^1(x) + c Z_2^1(x) = 0$. Итак, векторные поля $Z^1(x)$ и $Z^2(x)$ линейно зависимы, что противоречит условию ii).

Пример 2. Рассмотрим аффинную систему

$$\dot{x} = a(x) + ub(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что она отображается на feedforward-систему в некоторой области Q . Рассматривая, как и в предыдущем примере, условия i) следствия 1, получаем, что можно выбрать $Z^1(x) = (1, 0)^*$ и $Z^2(x) = (0, x_2)^*$. Далее, решения систем (S_1) и (S_2) имеют вид $\varphi_1(x) = x_1$, $\varphi_2(x) = \ln |x_2|$. Итак, в такой области, в которой $x_2 \neq 0$, замена $y_1 = x_1$, $y_2 = \ln |x_2|$ приводит систему к feedforward-виду $\dot{y}_1 = u$, $\dot{y}_2 = y_1$.

3. Отображаемость с заменой управления

В этом параграфе $[Q]'_k$ обозначает проекцию $n+1$ -мерной области Q на $k+1$ -мерное подпространство, натянутое на первые k и последний координатные векторы, т.е. $[Q]'_k = \{(x_1, \dots, x_k, x_{n+1}) : x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in Q\}$.

Определение 3 Мы говорим, что нелинейная система вида (3) локально отображается на feedforward-систему класса C^1 в области Q с заменой управления, если существует замена переменных (4) и замена управления

$$v = g(x, u) \in C^1(Q \times \mathbb{R}), \quad g'_u(x, u) \neq 0, \quad x \in Q, u \in \mathbb{R}, \quad (14)$$

которые сводят систему (3) к виду

$$\dot{y}_k = \psi_k(y_1, \dots, y_{k-1}, v), \quad k = 1, \dots, n, \quad (15)$$

где $\psi_k \in C^1([\hat{F}(Q \times \mathbb{R})]_{k-1}')$, $k = 1, \dots, n$, а отображение $\hat{F}$ имеет вид $\hat{F}(x, u) = (F(x), g(x, u))$.

Как и в случае отображаемости без замены управления, система (3), которая локально отображается на feedforward-систему класса C^1 в смысле определения 3, также принадлежит классу C^1 .

Заметим, что данное определение не предполагает, что $g(x, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Это означает, что задача с неограниченным управлением для исходной системы (3), вообще говоря, может сводиться к задаче с ограниченным управлением для feedforward-системы (15).

Теорема 3 *Нелинейная система вида (3) локально отображается на feedforward-систему класса C^1 в области Q с заменой управления тогда и только тогда, когда $f(x, u) \in C^1(Q \times \mathbb{R})$ и существуют векторные поля $Z^1(x), \dots, Z^n(x) \in C^1(Q)$ и функции $Z_0^1(x, u), \dots, Z_0^n(x, u) \in C(Q \times \mathbb{R})$, такие, что*

i) *для некоторых функций $\mu_{ki}(x, u) \in C(Q \times \mathbb{R})$ выполнено*

$$[Z^k(x), f(x, u)] + f'_u(x, u)Z_0^k(x, u) = \sum_{i=k+1}^n \mu_{ki}(x, u)Z^i(x), \quad k = 1, \dots, n;$$

ii) *для любого $k = 1, \dots, n$ система (S_k) имеет решение в классе $C^2(Q)$, а также система*

$$\varphi'_x(x, u)Z^k(x) + \varphi'_u(x, u)Z_0^k(x, u) = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (S_0)$$

имеет нетривиальное решение в классе $C^1(Q \times \mathbb{R})$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что условия теоремы 3 выполнены. Пусть $\varphi_k(x) \in C^2(Q)$ – решение системы (S_k) , $k = 1, \dots, n$, и пусть $g(x, u) \in C^1(Q \times \mathbb{R})$ – нетривиальное решение системы (S_0) . Рассмотрим замену переменных $y_k = F_k(x) = \varphi_k(x)$, $k = 1, \dots, n$, в системе (3). Из условия ii) следует равенство (5), откуда получаем, что $\det F'_x(x) \neq 0$ и $\text{rank}\{Z^1(x), \dots, Z^n(x)\} = n$, $x \in Q$. В частности, для нетривиального решения системы (S_0) имеем $g'_u(x, u) \neq 0$ при $x \in Q$, $u \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\dot{y}_k = \varphi'_{kx}(x)f(x, u), \quad k = 1, \dots, n.$$

Покажем, что $\varphi'_{kx}(x)f(x, u)$ является функцией от $F_1(x), \dots, F_{k-1}(x)$ и $g(x, u)$. Рассмотрим произвольные функции $Z_0^k(x, u, \varepsilon)$, непрерывно дифференцируемые по x, u , такие, что $Z_0^k(x, u, \varepsilon) \rightarrow Z_0^k(x, u)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Обозначим $z = (x, u) \in Q \times \mathbb{R}$ и рассмотрим “расширенные” векторные поля

$$\tilde{f}(z) = \begin{pmatrix} f(x, u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Z}^k(z) = \begin{pmatrix} Z^k(x) \\ Z_0^k(x, u) \end{pmatrix}, \quad \tilde{Z}^k(z, \varepsilon) = \begin{pmatrix} Z^k(x) \\ Z_0^k(x, u, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

и функции $\tilde{\varphi}_k(z) = \varphi_k(x)$, $k = 1, \dots, n$. Очевидно, имеем $\tilde{\varphi}'_{kz}(z)\tilde{f}(z) = \varphi'_{kx}(x)f(x, u)$ и $\tilde{\varphi}'_{kz}(z)\tilde{Z}^j(z, \varepsilon) = \varphi'_{kx}(x)Z^j(x)$. Введем в рассмотрение скобки Ли $[X(z), Y(z)] = Y'_z(z)X(z) - X'_z(z)Y(z)$. Так как $\tilde{\varphi}_k(z) \in C^2(Q \times \mathbb{R})$, $\tilde{f}(z) \in C^1(Q \times \mathbb{R})$ и $\tilde{Z}^k(z, \varepsilon) \in C^1(Q \times \mathbb{R})$ (при достаточно малых $\varepsilon > 0$), то

$$(\tilde{\varphi}'_{kz}(z)\tilde{f}(z))'_z\tilde{Z}^j(z, \varepsilon) = \tilde{\varphi}'_{kz}(z)[\tilde{Z}^j(z, \varepsilon), \tilde{f}(z)] + (\tilde{\varphi}'_{kz}(z)\tilde{Z}^j(z, \varepsilon))'_z\tilde{f}(z). \quad (16)$$

Поскольку $\varphi_k(x)$ – решение системы (S_k) , то $\tilde{\varphi}'_{kz}(z)\tilde{Z}^j(z, \varepsilon) = \varphi'_{kx}(x)Z^j(x) = \text{const}$ при $j \geq k$, поэтому $(\tilde{\varphi}'_{kz}(z)\tilde{Z}^j(z, \varepsilon))'_z \tilde{f}(z) = 0$ при $j \geq k$. Далее,

$$[\tilde{Z}^j(z, \varepsilon), \tilde{f}(z)] = \begin{pmatrix} [Z^j(x), f(x, u)] + f'_u(x, u)Z_0^j(x, u, \varepsilon) \\ -Z_0^{j'}(x, u, \varepsilon)f(x, u) \end{pmatrix}.$$

Так как $\tilde{\varphi}_k(z)$ не зависит от u , имеем

$$\tilde{\varphi}'_{kz}(z)[\tilde{Z}^j(z, \varepsilon), \tilde{f}(z)] = \varphi'_{kx}(x) \left([Z^j(x), f(x, u)] + f'_u(x, u)Z_0^j(x, u, \varepsilon) \right).$$

Таким образом, из (16) получаем

$$(\tilde{\varphi}'_{kz}(z)\tilde{f}(z))'_z \tilde{Z}^j(z, \varepsilon) = \varphi'_{kx}(x) \left([Z^j(x), f(x, u)] + f'_u(x, u)Z_0^j(x, u, \varepsilon) \right), \quad j \geq k.$$

Устремляя ε к нулю и затем применяя условие i) теоремы 3, получаем, что

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}'_{kz}(z)\tilde{f}(z))'_z \tilde{Z}^j(z) &= \varphi'_{kx}(x) \left([Z^j(x), f(x, u)] + f'_u(x, u)Z_0^j(x, u) \right) = \\ &= \sum_{i=j+1}^n \mu_{ji}(x, u) \varphi'_{kx}(x) Z^i(x) = 0 \quad \text{при } j \geq k. \end{aligned}$$

Итак, функция $\varphi'_{kx}(x)f(x, u) = \tilde{\varphi}'_{kz}(z)\tilde{f}(z)$ является решением системы

$$\varphi'_z(z)\tilde{Z}^j(z) = 0, \quad j = k, \dots, n.$$

Это – система из $n - k + 1$ уравнения относительно функции от $n + 1$ неизвестного. Как было показано выше, $\text{rank}\{Z^k(x), \dots, Z^n(x)\} = n - k + 1$, следовательно, $\text{rank}\{\tilde{Z}^k(z), \dots, \tilde{Z}^n(z)\} = n - k + 1$. По условию ii), эта система имеет k независимых решений $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{k-1}(x), g(x, u)$ класса C^1 , а значит, любое ее решение (класса C^1) является функцией (класса C^1) от этих решений. Таким образом, найдется функция $\psi_k \in C^1([\hat{F}(Q \times \mathbb{R})]_{k-1}')$, такая, что

$$\varphi'_{kx}(x)f(x, u) = \psi_k(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{k-1}(x), g(x, u)).$$

Итак, при $v = g(x, u)$ система (3) в переменных $y = F(x)$ имеет вид (15).

Достаточность. Предположим, что система (3) локально отображается на feedforward-систему (15) класса C^1 с помощью замены переменных (4) и замены управления (14). Тогда, как было отмечено выше, $f(x, u) \in C^1(Q \times \mathbb{R})$ и

$$F_k'(x)f(x, u) = \psi_k(F_1(x), \dots, F_{k-1}(x), g(x, u)), \quad k = 1, \dots, n.$$

Положим

$$Z^k(x) = (F'_x(x))^{-1}e_k \in C^1(Q), \quad \varphi_k(x) = F_k(x) \in C^2(Q), \quad k = 1, \dots, n, \quad (17)$$

$$Z_0^k(x, u) = -\frac{1}{g'_u(x, u)}g'_x(x, u)Z^k(x) \in C(Q \times \mathbb{R}).$$

Очевидно, что введенные векторные поля и функции удовлетворяют условию ii) теоремы 3. Так как $F(x) \in C^2(Q)$, то, с учетом (17), получаем

$$F'_x(x)[Z^k(x), f(x, u)] = (F'_x(x)f(x, u))'_x Z^k(x). \quad (18)$$

Имеем $(F'_x(x)f(x, u))'_x Z^k(x) = \sum_{j=1}^n e_j (F'_{jx}(x)f(x, u))'_x Z^k(x)$. Так как

$$F'_{jx}(x)f(x, u) = \psi_j(F_1(x), \dots, F_{j-1}(x), g(x, u)), \quad (19)$$

то, обозначая

$$\mu_{ij}(x, u) = \frac{\partial \psi_j(y_1, \dots, y_{j-1}, g(x, u))}{\partial y_i} \Big|_{y=F(x)} \in C(Q \times \mathbb{R}), \quad i = 1, \dots, j-1,$$

$$\mu_{0j}(x, u) = \frac{\partial \psi_j(F_1(x), \dots, F_{j-1}(x), v)}{\partial v} \Big|_{v=g(x, u)} \in C(Q \times \mathbb{R}),$$

и учитывая (17), получаем

$$\begin{aligned} (F'_{jx}(x)f(x, u))'_x Z^k(x) &= \sum_{i=1}^{j-1} \mu_{ij}(x, u) F'_{ix}(x) Z^k(x) + \mu_{0j}(x, u) g'_x(x, u) Z^k(x) = \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \mu_{ij}(x, u) \delta_{ik} - \mu_{0j}(x, u) g'_u(x, u) Z_0^k(x, u). \end{aligned}$$

Кроме того, из (19) следует, что $F'_{jx}(x)f'_u(x, u) = \mu_{0j}(x, u)g'_u(x, u)$, поэтому

$$(F'_{jx}(x)f(x, u))'_x Z^k(x) = \begin{cases} -F'_{jx}(x)f'_u(x, u)Z_0^k(x, u), & j \leq k, \\ \mu_{kj}(x, u) - F'_{jx}(x)f'_u(x, u)Z_0^k(x, u), & j \geq k+1. \end{cases}$$

Итак, из (18) получаем

$$\begin{aligned} [Z^k(x), f(x, u)] &= (F'_x(x))^{-1} \left(\sum_{j=k+1}^n e_j \mu_{kj}(x, u) - \sum_{j=1}^n e_j F'_{jx}(x)f'_u(x, u)Z_0^k(x, u) \right) = \\ &= \sum_{j=k+1}^n \mu_{kj}(x, u)Z^j(x) - f'_u(x, u)Z_0^k(x, u), \end{aligned}$$

что совпадает с i). $\square$

Замечание 6. Нетрудно видеть, что если выполнены условия теоремы 1, то выполнены и условия теоремы 3. Действительно, в этом случае в теореме 3 достаточно положить $Z_0^1(x, u) = \dots = Z_0^n(x, u) = 0$ и в качестве нетривиального решения системы (S_0) выбрать $g(x, u) = u$.

Рассмотрим, наконец, отображаемость на нестрогую feedforward-систему с заменой управления.

Определение 4 Мы говорим, что нелинейная система вида (3) локально отображается на нестрогую feedforward-систему класса C^1 в области Q с заменой управления, если существуют замена переменных (4) и замена управления (14), которые сводят систему (3) к виду

$$\dot{y}_k = \psi_k(y_1, \dots, y_k, v), \quad k = 1, \dots, n, \quad (20)$$

где $\psi_k \in C^1([\hat{F}(Q \times \mathbb{R})]'_k)$, $k = 1, \dots, n$, а отображение $\hat{F}$ имеет вид $\hat{F}(x, u) = (F(x), g(x, u))$.

Теорема 4 Нелинейная система вида (3) локально отображается на нестрогую feedforward-систему класса C^1 в области Q с заменой управления тогда и только тогда, когда $f(x, u) \in C^1(Q \times \mathbb{R})$ и существуют векторные поля $Z^1(x), \dots, Z^n(x) \in C^1(Q)$ и функции $Z_0^1(x, u), \dots, Z_0^n(x, u) \in C(Q \times \mathbb{R})$, такие, что

i) для некоторых функций $\mu_{ki}(x, u) \in C(Q \times \mathbb{R})$ выполнено

$$[Z^k(x), f(x, u)] + f'_u(x, u)Z_0^k(x, u) = \sum_{i=1}^n \mu_{ki}(x, u)Z^i(x), \quad k = 1, \dots, n;$$

ii) для любого $k = 1, \dots, n$ система (S_k) имеет решение в классе $C^2(Q)$ и система (S_0) имеет нетривиальное решение в классе $C^1(Q \times \mathbb{R})$.

Замечание 7. Условия отображаемости, полученные выше, напоминают условия линеаризуемости для систем класса C^1 , которые также связаны с существованием векторных полей, удовлетворяющих определенным условиям. Как известно, условия линеаризуемости для систем с достаточно гладкой правой частью могут быть сформулированы в терминах скобок Ли векторных полей, определяющих правую часть системы [2, 3, 4]. Для линеаризуемых систем класса C^1 техника “скобок Ли” может быть применена в несколько модифицированном варианте [5]. Однако для feedforward-систем класса C^1 применение подобных конструкций встречает определенные трудности.

Пример 3. Рассмотрим аффинную feedforward-систему класса C^1

$$\dot{x} = a(x) + ub(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1|x_1| \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Имеем

$$[a(x), b(x)] = \begin{pmatrix} 0 \\ -2|x_1| \end{pmatrix}, \quad [[a(x), b(x)], b(x)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \operatorname{sign} x_1 \end{pmatrix},$$

$[[a(x), b(x)], a(x)] \equiv 0$. Таким образом, в точках $x = (x_1, x_2)^*$, для которых $x_1 \neq 0$, нетривиальными векторными полями являются $b(x)$ и $[[a(x), b(x)], b(x)]$. Однако при $x_1 = 0$ векторное поле $[[a(x), b(x)], b(x)]$ разрывно, а следующие скобки Ли тождественно равны нулю или не определены при

$x_1 = 0$. Итак, даже известный в теории гладких систем “ранговый критерий” неприменим для исследования управляемости системы.

Однако легко показать, что система (21) является вполне управляемой. Более того, нетрудно получить решение задачи быстрогодействия для этой системы. Для определенности рассмотрим попадание в начало координат. Применяя принцип максимума Понтрягина, имеем $H(x, p, u) = p_1 u + p_2 x_1 |x_1|$, где $\dot{p}_1 = -2p_2 |x_1|$, $\dot{p}_2 = 0$, а оптимальное управление задается условием $u(t) = \text{sign } p_1(t)$. При этом на оптимальной траектории $p_1(t) \neq 0$, так что оптимальное управление принимает значения ± 1 . Более того, $\dot{p}_1$ не меняет знак, поэтому оптимальное управление имеет не более одного переключения. Рассмотрев такие управления, получаем, что оптимальное управление имеет тот же характер, что и в случае линейной канонической системы. А именно, $u(x) = -\text{sign}(x_2 + \frac{1}{3}x_1^3)$ при $x_2 + \frac{1}{3}x_1^3 \neq 0$ и $u(x) = -\text{sign } x_1$ при $x_2 + \frac{1}{3}x_1^3 = 0$.

Пример 4. Рассмотрим аффинную feedforward-систему класса C^1

$$\dot{x} = a(x) + ub(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ h(x_1) \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } h(x_1) = \begin{cases} x_1^2 & \text{при } x_1 > 0, \\ x_1^3 & \text{при } x_1 \leq 0. \end{cases}$$

Как и в предыдущем примере, оптимальное по быстродействию управление принимает значения ± 1 и имеет не более одного переключения: $u(x) = -\text{sign}(x_2 - \xi(x_1))$ при $x_2 - \xi(x_1) \neq 0$ и $u(x) = -\text{sign } x_1$ при $x_2 - \xi(x_1) = 0$, где $\xi(x_1) = -\frac{1}{3}x_1^3$ при $x_1 > 0$ и $\xi(x_1) = \frac{1}{4}x_1^4$ при $x_1 \leq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов В.И. Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Т. 9, 4. – С. 614-619.
2. Krener A. On the equivalence of control systems and the linearization of non-linear systems // SIAM J. Control. – 1973. – V. 11. – P. 670-676.
3. Brockett R.W. Feedback invariance for nonlinear systems // Proc. 7 World Congress IFAC, Helsinki. – 1978. – P. 1115-1120.
4. Jakubczyk B., Respondek W. On linearization of control systems // Bull. Acad. Sci. Polonaise Ser. Sci. Math. – 1980. – V. 28. – P. 517-522.
5. Sklyar G.M., Sklyar K.V., Ignatovich S.Yu. On the extension of the Korobov's class of linearizable triangular systems by nonlinear control systems of the class C^1 // Systems and Control Letters. – 2005. – V. 54. – P. 1097-1108.
6. Arcak M., Teel A., Kokotović P. Robust nonlinear control of feedforward systems with unmodeled dynamics // Automatica. – 2001. – V. 37, 2. – P. 265-272.

7. Angeli D., Chitour Y., Marconi L. New results on robust stabilization via saturated feedback // Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, USA, 2003. – P. 4445-4450.
8. Krstic M. Feedback linearizability and explicit integrator forwarding controllers for classes of feedforward systems // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2004. – V. 49, 10. – P. 1668-1682.
9. Sklyar G.M., Ignatovich S.Yu. Approximation of time-optimal control problems via nonlinear power moment min-problems // SIAM J. on Control and Optimiz. – 2003. – V. 42. – P. 1325-1346.

Субгармоническая функция с крайне нерегулярным
ростом

А. Шуйги

Харьковский национальный университет им.В.Н.Каразина, Украина

Более тонкой характеристикой роста субгармонической функции чем индикатор и нижний индикатор является предельное множество Азарина этой функции. Приводится пример крайне нерегулярной растущей субгармонической функции и находится предельное множество Азарина этой функции. Крайняя нерегулярность роста выражается в том, что меры из предельного множества Азарина риссовской меры этой функции имеют одноточечный носитель.

2000 *Mathematics Subject Classification* 31A05.

Обычно встречающиеся в литературе целые и субгармонические функции с хорошо описанным асимптотическим поведением это функции вполне регулярного роста в смысле Левина-Пфлюгера. В тех редких случаях, когда рассматриваются нерегулярно растущие функции, обычно ограничиваются оценками индикатора.

В заметке приводится пример явно задаваемой нерегулярно растущей субгармонической функции, для которой предельное множество Азарина тоже явно вычисляется. Предлагаемая функция претендует на роль самой нерегулярно растущей функции. Это выражается в том, что предельное множество Азарина Γ_μ риссовской меры μ этой функции состоит из мер с одноточечным носителем. Имеется обзорная статья В.С. Азарина [1] по предельным множествам. Там можно найти недостающие определения. Отметим, что работа [1] является расширенным вариантом русского оригинала [2].

Пусть $\rho \in (0, 1)$,

$$v(z) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k^\rho \ln \left| 1 - \frac{z}{R_k} \right|.$$

Последовательность R_k должна быть так быстро возрастающей, что

$$\frac{R_k}{R_{k+1}^{1-\rho}} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Наиболее простой последовательностью такого вида является последовательность $R_k = \alpha^{\alpha^k}$ с $\alpha > \frac{1}{1-\rho}$. Как будет показано ниже, из указанных

ограничений на последовательность R_k следует, что число ρ является порядком субгармонической функции $v(z)$.

Далее, обозначим $K(a, b) = \{z : a \leq |z| \leq b\}$.

Лемма 1 При $z \in K(R_{k-1}, R_{k+1})$ справедливо соотношение

$$v(z) = R_{k-1}^\rho \ln \left| 1 - \frac{z}{R_{k-1}} \right| + R_k^\rho \ln \left| 1 - \frac{z}{R_k} \right| + \\ + R_{k+1}^\rho \ln \left| 1 - \frac{z}{R_{k+1}} \right| + O(1) R_{k-2}^\rho \ln |z|, \quad k \rightarrow \infty.$$

Для указанных z справедливо соотношение

$$\left| \ln \left| 1 - \frac{z}{R_m} \right| \right| \leq (1 + o(1)) \ln |z|, \quad k \rightarrow \infty, \quad m \leq k-2.$$

Поэтому

$$\left| \sum_{m=1}^{k-2} R_m^\rho \ln \left| 1 - \frac{z}{R_m} \right| \right| \leq (1 + o(1)) (\ln |z|) \sum_{m=1}^{k-2} R_m^\rho = (1 + o(1)) R_{k-2}^\rho \ln |z|,$$

$$k \rightarrow \infty.$$

Кроме того,

$$\left| \sum_{m=k+2}^{\infty} R_m^\rho \ln \left| 1 - \frac{z}{R_m} \right| \right| \leq 2|z| \sum_{m=k+2}^{\infty} R_m^{\rho-1} \leq 2R_{k+1} \sum_{m=k+2}^{\infty} R_m^{\rho-1} = \\ = (2 + o(1)) \frac{R_{k+1}}{R_{k+2}^{1-\rho}} = o(1), \quad k \rightarrow \infty.$$

Для обоснования последнего заметим, что последовательность $R_m^{\rho-1}$ так быстро убывает, что написанный ряд эквивалентен ($k \rightarrow \infty$) первому своему члену.

Из указанного следует утверждение леммы.

Рассмотрим траекторию Азарина

$$v_t(z) = \frac{v(tz)}{t^\rho}, \quad t \in (0, \infty)$$

функции $v(z)$. Предельное множество Азарина $\text{Fr } v$ субгармонической функции v это множество функций вида

$$u(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_{t_n}(z),$$

где $t_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), а предел понимается как предел обобщённых функций, то есть для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(z)$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint v_{t_n}(z) \varphi(z) dm_2(z) = \iint u(z) \varphi(z) dm_2(z),$$

где m_2 — мера Лебега в плоскости.

Найдем Frv . Пусть $t_n \rightarrow +\infty$, $u(z) = \lim v_{t_n}(z)$ ($n \rightarrow \infty$).

Для любого n найдётся число k такое, что $t_n \in [R_{k-1}, R_k]$. Переходя если нужно к последовательности можно считать, что каждому сегменту $[R_{k-1}, R_k]$ принадлежит не более чем одна точка t_n .

Пусть R_{k_n} ближайшая (одна из ближайших) к t_n в логарифмической шкале точка последовательности R_k ($|\ln \frac{t_n}{R_{k_n}}| \leq |\ln \frac{t_n}{R_k}|$). Заметим, что если $t_n < R_{k_n}$, то $t_n \in (\sqrt{R_{k_n-1} R_{k_n}}, R_{k_n})$, а если $t_n \geq R_{k_n}$ то $t_n \in [R_{k_n}, \sqrt{R_{k_n} R_{k_n+1}})$.

Возможен случай когда $k_n = k_{n+1}$.

Однако, переходя в случае необходимости к подпоследовательности еще раз, можно считать, что k_n строго возрастающая последовательность.

Введем последовательность γ_n соотношением $t_n = \gamma_n R_{k_n}$. Переходя в очередной раз к подпоследовательности, можно считать, что последовательность γ_n сходящаяся (сходимость к $+\infty$ не исключается). Кроме того дополнительно можно считать, что выполняется одно из соотношений $\gamma_n \geq 1$ для любого n или $\gamma_n < 1$ для любого n . Мы будем рассматривать оба этих случая отдельно.

Пусть $\gamma_n \geq 1$. Покажем, что если $\gamma_n \rightarrow +\infty$, то $u(z) = 0$. Имеем $t_n \in [R_{k_n}, R_{k_n+1}]$. Пусть z принадлежит некоторому фиксированному компактному K , такому, что $0 \notin K$. Тогда для всех достаточно больших n будет выполняться соотношение $t_n z \in [R_{k_n}, R_{k_n+1}]$. Для этого нужно заметить, что $t_n = o(1) R_{k_n+1}$ в силу того, что точка t_n ближайшая к R_{k_n} в логарифмической шкале. Далее находим

$$R_{k_n-1}^\rho \ln \left| 1 - \frac{t_n z}{R_{k_n-1}} \right| = O(1) R_{k_n-1}^\rho \ln t_n \quad (1)$$

$$R_{k_n}^\rho \ln \left| 1 - \frac{t_n z}{R_{k_n}} \right| = R_{k_n}^\rho \ln |1 - \gamma_n z|, \quad (2)$$

$$\left| R_{k_n+1}^\rho \ln \left| 1 - \frac{t_n z}{R_{k_n+1}} \right| \right| \leq (1 + o(1)) t_n |z| R_{k_n+1}^{\rho-1}. \quad (3)$$

Из приведенных соотношений, леммы и уже отмечавшегося равенства $t_n = o(1) R_{k_n+1}$ следует, что

$$v_{t_n}(z) \Rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty, z \in K).$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint v_{t_n}(z) \varphi(z) dm_2(z) = 0 \quad (4)$$

для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(z)$ такой, $0 \notin \text{supp } \varphi$.

Пусть $B(0, R) = \{z : |z| \leq R\}$ и пусть $\text{supp } \varphi \subset B(0, \varepsilon)$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \iint v_{t_n}(z) \varphi(z) dm_2(z) \right| &= \left| \frac{1}{t_n^\rho} \iint v(t_n z) \varphi(z) dx dy \right| = \\ &= \frac{1}{t_n^{\rho+2}} \left| \iint v(\zeta) \varphi\left(\frac{\zeta}{t_n}\right) d\xi d\eta \right| \leq \frac{\|\varphi\|}{t_n^{\rho+2}} \iint_{B(0, \varepsilon t_n)} |v(\zeta)| d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Для субгармонической функции порядка ρ и конечного типа при $R \geq 1$ и некотором M справедлива оценка

$$\iint_{B(0, R)} |v(\zeta)| d\xi d\eta \leq M R^{\rho+2}.$$

Поэтому

$$\left| \iint v_{t_n}(z) \varphi(z) dm_2(z) \right| \leq M \|\varphi\| \varepsilon^{\rho+2}. \quad (5)$$

Из этого и (4) следует, что (4) справедливо для любой основной функции φ . Тем самым сформулированное утверждение о том, что в случае $\gamma_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) выполняется равенство $u(z) = 0$ доказано.

Пусть теперь $\gamma_n \rightarrow \gamma$ ($\gamma \geq 1$).

Из леммы и соотношений (1)-(3) следует, что

$$v_{t_n}(z) = \frac{1}{\gamma_n^\rho} \ln |1 - \gamma_n z| + \psi_n(z)$$

где $\psi_n(z)$ равномерно стремится к нулю на любом компакте K не содержащем 0. Поэтому если φ — основная функция и $0 \notin \text{supp } \varphi$, то

$$\iint v_{t_n}(z) \varphi(z) dm_2(z) = \frac{1}{\gamma^\rho} \iint \ln |1 - \gamma z| \varphi(z) dm_2(z). \quad (6)$$

Вместе с оценкой (5) для функций φ таких, что $\text{supp } \varphi \subset B(0, \varepsilon)$ это даёт, что (6) справедливо для любой основной функции φ . Это можно также записать в виде $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{t_n}(z) = \frac{1}{\gamma^\rho} \ln |1 - \gamma z|$.

Мы рассмотрели случай, когда $\gamma_n \geq 1$. Если $\gamma_n < 1$, то повторением предыдущих рассуждений с очевидными изменениями доказывается, что

$$\lim v_{t_n}(z) = 0, \text{ если } \gamma_n \rightarrow 0 \text{ } (n \rightarrow \infty)$$

$$\lim v_{t_n}(z) = \frac{1}{\gamma^\rho} \ln |1 - \gamma z|, \text{ если } \gamma_n \rightarrow \gamma \text{ } (\gamma \leq 1) \text{ } (n \rightarrow \infty).$$

Мы доказали, что любая функция из множества Frv имеет вид $\frac{1}{\gamma^\rho} \ln |1 - \gamma z|$, $\gamma \in (0, \infty)$ или равна нулю. С другой стороны, если взять $t_n = \gamma R_n$, то проведенные рассуждения показывают, что $v_{t_n}(z) \rightarrow \frac{1}{\gamma^\rho} \ln |1 - \gamma z|$. Тем самым доказано, что

$$\text{Frv} = \left\{ \frac{1}{\gamma^\rho} \ln |1 - \gamma z|, \gamma \in [0, \infty] \right\}.$$

(в концевые точки $0, \infty$ функцию $\frac{1}{\gamma^\rho} \ln |1 - \gamma z|$ нужно продолжать по непрерывности).

Риссовская мера функции $\frac{1}{\gamma^\rho} \ln |1 - \gamma z|$ имеет вид $\frac{1}{\gamma^\rho} \delta_{\frac{1}{\gamma}}(\zeta)$, где $\delta_{x_0}(\zeta)$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке x_0 .

Поэтому если μ — риссовская мера $v(z)$, то по теореме Азарина [1] имеет место соотношение $\text{Fr} \mu = \left\{ \frac{1}{\gamma^\rho} \delta_{\frac{1}{\gamma}}(\zeta), \gamma \in [0, \infty] \right\}$, где по определению точкам 0 и ∞ отвечает нулевая мера.

Рассмотрим еще индикатор $h(\theta)$ и нижний индикатор $\underline{h}(\theta)$ функции v . По теореме Азарина ([1], теорема 4)

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \max \left\{ \frac{1}{\gamma^\rho} \ln |1 - \gamma e^{i\theta}| : \gamma \in [0, \infty] \right\}, \\ \underline{h}(\theta) &= \min \left\{ \frac{1}{\gamma^\rho} \ln |1 - \gamma e^{i\theta}| : \gamma \in [0, \infty] \right\}. \end{aligned}$$

Оба индикатора являются четными функциями на сегменте $[-\pi, \pi]$. Функция $h(\theta)$ является строго возрастающей, а функция $\underline{h}(\theta)$ является возрастающей функцией на сегменте $[0, \pi]$.

Легко видеть, что $\underline{h}(0) = -\infty$, $\underline{h}(\theta) = 0$ при $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Индикатор $h(\theta)$ не выражается через стандартные функции. Поэтому заметим, что

$$h(0) = \frac{1}{\gamma^\rho} \ln(\gamma - 1),$$

где γ — единственный корень уравнения

$$(x - 1) \ln(x - 1) = \frac{1}{\rho} x$$

на полуоси $(e^{\frac{1}{\rho}-1} + 1, \infty)$,

$$h(\pi) = \frac{1}{\gamma^\rho} \ln(\gamma + 1),$$

где γ — единственный корень уравнения $(x + 1) \ln(x + 1) = \frac{1}{\rho} x$ на полуоси $(e^{\frac{1}{\rho}-1} - 1, \infty)$.

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\gamma^\rho} \ln(1 + \gamma^2),$$

где γ — единственный корень уравнения

$$(1 + x^2) \ln(1 + x^2) = \frac{2}{\rho} x^2$$

на полуоси $\left(\sqrt{e^{\frac{2}{\rho}-1}} - 1, \infty\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Azarin V.S. Limit sets of entire and subharmonic functions, -P. 48-66. In the book Gol'dberg A.A., Levin B.Ya., Ostrovskii I.V. Entire and meromorphic functions. -Berlin: Springer, 1997.
2. Гольдберг А.А., Левин Б.Я., Островский И.В. Целые и мероморфные функции. -М.: ВИНТИ, 1991.

Малые движения идеальной жидкости в сосуде с перфорированными перегородками

Д.И. Борисов

Харьковский Национальный Университет имени В. Н. Каразина, Украина

Рассматривается задача о малых движениях идеальной жидкости в частично заполненном сосуде, секционированном перфорированными перегородками. Дана математическая формулировка задачи с усредненными граничными условиями на перегородках, решения которой асимптотически приближают точные решения при неограниченном возрастании числа перфорационных отверстий. Приведены результаты исследования эволюционной и спектральной задач.

2000 Mathematics Subject Classification 74J05.

1. Введение

Перегородки, устанавливаемые внутри баков, используемых для транспортировки или длительного хранения больших объемов жидкости, являются наиболее простым и эффективным средством демпфирования колебаний и нейтрализации динамического воздействия жидкости на стенки баков [1]–[4]. Наличие перегородок приводит к дополнительным трудностям при решении краевых задач, описывающих движение жидкости. Эти трудности особенно велики, если перегородки выполнены с определенным числом отверстий, и быстро становятся непреодолимыми с ростом числа отверстий и усложнением их формы. Однако в том случае, когда число отверстий велико, а их размеры малы, приближенное решение задачи о колебаниях жидкости можно получить как решение более простой задачи, получаемой путем замены точных граничных условий на перегородках некоторыми усредненными условиями сопряжения. Такой подход, сводящий исходную задачу к более простой задаче, решение которой приближает точное решение и может быть эффективно найдено, часто используется в прикладных исследованиях. Методы усреднения, их строгое математическое обоснование применительно к краевым и начально-краевым задачам в перфорированных областях подробно изложены в монографиях [5], [6] и указанных в них публикациях.

В данной работе дана математическая формулировка задачи о малых потенциальных движениях идеальной жидкости вблизи равновесного состояния

с усредненными условиями на перегородках. Доказана разрешимость эволюционной усредненной задачи. Установлены некоторые общие свойства спектра частот собственных колебаний жидкости.

2. Постановка задачи

Рассматриваются малые (линейные) движения идеальной жидкости в частично заполненном неподвижном сосуде. Предполагается, что внутри полости сосуда установлены тонкие недеформируемые перегородки.

Введем прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$, связанную с сосудом, направляя ось Ox_3 вертикально вверх. Пусть Ω означает область, занимаемую жидкостью, Γ – свободную поверхность жидкости, S – поверхность полости сосуда. В равновесном состоянии уравнение свободной поверхности жидкости имеет вид: $x_3 = \text{const}$. Будем считать, что перегородки разделяют свободную поверхность Γ на n частей Γ_k , $k \in \overline{1, n}$, а область Ω – на N (под)областей Ω_k , $k \in \overline{1, N}$, причем нумерация введена так, что первые n областей Ω_k , $k \in \overline{1, n}$ примыкают к свободной поверхности жидкости, т.е. $\Gamma_k \in \partial\Omega_k \forall k \in \overline{1, n}$. Перегородки со свободным краем в области Ω исключаются из рассмотрения.

Пусть δ – толщина перегородок, L – характерный линейный размер сосуда. Считая $\delta \ll L$, будем отождествлять перегородку между двумя смежными областями Ω_j, Ω_k с ее срединной поверхностью S_{jk} . Выделим на поверхности S_{jk} непересекающиеся связные куски (отверстия) $\sigma_{jk}^{(m)} \subset S_{jk}$, $m = \overline{1, m_{jk}}$. Множество $P_{jk} := S_{jk} \setminus (\cup_{m=1}^{m_{jk}} \sigma_{jk}^{(m)})$ принимается в дальнейшем в качестве перфорированной перегородки между областями Ω_j, Ω_k .

Поверхность контакта жидкости, заполняющей область Ω_k , с внешней стенкой полости сосуда будем обозначать S_k . Отметим, что S_{jk}, S_k для некоторых номеров $j, k \in \overline{1, N}$ могут быть пустыми множествами. Множество пар целочисленных индексов (jk) таких, что $j < k$ и S_{jk} непусто ($S_{jk} \neq \emptyset$), обозначим через $\mathcal{I}$. Аналогично, множество номеров областей Ω_k , примыкающих к поверхности S , будем обозначать $\mathcal{I}_0$, так что $S_k \neq \emptyset \forall k \in \mathcal{I}_0$.

Нормали $\vec{n}$ к поверхностям перегородок S_{jk} условимся направлять в сторону области с большим номером; нормали к поверхностям Γ и S будем считать внешними по отношению к области Ω .

Пусть $\zeta_k(t, x_1, x_2)$ означает отклонение движущейся свободной поверхности жидкости Γ_k от равновесного положения Γ , $\varphi_k(t, \vec{x})$ – потенциал скоростей жидкости в области Ω_k . Используя результаты [7] (см. также [5], гл.3), можно показать, что при неограниченном увеличении числа отверстий на перегородках и равномерном стремлении к нулю диаметров отверстий решение задачи о малых потенциальных движениях жидкости вблизи равновесного состояния стремится к решению следующей задачи:

$$\Delta \varphi_k(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{в } \Omega_k, \quad k \in \overline{1, N}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \zeta_k}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \quad \text{на } \Gamma_k, \quad k \in \overline{1, n}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + g \zeta_k = f_k(t, \vec{x}) + c(t) \quad \text{на } \Gamma_k, \quad k \in \overline{1, n}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = p_{jk}(\varphi_k - \varphi_j) \quad \text{на } S_{jk}, \quad (jk) \in \mathcal{I}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_k, \quad k \in \mathcal{I}_0; \quad (5)$$

$$\zeta_k|_{t=0} = \zeta_k^0(x_1, x_2), \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}|_{t=0} = \zeta_k^1(x_1, x_2), \quad k \in \overline{1, n}. \quad (6)$$

Здесь g – ускорение силы тяжести, $f_k(t, \vec{x})$ – возмущение силовой функции внешнего поля массовых сил, $p_{jk} = p_{jk}(\vec{x})$ – функции, характеризующие проницаемость перегородок, $\zeta_k^0(x_1, x_2)$, $\zeta_k^1(x_1, x_2)$ – заданные функции, определяющие начальные отклонения и скорости точек свободной поверхности жидкости, $c(t)$ – произвольная функция времени t .

Отличительной особенностью задачи (1)–(6) являются условия сопряжения (4), полученные в [7] усреднением "точных" граничных условий на перегородках:

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = 0 \quad \text{на } P_{jk}; \quad \varphi_j = \varphi_k, \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \quad \text{на } \sigma_{jk}^{(m)}, \quad m \in \overline{1, m_{jk}}, \quad (jk) \in \mathcal{I}. \quad (7)$$

Функции $p_{jk}(\vec{x})$, $\vec{x} \in S_{jk}$ в условиях (4) будем называть проницаемостями перегородок. В дальнейшем $p_{jk}(\vec{x})$ предполагаются заданными функциями. Отметим, что на непроницаемом участке перегородки $S' \subset S_{jk}$ необходимо принять $p_{jk}(\vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in S'$; в этом случае условие (4) на S' в точности совпадает с (7). Если S'' является одним из отверстий или системой отверстий в перегородке S_{jk} , то условиям (7) на S'' эквивалентен другой предельный случай условий (4) при $p_{jk}(\vec{x}) = \infty \quad \forall \vec{x} \in S'' \subset S_{jk}$.

В силу несжимаемости жидкости функции $\zeta_k(t, x_1, x_2)$ должны удовлетворять условию:

$$\sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} \zeta_k(t, x_1, x_2) d\Gamma = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (8)$$

Правые части в (6) также необходимо подчинить условиям, аналогичным (8).

Приведенная постановка задачи физически корректна, если коэффициенты проницаемости перегородок, пересекающих свободную поверхность жидкости, в некоторой окрестности линий пересечения равны нулю. Это связано с тем, что колебания жидкости в общем случае сопровождаются разрывами свободной поверхности на перегородках, не учитываемыми при усреднении граничных условий.

В дальнейшем все рассуждения будем проводить в рамках приближенной математической модели (1)–(6). Свободные нормальные колебания жидкости

будем описывать, в частности, решениями задачи (1)–(5) при $f_k = 0, k \in \overline{1, n}$, зависящими от времени по экспоненциальному закону:

$$\begin{pmatrix} \zeta(t, x_1, x_2) \\ \varphi(\vec{x}) \end{pmatrix} = \exp(i\omega t) \begin{pmatrix} u(x_1, x_2) \\ \phi(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Здесь ω – круговая частота собственных колебаний жидкости, $u(x_1, x_2), \phi(\vec{x})$ – амплитудные множители (моды), определяющие формы колебаний свободной поверхности. Подставляя (29) в (1)–(5), после отделения экспоненциального множителя получим спектральную краевую задачу (относительно спектрального параметра μ и отвечающих ему собственных функций $\phi(\vec{x})$):

$$\Delta \phi_k(\vec{x}) = 0 \quad \text{в } \Omega_k, \quad k \in \overline{1, N}; \quad (10)$$

$$\mu \phi_k = \frac{\partial \phi_k}{\partial n} \quad (\mu := \omega^2/g) \quad \text{на } \Gamma_k, \quad k \in \overline{1, n}; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = \frac{\partial \phi_k}{\partial n} = p_{jk}(\phi_k - \phi_j) \quad \text{на } S_{jk}, \quad (jk) \in \mathcal{I}; \quad (12)$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_k, \quad k \in \mathcal{I}_0. \quad (13)$$

Моды колебаний свободной поверхности жидкости определяются по собственным значениям μ и отвечающим им собственным функциям ϕ спектральной задачи (10)–(13) согласно равенству:

$$u_k = -\frac{i}{\omega} \frac{\partial \phi_k}{\partial n} \quad \text{на } \Gamma_k \quad (\omega = (g\mu)^{1/2}), \quad k \in \overline{1, n}. \quad (14)$$

Функции $u_k, k = \overline{1, n}$ должны удовлетворять условию:

$$\sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} u_k d\Gamma = 0, \quad (15)$$

легко вытекающему из (10)–(14).

3. Операторно-дифференциальная формулировка эволюционной задачи

Приступая к исследованию эволюционной задачи (1)–(6), представим ее в виде задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве.

Введем n -компонентные функции $u := (u_1, \dots, u_n)$, где каждая из функций $u_k = u_k(x_1, x_2)$ определена на поверхности $\Gamma_k, k \in \overline{1, n}$. Функции $u,$

определенные на множестве $\Gamma_0 := \cup_{k=1}^n \Gamma_k$, будем считать элементами прямого произведения гильбертовых пространств $\mathcal{L}_2(\Gamma_0) := L_2(\Gamma_1) \times \dots \times L_2(\Gamma_n)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_0 := \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} u_k \bar{v}_k d\Gamma$$

и нормой $\|u\|_0 := (u, u)_0^{1/2}$. Обозначим через $\mathcal{H}$ подпространство функций в $\mathcal{L}_2(\Gamma_0)$, удовлетворяющих условиям вида (15), т.е. $\mathcal{H} := \mathcal{L}_2(\Gamma_0) \ominus \{1_\Gamma\}$ где $1_\Gamma := (1, \dots, 1)$ —функция, тождественно равная 1 на Γ_0 .

Заметим, что в силу (8) отклонения свободной поверхности от горизонтального уровня $\zeta := (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ для $\forall t \geq 0$ должны принадлежать пространству $\mathcal{H}$.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу:

$$\Delta \Phi_k = 0 \quad \text{в } \Omega_k, \quad k \in \overline{1, N}; \quad (16)$$

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial n} = F_k \quad \text{на } \Gamma_k, \quad k \in \overline{1, n}; \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} = p_{jk}(\Phi_k - \Phi_j) \quad \text{на } S_{jk}, \quad (jk) \in \mathcal{I}; \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_k, \quad k \in \mathcal{I}_0. \quad (19)$$

Будем считать, что срединные поверхности перегородок S_{ik} и поверхность сосуда S являются достаточно гладкими и пересекаются друг с другом и со свободной поверхностью жидкости под углами, отличными от 0. Функции $p_{jk}(\vec{x})$ подчиним условию: $0 \leq p_{jk}(\vec{x}) \leq p^0 \quad \forall (jk) \in \mathcal{I}$, где p^0 —некоторая положительная постоянная. Кроме того, будем считать, что для любой области Ω_j имеется, по крайней мере, одна перегородка S_{jk} , для которой $p_{jk}(\vec{x}) \neq 0$. Иными словами, области, полностью изолированные от других областей непроницаемыми перегородками, исключаются из рассмотрения.

Введем гильбертово пространство $\mathcal{H}^1(\Omega_0) := H^1(\Omega_1) \times \dots \times H^1(\Omega_N)$, где $H^1(\Omega_k)$, $k = \overline{1, N}$ —пространство Соболева функций, принадлежащих $L_2(\Omega_k)$ вместе с обобщенными производными первого порядка. Под Ω_0 понимается множество $\Omega_0 := \cup_{k=1}^N \Omega_k$.

Обозначим через $\gamma_k, k \in \overline{1, N}$ оператор следа, сопоставляющий произвольной функции $\Phi_k \in H^1(\Omega_k)$ ее значение на поверхности Γ_k : $\gamma_k \Phi := \Phi_k|_{\Gamma_k}, k \in \overline{1, n}$. Как известно [8], операторы γ_k ограниченно действуют из $H^1(\Omega_k)$ в $H^{1/2}(\Gamma_k)$, где $H^{1/2}(\Gamma_k)$ —пространство Соболева–Слободецкого. Определим оператор $\gamma := (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, сопоставляющий произвольной функции $\Phi \in \mathcal{H}^1(\Omega_0)$ ее значение на Γ_0 : $\gamma \Phi := \Phi|_{\Gamma_0}$. Оператор γ , в силу ограниченности $\gamma_k, k \in \overline{1, n}$, также является линейным ограниченным оператором, действующим из $\mathcal{H}^1(\Omega_0)$ в $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma_0) := H^{1/2}(\Gamma_1) \times \dots \times H^{1/2}(\Gamma_n)$.

Введем гильбертово пространство $\mathcal{H}_\Gamma^1(\Omega_0) := \{\Phi : \Phi \in \mathcal{H}^1(\Omega_0), \gamma\Phi \in \mathcal{H}\}$. Можно показать, что в принятых предположениях существует единственное обобщенное решение краевой задачи (16)–(19) $\Phi \in \mathcal{H}_\Gamma^1(\Omega_0)$ для $\forall F := (F_1, \dots, F_n) \in \mathcal{H}_\Gamma^{-1/2}$, где $\mathcal{H}_\Gamma^{-1/2}$ – пространство сопряженное к $\mathcal{H}_\Gamma^{1/2} := \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma_0) \cap \mathcal{H}$. Под обобщенным решением этой задачи понимается функция $\Phi := (\Phi_1, \dots, \Phi_n) \in \mathcal{H}_\Gamma^1(\Omega_0)$, удовлетворяющая интегральному тождеству:

$$\sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \nabla \Phi_k \nabla \eta_k d\Omega + \sum_{i,k=1}^n \int_{S_{ik}} p_{ik} (\Phi_k - \Phi_i) (\eta_k - \eta_i) d\Gamma = (F, \gamma\eta)_0 \quad (20)$$

$$\forall \eta := (\eta_1, \dots, \eta_N) \in \mathcal{H}_\Gamma^1(\Omega_0).$$

Здесь $(\cdot, \cdot)_0$ означает, как обычно, продолжение скалярного произведения в $\mathcal{H}$ на двойственные пространства $\mathcal{H}_\Gamma^{-1/2}$ и $\mathcal{H}_\Gamma^{1/2}$.

Обозначим через $\mathcal{T}$ разрешающий оператор краевой задачи (16)–(19), так что $\Phi = \mathcal{T}F$. Оператор $\mathcal{T}$ – линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $\mathcal{H}_\Gamma^{-1/2}$ в пространство $\mathcal{H}_\Gamma^1(\Omega_0)$. Введем оператор $\mathcal{C} := \gamma\mathcal{T}$, ограниченно действующий из $\mathcal{H}_\Gamma^{-1/2}$ в $\mathcal{H}_\Gamma^{1/2}$. Сужение $\mathcal{C}$ на $\mathcal{H}$ – компактный оператор в $\mathcal{H}$ (в силу компактности вложения $\mathcal{H}^{1/2}$ в $\mathcal{H}$ [8]).

Покажем, что $\mathcal{C}$ – самосопряженный положительный оператор в $\mathcal{H}$. Обозначим через Φ', Φ'' решения вспомогательной краевой задачи (16)–(19), отвечающие функциям F', F'' , соответственно. Используя формулу Грина (для оператора Лапласа) и условия (17)–(19), после несложных преобразований получим следующее равенство:

$$(CF', F'') = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \nabla \Phi'_k \nabla \Phi''_k d\Omega + \sum_{(ik) \in \mathcal{I}} \int_{S_{ik}} p_{ik} (\Phi'_i - \Phi'_k) (\Phi''_i - \Phi''_k) dS. \quad (21)$$

Отсюда легко следуют самосопряженность и положительность оператора $\mathcal{C}$.

Сопоставляя эволюционную (1)–(6), и вспомогательную (16)–(19) задачи, нетрудно установить, что потенциал скоростей φ и отклонение ζ свободной поверхности жидкости от равновесного положения связаны соотношениями:

$$\varphi = \mathcal{T} \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \varphi|_\Gamma = \gamma \mathcal{T} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathcal{C} \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (22)$$

Используя произвол в выборе функции $c(t)$, перепишем динамическое условие (3) в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\zeta = f_1(t, \vec{x}) \quad \left(f_1(t, \vec{x}) := f(t, \vec{x}) - \frac{1}{\text{mes } \Gamma} \int_\Gamma f(t, \vec{x}) d\Gamma \right) \quad \text{на } \Gamma.$$

Отсюда, учитывая второе из соотношений (22), будем иметь:

$$\mathcal{C} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + g\zeta = f_1 \quad (t > 0). \quad (23)$$

Начальные условия (6) перепишем в виде:

$$\zeta(0) = \zeta^0, \quad \frac{d\zeta(0)}{dt} = \zeta^1. \quad (24)$$

Задача Коши (23), (24) эквивалентна начально-краевой задаче (1)–(6).

Отметим, что (23) в точности совпадает с задачей Коши о малых движениях идеальной жидкости в частично заполненном сосуде без перегородок [9]. Как известно [9],[10], если $\zeta^0 \in \mathcal{H}$, $\zeta^1 \in \mathcal{H}_\Gamma^{-1/2}$ и $f_1(t)$ – непрерывная функция со значениями в $\mathcal{H}_\Gamma^{1/2}$, то существует единственное обобщенное решение задачи (23), (24) непрерывное по t в норме $\mathcal{H}$, с непрерывной первой производной по t в норме $\mathcal{H}_\Gamma^{-1/2}$,

$$\zeta \in C([0, T], \mathcal{H}), \quad \frac{d\zeta}{dt} \in C([0, T], \mathcal{H}_\Gamma^{-1/2}).$$

Для этого решения выполняется уравнение баланса полной (кинетической+потенциальной) энергии жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \left(C \frac{d\zeta(t)}{dt}, \frac{d\zeta(t)}{dt} \right)_0 + \frac{\rho g}{2} \|\zeta(t)\|_0^2 &= \\ &= \frac{\rho}{2} (C\zeta^1, \zeta^1)_0 + \frac{\rho g}{2} \|\zeta^0\|_0^2 + \rho \int_0^t \left(f(\tau), \frac{d\zeta(\tau)}{d\tau} \right)_0 d\tau. \end{aligned} \quad (25)$$

Равенство (25) нетрудно получить, умножая обе части уравнения (23) на $\rho d\zeta/dt$ и интегрируя по времени t . Первое слагаемое в левой части равенства (25) имеет смысл кинетической энергии K потенциальных колебаний жидкости. Действительно, учитывая (22), (21), преобразуем это слагаемое к виду:

$$\begin{aligned} K &:= \frac{\rho}{2} \left(C \frac{d\zeta(t)}{dt}, \frac{d\zeta(t)}{dt} \right)_0 = \sum_{k=1}^n \frac{\rho}{2} \int_{\Gamma_k} \varphi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} d\Gamma = \\ &= \frac{\rho}{2} \left(\sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} |\nabla \varphi_k|^2 d\Omega + \sum_{(jk) \in \mathcal{I}} \int_{S_{jk}} p_{jk} (\varphi_j - \varphi_k)^2 d\Gamma \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Появление дополнительной суммы (по сравнению с обычным выражением для кинетической энергии) в правой части последнего равенства, обусловлено тем, что величина K выражена через усредненный потенциал скоростей φ . Второе слагаемое в левой части равенства (25) является, очевидно, потенциальной энергией Π рассматриваемой системы:

$$\Pi := \frac{\rho g}{2} \|\zeta(t)\|_0^2 = \sum_{k=1}^n \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma_k} |\zeta|^2 d\Gamma. \quad (27)$$

Первое и второе слагаемые в правой части равенства (25) представляют собой кинетическую и потенциальную энергию жидкости в начальный момент времени $t = 0$, тогда как третье слагаемое определяет работу внешних сил:

$$R := \rho \int_0^t \left(f(\tau), \frac{d\zeta(\tau)}{d\tau} \right)_0 d\tau = \rho \int_0^t \left(\sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \nabla f_k \nabla \varphi_k d\Omega \right) d\tau. \quad (28)$$

Таким образом, равенство (25) представляет собой уравнение баланса энергии, переходящее при $f = 0$ в закон сохранения энергии.

4. Собственные нормальные колебания жидкости

Собственные нормальные колебания жидкости описываются решениями вида $\zeta = \exp(i\omega t)u$ однородного ($f_1 = 0$) уравнения (23). Подставляя эти решения в (23), приходим к спектральной задаче:

$$\mu C u = u, \quad \mu = \omega^2/g, \quad u \in \mathcal{H}, \quad (29)$$

являющейся операторной формулировкой спектральной задачи (10)–(13).

Так как C – самосопряженный положительный и компактный оператор, то в силу хорошо известных теорем, задача (29) имеет дискретный спектр $\{\mu_p\}_{p=1}^\infty$, состоящий из характеристических чисел оператора C , причем $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$, $\mu_p \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow \infty$. Система собственных функций $\{u^{(p)}\}_{p=1}^\infty$, отвечающих характеристическим значениям μ_p , пронумерованным с учетом их кратностей, образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$,

$$(u^{(p)}, u^{(q)})_0 = \delta_{pq}, \quad (C u^{(p)}, u^{(q)})_0 = \mu_p^{-1} \delta_{pq}, \quad p, q = 1, 2, \dots \quad (30)$$

Частоты ω_p собственных колебаний жидкости определяются по формулам:

$$\omega_p^\pm = \pm (g \mu_p)^{1/2}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (31)$$

Как известно, собственные значения μ_p задачи (29) обладают экстремальными свойствами, позволяющими отыскивать их как решения вариационной задачи:

$$\mu_p = \min_{u \perp (u^{(1)}, \dots, u^{(p-1)})} \frac{(C^{-1}u, u)_0}{(u, u)_0}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (32)$$

где минимум берется на ортогональном дополнении в пространстве $\mathcal{H}$ к первым $(p-1)$ собственным функциям $u^{(q)}$, $q \in 1, \overline{(p-1)}$. Функция, на которой реализуется минимум вариационного отношения (32) является p -й собственной функцией $u^{(p)}$ спектральной задачи (29).

Наряду с (32) часто используется максимально-минимальный принцип, согласно которому

$$\mu_p = \max_{M_{p-1}} \min_{u \perp M_{p-1}} \frac{(C^{-1}u, u)_0}{(u, u)_0}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (33)$$

Здесь максимум берется по подпространствам $M_{p-1} \subset \mathcal{H}$ размерности $p-1$. Нетрудно показать, что задача (32) равносильна следующей:

$$\mu_p = \min_{\phi} \frac{\sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} |\nabla \phi_k|^2 d\Omega + \sum_{(ik) \in \mathcal{I}} \int_{S_{ik}} p_{ik} |\phi_i - \phi_k|^2 dS}{\sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} |\phi_k|^2 d\Gamma} \quad (34)$$

$$\phi \in \mathcal{H}_T^1(\Omega_0), \quad (\gamma\phi, \gamma\phi^{(q)})_0 = 0 \quad \forall q \in \overline{1, (p-1)}, \quad p = 1, 2, \dots$$

Максимально-минимальный принцип (33) также приведем в несколько иной форме, более удобной для анализа спектра частот собственных колебаний жидкости:

$$\mu_p = \max_{M_{p-1}} \min_{\phi \perp M_{p-1}} \frac{\sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} |\nabla \phi_k|^2 d\Omega + \sum_{(ik) \in \mathcal{I}} \int_{S_{ik}} p_{ik} |\phi_i - \phi_k|^2 dS}{\sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} |\phi_k|^2 d\Gamma} \quad (35)$$

$$p = 1, 2, \dots$$

Здесь минимум определяется на ортогональном дополнении к $(p-1)$ -мерному подпространству M_{p-1} в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_T^1(\Omega_0)$, а максимум берется по всем подпространствам M_{p-1} .

Пусть μ_p, μ'_p — собственные значения задачи (29), отвечающие проницаемостям перегородок $p_{jk}(\vec{x}), p'_{jk}(\vec{x}), (jk) \in \mathcal{I}$, и пусть ω_p, ω'_p — положительные собственные частоты колебаний жидкости, определяемые по μ_p, μ'_p согласно (31). Используя вариационные формулировки задачи (29), нетрудно показать, что если $p_{jk}(\vec{x}) \leq p'_{jk}(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in S_{jk}, (jk) \in \mathcal{I}$, то $\mu_p \leq \mu'_p \quad \forall p = 1, 2, \dots$ и, следовательно, $\omega_p \leq \omega'_p \quad \forall p = 1, 2, \dots$. Иными словами, повышение проницаемости перегородок вызывает увеличение собственных частот колебаний жидкости.

Дополнительное секционирование полости сосуда, т.е. введение новых перегородок, приводит к понижению собственных частот колебаний жидкости. Первая (минимальная) собственная частота колебаний в сосуде с перфорированными перегородками не превышает минимальную частоту колебаний жидкости в сосуде без перегородок. Эти и ряд других свойств спектра частот колебаний жидкости в сосудах с перфорированными перегородками нетрудно доказать, опираясь на вариационные формулировки спектральной задачи.

5. Заключение

Усреднение граничных условий существенно упрощает задачу о движении жидкости в сосуде, секционированном перфорированными перегородками. В ряде случаев решение усредненной задачи можно получить в аналитической форме. В рамках усредненных математических моделей наиболее точно определяются интегральные характеристики исследуемых процессов. В рассматриваемом случае к числу таких характеристик следует отнести частоты собственных колебаний жидкости. Эффективные численные методы определения собственных частот и мод колебаний жидкости в сосудах с перфорированными перегородками могут быть основаны на вариационных формулировках усредненной спектральной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. –М: Машиностроение, 1971–563 с.
2. Микишев Г. Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. –247 с.
3. Галицин Д. А., Троценко В. А. К расчету частот и присоединенных масс жидкости в прямоугольном контейнере с перегородками в поперечной плоскости его симметрии // Прикладна гідромеханіка. –2000, No 1.– С. 20–27.
4. Троценко В. А. О влиянии кольцевых перегородок на эффективность гашения волновых движений жидкости в сосуде //Доповіді НАНУ.–2005, No 6.–С. 50–56.
5. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – Киев: Наукова думка, 1974.–280 с.
6. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Усредненные модели микронеоднородных сред.–Киев: Наукова думка, 2005.–550 с.
7. Марченко В. А., Сузигов Г. В. Вторая краевая задача в областях со сложной границей //Матем. сборник.–1966.–Т. 69 (111), No 1.–С. 35–60.
8. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Н неоднородные граничные задачи и их приложения.–М.: Мир, 1971.–372 с.
9. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике.–М.: Наука, 1989.–416 с.
10. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.–М.: Наука, 1967.–464 с.

Устойчивость цилиндрической зоны токонесущей жидкости в постоянном магнитном поле

Ю. И. Руднев

Харьковский Национальный Университет имени В. Н. Каразина, Украина

Рассматривается задача об устойчивости равновесия цилиндрической зоны токонесущей жидкости, взаимодействующей с внешним магнитным полем. Предложен метод исследования устойчивости, основанный на анализе спектра частот свободных колебаний рассматриваемой системы. Проведены расчеты границы области устойчивости в пространстве безразмерных параметров системы.

2000 *Mathematics Subject Classification* 76W05.

1. Введение

В последнее время магнитогидродинамические технологии привлекают все большее внимание. Большой интерес проявляется, в частности, к технологиям получения сверхчистых материалов методами зонной плавки, левитационного и полулевитационного переплава [1] – [6] с использованием электромагнитных сил для удержания расплава во взвешенном состоянии. В [7, 8, 9] и ряде других работ обсуждается возможность использования магнитного поля для формовки расплавленного металла с последующей его кристаллизацией.

Одна из основных проблем, возникающих при осуществлении указанных технологических процессов, заключается в обеспечении устойчивости свободной поверхности расплава, взаимодействующего с электромагнитным полем. В данной работе рассматривается классическая задача об устойчивости равновесия жидкой зоны горизонтально расположенного проводника с током в поперечном магнитном поле. Несмотря на давний интерес, проявляемый к этой задаче, вопрос об устойчивости равновесия зоны до сих пор остается открытым. В [1, 2] были предложены приближенные формулы для определения критической (максимально возможной) длины зоны. В работе [3] был проведен анализ устойчивости бесконечного жидкого цилиндра относительно периодических возмущений. Ниже предложен численно-аналитический метод исследования устойчивости кондукционного подвеса цилиндрической зоны токонесущей жидкости. Проведены расчеты критической длины зоны в зависимости от определяющих параметров рассматриваемой системы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим кондукционный подвес электропроводной жидкости, при котором сила тяжести компенсируется электромагнитной силой, возникающей при взаимодействии постоянного магнитного поля с пропускаемым через жидкость постоянным электрическим током. Пусть Ω_1 – область, занимаемая жидкостью, Ω_2, Ω_3 – цилиндрические электроды радиуса R , $\Omega_0 := \mathbb{R}^3 / \bigcup_{k=1}^3 \Omega_k$ – область вне проводников с током (см. рис.1). Боковую поверхность каждой из областей $\Omega_k, k = \overline{1, 3}$ обозначим Γ_k , поверхности контакта жидкой зоны с твердыми проводниками – S_{12}, S_{13} . Контуры, ограничивающие поверхности S_{12} и S_{13} , обозначим γ_{12}, γ_{13} , соответственно. Будем считать,

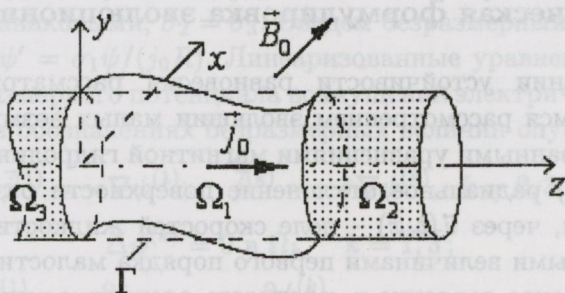


Рис. 1: Схема кондукционного подвеса

что по проводникам пропускается постоянный электрический ток с объемной плотностью j_0 , причем рассматриваемая система находится в однородном внешнем магнитном поле с индукцией $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_x$.

Условия равновесия жидкости в этом случае будут иметь вид:

$$-\nabla P + \rho \vec{g} + \vec{j}_0 \times \vec{B} = 0 \text{ в } \Omega_1, \quad (1)$$

$$P - P^0 = -2\alpha K \text{ на } \Gamma_1, \quad (2)$$

$$\vec{B} := \vec{B}_J + \vec{B}_0,$$

где P – гидростатическое давление, ρ – плотность жидкости, $\vec{g}$ – ускорение силы тяжести, α – коэффициент поверхностного натяжения на Γ_1 , K – средняя кривизна свободной поверхности жидкости, $\vec{B}_J$ – индукция магнитного поля собственных токов, протекающих по полубесконечным цилиндрическим электродам и жидкой зоне. Давление P^0 в области Ω_0 предполагается постоянным.

Нетрудно убедиться, что цилиндрическая жидкая зона радиуса $r = R$ будет находиться в состоянии равновесия, если внешнее магнитное поле и токи удовлетворяют условиям

$$\rho g = j_0 B_0, \quad j_0 = \text{const}; \quad (3)$$

гидростатическое давление при этом определяется равенством

$$P = P^0 + \frac{\alpha}{R} + \frac{\mu_0 j_0^2}{4} (R^2 - r^2), \quad (4)$$

а индукция магнитного поля собственных токов выражениями

$$\vec{B}_J = \frac{\mu_0 j_0 r}{2} \vec{e}_\vartheta \text{ в } \Omega_k, k = \overline{1, 3}, \quad \vec{B}_J = \frac{\mu_0 j_0 R^2}{2r} \vec{e}_\vartheta \text{ в } \Omega_0,$$

где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

3. Математическая формулировка эволюционной задачи

При исследовании устойчивости равновесия рассматриваемой МГД-системы ограничимся рассмотрением эволюции малых возмущений, описываемых линеаризованными уравнениями магнитной гидродинамики. Обозначим через $\zeta(t, \vartheta, z)$ радиальное отклонение поверхности раздела от равновесного положения, через $\vec{v}(t, \vec{x})$ – поле скоростей жидкости. Функции $\zeta, \vec{v}$ будем считать малыми величинами первого порядка малости.

Гидродинамическое давление p , плотность электрического тока $\vec{j}$, потенциал электрического поля ψ , индукцию магнитного поля $\vec{b}$ представим в виде суммы равновесных значений этих величин и их малых возмущений:

$$p(t, \vec{x}) = P(\vec{x}) + p'(t, \vec{x}), \quad \vec{j}(t, \vec{x}) = \vec{j}_0(\vec{x}) + \vec{j}'(t, \vec{x}),$$

$$\psi(t, \vec{x}) = \psi_0(\vec{x}) + \psi'(t, \vec{x}), \quad \vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{B}_0(\vec{x}) + \vec{B}_J(\vec{x}) + \vec{b}'(t, \vec{x}).$$

В дальнейшем штрихи, обозначающие возмущения величин, будем опускать.

Введем безразмерные переменные, выбрав в качестве характерных величин радиус цилиндра R – для линейных размеров, $(R/g)^{1/2}$ – для времени, j_0 – для плотности тока. Для безразмерных координат $r/R, z/R$ сохраним прежние обозначения r, z . Движение жидкости вблизи равновесного состояния описываются следующей системой уравнений и граничных условий:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v} + \vec{j} \times \vec{e}_x + W \left(\frac{r}{2} \vec{j} \times \vec{e}_\vartheta + \vec{e}_z \times \vec{b} \right) \text{ в } \Omega_1, \quad (5)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0 \text{ в } \Omega_1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_r \text{ на } \Gamma_1, \quad (7)$$

$$-p + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{1}{\text{Bo}} (\Delta_\Gamma \zeta + \zeta) - \frac{W}{2} \zeta \text{ на } \Gamma_1, \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - v_\vartheta = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad (9)$$

$$\vec{v} = 0 \text{ на } S_{12} \cup S_{13}, \quad (10)$$

$$\zeta = 0 \text{ на } \gamma_{12} \cup \gamma_{13}, \quad (11)$$

$$\text{Bo} := \frac{\rho g R^2}{\alpha}, \quad \text{Re} := \frac{R^{3/2} g^{1/2}}{\nu}, \quad W := \frac{\mu_0 j_0^2 R}{\rho g}.$$

Здесь **Bo** – число Бонда, **Re** – число Рейнольдса, **W** – безразмерный параметр, характеризующий отношение электромагнитных сил к силе тяжести, Δ_Γ – оператор Лапласа – Бельтрами. Динамическое условие (8) получено линеаризацией условия для капиллярного скачка нормальных напряжений на свободной поверхности жидкости. Условие (11) обычно принимается при совпадении контуров γ_{12} , γ_{13} с ребрами (изломами) твердой стенки и является физически наиболее оправданным [10].

В дальнейшем, для простоты, удельные электропроводности электродов будем считать одинаковыми, $\sigma_2 = \sigma_3$. Введем безразмерный потенциал электрического поля $\psi' = \sigma_1 \psi / (j_0 R)$. Линеаризованные уравнения и граничные условия для безразмерного потенциала возмущений электрического поля имеют вид (штрихи в обозначениях безразмерных величин опущены):

$$\vec{j}^{(1)} = -\nabla \psi^{(1)}, \quad \vec{j}^{(k)} = -\bar{\sigma} \nabla \psi^{(k)}, \quad k = 2, 3 \quad (12)$$

$$\Delta \psi^{(k)} = 0 \text{ в } \Omega_k, \quad k = \overline{1, 3}; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} = -\frac{\partial \zeta}{\partial z} \text{ на } \Gamma_1, \quad \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial r} = 0 \text{ на } \Gamma_k, \quad k = 2, 3, \quad (14)$$

$$\psi^{(1)} = \psi^{(k)}, \quad \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} = \bar{\sigma} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial z} \text{ на } S_{1k}, \quad k = 2, 3, \quad (15)$$

$$\psi \rightarrow 0 \text{ при } |z| \rightarrow \infty, \quad (16)$$

где $\bar{\sigma} = \sigma_2/\sigma_1 = \sigma_3/\sigma_1$ – безразмерный коэффициент электропроводности электродов. Верхний индекс в круглых скобках в (12)–(16) и далее означает номер области, к которой относится та или иная величина.

Уравнения (12) представляют собой закон Ома, (14) – линеаризованные условия непротекания тока через свободную поверхность жидкости и боковую поверхность электродов.

Возмущения индукции магнитного поля должны удовлетворять следующим уравнениям и граничным условиям:

$$\text{rot } \vec{b}^{(k)} = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \vec{j}^{(k)}, & k = \overline{1, 3} \end{cases}, \quad \text{div } \vec{b}^{(k)} = 0 \text{ в } \Omega_k, \quad k = \overline{0, 3}; \quad (17)$$

$$\vec{b}^{(k)} = \vec{b}^{(0)} \text{ на } \Gamma_k, \quad \vec{b}^{(k)} = \vec{b}^{(1)} \text{ на } S_{1k}, \quad k = \overline{2, 3}, \quad (18)$$

$$b_r^{(1)} = b_r^{(0)}, \quad b_z^{(1)} = b_z^{(0)}, \quad b_\vartheta^{(1)} + \frac{\partial B_J^{(1)}}{\partial r} \zeta = b_\vartheta^{(0)} + \frac{\partial B_J^{(0)}}{\partial r} \zeta \text{ на } \Gamma_1.$$

Будем считать, что в начальный момент времени заданы поле скоростей и форма поверхности раздела жидкостей

$$\zeta|_{t=0} = \zeta_0 \text{ на } \Gamma_1; \quad \vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0 \text{ в } \Omega_1. \quad (19)$$

Вектор-функция $\vec{v}_0(\vec{x})$ должна удовлетворять уравнению (6) и условиям (9), (10), а функция $\zeta_0(\vartheta, z)$ - условию (11) и условию $\int_{\Gamma_1} \zeta_0 d\Gamma = 0$.

Вопрос об устойчивости равновесного состояния жидкостей сводится к исследованию устойчивости тривиального решения эволюционной задачи (5)–(18) относительно начальных возмущений $\zeta_0, \vec{v}_0$.

4. Спектральный признак устойчивости

Решение задачи (5)–(18) будем отыскивать с помощью метода Галеркина. Для этого выберем в качестве базиса полную систему соленоидальных вектор-функций $\{\vec{u}_i\}_{i=1}^{\infty}$, определенных в Ω_1 , и систему функций $\{\zeta_i\}_{i=1}^{\infty}$, определенных на Γ_1 равенством $\zeta_i := \vec{n} \cdot \vec{u}_i|_{\Gamma_1}$. Дополнительно функции $\vec{u}_i, \zeta_i$ должны удовлетворять условиям (9)–(11).

По отклонению свободной поверхности $\zeta = \zeta_i$ можно найти отвечающие ему возмущения потенциала электрического поля $\psi_i(\vec{x})$ и индукции магнитного поля $\vec{b}_i(\vec{x})$ как решения задач (12)–(16), (17)–(18), соответственно. Поле скоростей жидкости, отклонение поверхности раздела от равновесного положения, возмущения потенциала электрического поля и индукции магнитного поля будем отыскивать в виде:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t, \vec{x}) &= \sum_{i=1}^N c_i(t) \vec{u}_i(\vec{x}), & \zeta(t, \vartheta, z) &= \sum_{i=1}^N c_i(t) \zeta_i(\vartheta, z), \\ \psi(t, \vec{x}) &= \sum_{i=1}^N c_i(t) \psi_i(\vec{x}), & \vec{b}(t, \vec{x}) &= \sum_{i=1}^N c_i(t) \vec{b}_i(\vec{x}) \end{aligned} \quad (20)$$

где $c_i(t)$ – подлежащие определению функции времени, N – число базисных функций (выбираемое из условий практической сходимости вычислительного процесса).

Подставляя (20) в уравнение (5) и умножая скалярно обе части полученного равенства на $\vec{u}_i^*$ (звездочка означает комплексное сопряжение), после интегрирования по области Ω_1 с использованием формулы Грина для оператора Стокса [10] и условий (9), (10) получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами относительно функций $c_i(t)$:

$$\mathcal{A} \dot{c} + \mathcal{D} c + (\mathcal{P} + \mathcal{M}) c = 0, \quad c := (c_1(t), c_2(t), \dots, c_N(t))^T. \quad (21)$$

Здесь $\mathcal{A}, \mathcal{P}$ – матрицы кинетической и потенциальной энергий, $\mathcal{D}$ – матрица вязкой диссипации, $\mathcal{M}$ – матрица МГД-взаимодействия.

Элементы a_{ij} матрицы $\mathcal{A}$ имеют вид:

$$a_{ij} = \int_{\Omega_1} \vec{u}_i^* \vec{u}_j d\Omega, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (22)$$

Элементы p_{ij} матрицы P определяются равенствами:

$$p_{ij} = \int_{\Gamma_1} \zeta_i^* \left(-\frac{1}{Bo} (\Delta \Gamma \zeta_j + \zeta_j) + \frac{W}{2} \zeta_j \right) d\Gamma, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (23)$$

Элементы m_{ij} матрицы МГД-взаимодействия M определяются по формулам:

$$m_{ik} = - \int_{\Omega_1} \vec{u}_i^* (\vec{j}_k \times \vec{e}_x + W (\frac{r}{2} \vec{j}_k \times \vec{e}_\vartheta + \vec{e}_z \times \vec{b}_k)) d\Omega, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (24)$$

Общее выражение для элементов d_{ik} матрицы диссипации D имеет вид:

$$d_{ij} = D(\vec{u}_i, \vec{u}_j), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (25)$$

где $D(\vec{u}, \vec{v})$ билинейный функционал, определяемый в декартовой системе координат следующим равенством:

$$D(\vec{u}, \vec{v}) := \int_{\Omega_1} \sum_{i,k=1}^3 \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^*}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) d\Omega.$$

Таким образом, метод Галеркина позволяет свести задачу о МГД-устойчивости цилиндрической зоны расплава к исследованию устойчивости тривиального решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (21). Последняя задача, в свою очередь, сводится к исследованию алгебраической спектральной задачи

$$((\lambda^2 A + \lambda D + (P + M)) a = 0, \quad (26)$$

собственные значения λ и собственные векторы a которой определяют экспоненциальные решения системы (21) $c(t) = a \exp(\lambda t)$. Спектральный признак устойчивости (неустойчивости) тривиального решения системы (21), а, следовательно, и рассматриваемой МГД - системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \max_k \operatorname{Re}(\lambda_k) < 0 & - \text{условие устойчивости} \\ (\max_k \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0 & - \text{условие неустойчивости}). \end{aligned} \quad (27)$$

Для дальнейшего удобно перейти к двойной индексации базисных функций, полагая

$$\zeta_{mn}(\vartheta, z) = \sin(\alpha_m z) \eta_n(\vartheta), \quad \eta_n(\vartheta) = \begin{cases} \cos n\vartheta, & n \geq 0 \\ \sin n\vartheta, & n < 0 \end{cases},$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{L}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

где L – безразмерная длина жидкой зоны.

В задачах, представляющих практический интерес, вязкость жидкости обычно мала, так что $\text{Re} \gg 1$. Ограничиваясь рассмотрением этого случая, представим $\vec{u}_{mn}$ в виде: $\vec{u}_{mn} = \nabla \varphi_{mn} + \vec{w}_{mn}$, где функции φ_{mn} являются решениями краевых задач:

$$\Delta \varphi_{mn} = 0 \text{ в } \Omega_1, \quad (28)$$

$$\frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial n} = \zeta_{mn} \text{ на } \Gamma_1, \quad \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial n} = 0 \text{ на } S_{1k}, k = 2, 3.$$

а соленоидальные вектор-функции $\vec{w}_{mn}$ служат для компенсации невязок в граничных условиях (9), (10). При $\text{Re} \gg 1$ в качестве $\vec{w}_{mn}$ целесообразно выбрать функции типа пограничного слоя, быстро убывающие при отходе от твердых стенок S_{1k} и свободной поверхности Γ_1 . Вблизи твердых стенок для $\vec{w}_{mn}$ будем иметь:

$$\vec{w}_{mn} = -\nabla_\tau \varphi_{mn}|_{S_{1k}} \exp\left(-(1+i)\sqrt{\frac{\omega \text{Re}}{2}}\xi\right) + O(\text{Re}^{-1}), k = 1, 2. \quad (29)$$

Здесь $\omega = Im\lambda$ – частота колебаний жидкости; ξ – координата, отсчитываемая по нормали к твердой стенке вглубь жидкости; ∇_τ – поверхностный градиент скалярных функций, заданных на S_{1k} . Выражения для $\vec{w}_{mn}$ вблизи свободной поверхности здесь не приводятся, поскольку в дальнейшем они не понадобятся.

Решение задачи (28) имеет вид:

$$\varphi_{mn} = \left\{ \frac{I_n(\alpha_m r)}{\alpha_m I'_n(\alpha_m)} \sin(\alpha_m z) + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{nmj} J_n(k_{nj} r) Z_{nm+1j}^c(z) \right\} \eta_n, \quad (30)$$

$$Z_{nmj}^c(z) := \text{ch}(k_{nj}(l-z)) + (-1)^m \text{ch}(k_{nj} z),$$

$$\gamma_{nmj} := \frac{\alpha_{nmj}}{I'_n(\alpha_m R) k_{nj} \text{sh}(k_{nj} l)}, \quad \alpha_{nmj} := \frac{2\alpha_m k_{nj}^2 I'_n(\alpha_m R)}{(k_{nj}^2 + \alpha_m^2)(k_{nj}^2 - n^2) J_n(k_{nj})}$$

где $J_n(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка, k_{nj} – j -й положительный корень уравнения $J'_n(x) = 0$, α_{nmj} – коэффициенты разложения модифицированных функций Бесселя $I_n(\alpha_m r)$ в ряд Фурье по полной системе функций $\{J_n(k_{nj} r)\}_{j=1}^{\infty}$:

$$I_n(\alpha_m r) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{nmj} J_n(k_{nj} r),$$

Обозначим ψ_{mn} , $\vec{j}_{mn}$ возмущения потенциала электрического поля и токов, отвечающие возмущению свободной поверхности $\zeta = \zeta_{mn}$ и определяемые как решения задачи (12)–(16). Выражения для функций ψ_{mn} имеют

ВИД:

$$\begin{aligned}\psi_{mn}^{(1)} &= \left\{ -\frac{I_n(\alpha_m r)}{I'_n(\alpha_m)} \cos(\alpha_m z) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{nmj} J_n(k_{nj} r) Z_{nmj}^c(z) \right\} \eta_n, \\ \psi_{mn}^{(2)} &= -\frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{nmj} \operatorname{sh}(k_{nj} l) J_n(k_{nj} r) \exp(k_{nj} z) \right\} \eta_n, \\ \psi_{mn}^{(3)} &= -\frac{(-1)^m}{\bar{\sigma}} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{nmj} \operatorname{sh}(k_{nj} l) J_n(k_{nj} r) \exp(k_{nj}(l-z)) \right\} \eta_n, \\ \beta_{nmj} &:= \frac{-\alpha_{nmj}}{I'_n(\alpha_m) ((-1)^m + \operatorname{ch}(k_{nj} l) + \bar{\sigma}^{-1} \operatorname{sh}(k_{nj} l))}.\end{aligned}\quad (31)$$

Возмущение магнитного поля $\vec{b}_{mn}$ будем отыскивать в виде:

$$\vec{b}_{mn}^{(k)} = \vec{b}_{mn}^{(0)(k)} - \nabla \chi_{mn}^{(k)} \quad \text{в } \Omega_k, \quad k = \overline{1, 3}, \quad \vec{b}_{mn}^{(0)} = -\nabla \chi_{mn}^{(0)} \quad \text{в } \Omega_0,$$

где $\vec{b}^{(0)}$ – вектор-функция, удовлетворяющая уравнениям и граничным условиям

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{b}_{mn}^{(k)} &= \vec{j}_{mn}^{(k)}, \quad \operatorname{div} \vec{b}_{mn}^{(k)} = 0 \quad \text{в } \Omega_k, \quad b_{mnz}^{(0)(k)} = 0 \quad \text{на } \Gamma_k, \quad k = \overline{1, 3} \\ b_{mn\vartheta}^{(0)(1)} &= -\zeta_{mn} \quad \text{на } \Gamma_1, \quad b_{mn\vartheta}^{(0)(k)} = 0 \quad \text{на } \Gamma_k, \quad \vec{b}_{mn}^{(0)(k)} = \vec{b}_{mn}^{(0)(1)} \quad \text{на } S_{1k}, \quad k = 1, 2,\end{aligned}\quad (32)$$

В (32) $b_{mnr}^{(0)}, b_{mn\vartheta}^{(0)}, b_{mnz}^{(0)}$ означают физические компоненты вектора $\vec{b}_{mn}^{(0)}$ в цилиндрической системе координат (r, ϑ, z) . Потенциал индукции магнитного поля χ_{mn} определяется как решение краевой задачи:

$$\begin{aligned}\Delta \chi_{mn}^{(k)} &= 0 \quad \text{в } \Omega_k, \quad k = \overline{1, 3}; \quad \Delta \chi_{mn}^{(0)} = 0 \quad \text{в } \Omega_0, \\ \chi_{mn}^{(k)} &= \chi_{mn}^{(0)}, \quad \frac{\partial \chi_{mn}^{(k)}}{\partial r} - \frac{\partial \chi_{mn}^{(0)}}{\partial r} = b_{mnr}^{(0)(k)} \quad \text{на } \Gamma_k, \quad k = \overline{1, 3}, \\ \chi_{mn}^{(k)} &= \chi_{mn}^{(1)}, \quad \frac{\partial \chi_{mn}^{(k)}}{\partial z} = \frac{\partial \chi_{mn}^{(1)}}{\partial z} \quad \text{на } S_{1k}, \quad k = 1, 2.\end{aligned}\quad (33)$$

Нетрудно проверить, что уравнениям и граничным условиям (32) удовлетворяют функции вида:

$$\begin{aligned}b_{mnr}^{(0)(1)} &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{I_n(\alpha_m r)}{\alpha_m I'_n(\alpha_m)} \sin(\alpha_m z) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_{nmj}}{k_{nj}} J_n(k_{nj} r) Z_{nm+1j}^s(z) \right\} \eta'_n, \\ b_{mn\vartheta}^{(0)(1)} &= \left\{ -\frac{I'_n(\alpha_m r)}{I'_n(\alpha_m)} \sin(\alpha_m z) - \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{nmj} J'_n(k_{nj} r) Z_{nm+1j}^s(z) \right\} \eta_n, \quad b_{mnz}^{(0)(1)} = 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{mnr}^{0(2)} &= \frac{1}{r} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_{nmj}}{k_{nj}} \operatorname{sh}(k_{nj}l) J_n(k_{nj}r) \exp(k_{nj}z) \right\} \eta'_n, \\
b_{mn\vartheta}^{0(2)} &= - \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{nmj} \operatorname{sh}(k_{nj}l) J'_n(k_{nj}r) \exp(k_{nj}z) \right\} \eta_n, \quad b_{mnz}^{0(2)} = 0; \\
b_{mnr}^{0(3)} &= - \frac{(-1)^m}{r} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_{nmj}}{k_{nj}} \operatorname{sh}(k_{nj}l) J_n(k_{nj}r) \exp(k_{nj}(l-z)) \right\} \eta'_n \\
b_{mn\vartheta}^{0(3)} &= (-1)^m \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{nmj} \operatorname{sh}(k_{nj}l) J'_n(k_{nj}r) \exp(k_{nj}(l-z)) \right\} \eta_n, \quad b_{mnz}^{0(3)} = 0,
\end{aligned} \tag{34}$$

где

$$Z_{nmj}^s(z) := \operatorname{sh}(k_{nj}(l-z)) + (-1)^m \operatorname{sh}(k_{nj}z).$$

Для отыскания потенциала χ_{mn} выполним преобразование Фурье по координате z в уравнениях и граничных условиях задачи (33). Относительно образа Фурье $\hat{\chi}_{mn}$ функции χ_{mn} получим краевую задачу:

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{\chi}_{mn} - \xi^2 \hat{\chi}_{mn} &= 0 \text{ в } S, \quad \Delta \hat{\chi}_{mn}^{(0)} - \xi^2 \hat{\chi}_{mn}^{(0)} = 0 \text{ в } \mathbb{R}^2/S, \\
\hat{\chi}_{mn} &= \hat{\chi}_{mn}^{(0)}, \quad \frac{\partial \hat{\chi}_{mn}}{\partial n} - \frac{\partial \hat{\chi}_{mn}^{(0)}}{\partial n} = \hat{b}_{mnr}^0 \text{ на } \partial S,
\end{aligned} \tag{35}$$

где S – произвольное поперечное сечение цилиндра, ξ – параметр преобразования Фурье. Нетрудно проверить, что решение задачи (35) имеет вид:

$$\hat{\chi}_{mn} = K_n(\xi) I_n(\xi r) \hat{b}_{mnr}^0 \eta'_n, \quad \hat{\chi}_{mn}^{(0)} = I_n(\xi) K_n(\xi r) \hat{b}_{mnr}^0 \eta'_n. \tag{36}$$

Применяя к (36) обратное преобразование Фурье, найдем χ_{mn} , $\chi_{mn}^{(0)}$.

Отметим, что принятые в [2, 3] выражения для возмущений потенциала электрического поля и индукции магнитного поля отвечают случаю бесконечной жидкой зоны при периодическом возмущении ее свободной поверхности $\zeta = \zeta_{mn}$. Использование этих выражений фактически означает, что проведенное в [2, 3] исследование устойчивости также относится к случаю жидкой зоны бесконечной длины.

Для формирования матриц $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{M}$ вернемся к одномерной индексации базисных функций, полагая $\zeta_i := \zeta_{m_i n_i}$, $\bar{u}_i := \bar{u}_{m_i n_i}$, где m_i, n_i выбираются по возрастанию параметра $n_i^2 + m_i^2$. При определении элементов матриц $\mathcal{A}$, $\mathcal{M}$ можно пренебречь погранслойными слагаемыми $\bar{w}_i := \bar{w}_{m_i n_i}$, полагая $\bar{u}_i \simeq \nabla \varphi_i$. Выражения для элементов матрицы $\mathcal{A}$ преобразуются к виду:

$$a_{ij} = \int_{\Omega_1} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j d\Omega = \int_{\Gamma_1} \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} d\Gamma, \quad i, j = 1, \dots, N, \tag{37}$$

а для элементов матрицы МГД-взаимодействия $\mathcal{M}$ — к виду:

$$m_{ik} = \int_{\Omega_1} \vec{u}_i \vec{f}_k d\Omega = - \int_{\Omega_1} \varphi_i \operatorname{div} \vec{f}_k d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} \varphi_i (\vec{f}_k \cdot \vec{n}) d\Gamma, \quad i, k = 1, \dots, N, \quad (38)$$

$$\vec{f}_k := \vec{j}_k \times \vec{e}_x + W \left(\frac{r}{2} \vec{j}_k \times \vec{e}_\vartheta + \vec{e}_z \times \vec{b}_k \right).$$

Последнее выражение, в свою очередь, после несложных преобразований принимает вид:

$$\begin{aligned} m_{ij} = W \left\{ -2 \int_{\Omega_1} \varphi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial z} d\Omega - \int_{\Gamma_1} \varphi_i \left(b_{j\vartheta}^0 - \frac{\partial \chi_j}{\partial \vartheta} \right) d\Gamma + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \varphi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial z} d\Gamma - \frac{1}{2} \left(1 + (-1)^{(m_i+m_j)} \right) \int_{S_{12}} \varphi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial r} r dS \right\} - \\ - \left\{ \int_{\Gamma_1} \varphi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \sin \vartheta d\Gamma + \left(1 + (-1)^{(m_i+m_j)} \right) \int_{S_{12}} \varphi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dS \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Элементы матрицы $\mathcal{P}$ для выбранных базисных функций ζ_i имеют вид:

$$p_{ij} = \pi l \left(\frac{(n_i^2 - 1) + \varkappa_{m_i}^2}{\operatorname{Bo}} - \frac{W}{2} \right) \epsilon_{n_i} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (40)$$

$$\epsilon_{n_i} := \begin{cases} 1, & n_i = 0 \\ 1/2, & n_i \neq 0 \end{cases}$$

Подставляя $\vec{u}_j := \nabla \varphi_j + \vec{w}_j$ в (25) и учитывая при этом (29), с точностью до членов $O(\operatorname{Re}^{-3/2})$ получим:

$$\begin{aligned} d_{ij} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega}{2\operatorname{Re}}} \left(1 + (-1)^{(m_i+m_j)} \right) \int_{S_{12}} \nabla_\tau \varphi_i \nabla_\tau \varphi_j dS + \\ + \frac{2}{\operatorname{Re}} \int_{\Omega_1} \sum_{k,l=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_k \partial x_l} d\Omega, \quad i, j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (41)$$

Подставляя в (41), (39), (37) приведенные выше выражения для потенциала скоростей жидкости, возмущений электрического и магнитного полей можно получить в явном виде расчетные формулы для элементов матриц диссипации, МГД-взаимодействия и кинетической энергии. Здесь эти формулы, ввиду их громоздкости, не приводятся.

5. Результаты вычислений

Поведение жидкости в рассматриваемом случае определяется безразмерными параметрами $\bar{\sigma}, \mathbf{Bo}, W, L, \mathbf{Re}$. Собственные числа задачи (26) являются, очевидно, функциями этих параметров, $\lambda_k = \lambda_k(\bar{\sigma}, \mathbf{Bo}, W, L, \mathbf{Re})$. Согласно спектральному признаку устойчивости (27) граница области устойчивости в пространстве безразмерных параметров задачи определяется равенством:

$$\max_k \operatorname{Re}(\lambda_k(\bar{\sigma}, \mathbf{Bo}, W, L, \mathbf{Re})) = 0.$$

Собственное число с максимальной вещественной частью равной нулю будем называть критическим и обозначать $\lambda_{\text{кр}}$.

Анализ спектральной задачи (26), подкрепленный результатами вычислений, показывает, что в рассматриваемом случае имеет место так называемый принцип изменения устойчивости, т.е. $\lambda_{\text{кр}} = 0$. В этом случае построение границы области устойчивости существенно упрощается. Действительно, полагая в (26) $\lambda = 0$, получим:

$$(\mathcal{P} + \mathcal{M})a = 0 \quad (42)$$

Представим матрицы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{M}$ в виде:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\mathbf{Bo}} \mathcal{P}_1 + W \mathcal{P}_2, \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + W \mathcal{M}_2, \quad (43)$$

где выражения для матриц $\mathcal{P}_k, \mathcal{M}_k, k = 1, 2$ легко следуют из (40), (39), соответственно. Подставляя (43) в (42), будем иметь:

$$\left(\frac{1}{\mathbf{Bo}} \mathcal{P}_1 + \mathcal{M}_1 \right) a = -W (\mathcal{P}_2 + \mathcal{M}_2) a \quad (44)$$

Таким образом, вместо (26) достаточно рассмотреть спектральную задачу (44), где W принимается в качестве спектрального параметра. Элементы матриц, входящих в (44), не зависят от $\mathbf{Re}$, так что собственные числа W_k задачи (44) являются функциями параметров $\bar{\sigma}, \mathbf{Bo}, L$. Критические значения параметра W , отвечающие границе области устойчивости, определяются равенством:

$$W_{\text{кр}} = \min_k (W_k(\mathbf{Bo}, L, \bar{\sigma})). \quad (45)$$

При $W < W_{\text{кр}}$ равновесное состояние жидкой зоны устойчиво, при $W > W_{\text{кр}}$ — неустойчиво. Разрешая (45) относительно L , найдем критическое значение безразмерной длины зоны $L_{\text{кр}} := L_{\text{кр}}(\bar{\sigma}, \mathbf{Bo}, W)$. Аналогичная процедура с использованием в качестве спектрального параметра в (44) числа Бонда позволяет найти $\mathbf{Bo}_{\text{кр}}$ с последующим определением $L_{\text{кр}}$.

Решение спектральной задачи (44) нетрудно осуществить численно с использованием QR — алгоритма. Практическая сходимость предложенного метода достигалась при числе базисных функций порядка 30.

На рис.2 а в качестве примера представлены графики зависимости $L_{кр}$ от W при фиксированном значении параметра $\bar{\sigma}$ для трех различных значений числа Бонда (область устойчивости расположена ниже соответствующей кривой). Хорошо известно, что в условиях невесомости ($Bo = 0$) в отсутствие тока ($W = 0$) максимальная безразмерная длина жидкой зоны составляет 2π . Как видно из приведенных графиков, наличие тока и магнитного поля вызывает уменьшение $L_{кр}$, причем $L_{кр} \rightarrow 0$ при $W \rightarrow \infty$. Изломы критических кривых на приведенных графиках объясняются сменой мод опасных возмущений свободной поверхности жидкости, приводящих к потере устойчивости. Для начальных участков критических кривых (до излома) основной вклад в опасные возмущения вносит мода вида $\zeta = \sin(\alpha_2 z)$, а после излома – вида $\zeta = \sin(\alpha_1 z) \cos \vartheta$.

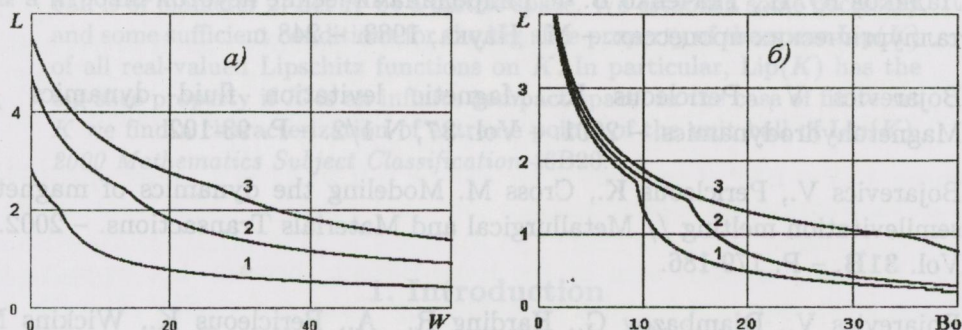


Рис. 2: Граница области устойчивости. а) $\bar{\sigma} = 0,5$; 1 – $Bo = 4$; 2 – $Bo = 1$; 3 – $Bo = 0,5$. б) $W = 0,2$; 1 – $\bar{\sigma} = 0,1$; 2 – $\bar{\sigma} = 1$; 3 – $\bar{\sigma} = 10$.

На рис.2 б показаны графики зависимости $L_{кр}$ от Bo для различных значений параметра $\bar{\sigma}$. Как видно из приведенных результатов, с ростом Bo критическая длина зоны убывает, причем $L_{кр} \rightarrow 0$ при $Bo \rightarrow \infty$. Отметим также, что $L_{кр}$ возрастает с увеличением $\bar{\sigma}$, причем этот эффект в определенном диапазоне чисел Бонда весьма значителен и может представлять практический интерес.

6. Заключение

Проведенные расчеты показали достаточно высокую эффективность предложенного метода, позволяющего определять границу области устойчивости равновесных состояний в пространстве безразмерных параметров рассматриваемой МГД-системы. Показано, что критическая длина жидкой зоны при сохранении условия равновесия $j_0 B_0 = \rho g$ увеличивается с уменьшением плотности j_0 пропускаемого тока. Это объясняется тем, что при $j_0 \rightarrow 0$ уменьшается значение индукции "собственного" магнитного поля B_J , отвечающего за возникновение перетяжечной неустойчивости. При увеличении W

длина зоны стремиться к нулю. Критическая длина зоны всегда меньше 2π , независимо от значений W . Значительное влияние на устойчивость зоны оказывает отношение удельных электропроводностей жидкости σ_1 и электродов σ_2 , причем критическая длина зоны возрастает с ростом σ_2/σ_1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Пфани В. Зонная плавка. – М.: Мир, 1970. – 366 с.
2. Меркулов В. И. Управление движением жидкости. – Новосибирск: Наука, 1981. – 174 с.
3. Ладиков Ю. П., Ткаченко В. Ф. Гидродинамические неустойчивости в металлургических процессах. – М.: Наука, 1983. – 248 с.
4. Bojarevics V., Pericleous K. Magnetic levitation fluid dynamics // Magnetohydrodynamics. – 2001. – Vol. 37, N 1/2. – P. 93-102.
5. Bojarevics V., Pericleous K., Cross M. Modeling the dynamics of magnetic semilevitation melting // Metallurgical and Materials Transactions. – 2002. – Vol. 31B. – P. 179-186.
6. Bojarevics V., Djambazov G., Harding R. A., Pericleous K., Wickins M. Investigation of the cold crucible melting process: experimental and numerical study // Magnetohydrodynamics. – 2003. – Vol. 39, N 4. – P. 395-402.
7. Fu H. Z., Shen J., Liu L., Hao Q. T., Li S. M., Li J. S. Electromagnetic shaping and solidification control of Ni-base superalloys under vacuum // Journal of Materials Processing Technology. – 2004. – Vol. 148, – P. 25-29.
8. Mahajan M. P., Tsige M., Zhang S., Alexander J. I. D., Taylor P. L., Rosenblatt C. Collapse dynamics of liquid bridges investigated by time-varying magnetic levitation // Physical Review Letters. – 2000. – Vol. 84, N 2. – P. 338 - 341.
9. Conrath M., Karcher C. Shaping of sessile liquid metal drops using high-frequency magnetic fields // Euro. J. Mech. B/Fluids. – 2005. – Vol. 24. – P. 149 - 165.
10. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / А. Д. Мышкис, В. Г. Бабский, М. Ю. Жуков, Н. Д. Копачевский, Л. А. Слобожанин, А. Д. Тюпцов / под ред. А. Д. Мышкиса. – Киев.: Наук. думка, 1992. – 592 с.

Big slice property in the spaces of Lipschitz functions

Y. Ivakhno

V.N. Karazin Kharkov National University, Ukraine

A Banach space is said to have the big slice property if every slice of its unit ball is of diameter 2. Let K be a metric space. We establish some necessary and some sufficient conditions for the big slice property of the space $\text{Lip}(K)$ of all real-valued Lipschitz functions on K . In particular, $\text{Lip}(K)$ has the big slice property if K is an infinite compact space. In the case of finite set K we find a characterization of extreme points of the unit ball of $\text{Lip}(K)$.
2000 Mathematics Subject Classification 46B20.

1. Introduction

In this paper X stands for a Banach space, $S(X)$ and $B(X)$ are the sphere and the closed unit ball of X . Every functional $x^* \in S(X^*)$ and $\varepsilon > 0$ determine a slice of $B(X)$ by the formula

$$S(x^*, \varepsilon) = \{x \in B(X) : x^*(x) > 1 - \varepsilon\}.$$

Recall [2] that X is said to have the (diameter-) big slice property ($X \in \text{BSP}$) if every slice of $B(X)$ is of diameter 2. In the other words, for every $\varepsilon > 0$ and every slice S of $B(X)$ there are x and y in S such that $\|x - y\| > 2 - \varepsilon$.

For example, $c_0 \in \text{BSP}$. Every space with the Daugavet property [3] also has the BSP. If X has the Radon-Nikodym property, then it fails to have the BSP. In particular, finite dimensional spaces never enjoy the BSP.

Throughout, (K, ρ) stands for a metric space. For every pair of distinct points $t_1, t_2 \in K$ we define the slope of a function $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ between t_1 and t_2 as

$$f(t_1; t_2) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{\rho(t_1, t_2)}.$$

The space of all real-valued Lipschitz functions on K will be equipped with the seminorm

$$\|f\| = \sup\{|f(t_1; t_2)| : t_1 \neq t_2 \in K\}.$$

If one quotients out the kernel of this seminorm, i.e., the constant functions, one obtains the Banach space $\text{Lip}(K)$, whose norm will also be denoted by $\|\cdot\|$.

It is known [4] that in the case of a compact space K the Daugavet property for $\text{Lip}(K)$ is equivalent to the locality condition on K . In this paper we investigate the big slice property for spaces of Lipschitz functions.

In the following section, "Sufficient conditions for the big slice property of $\text{Lip}(K)$ ", it turns out that on every (infinite) compact K $\text{Lip}(K)$ satisfies the big slice property. Moreover, this is also the case for every metric space which contains arbitrarily close or arbitrarily distant points. In the last section we find some necessary conditions for the big slice property of $\text{Lip}(K)$.

An important tool to construct Lipschitz functions is McShane's extension theorem saying that if $M \subset K$ and $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ is a Lipschitz function, then there is an extension of f to a Lipschitz function $F: K \rightarrow \mathbb{R}$ with the same Lipschitz constant; see [1, p. 12/13]. This will be used several times.

Remark. For a completion $\tilde{K}$ of a metric space K $\text{Lip}(K) = \text{Lip}(\tilde{K})$, consequently, we may assume without any loss of generality that K is a complete metric space.

We shall deal with the big slice property in the following equivalent form:

Lemma 1 $X \in \text{BSP}$ if and only if for every $\varepsilon > 0$ $B(X)$ is a subset of $\overline{\text{co}}\{\frac{x+y}{2} : x, y \in (1+\varepsilon) \cdot B(X), \|x-y\| > 2-\varepsilon\}$.

Proof. Necessity is easily seen by the Hahn-Banach theorem. Let us prove the sufficiency. Fix an $\varepsilon > 0$ and a slice $S(x^*, \varepsilon)$. Take a $z \in S(x^*, \delta)$ with $\delta \in (0, \varepsilon/6)$. Applying the condition, we get x_k and y_k in $(1+\delta) \cdot B(X)$ such that $\|x_k - y_k\| > 2 - \delta$ and z is approximated by a convex combination

$$\left\| z - \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{x_k + y_k}{2} \right\| < \delta.$$

Then $x^*(\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{x_k + y_k}{2}) > x^*(z) - \delta > 1 - 2\delta$ and consequently for some $j \in \{1, \dots, n\}$ $x^*(\frac{x_j + y_j}{2}) > 1 - 2\delta$. Hence, $\min\{x^*(x_j), x^*(y_j)\} > 2 - 4\delta - \max\{x^*(x_j), x^*(y_j)\} \geq 2 - 4\delta - (1 + \delta) = 1 - 5\delta$. Let $x = \frac{x_j}{\|x_j\|}$, $y = \frac{y_j}{\|y_j\|}$. These elements belong to $S(x^*, \varepsilon)$ since $\min\{x^*(x), x^*(y)\} > \frac{1-5\delta}{1+\delta} > \frac{6-5\varepsilon}{6+\varepsilon} > 1 - \varepsilon$. On the other hand, $\|x - y\| = \|\frac{x_j}{\|x_j\|} - \frac{y_j}{\|y_j\|}\| \geq \|x_j - y_j\| - \|x_j \cdot (1 - \frac{1}{\|x_j\|})\| - \|y_j \cdot (1 - \frac{1}{\|y_j\|})\| > 2 - \delta - 2 \cdot (1 + \delta) \cdot (1 - \frac{1}{1+\delta}) = 2 - 3\delta > 2 - \varepsilon$, as needed. $\square$

Observe that this lemma is still true even if the elements x, y are considered as elements of $B(X)$. Such pairs of elements will be used in the further conclusions repeatedly. Let us fix a special notation for short:

Definition 1 For a pair of elements $x, y \in B(X)$ the expression $\frac{x+y}{2}$ will be called an ε -arithmetic mean if $\|x - y\| > 2 - \varepsilon$.

2. Sufficient conditions for the big slice property of $\text{Lip}(K)$

The following technical lemma will be used in this section several times.

Lemma 2 Assume that for every $\varepsilon > 0$ there are two systems of points $\{t_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty \subset K$ (write $\rho(t_n, \tau_n) = \rho_n$) and numbers $R_n > \rho_n > r_n > 0$ with

$$0 < \frac{2\rho_n}{R_n - \rho_n} \leq \varepsilon, \quad 0 < \frac{2r_n}{\rho_n - r_n} \leq \varepsilon \quad (1)$$

and let the system of rings $\{B(t_n, R_n) \setminus B(t_n, r_n)\}_{n=1}^\infty$ be disjoint. Then $\text{Lip}(K)$ has the big slice property.

Proof. Let us show that the condition of lemma 1 is satisfied. Take any $\varepsilon > 0$ and $f \in B(\text{Lip}(K))$. For every $k \in \mathbb{N}$ define

$$x_k(t) = f(t) \text{ when } t \notin B(t_k, R_k) \setminus B(t_k, r_k).$$

Besides, take $x_k(\tau_k) = f(t_k) + \rho_k$. So, $x_k(\cdot)$ is defined on a subset of K . Let us estimate the norm $\|x_k\| = \sup |x_k(t; \tau)|$. There are three possibilities on the disposal of t, τ .

If neither t nor τ equals τ_k , then $|x_k(t; \tau)| = |f(t; \tau)| \leq \|f\| \leq 1$. Let one of the points, say τ , be τ_k and assume $t \notin B(t_k, R_k)$. Then

$$\begin{aligned} |x_k(t; \tau)| &= \frac{|f(t_k) + \rho_k - f(t)|}{\rho(t, \tau_k)} \leq \frac{\|f\| \cdot \rho(t, t_k) + \rho_k}{\rho(t, \tau_k)} \\ &\leq \frac{\rho(t, \tau_k) + 2\rho_k}{\rho(t, \tau_k)} \leq 1 + \frac{2\rho_k}{R_k - \rho_k} \leq 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

In the last case let $\tau = \tau_k$, $t \in B(t_k, r_k)$. Then again

$$|x_k(t; \tau)| \leq \frac{\|f\| \cdot \rho(t, t_k) + \rho_k}{\rho(t, \tau_k)} < \frac{r_k + \rho_k}{\rho_k - r_k} = 1 + \frac{2r_k}{\rho_k - r_k} \leq 1 + \varepsilon.$$

So, $\|x_k\| \leq 1 + \varepsilon$. Extend x_k to a function on K preserving the Lipschitz constant, still denoted by x_k . Build $y_k(t)$ by the same scheme with $y_k(\tau_k) = f(t_k) - \rho_k$. This results in the following inequality:

$$\|x_k - y_k\| \geq \frac{(x_k - y_k)(\tau_k) - (x_k - y_k)(t_k)}{\rho(t_k, \tau_k)} = \frac{2\rho_k}{\rho_k} = 2.$$

Now take any $n \in \mathbb{N}$ and observe that the last sum of

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{x_k + y_k}{2} \right\| = \frac{1}{n} \cdot \left\| \sum_{k=1}^n \left(f - \frac{x_k + y_k}{2} \right) \right\|$$

is nonzero only in the rings $B(t_k, R_k) \setminus B(t_k, r_k)$, where it takes the values of the corresponding summands. Therefore,

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{x_k + y_k}{2} \right\| \leq \frac{\|f\| + 2 \cdot (1 + \varepsilon)}{n} \leq \frac{4}{n} \rightarrow 0$$

as $n \rightarrow \infty$. So, f is approximated by convex combinations of elements of the form $\frac{x+y}{2}$, as we needed for lemma 1. $\text{Lip}(K) \in \text{BSP}$. $\square$

Now we are able to establish the sufficient conditions on K for the big slice property of $\text{Lip}(K)$ which were announced above.

Theorem 1 *If $\inf \{ \rho(t, \tau) : t \neq \tau \in K \} = 0$, then $\text{Lip}(K) \in \text{BSP}$.*

Proof. For every $\varepsilon > 0$ we shall construct a system of points satisfying the condition of lemma 2. Take distinct points t_n and τ_n (write $\rho(t_n, \tau_n) = \rho_n$) such that $\rho_n \rightarrow 0$. Define R_n and r_n by

$$\frac{2\rho_n}{R_n - \rho_n} = \varepsilon, \quad \frac{2r_n}{\rho_n - r_n} = \varepsilon$$

and observe that these values also tend to zero.

Now in connection with the structural properties of the system of sets $B(t_n, R_n)$ we have to split two opposite cases. Let us consider the first one: assume that for every subsequence $\{t_k\}_{k \in I} \subset \{t_n\}$ a $k_0 \in I$ can be found such that only finite set of indices $k \in I$ give

$$\rho(t_{k_0}, t_k) \leq R_{k_0} + R_k.$$

Then the following inductive procedure provides us with the required subsequence. Applying the assumption, take $t_{k_1} \in \{t_n\}_{n=1}^\infty$ and sufficiently large $n_1 \geq k_1$ such that $\rho(t_{k_1}, t_k) > R_{k_1} + R_k$ for any $k > n_1$. Then take $t_{k_2} \in \{t_n\}_{n=n_1+1}^\infty$ and $n_2 \geq k_2$ such that $\rho(t_{k_2}, t_k) > R_{k_2} + R_k$ for all $k > n_2$. Continuing in this manner, we build a subsequence $\{t_{k_1}, t_{k_2}, \dots\}$ satisfying for all $i \neq j$

$$\rho(t_{k_i}, t_{k_j}) > R_{k_i} + R_{k_j}.$$

It obviously implies that the system of rings $B(t_{k_n}, R_{k_n}) \setminus B(t_{k_n}, r_{k_n})$ is disjoint. The condition of lemma 2 is satisfied, hence, $\text{Lip}(K)$ has the big slice property.

Consider the second case: let $N \subset \mathbb{N}$ be an infinite subsequence such that every $n \in N$ defines an infinite $N_n \subset N$ giving for all $k \in N_n$

$$\rho(t_n, t_k) \leq R_n + R_k. \quad (2)$$

By the infinity of N and since $R_n \rightarrow 0$ we can find $n_1 \in N$ such that the condition (2) for all $k \in N_{n_1}$ holds simultaneously with the inequality $R_{n_1} < 1/2$. Since N_{n_1} is also infinite, it contains an n_2 also satisfying (2) for all $k \in N_{n_2}$ simultaneously

with $R_{n_2} < 1/4$. Further, by the infinity of N_{n_2} it contains n_3 such that for all $k \in N_{n_3}$ (2) holds together with $R_{n_3} < 1/8$. Continuing in this manner, we find an infinite sequence t_{n_k} . This sequence is fundamental because

$$\begin{aligned} \rho(t_{n_k}, t_{n_p}) &\leq (R_{n_k} + R_{n_{k+1}}) + (R_{n_{k+1}} + R_{n_{k+2}}) + \cdots + (R_{n_{p-1}} + R_{n_p}) \\ &< \frac{2}{2^k} + \frac{2}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{2}{2^{p-1}} < \frac{1}{2^{k-2}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

as $k \rightarrow \infty$. Since K is a complete space, t_{n_k} converges to some $t \in K$. Thereby, the simplest way to obtain a disjoint system of rings is to pass to a system having a common center in the point t . Let τ'_1 be an arbitrary element t_{n_k} ; write $\rho'_1 = \rho(t, \tau'_1)$ and take R'_1 and r'_1 such that the inequalities (1) for these values hold. Define a ring $B'_1 = B(t, R'_1) \setminus B(t, r'_1)$. In order to define the next ring take any positive $R'_2 \leq r'_1$ and k such that $\rho(t, t_{n_k}) = \rho'_2$ satisfy (1) together with sufficiently little r'_2 . Write $\tau'_2 = t_{n_k}$ and $B'_2 = B(t, R'_2) \setminus B(t, r'_2)$. Continuing this process, we obtain a sequence of disjoint rings as needed in lemma 2. $\text{Lip}(K)$ has the big slice property. $\square$

Corollary 1 For a compact space K $\text{Lip}(K)$ has the BSP if and only if K is infinite.

Theorem 2 If K is unbounded, i.e., $\sup \{ \rho(t, \tau) : t \neq \tau \in K \} = \infty$, then $\text{Lip}(K) \in \text{BSP}$.

Proof. The unboundedness condition implies that for every $t \in K$ and every $r > 0$ there is $\tau \in K$ such that $\rho(t, \tau) > r$.

Given an $\varepsilon > 0$, we build again a system of rings in order to apply lemma 2. Take any $t \in K$ and write $t_n = t$; also take any $r_1 > 0$. Applying the unboundedness of K , find $\tau_1 \in K$ (write $\rho(t_1, \tau_1) = \rho_1$) and $R_1 > 0$ such that the inequalities (1) hold for $n = 1$. Then write $r_2 = R_1$ and find $\tau_2 \in K$ ($\rho(t_2, \tau_2) = \rho_2$) and $R_2 > 0$ such that the inequalities hold for $n = 2$. Continuing similarly, we build a disjoint sequence of rings $B(t_n, R_n) \setminus B(t_n, r_n)$. Lemma 2 can be applied; $\text{Lip}(K)$ has the big slice property. $\square$

Consequently, the cases when $\text{Lip}(K)$ fails the BSP are contained in the cases of spaces K such that the "limiting distances" $\sup_{t \neq \tau} \rho(t, \tau)$ and $\inf_{t \neq \tau} \rho(t, \tau)$ are bounded from both zero and infinity. But even in this case $\text{Lip}(K)$ may have the big slice property.

Example. Let K be an arbitrary infinite set. Introduce the metric ρ on K by taking $\rho(t, \tau) = C > 0$ for all $t \neq \tau$. Then $\text{Lip}(K)$ has the big slice property.

Proof. $\rho(t, \tau)$ is constant for all $t \neq \tau$, so we may assume that $C = 1$. Fix an $f \in B(\text{Lip}(K))$ and write $\alpha_0 = \inf_K f(t)$. Now take any disjoint sequence $t_1, \tau_1, t_2, \tau_2, \dots \in K$ and define for all indices k

$$x_k(t_k) = \alpha_0, \quad x_k(\tau_k) = \alpha_0 + 1, \quad \text{and } x_k(t) = f(t) \text{ for } t \notin \{t_k, \tau_k\}.$$

Correspondingly,

$$y_k(t_k) = \alpha_0 + 1, \quad y_k(\tau_k) = \alpha_0, \quad \text{and } y_k(t) = f(t) \text{ for the rest of } K.$$

Obviously, x_k and y_k lie in $B(\text{Lip}(K))$ and $\|x_k - y_k\| = 2$. Moreover, f is approximated by convex combinations of elements $\frac{x_k + y_k}{2}$:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{x_k + y_k}{2} \right\| = \frac{1}{n} \cdot \left\| \sum_{k=1}^n \left(f - \frac{x_k + y_k}{2} \right) \right\| \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0,$$

as we needed to apply lemma 1. $\square$

A less trivial example can be constructed by means of discrete subsets of l_∞ . Define for a natural n

$$K = \{(x_1, x_2, \dots) \in l_\infty : \text{all } x_k \in \{1, \dots, n\}\}. \quad (3)$$

If $n = 2$, K is a discrete metric space like in the example above, so $\text{Lip}(K) \in \text{BSP}$.

If $n = 3$, the space $\text{Lip}(K)$ again possesses the big slice property, but the proof becomes much more complicated.

Question. Does $\text{Lip}(K)$ have the big slice property for spaces K of the form (3) with any n ?

3. Necessary conditions for the big slice property of $\text{Lip}(K)$

Theorem 3 *Under the following condition on K $\text{Lip}(K)$ fails the BSP:*

There is an $f \in S(\text{Lip}(K))$, a sequence $\{t_1, s_1, \dots, t_m, s_m\} \in K$ with $f(t_i; s_i) = 1$ for $i = 1, \dots, m$, and an $\varepsilon > 0$ such that every ε -arithmetic mean $\frac{x+y}{2}$ satisfies for some i

$$\frac{x+y}{2}(t_i; s_i) < 1 - \varepsilon.$$

Proof. Assume to the contrary that $\text{Lip}(K) \in \text{BSP}$. Then we can approximate f by a convex combination of some $\frac{\varepsilon}{m}$ -arithmetic means:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \frac{x_k + y_k}{2} \right\| < \frac{\varepsilon}{m}.$$

In particular,

$$\frac{\varepsilon}{m} > \left(f - \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \frac{x_k + y_k}{2} \right)(t_i; s_i) = f(t_i; s_i) - \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \frac{x_k + y_k}{2}(t_i; s_i).$$

Consequently,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \frac{x_k + y_k}{2}(t_i; s_i) > 1 - \frac{\varepsilon}{m}. \quad (4)$$

On the other hand, by assumption on $\{t_i, s_i\}$, for every k there is an i such that

$$\frac{x_k + y_k}{2}(t_i; s_i) < 1 - \varepsilon. \quad (5)$$

For every i define A_i as the set of all indices k for which (5) holds; write $\alpha_i = \sum_{k \in A_i} \lambda_k$. Observe that among the α_i 's there is at most one $\alpha_{i_0} \geq \frac{1}{m}$ (otherwise $1 = m \cdot \frac{1}{m} > \sum_{i=1}^m \alpha_i \geq \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$). Therefore,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \frac{x_k + y_k}{2}(t_{i_0}; s_{i_0}) &< \sum_{k \in A_{i_0}} \lambda_k \cdot (1 - \varepsilon) + \sum_{k \notin A_{i_0}} \lambda_k \cdot 1 \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k - \varepsilon \cdot \sum_{k \in A_{i_0}} \lambda_k \leq 1 - \frac{\varepsilon}{m}, \end{aligned}$$

which contradicts (4). $\square$

Remark. Observe that there is no need to define the function f on the whole space K . All conditions on f , in fact, refer to the properties of $\text{Lip}(\{t_1, s_1, \dots, t_m, s_m\})$.

This idea is developed in the following theorem 4.

Theorem 4 *Under the following condition on K $\text{Lip}(K)$ fails the BSP:*

There is an $\varepsilon > 0$, a finite subset $M \subset K$, and an extreme point f of $B(\text{Lip}(M))$ such that every ε -arithmetic mean $\frac{x+y}{2}$ of $\text{Lip}(K)$ satisfies

$$\left\| f - \frac{x+y}{2} \right\|_M \Big|_{\text{Lip}(M)} > \varepsilon.$$

In order to prove this theorem we establish a characterization of extreme points of $B(\text{Lip}(M))$ at first.

Lemma 3 *Let M be a finite metric space, $f \in B(\text{Lip}(M))$. f is an extreme point of $B(\text{Lip}(M))$ if and only if for every pair of distinct points $t, \tau \in M$ there is a sequence $s_0, \dots, s_n \in M$ with $s_0 = t$, $s_n = \tau$ such that $|f(s_{i-1}; s_i)| = 1$ for all $i = 1, \dots, n$.*

Proof. We prove sufficiency at first. Assume that $f = \frac{g+h}{2}$ for some $g, h \in B(\text{Lip}(M))$ and let us prove that $g = f = h$. It suffices to prove that $g(t; \tau) = f(t; \tau)$ for all $t, \tau \in M$. Let $g(t; \tau) \neq f(t; \tau)$ and find the corresponding $s_0, \dots, s_n$. Since

$$\sum_{i=1}^n [(f - g)(s_i) - (f - g)(s_{i-1})] = (f - g)(\tau) - (f - g)(t) \neq 0,$$

$g(s_{i-1}; s_i) \neq f(s_{i-1}; s_i) = \pm 1$ for some i . Denote s_{i_0-1} and s_{i_0} as s, s' in such order that $f(s; s') = +1$. Then $g(s; s') < 1$, since $\|g\| \leq 1$. Therefore, by the equality

$f = \frac{g+h}{2}$, $h(s; s') > 1$ and hence $\|h\| > 1$, which is not possible. Consequently, $g(t; \tau) = f(t; \tau)$. f is an extreme point.

In order to prove the necessity assume that for some $t \neq \tau \in M$ the condition is not satisfied. Consider the set

$$A = \{\tau\} \cup \{s \in M : \text{there are } s=s_0, s_1, \dots, s_n=\tau \text{ with } |f(s_{i-1}; s_i)| = 1 \forall i\}.$$

$A \neq M$, since $t \notin A$. Define

$$\alpha_1 = \sup\{\alpha \geq 0 : \|f + \chi_A \cdot \alpha\| \leq 1\},$$

$$\alpha_0 = \inf\{\alpha \leq 0 : \|f + \chi_A \cdot \alpha\| \leq 1\}.$$

Observe that $\alpha_1 \neq 0$. Indeed, otherwise for every $\alpha > 0$ $\|f + \chi_A \cdot \alpha\| > 1$, i.e., $|(f + \chi_A \cdot \alpha)(u; s)| > 1$ for some $u \notin A$, $s \in A$. Passing to the limit as $\alpha \rightarrow 0$ and applying the fact that M is finite, find $u \notin A$ and $s \in A$ such that $|f(u; s)| = 1$. But it means that $u \in A$, which is a contradiction. By the same argument $\alpha_0 \neq 0$.

Then, for $\alpha = \min\{|\alpha_0|, |\alpha_1|\} > 0$

$$\|f + \chi_A \cdot \alpha\| \leq 1 \text{ and } \|f - \chi_A \cdot \alpha\| \leq 1.$$

This implies that f is not an extreme point of $B(\text{Lip}(M))$, because $f = \frac{f + \chi_A \cdot \alpha + f - \chi_A \cdot \alpha}{2}$. $\square$

Proof of theorem 4. Denote $r = \inf_M \rho(t, \tau) > 0$, $R = \sup_M \rho(t, \tau) < \infty$. The theorem will be proved by applying theorem 3. Let $\frac{x+y}{2}$ be any $\frac{\varepsilon \cdot r}{|M| \cdot R}$ -arithmetic mean. In particular, it is also an ε -arithmetic mean, so, by the condition there are $s, s' \in M$ such that

$$\left(f - \frac{x+y}{2}\right)(s') - \left(f - \frac{x+y}{2}\right)(s) > \varepsilon \cdot \rho(s, s') > \varepsilon \cdot r. \quad (6)$$

Applying lemma 3 find in M $s_0=s, s_1, \dots, s_n=s'$ such that $|f(s_{i-1}; s_i)| = 1$ for every $i = 1, \dots, n$. We may also assume that $s_i \neq s_j$ when $i \neq j$, so $n < |M|$.

Let us show that for some $i_0 \in \{1, \dots, n\}$

$$\left|\left(f - \frac{x+y}{2}\right)(s_{i_0}) - \left(f - \frac{x+y}{2}\right)(s_{i_0-1})\right| > \frac{\varepsilon \cdot r}{|M|}.$$

Otherwise

$$\begin{aligned} \left|\left(f - \frac{x+y}{2}\right)(s') - \left(f - \frac{x+y}{2}\right)(s)\right| &\leq \sum_{i=1}^n \left|\left(f - \frac{x+y}{2}\right)(s_i) - \left(f - \frac{x+y}{2}\right)(s_{i-1})\right| \\ &\leq n \cdot \frac{\varepsilon \cdot r}{|M|} < |M| \cdot \frac{\varepsilon \cdot r}{|M|} = \varepsilon \cdot r, \end{aligned}$$

which contradicts (6). Denote s_{i_0-1} and s_{i_0} as t, τ in such order that $f(t; \tau) = +1$. Then

$$\frac{\varepsilon \cdot r}{|M|} < \left|\left(f - \frac{x+y}{2}\right)(\tau) - \left(f - \frac{x+y}{2}\right)(t)\right|$$

$$= \rho(t, \tau) \cdot \left| f(t; \tau) - \frac{x+y}{2}(t; \tau) \right| \leq R \cdot \left| 1 - \frac{x+y}{2}(t; \tau) \right|.$$

And hence

$$\frac{x+y}{2}(t; \tau) < 1 - \frac{\varepsilon \cdot r}{|M| \cdot R}, \quad (7)$$

as we needed to apply theorem 3. $\text{Lip}(K)$ fails the big slice property. $\square$

Let us construct an example of a space $\text{Lip}(K) \notin \text{BSP}$ on the base of theorem 4.

At first we have to establish some general properties of ε -arithmetic means.

Consider an ε -arithmetic mean $\frac{x+y}{2}$. Since $\|x - y\| > 2 - \varepsilon$, there are $a, b \in K$ such that

$$2 - \varepsilon < (x - y)(a; b) = x(a; b) - y(a; b).$$

Therefore,

$$x(a; b) > 2 - \varepsilon + y(a; b) \geq 1 - \varepsilon; \quad (8)$$

$$y(b; a) > 2 - \varepsilon - x(a; b) \geq 1 - \varepsilon. \quad (9)$$

Finally,

$$\frac{x+y}{2}(a; b) = \frac{x(a; b) + y(a; b)}{2} < \frac{1 - (1 - \varepsilon)}{2} = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (10)$$

Example. Define the sets $M = \{t, \tau\}$, $K = M \cup \{s_1, s_2, \dots\}$ and the metric ρ which takes the following values on K :

$$\rho(t, \tau) = 2, \quad \rho(s_n, s_k) = 1, \quad \rho(t, s_n) = \rho(\tau, s_n) = 1$$

for all numbers n, k . The function f will be defined on M as

$$f(t) = -1, \quad f(\tau) = 1.$$

Now, let $\frac{x+y}{2}$ be an arbitrary ε -arithmetic mean. Let us show that $\varepsilon < |(f - \frac{x+y}{2})(t; \tau)| = |1 - \frac{x+y}{2}(t; \tau)| = 1 - \frac{x+y}{2}(t; \tau)$, i.e., that

$$\frac{x+y}{2}(\tau) - \frac{x+y}{2}(t) < 2 \cdot (1 - \varepsilon).$$

Take any of the elements $a, b \in K$ providing $(x - y)(a; b) > 2 - \varepsilon$. There are three cases on their disposal.

In the first case assume that both a and b lie in $\{s_1, s_2, \dots\}$. Then

$$\begin{aligned} & \frac{x+y}{2}(\tau) - \frac{x+y}{2}(t) = \frac{1}{2} \cdot (x(\tau) - x(t) + y(\tau) - y(t)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x(\tau) - x(a) + x(a) - x(b) + x(b) - x(t) + y(\tau) - y(b) + y(b) - y(a) + y(a) - y(t)), \end{aligned}$$

and due to the inequalities (8) and (9)

$$\leq \frac{1}{2} \cdot (1 - 1 + \varepsilon + 1 + 1 - 1 + \varepsilon + 1) = 1 + \varepsilon < 2 - 2\varepsilon$$

if $\varepsilon < 1/3$. In the second case let $a \in M$, $b \in \{s_1, s_2, \dots\}$ (or contrariwise). Then by the triangle inequality and equation (10)

$$\frac{x+y}{2}(\tau) - \frac{x+y}{2}(t) < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 + \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \cdot 1 = 1 + \frac{\varepsilon}{2} < 2 - 2\varepsilon$$

if $\varepsilon < 2/5$. In the last case $a = t$, $b = \tau$ (or contrariwise). Then by the equation (10)

$$\frac{x+y}{2}(\tau) - \frac{x+y}{2}(t) < \frac{\varepsilon}{2} < 2 - 2\varepsilon$$

if $\varepsilon < 4/5$. In any case we may apply Theorem 4 deducing that $\text{Lip}(K)$ fails the big slice property.

REFERENCES

1. Benyamini Y. and Lindenstrauss J. Geometric Nonlinear Functional Analysis, Vol. 1. - Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, - 2000. - 48. - 488 p.
2. Ivakhno Y. On sets with extremely big slices. // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, - 2006. - V. 2. - 1. - P. 94-103.
3. Kadets V. M., Shvidkoy R. V., Sirotkin G. G. and Werner D. Banach spaces with the Daugavet property. // Trans. Amer. Math. Soc., - 2000. - 352. - P. 855-873.
4. Ivakhno Y., Kadets V. M. and Werner D. The Daugavet property for spaces of Lipschitz functions. // To appear in Mathematica Scandinavica.

АНОТАЦІЇ

УДК 533.72

Взаємодія смерчових потоків у випадку моделі пружних куль

Гордевський В.Д., Сисоєва Ю.А. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2006, № 749. Математика, прикладна математика і механіка, с. 3–12.

Здобуто наближений опис процесу взаємодії між двома смерчеподібними потоками в досить розрідженому газі з пружних куль. Такі потоки обертаються й рухаються поступально, причому максвелівські розподіли, що їм відповідають, є точними розв'язками рівняння Больцмана. Кожен з потоків має дві різні осі — густини та швидкостей, взаємне розташування яких певним чином пов'язане зі ступенем точності наближеного бімодального розв'язку.

Бібліогр.: 15 найм.

УДК 517.94

Асимптотичні властивості глобальних атракторів задачі нелінійної термопружності Міндліна-Тимошенка

Фастовська Т.Б. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2006, № 749. Математика, прикладна математика і механіка, с. 13–29.

Розглянуто модель Міндліна-Тимошенка для тонкої пластинки з нелінійним зовнішнім навантаженням. Доведено наявність компактного глобального атрактора системи та вивчено його властивості у випадках, коли модуль зсуву прямує до нескінченності або до нуля.

Бібліогр.: 12 найм.

УДК 517.948

Функціональна модель Павлова обмеженого несамоспряженого оператора

Золотарьов В.О., Розуменко О.В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2006, № 749. Математика, прикладна математика і механіка, с. 30–49.

Побудовано функціональну модель для довільного обмеженого несамоспряженого оператора, що діє в гільбертовому просторі H . Дисипативність оператора не передбачається. Ця модель є узагальненням функціональної моделі Б.С. Павлова та реалізується оператором множення на незалежну змінну у ваговому просторі Харді у смузі.

Бібліогр.: 12 найм.

УДК 517.9:535.4

Інтегральне рівняння задачі електростатики для сферичного сегменту та діелектричного заокруглення конуса.

Резуменко В.О. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2006, № 749. Математика, прикладна математика і механіка, с. 50–56.

Методом регуляризації вилучена і обернена головна частина оператора задачі електростатики для сферичного сегменту, що занурений у діелектричне заокруглення конуса. Цей метод базується на застосуванні техніки контурного інтегрування та інтегрального перетворення Абеля. В результаті одержано ефективно розв'язуване інтегральне рівняння Фредгольма II роду з компактным оператором у гільбертовому просторі $L_2(0, \gamma)$. Розглянуті окремі випадки формулювання проблеми.

Бібліогр.: 15 найм.

УДК 539.3

Контактна задача еластодинаміки для кругової тріщини під впливом косонаправленого навантаження

Меньшиков О. В., Гузь І. А. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2006, № 749. Математика, прикладна математика і механіка, с. 57–64.

Роботу присвячено вивченню контактної взаємодії протилежних берегів кругової тріщини під впливом косонаправленої хвилі розтягу-стиску. Задачу розв'язано за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь з використанням ітераційного алгоритму. Досліджено залежність коефіцієнтів інтенсивності напружень від частоти хвилі, що падає, та величини коефіцієнту тертя.

Мал.: 4. Бібліогр.: 8 найм.

УДК 517.977

Про відображуваність нелінійних систем на feedforward-системи у класі C^1 .

Ігнатович С. Ю. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2006, № 749. Математика, прикладна математика і механіка, с. 65–79.

Отримано критерії відображуваності нелінійних систем з одновимірним керуванням на feedforward-системи класу C^1 із заміною керування та без заміни керування.

Бібліогр.: 9 найм.

УДК 517.574

Субгармонічна функція дуже нерегулярного зростання

Шуїгі А. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2006, № 749. Математика, прикладна математика і механіка, с. 80–85.

Більш тонкою характеристикою зростання субгармонічної функції ніж індикатор та нижній індикатор є гранична множина Азаріна цієї функції. Ми наводимо приклад субгармонічної функції дуже нерегулярного зростання і знаходимо граничну множину Азаріна цієї функції. Крайня нерегулярність зростання функції виражається в тому, що гранична множина Азаріна ріс-совської міри цієї функції складається із мір з одноточковим носієм.

Бібліогр.: 2 найм.

УДК 532.5

Малі рухи ідеальної рідини в посудині з перфорованими перегородками

Б о р и с о в Д. И. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2006, № 749. Математика, прикладна математика і механіка, с. 86–95 .

Досліджується задача про малі коливання ідеальної рідини в частково заповненій посудині, поділеній на секції перфорованими перегородками з великою кількістю отворів малого діаметру. Наведено математичне формулювання задачі з усередненими умовами спряження на перегородках, розв'язки якої наближають точні розв'язки при необмеженому зростанні кількості отворів. Наведені результати дослідження еволюційної і спектральної усереднених задач.

Бібліогр.: 10 найм.

УДК 537.84

Стійкість циліндричної зони струмонесучої рідини

Р у д н є в Ю. І. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2006, № 749. Математика, прикладна математика і механіка, с. 96–108 .

Розглядається задача про стійкість рівноваги циліндричної зони струмонесучої рідини, яка взаємодіє із зовнішнім магнітним полем. Запропоновано метод дослідження стійкості, оснований на аналізі спектру частот вільних коливань системи, що розглядається. Побудовано границі області стійкості у просторі безрозмірних параметрів системи.

Мал.: 2. Бібліогр.: 10 найм.

УДК 517.982.22

Властивість великих зрізок у просторах функцій Ліпшиця

І в а х н о Є. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2006, № 749. Математика, прикладна математика і механіка, с. 109–118 .

Простір Банаха має властивість великих зрізок, якщо кожна зрізка одиничної кулі має діаметр 2. Нехай K - метричний простір. Ми встановлюємо деякі достатні та деякі необхідні умови для наявності властивості великих зрізок у просторі $Lip(K)$ всіх дійсних функцій Ліпшиця на K . Наприклад, $Lip(K)$ має властивість великих зрізок, якщо K - нескінченний компакт. У випадку скінчених множин K ми приводимо характеристизацію крайніх точок одиничної кулі в $Lip(K)$.

Бібліогр.: 4 найм.

ЗМІСТ

Гордецкий В.Д., Сысоева Ю.А. Взаимодействие смерчевых потоков в случае модели твердых сфер	3
Fastovska T.B. Asymptotic properties of global attractors for nonlinear Mindlin-Timoshenko model of thermoelastic plate	13
Золотарев В.А., Розуменко О.В. Функциональная модель Павлова ограниченного несамосопряженного оператора	30
Резуменко В.А. Интегральное уравнение задачи электростатики для сферического сегмента и диэлектрического закругления конуса	50
Menshykov O.V., Guz I.A. Contact problem of elastodynamics for a penny-shaped crack under an oblique loading	57
Игнатович С.Ю. Об отображаемости нелинейных систем на feedforward-системы в классе C^1	65
Шуиги А. Субгармоническая функция с крайне нерегулярным ростом	80
Борисов Д.И. Малые движения идеальной жидкости в сосуде с перфорированными перегородками	86
Руднев Ю.И. Устойчивость цилиндрической зоны токонесущей жидкости	96
Ivakhno Y. Big slice property in the spaces of Lipschitz functions	109
АНОТАЦІЇ	119

CONTENTS

Gordevskyy V.D., Sysoyeva Yu.A. Interaction between eddy-flows in the model of hard spheres	3
Fastovska T.B. Asymptotic properties of global attractors for nonlinear Mindlin-Timoshenko model of thermoelastic plate	13
Zolotarev V.A., Rozumenko O.V. Pavlov functional model of bounded non-selfadjoint operator	30
Rezunenko V.A. Integral equation of the electrostatic problem for a spherical segment and a dielectric rounding of a cone	50
Menshykov O.V., Guz I.A. Contact problem of elastodynamics for a penny-shaped crack under an oblique loading	57
Ignatovich S.Yu. On criterions for mappability to feedforward systems in the class C^1 .	65
Chouigui A. Subharmonic function with extremely nonregular growth.	80
Borysov D. I. Small motions of ideal fluid in vessel with perforated bafflers	86
Rudnyev Yu. I. Stability of cylindrical zone of current-carrying liquid	96
Ivakhno Y. Big slice property in the spaces of Lipschitz functions	109
SUMMARY	119

Visit our Web-page

<http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/vestnik/>

to find

- Information for Manuscript Preparation
- Abstracts
- Editorial Board

Збірник наукових праць

Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна
№ 749 Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

Підписано до друку 29.12.06 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.

Умовн.- друк. арк. – 5,6

Обл.- вид. арк. – 6,5

Наклад 100 прим.

Ціна договірна

15-00

61077, Харків, м. Свободи, 4, Харківський національний університет
імені В.Н.Каразіна

Видавничий центр ХНУ.

Віддруковано ФОП "Петрова І.В."

61144, Харків-144, вул. Гв. Шіронінців 79-В, к. 137, тел. 362-01-52

Свідоцтво про державну реєстрацію В00 № 948011 від 03.01.03

