ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 32 Записки механико-математического факультета и Харьковского математического общества 1966

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ОБЛАСТЯХ СО СЛОЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Е. Я. Хруслов

В работе В. А. Марченко и автора [1] была рассмотрена последовательность первых краевых задач для уравнения Гельмгольца в многосвязных бесконечных областях $D^{(n)}$, граница которых состоит из нескольких связных компонент $S_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, N^{(n)})$. Мы исследовали поведение последовательности функций Грина $G^{(n)}(x, y; k)$ этих задач при $n \to \infty$, когда диаметры отдельных компонент границы $d_i^{(n)}$ и расстояния $r_i^{(n)}$ от этих компонент до некоторой фиксированной поверхности Ляпунова Г стремятся к нулю и при этом выполняются следующие условия:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{(\sigma)} C_i^{(n)} = \int_\sigma f(x)\, dS_x,$$

$$2)\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \max_i \sum_{\substack{i \neq j \\ r_{ij}^{(n)} < \rho}} \frac{C_i^{(n)}}{r_{ij}^{(n)}} = \delta(\rho) \text{ и } \lim_{\rho\to 0} \delta(\rho) = 0,$$

где $C_i^{(n)}$ — емкость связных компонент границы; $r_{ij}^{(n)}$ — расстояние между i-й и j-й компонентами границы; $f(x)$ — непрерывная положительная функция, заданная на поверхности Г; $\sum\limits_{(\sigma)} C_i^{(n)}$ — сумма емкостей тех компонент границы, которые проектируются на кусок σ поверхности Г.

Было показано, что при этих условиях существует предел последовательности функций Грина $\{G^{(n)}(x, y; k)\}$

$$\lim_{n\to\infty} G^{(n)}(x, y; k) = G(x, y, k),$$

и предельная функция $G(x, y; k)$ удовлетворяет во всех точках, не лежащих на поверхности Г, уравнению Гельмгольца

$$\Delta G(x, y; k) + k^2 G(x, y; k) = -\delta(x, y),$$

а на самой поверхности Г следующим граничным условиям:

$$G^+(x, y; k) = G^-(x, y; k), \tag{1а}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)^+ - \left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)^- = 4\pi f(x)\, G(x, y; k) \qquad x \in Г, \tag{1б}$$

где знаками + и — отмечены предельные значения функций с разных сторон поверхности Г; n — нормаль к Г, направленная из стороны, которой отвечает знак —, в сторону, которой отвечает знак +.

Отметим, что в формулировку условий, налагаемых на границы областей $D^{(n)}$ явно входит требование, чтобы эти границы состояли из отдельных связных компонент. В настоящей работе это ограничение устраняется. При этом получаются более общие условия, при которых существует предел последовательности функций Грина первых краевых задач.

Мы приведем доказательство для уравнения Лапласа. Переход к уравнению Гельмгольца можно сделать так же, как в работе [1].

§ 1. Рассмотрим в трехмерном пространстве последовательность замкнутых множеств $K^{(n)}$ с границами $\partial K^{(n)}$. Будем предполагать, что все точки границ $\partial K^{(n)}$ — регулярны относительно внешней задачи Дирихле. Обозначим через $G^{(n)}(x, y)$ функции Грина для уравнения Лапласа

$$\Delta G^{(n)}(x, y) = -\delta(x, y) \tag{2}$$

в областях $D^{(n)}$, дополняющих множества $K^{(n)}$ до всего пространства, при нулевом граничном условии на $\partial K^{(n)}$

$$G^{(n)}(x, y) = 0 \text{ при } x \in \partial K^{(n)} \tag{3}$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть при $n \to \infty$ выполнятся следующие условия:*

(*) множества $K^{(n)}$ неограниченно приближаются к некоторой фиксированной ограниченной поверхности Ляпунова Г (т. е. при достаточно больших n все точки $K^{(n)}$ лежат в сколь угодно малой окрестности Г);

(**) существуют и равны пределы

$$\lim_{\rho\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{C^{(n)}(K(x,\rho))}{\pi\rho^2} = \lim_{\rho\to 0}\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{C^{(n)}(K(x,\rho))}{\pi\rho^2} = f(x),$$

где $C^{(n)}(K(x, \rho))$ — емкость компакта, являющегося пересечением множества $K^{(n)}$ с замкнутым шаром $K(x, \rho)$ радиуса ρ с центром в точке $x \in \Gamma$; $f(x)$ — непрерывная положительная функция, заданная на поверхности Г. Тогда равномерно по точкам x, y, пробегающим любые множества, находящиеся на положительном расстоянии от поверхности Г, существует предел последовательности $\{G^{(n)}(x, y)\}$ функций Грина задач (2)—(3)*

$$\lim_{n\to\infty} G^{(n)}(x, y) = G(x, y),$$

и этот предел удовлетворяет уравнению Лапласа (2) во всех точках, не принадлежащих поверхности Г, а на самой Г — граничным условиям (1а)—(1б)

---

* Емкость $C(K)$ компакта K можно определить следующим образом

$$C(K) = \max \mu(K),$$

где максимум берется по множеству мер μ, сосредоточенных на компакте K и таких, чтобы потенциал этих мер

$$U^{\mu}(x) = \int_k \frac{1}{|x-\xi|}\, d\mu(\xi)$$

удовлетворял условию $U^{\mu}(x) \leqslant 1$.

Доказательство. Как известно [2], функцию Грина $G^{(n)}(x, y)$ можно представить в виде

$$G^{(n)}(x, y) = \frac{1}{4\pi\,|x-y|} - \int\limits_{\partial K^{(n)}} \frac{d\mu^{(n)}(\xi, y)}{|y-\xi|}, \tag{4}$$

где $\mu^{(n)}(\xi, y)$ — мера, распределенная на $\partial K^{(n)}$, получаемая в результате выметания точечной массы, равной при данной нормировке $\frac{1}{4\pi}$ и сосредоточенной в точке y на $\partial K^{(n)}$.

Так как при этом имеет место неравенство

$$\mu^{(n)}(K^{(n)}) = \int\limits_{\partial K^{(n)}} d\mu^{(n)}(\xi, y) \leq \frac{1}{4\pi},$$

то последовательность мер $\{\mu^{(n)}\}$ — слабо компактна, т. е. можно выделить такую подпоследовательность $\{n_k\}$, что соответствующая ей последовательность мер $\{\mu^{n_k}\}$ слабо сходится к некоторой мере μ, сосредоточенной в силу условия (*) на поверхности Γ. Совершая в формуле (4) предельный переход по этой последовательности, для любого $x \overline{\in} \Gamma$ получим

$$G(x, y) = \lim_{n=n_k\to\infty} G^{(n)}(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \int\limits_{\Gamma} \frac{d\mu(\xi, y)}{|x-\xi|}, \tag{5}$$

причем легко видеть, что сходимость здесь равномерна по точке x, пробегающей любое множество, находящееся на положительном расстоянии от Γ. Поэтому предельная функция $G(x, y)$ во всех точках x, не принадлежащих поверхности Γ, удовлетворяет уравнению (2).

Исследуем теперь поведение $G(x, y)$ вблизи поверхности Γ. Предварительно установим одно неравенство для емкостей компактов $\Delta K^{(n)}$ (части $K^{(n)}$), которое нам понадобится в дальнейшем. Будем обозначать через $C^{(n)}(F)$ — емкость компакта, являющегося пересечением $K^{(n)}$ с произвольным замкнутым множеством F трехмерного пространства, т. е. $C^{(n)}(F) = C(F \cap K^{(n)})$.

Лемма 1. *Пусть F — произвольное замкнутое множество трехмерного пространства, и $\mathrm{mes}_\Gamma\,(F \cap \Gamma) > 0$*. Тогда найдется такое число $N(F)$, что при всех $n \geqslant N(F)$ имеет место неравенство*

$$C^{(n)}(F) \leq M\ \mathrm{mes}_\Gamma(F \cap \Gamma),$$

где M — постоянная, не зависящая от F и $n \geqslant N(F)$.

Доказательство. Погрузим замкнутое множество $F \cap \Gamma$ в лежащее на поверхности Γ и открытое относительно Γ множество G, так чтобы выполнялось неравенство

$$\mathrm{mes}_\Gamma\, G \leq 2\,\mathrm{mes}_\Gamma\,(F \cap \Gamma), \tag{6}$$

и обозначим через ρ_1 расстояние от множества $F \cap \Gamma$ до границы ∂G множества G.

Пусть $K(x, \rho)$ — замкнутый шар радиуса ρ с центром в произвольной точке $x \in \Gamma$. В силу условия (**) теоремы имеет место неравенство

$$\frac{C^{(n)}(K(x, \rho))}{\pi\rho^2} \leq f(x) + \varepsilon^{+}(x, \rho) + \varepsilon(x, \rho, n),$$

* Всюду здесь через mes_Γ мы будем обозначать лебегову меру на поверхности Γ.

причем $\lim\limits_{\rho\to 0} \varepsilon^+(x, \rho) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon(x, \rho, n) = 0$.

Отсюда, так как $\mathrm{mes}_\Gamma(\Gamma \cap K(x, \rho)) \sim \pi\rho^2$, следует, что для каждой точки $x \in \Gamma$ существуют такие числа $\rho_1(x)$ и $N(x, \rho)$, что при $\rho < \rho_1(x)$ и $n \geqslant N(x, \rho)$ будет выполняться неравенство

$$C^{(n)}(K(x, \rho) \leqslant M_1 \,\mathrm{mes}_\Gamma(\Gamma \cap K(x, \rho)) \qquad (M_1 = 2 \max f(x). \tag{7}$$

Опишем вокруг каждой точки x поверхности Γ открытый шар радиуса $\rho(x) = \min\left(\frac{\rho_1}{2}, \quad \rho_1(x)\right)$. Эти шары покрывают всю поверхность Согласно ламме о покрытии шарами [2] из этой системы шаров можно выделить конечную систему, покрывающую всю поверхность так, что каждая ее точка будет покрыта не более чем N шарами, где N — абсолютная константа. Из последней системы выбросим все те шары, которые не покрывают ни одной точки множества $F \cap \Gamma$. Оставшиеся шары $K_i = K(x_i, \rho_i)$ $(i = 1, 2, \ldots m)$, очевидно, покрывают $F \cap \Gamma$ с кратностью не выше N. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{mes}_\Gamma(K_i \cap \Gamma) \leqslant N \,\mathrm{mes}_\Gamma \bigcup_{i=1}^{m} (K_i \cap \Gamma). \tag{8}$$

Кроме того, так как $\rho_i = \rho(x_i) \leqslant \frac{\rho_1}{2}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{m} (K_1 \cap \Gamma) \subset G$, и значит,

$$\mathrm{mes}_\Gamma \bigcup_{i=1}^{m} (K_i \cap \Gamma) \leqslant \mathrm{mes}_\Gamma G.$$

Отсюда, учитывая (6) и (8), получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{mes}_\Gamma(K_i \cap \Gamma) \leqslant 2N \,\mathrm{mes}_\Gamma(F \cap \Gamma). \tag{9}$$

Так как множество $\bigcup\limits_{i=1}^{m} K_i$ открытое и $F \cap \Gamma \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} K_i$ то из условия (*) теоремы следует, что при достаточно больших n $(n \geqslant N_1)$ $F \cap K^{(n)} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} K_i$. Поэтому для всех $n \geqslant \max(N_1, N(x_1, \rho_1), N(x_2, \rho_2), \ldots N(x_m, \rho_m))$ в силу (7) и (9) и полуаддитивности емкости имеем

$$C^{(n)}(F) \leqslant \sum_{i=1}^{m} C^{(n)}(\overline{K}_i) \leqslant M_1 \sum_{i=1}^{m} \mathrm{mes}_\Gamma(\Gamma \cap K_i) \leqslant 2M_1 N \,\mathrm{mes}_\Gamma(F \cap \Gamma),$$

что и требовалось доказать.

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые понятия теории потенциала. Прежде всего определим внутреннюю емкоость $\underline{C}(E)$ и внешнюю емкость $\overline{C}(E)$ произвольного множества E:

$$\underline{C}(E) = \sup_{K \subset E} C(K),$$

где K — компакт;

$$\overline{C}(E) = \inf_{\underline{G} \subset E} C(G)$$

где G — открытое множество. Как показал Шоке, для борелевских множеств E емкости $\underline{C}(E)$ и $\overline{C}(E)$ совпадают между собой.

Мера γ называется равновесной мерой компакта K, а ее потенциал $U^{\gamma}(x)$ — равновесным потенциалом, если $\gamma(K) = C(K)$, $U^{\gamma}(x) \leqslant 1$ всюду, а на самом компакте K с точностью до множества нулевой внутренней емкости выполняется равенство $U^{\gamma}(x) = 1$.

Мы будем пользоваться также следующей простой леммой.

***Лемма* 2.** *Пусть мера μ распределена на компакте K и ее потенциал $U^{\mu}(x)$ удовлетворяет неравенствам: $U^{\mu}(x) \leqslant M$ всюду, а на самом компакте с точностью до множества нулевой внутренней емкости $U^{\mu}(x) \geqslant m$.*
Тогда имеют место неравенства

$$m \leqslant \frac{\mu(K)}{C(K)} \leqslant M.$$

Доказательство. Пусть E_1 = множество точек компакта K, где $U^{\mu}(x) < m$, а E_2 — множество точек компакта K, где потенциал равновесной меры $U^{\gamma}(x)$ компакта K меньше 1. Множества E_1 и E_2 имеют нулевую внутреннюю емкость.

Так как всюду $U^{\mu}(x) < M$ и $U^{\gamma}(x) < 1$, то из определения емкости компакта вытекает, что для любого компакта K_0 нулевой емкости $\mu(K_0) = 0$ и $\gamma(K_0) = 0$.

Следовательно, $\gamma(E_1) = 0$ и $\mu(E_2) = 0$, т. е. $U^{\mu}(x) \geqslant m$ γ — почти всюду и $U^{\gamma}(x) = 1$ μ — почти всюду.

Учитывая это, получаем:

$$mC(K) = m\gamma(K) \leqslant \int_K U^{\mu}(x)\, d\gamma(x) = \int_K\int_K \frac{1}{|x-\xi|}\, d\mu(\xi)\, d\gamma(x) =$$

$$= \int_K U^{\gamma}(x)\, d\mu(x) = \mu(K),$$

откуда $\dfrac{\mu(K)}{C(K)} \geqslant m$.

Аналогично

$$MC(K) = M\gamma(K) \geqslant \int_K U^{\mu}(x)\, d\gamma(x) = \int_K U^{\gamma}(x)\, d\mu(x) = \mu(K)$$

и $\dfrac{\mu(K)}{C(K)} \leqslant M$. Лемма доказана.

Вернемся к интересующей нас последовательности функций Грина $G^{(n)}(x, y)$. Так как в формуле (4) меры $\mu^{(n)}$ получены в результате выметания точечной массы, равной $\dfrac{1}{4\pi}$ из точки $y \in \overline{K^{(n)}}$ на границу компактов $K^{(n)}$, то

$$\int_{\partial K^{(n)}} \frac{1}{|x-\xi|}\, d\mu^{(n)}(\xi, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} \quad \text{при } x \in K^{(n)},$$

Отсюда, учитывая положительность $\mu^{(n)}$, получаем, что для любого компакта $\Delta K^{(n)} \subseteq K^{(n)}$ при достаточно больших n

$$\int_{\Delta K^{(n)}} \frac{1}{|x-\xi|}\, d\mu^{(n)}(\xi, y) < \frac{1}{2\pi d} \quad x \in \Delta K^{(n)},$$

где d — расстояние от полюса y функции Грина $G^{(n)}(x, y)$ до поверхности Г.

Из этого неравенства в силу леммы 2 следует, что

$$\mu^{(n)}(\Delta K^{(n)}) < \frac{1}{2\pi d} C(\Delta K^{(n)}). \tag{10}$$

Теперь мы можем доказать следующую лемму.

Лемма 3. *Предельная мера* μ *(слабый предел мер* $\mu^{(n)}$ *по подпоследовательности* $\{n_k\}$*) — абсолютно непрерывна на поверхности* Г *и имеет на* Г *ограниченную плотность* $\varphi(\xi, y)$.

Доказательство. Пусть E — произвольное множество на поверхности Г и $\mathrm{mes}_\Gamma E > 0$. Погрузим его в открытое относительно Г множество G так, чтобы

$$\mathrm{mes}_\Gamma G < 2\,\mathrm{mes}_\Gamma E. \tag{11}$$

Множество G представим в виде суммы неубывающей последовательности замкнутых множеств: $G = \bigcup\limits_m F_m$

Тогда будем иметь

$$\mu(E) \leqslant \mu(G) = \lim_{m\to\infty} \mu(F_m). \tag{12}$$

Замкнутое множество F_m покроем конечным числом открытых шаров K с центрами на поверхности Г столь малого радиуса, чтобы

$$\mathrm{mes}_\Gamma(\overline{\bigcup_i K_i} \cap \Gamma) < 2\,\mathrm{mes}_\Gamma F_m. \tag{13}$$

Так как множество $E_m = \bigcup\limits_i K_i$ открытое, то для него выполняется неравенство [2]

$$\mu(E_m) \leqslant \varliminf_{n=n_k\to\infty} \mu^{(n)}(E_m).$$

Поэтому в силу леммы 1 и неравенств (10) и (13) будем иметь

$$\mu(F_m) \leqslant \mu(E_m \cap \Gamma) = \mu(E_m) < \frac{M}{\pi\iota} \mathrm{mes}_\Gamma F_m < \frac{M}{\pi\iota} \mathrm{mes}_\Gamma G.$$

Отсюда, учитывая (11) и (12), получаем

$$\mu(E) < M_1\,\mathrm{mes}_\Gamma E,$$

где постоянная M_1 не зависит от E. Следовательно, мера μ абсолютно непрерывна на Г и имеет там ограниченную плотность $\varphi(\xi, y)$ $(\xi \in \Gamma)$ Лемма доказана.

Следствие. Для любого множества E трехмерного пространства, удовлетворяющего условию

$$\mathrm{mes}_\Gamma(\partial E \cap \Gamma) = 0 \qquad (\partial E \text{ — граница } E),$$

имеет место равенство

$$\lim_{n=n_k\to\infty} \mu^{(n)}(E) = \mu(E \cap \Gamma).$$

Действительно, так как мера μ сосредоточена на поверхности Г, то в силу леммы 3 имеем

$$\mu(\partial E) = \mu(\partial E \cap \Gamma) = 0.$$

Отсюда, как известно [2], следует, что множество E нормально относительно μ, и значит,

$$\lim_{n=n_k\to\infty} \mu^{(n)}(E) = \mu(E) = \mu(E\cap\Gamma).$$

Рассмотрим теперь формулу (5). В силу леммы 3 ее можно переписать в виде

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \int_\Gamma \frac{\varphi(\xi, y)}{|x-\xi|}\, dS_\xi. \tag{5'}$$

Из этой формулы и классических свойств потенциала простого слоя следует, что $G(x, y)$ непрерывна в окрестности Γ и справедливость граничного условия (1а) доказана.

Для доказательства граничного условия (1б) возьмем на поверхности Γ произвольную точку x_0 и опишем вокруг нее шары $K(x_0\,\rho)$ и $K(x_0\,\rho)$ $(\rho<\rho_1)$. Из условия (**) теоремы $(f(x)>0)$ следует, что при любых ρ в шаре $K(x_0\,\rho)$ при достаточно больших n найдутся точки множества $K^{(n)}$.

Вводя обозначения: $K^{(n)}(x_0, \rho) = K^{(n)}\cap K(x_0, \rho)$;

$$CK^{(n)}(x_0, \rho) = K^{(n)}\setminus K^{(n)}(x_0, \rho);\quad \Delta K^{(n)} = K^{(n)}(x_0, \rho_1)\setminus K^{(n)}(x_0, \rho);$$

$$\Gamma(x_0, \rho) = \Gamma\cap K(x_0, \rho);\quad C\Gamma(x_0, \rho) = \Gamma\setminus\Gamma(x_0, \rho);\quad \Delta\Gamma = \Gamma(x_0, \rho_1)\setminus\Gamma(x_0, \rho),$$

рассмотрим при $x\in K(x_0, \rho)$ равенство *:

$$\frac{1}{4\pi|x-y|} - \int\limits_{CK^{(n)}(x_0, \rho_1)} \frac{d\mu^{(n)}(\xi, y)}{|x-\xi|} = G(x_0, y) + \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x, \rho_1) + {} \\ + \varepsilon(x, \rho_1, n), \tag{14}$$

где

$$\varepsilon_1(x) = G(x, y) - G(x_0, y);$$

$$\varepsilon_2(x, \rho_1) = \int\limits_{\Gamma(x_0, \rho_1)} \frac{d\mu(\xi, y)}{|x-\xi|} - \int\limits_{\Gamma(x_0, \rho_1)} \frac{\varphi(\xi, y)}{|x-\xi|}\, dS_\xi;$$

$$\varepsilon(x, \rho_1, n) = \int\limits_{CK^{(n)}(x_0, \rho_1)} \frac{d\mu^{(n)}(\xi, y)}{(x-\xi)} - \int\limits_{C\Gamma(x_0, \rho_1)} \frac{d\mu(\xi, y)}{|x-\xi|}.$$

Очевидно, из непрерывности предельной функции Грина $G(x, y)$ и ограниченности $\varphi(\xi, y)$ следует, что

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon_1(x) = 0,$$

и равномерно по $x\in K(x_0, \rho)$

$$\lim_{\rho_1\to 0} \varepsilon_2(x, \rho_1) = 0.$$

Рассмотрим выражение для $\varepsilon(x, \rho_1, n)$. При фиксированных ρ и ρ_1 $(\rho<\rho_1)$ функции $\left\{\frac{1}{|x-\xi|},\ x\in K(x_0, \rho)\right\}$ равностепенно непрерывны по $\xi\in \overline{K}(x_0, \rho_1)$ и равномерно ограничены. Кроме того, так как поверхность Γ удовлетворяет условиям Ляпунова, то при достаточно

* Следует иметь в виду, что меры $\mu^{(n)}$ сосредоточены на границах $\partial K^{(n)}$ компактов $K^{(n)}$.

малых ρ_1 $\text{mes}_\Gamma (\partial K(x_0, \rho_1) \cap \Gamma) = 0$. Поэтому из леммы 3 и слабой сходимости мер $\mu^{(n)}$ по подпоследовательности $\{n_k\}$ следует, что при достаточно малых фиксированных ρ и ρ_1 $(\rho < \rho_1)$ равномерно по $x \in K(x_0, \rho)$

$$\lim_{n=n_n\to\infty} \varepsilon(x, \rho_1, n) = 0.$$

Пусть теперь $x \in K^{(n)}(x_0, \rho)$. Тогда, так как $G^{(n)}(x, y) = 0$ при $x \in K^{(n)}$, из формулы (4) получаем

$$\int\limits_{K^{(n)}(x_0, \rho_1)} \frac{d\mu^{(n)}(\xi, y)}{|x - \xi|} = \frac{1}{4\pi |x - y|} - \int\limits_{CK^{(n)}(x_0, \rho_1)} \frac{d\mu^{(n)}(\xi, y)}{|x - \xi|} \quad x \in K^{(n)}(x_0, \rho). \tag{15}$$

С другой стороны, выметая на компакт $K^{(n)}(x_0, \rho)$ меру $\mu^{(n)}$ сосредоточенную на $\Delta K^{(n)}$ будем иметь всюду

$$\int\limits_{K^{(n)}(x_0, \rho_1)} \frac{d\mu^{(n)}(\xi, y)}{|x - \xi|} \geqslant \int\limits_{K^{(n)}(x_0, \rho)} \frac{d\omega^{n}(\xi, y)}{|x - \xi|},$$

а на самом компакте $K^{(n)}(x_0, \rho)$ с точностью до множества внешней емкости нуль

$$\int\limits_{K^{(n)}(x_0, \rho_1)} \frac{d\mu^{n}(\xi, y)}{|x - \xi|} = \int\limits_{K^{(n)}(x_0, \rho)} \frac{d\omega^{(n)}(\xi, y)}{|x - \xi|}, \tag{16}$$

где $\omega^{(n)} = \mu^{(n)} + \mu_1^{(n)}$ [2]. Здесь мера $\mu_1^{(n)}$ получена в результате выметания на $K^{(n)}(x_0, \rho)$ меры $\mu^{(n)}$, сосредоточенной на $\Delta K^{(n)}$, и поэтому

$$\mu_1^{(n)}(K^{(n)}(x_0, \rho)) \leqslant \mu^{(n)}(\Delta K^{(n)}),$$

а в силу формулы (10) и леммы 1

$$\mu_1^{(n)}(K^{(n)}(x_0, \rho)) < \frac{M}{2\pi d} \,\text{mes}_\Gamma \Delta\Gamma. \tag{17}$$

Из формул (14), (15) и (16) следует, что с точностью до множества нулевой внешней емкости на компакте $K^{(n)}(x_0, \rho)$ имеет место равенство

$$\int\limits_{K^{(n)}(x_0, \rho)} \frac{d\omega^{(n)}(\xi, y)}{|x - \xi|} = G(x_0, y) + \varepsilon(x, \rho_1) + \varepsilon(x, \rho_1, n),$$

причем равномерно по $x \in K^{(n)}(x_0, \rho_1)$

$$\lim_{\rho_1\to 0} \varepsilon(x, \rho_1) = \lim_{\rho_1\to 0} (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x, \rho_1)) = 0 \tag{18}$$

и при достаточно малых фиксированных ρ и ρ_1 $(\rho < \rho_1)$ равномерно по $x \in K^{(n)}(x_0, \rho)$

$$\lim_{n=n_k\to\infty} \varepsilon(x, \rho_1, n) = 0. \tag{19}$$

Отсюда, учитывая, что колебание функции

$$\psi(x) = G(x_0, y) + \varepsilon(x, \rho) + \varepsilon(x, \rho_1, n)$$

на компакте $K^{(n)}(x_0, \rho)$ $(\rho < \rho_1)$ выбором ρ_1 и $n = n_k$ может быть сделано сколь угодно малым, в силу леммы 2 получаем

$$\frac{\mu^{(n)}(K^{(n)}(x_0, \rho)) + \mu_1^{(n)}(K^{n}(x_0, \rho))}{C^{(n)}(K(x_0, \rho))} = G(x_0, y) + \varepsilon(x, \rho_1) + \varepsilon(x, \rho_1, n) + \delta(x, \rho_1, n),$$

где равномерно по $x \in K^{(n)}(x_0, \rho)$

$$\lim_{\rho_1 \to 0} \overline{\lim_{n=n_k \to \infty}} |\delta(x, \rho_1, n)| = 0. \tag{20}$$

Полагая для определенности в этом равенстве $x = x_n$, где x_n — ближайшая к x_0 точка множества $K^{(n)}$ ($x_n \to x_0$ при $n \to \infty$) перепишем его в виде

$$\frac{\mu^{(n)}(K^{(n)}(x_0, \rho)) + \mu_1^{(n)}\ K^{(n)}(x_0, \rho))}{\mathrm{mes}_\Gamma \Gamma(x_0, \rho)} = (G(x_0, y) + \varepsilon(x_1, \rho_1) + \varepsilon\ x_n, \rho_1, n) +$$

$$+ \delta(x_n, \rho_1, n) \frac{C^{(n)}(K(x_0, \rho))}{\mathrm{mes}_\Gamma \Gamma(x_0, \rho)}.$$

Выберем из последовательности $\{n_k\}$, такую последовательность $\{n'_k\}$, чтобы одновременно существовали пределы $\lim\limits_{n=n'_k \to \infty} C^{(n)}(K(x_0, \rho))$ и $\lim\limits_{n=n'_k \to \infty} \delta(x_n, \rho_1, n)$ и перейдем к пределу сначала по $n = n'_k \to \infty$, а затем по $\rho_1 \to \rho$. Тогда в силу (18), (19), неравенства (17) и следствия из леммы 3 получим

$$\frac{\mu(\Gamma(x_0, \rho))}{\mathrm{mes}_\Gamma \Gamma(x_0, \rho)} = [G(x_0, y) + \varepsilon(x_0, \rho) +$$

$$+ \lim_{\rho_1 \to \rho} \lim_{n=n'_k \to \infty} \delta(x_n, \rho_1, n] \lim_{n=n'_k \to \infty} \frac{C^{(n)}(K x_0, \rho))}{\mathrm{mes}_\Gamma \Gamma(x_0, \rho)}. \tag{21}$$

Так как при $\rho \to \infty$ $\mathrm{mes}_\Gamma \Gamma(x_0, \rho) \sim \pi\rho^2$, то из условия (**) теоремы следует, что

$$\lim_{\rho \to 0} \lim_{n=n'_k \to \infty} \frac{C^{(n)}\ K(x_0, \rho)}{\mathrm{mes}_\Gamma \Gamma(x_0, \rho)} = f(x_0).$$

Отсюда, учитывая (18) и (20), заключаем, что в правой части равенства (21) для любого $x_0 \in \Gamma$ существует предел при $\rho \to 0$ и этот предел равен $G(x_0, y) f(x_0)$. Следовательно, в левой части также существует предел для любого $x_0 \in \Gamma$, который равен $\varphi(x_0, y)$.

Таким образом,

$$\varphi(x, y) = f(x)\, G x, (y) \text{ при } x \in \Gamma,$$

откуда видно, что функция $\varphi(x, y)$ непрерывна на Γ. Применяя ко второму слагаемому формулы (5′) теорему о скачке нормальной производной потенциала простого слоя, получаем

$$\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)^+ - \left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)^- = 4\pi\varphi(x, y) = 4\pi f(x)\, G(x, y).$$

Итак, мы показали, что из последовательности функций Грина $G^{(n)}(x, y)$ (и, очевидно, любой ее подпоследовательности) можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к функции $G(x, y)$, удовлетворяющей всюду вне поверхности Γ уравнению (2), а на поверхности Γ — граничным условиям (1а)—(1б).

Обычным способом нетрудно доказать, что такая функция $G(x, y)$ единственна. Следовательно, существует предел всей последовательности $G^{(n)}(x, y)$ и он равен $G(x, y)$, что и требовалось доказать.

§ 2. Введенное в теореме 1 условие (**) не удобно для проверки, поскольку емкости компактов $K^{(n)} \cap K(x, \rho)$ очень трудно вычислить и даже оценить. Предположим, однако, что множества $K^{(n)}$ можно определенным образом разбить на такие подмножества $K_i^{(n)}$, что емкость каждого $K_i^{(n)}$ известна или ее можно оценить. Тогда можно ввести более удобные для проверки условия, обеспечивающие выполнимость условия (**).

Сформулируем точный результат. Пусть при каждом n множества $K^{(n)}$, удовлетворяющие условию (*) теоремы 1, можно представить в виде

$$K^{(n)} = (\bigcup_i K_{1i}^{(n)}) \cup (\bigcup_i K_{2i}^{(n)}),$$

где $K_{1i}^{(n)}$ и $K_{2i}^{(n)}$ — замкнутые множества, причем в любой ограниченной части пространства таких множеств конечное число.

Введем обозначения:

$d_{1i}^{(n)}$, $d_{2i}^{(n)}$ — диаметры множеств $K_{1i}^{(n)}$, $K_{2i}^{(n)}$;

$C_{1i}^{(n)}$, $C_{2i}^{(n)}$ — емкости множеств $K_{1i}^{(n)}$, $K_{2i}^{(n)}$;

$\sum\limits_{(x,\rho)} C_i^{(n)}$ — сумма емкостей тех множеств $K_{1i}^{(n)}$ или $K_{2i}^{(n)}$, которые полностью содержатся в замкнутом шаре $K(x, \rho)$;

$r_{ij}^{(n)}$ — расстояние между множествами $K_{1i}^{(n)}$ и $K_{1j}^{(n)}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть при $n \to \infty$ выполняются такие условия:*

$$1) \lim_{n\to\infty} \left\{ \max_i d_{1i}^{(n)} \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \max_i d_{2i}^{(n)} \right\} = 0;$$

$$2) \lim_{\rho\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{(x,\rho)} C_{1i}^{(n)}}{\pi\rho^2} = f(x),$$

где $f(x)$ непрерывная положительная функция на поверхности Γ;

$$3) \overline{\lim_{n\to\infty}} \max_j \sum_{\substack{i\neq j \\ r_{ij}^{(n)} < \rho}} \frac{C_{1i}^n}{r_{ij}^n} = \delta(\rho) \text{ и } \lim_{\rho\to 0} \delta(\rho) = 0;$$

$$4) \lim_{n\to\infty} \sum_{(x,\rho)} C_{2i}^{(n)} = 0.$$

Тогда имеет место равенство

$$\underline{\lim_{\rho\to 0}} \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{C^{(n)}(K(x,\rho))}{\pi\rho^2} = \overline{\lim_{\rho=0}} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{C^{(n)}(K(x,\rho))}{\pi\rho^2} = f(x). \qquad (**)$$

Доказательство. Пусть $K_1^{(n)}(x, \rho)$ — множество, состоящее из тех множеств $K_{1i}^{(n)}$, которые полностью содержатся в шаре $K(x, \rho)$, т. е.

$$K_1^{(n)}(x, \rho) = \bigcup_i K_{1i}^{(n)},$$

$$K_{1i}^{(n)} \subset K(x, \rho)$$

а сумма Σ' — означает суммирование по тем множествам $K_{1i}^{(n)}$ или $K_{2i}^{(n)}$, которые не содержатся в шаре $K(x, \rho)$, но имеют с ним непустое пересечение. Тогда в силу полуаддитивности емкости имеем

$$C^{(n)}(K_1^{(n)}(x, \rho)) \leqslant C^{(n)}(K(x, \rho)) \leqslant \sum_{(x, \rho)} C_{1i}^{(n)} + \sum_{(x, \rho)} C_{2i}^{(n)} + \varepsilon(n), \tag{22}$$

где

$$\varepsilon(n) = \sum_i{}' C_{1i}^{(n)} + \sum{}' C_{2i}^{(n)}.$$

Учитывая, что при достаточно малых ρ

$$\operatorname{mes}_\Gamma(\partial K(x, \rho) \cap \Gamma) = 0,$$

и пользуясь условиями 1), 2) и 4) теоремы, таким же способом, как и при доказательстве леммы 1, нетрудно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0. \tag{23}$$

Рассмотрим теперь компакт $K_1^{(n)}(x, \rho)$. Пусть $\gamma^{(n)}$ — равновесная мера $K_1^{(n)}(x, \rho)$, а $\gamma_i^{(n)}$ часть ее, сосредоточенная на $K_{1i}^{(n)}$.

Легко видеть, что потенциал меры $\gamma_i^{(n)}$ удовлетворяет неравенствам

$$U^{\gamma_i^{(n)}}(x) \leqslant 1 \text{ всюду},$$

а на компакте $K_{1i}^{(n)}$ с точностью до множества нулевой внутренней емкости

$$U^{\gamma_i^{(n)}}(x) \geqslant 1 - \sum_{\substack{j \neq i \\ K_{ij}^{(n)} \subset K(x, \rho)}} \frac{\gamma_i^{(n)}}{r_{ij}^{(n)}}.$$

Из первого неравенства в силу леммы 2 следует, что

$$\gamma_i^{(n)} \leqslant C_{1i}^{(n)},$$

и, значит, с точностью до множества нулевой внутренней емкости на $K_{1i}^{(n)}$

$$U^{\gamma_i^{(n)}}(x) \geqslant C_{1i}^{(n)} \Big(1 - \sum_{\substack{j \neq i \\ K_{ij}^{(n)} \subset K(x, \rho)}} \frac{C_{1i}^{(n)}}{r_{ij}^{(n)}}\Big).$$

Из определения равновесной меры вытекает, что

$$C^{(n)}(K_1^{(n)}(x, \rho)) = \gamma^{(n)} = \sum_i \gamma_i^{(n)},$$

и, следовательно,

$$C^{(n)}(K_1^{(n)}(x, \rho)) \geqslant (1 - \delta(\rho, n)) \sum_{(x, \rho)} C_{1i}^{(n)}, \tag{24}$$

где $\delta(\rho, n) = \max \sum\limits_{\substack{i \neq j \\ K_{1j}^{(n)} \subset K(x, \rho)}} \dfrac{C_{1j}^{(n)}}{r_{ij}^{(n)}}$ и в силу условия 3) теоремы

$$\lim_{\rho\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \delta(\rho, n) = 0. \tag{25}$$

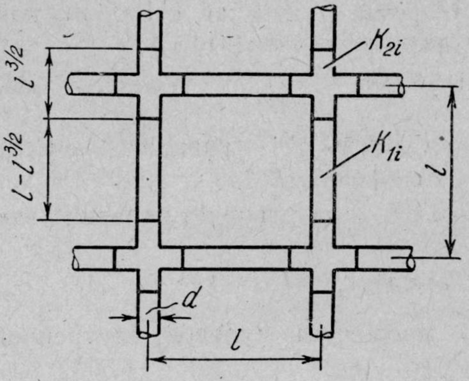
Пользуясь неравенствами (22) и (24), получаем

$$(1-\delta(\rho, n))\ \frac{\sum\limits_{(x,\rho)} C_{1i}^{(n)}}{\pi\rho^2} \leqslant \frac{C^{(n)}(K(x,\rho))}{\pi\rho^2} \leqslant \frac{\sum\limits_{(x,\rho)} C_{1i}^{(n)}}{\pi\rho^2} + \frac{\sum\limits_{(x,\rho)} C_{2i}^{(n)}}{\pi\rho^2} + \frac{\varepsilon(n)}{\pi\rho^2},$$

откуда в силу (23), (25) и условий 2) и 4) теоремы следует (**). Теорема доказана.

В заключение этого параграфа приведем простой пример, иллюстрирующий возможные применения теоремы 2.

Пусть множества $K^{(n)}$ есть квадратные решетки, образованные круглыми цилиндрами, оси которых лежат в некоторой плоскости Г. Обозначим период решетки через l и будем предполагать, что диаметр цилиндров d связан с периодом решетки соотношением:



$$d = Ae^{-\frac{q}{l}},$$

где A и q — некоторые положительные постоянные.

Разобьем решетку на множества K_{1i} и K_{2i} так, что K_{2i} есть „крестики", вырезаемые из решетки кубиками с центрами в узлах решетки с длинной стороны $l^{3/2}$, а K_{1i} — оставшиеся цилиндры высотой $l - l^{3/2}$ и рассмотрим последовательность таких решеток при $l \to 0$ (рис.). Покажем, что в этом случае все условия теоремы 2 выполнены.

Справедливость условия 1) очевидна. Чтобы проверить остальные условия, оценим емкость цилиндра диаметром d и высотой h, причем $d = o(h)$ при $h \to 0$. Вписывая в такой цилиндр и описывая вокруг него соответствующие эллипсоиды вращения и пользуясь следующей формулой для емкостей эллипсоидов вращения [2]:

$$C_э = \frac{2C}{\ln \dfrac{a+C}{a-C}} \quad (C = \sqrt{a^2 - b^2},\ a,\ b \text{ — полуоси эллипсоида})$$

нетрудно найти асимптотическую формулу для емкостей такого цилиндра

$$C = \frac{h}{2\ln \dfrac{1}{d}}\,(1 + o(1)),\ h \to 0.$$

Отсюда, полагая $h = l - l^{3/2}$ и $d = Ae^{-\frac{q}{l}}$, находим

$$C_{1i} = \frac{l^2}{2q}\,(1 + o(1)),$$

а, так как емкость C_{2i}, очевидно, оценивается сверху удвоенной емкостью цилиндра высоты $l^{3/2}$ и диаметра d, то

$$C_{2i} \leqslant \frac{l^{5/2}}{q}\,(1 + o(1)).$$

Этими формулами мы будет пользоваться при проверке условий 2), 3), 4) теоремы.

Учитывая, что при $l \to 0$ в шар $K(x, \rho)$ попадает $\frac{\pi\rho^2}{l^2}(1 + o(1))$ множеств K_{2i} и $\frac{2\pi\rho^2}{l^2}(1 + o(1))$ множеств K_{1i}, получаем:

$$\sum_{(x, \rho)} C_{2i} = \frac{C_{2i}}{l^2}\pi\rho^2(1 + o(1)) \leqslant \frac{l^{1/2}}{q}\pi\rho^2(1 + o(1));$$

$$\sum_{(x, \rho)} C_{1i} = \frac{2C_{1i}}{l^2}\pi\rho^2(1 + o(1)) = \frac{\pi\rho^2}{q}(1 + o(1)),$$

откуда следует справедливость условий 2) и 4), причем $f(x = \frac{1}{q}$.

Далее, имеем

$$\sum_{\substack{i \neq j \\ r_{ij} < \rho}} \frac{C_{1i}}{r_{ij}} = \sum_{i=1}^{6} \frac{C_{1i}}{r_{ij}} + {\sum_{\substack{i \neq j \\ r_{ij} < \rho}}}' \frac{C_{1i}}{r_{ij}},$$

где первая сумма распространяется на 6 ближайших к K_{1j} цилиндров, а вторая — на все остальные. Отсюда при $l \to 0$ получаем

$$\sum_{\substack{i \neq j \\ r_{ij} < \rho}} \frac{C_{1i}}{r_{ij}} \leqslant \frac{24C_{1i}}{l^{3/2}} + 4 \sum_{0 < \sqrt{m^2+n^2} < \frac{\rho}{l}} \frac{C_{1i}}{l\sqrt{m^2+n^2}} \leqslant \left(12\frac{l^{1/2}}{q} + \frac{4\pi\rho}{q}\right)(1 + o(1)).$$

Следовательно, $\lim\limits_{\rho \to 0} \delta(\rho) = 0$ и, значит, условие 3) также выполнено.

§ 3. Рассмотрим снова последовательность задач (2) — (3) в областях $D^{(n)}$, однако теперь мы не будем предполагать, что компакты $K^{(n)}$ неограниченно приближаются к поверхности Г. Пусть $G^{(n)}(x, y)$ соответствующие функции Грина, причем будем считать, что они продолжены нулем вне $D^{(n)}$, т. е. полагаем $G^{(n)}(x, y) = 0$ при $x \in K^{(n)}$ или $y \in K^{(n)}$. Пусть B — произвольная ограниченная область пространства. В гильбертовом пространстве функций, интегрируемых с квадратом на B, введем оператор

$$G^{(n)}[\varphi] = \int G^{(n)}(x; y)\,\varphi(y)\,d\tau_y.$$

Теорема 3. Пусть при $n \to \infty$ выполняется условие

$$\lim_{\rho \to 0} \varlimsup_{n \to \infty} \frac{C^{(n)}(K(x, \rho))}{\frac{4}{3}\pi\rho^3} = \lim_{\rho \to 0} \varliminf_{n \to \infty} \frac{C^{(n)}(K(x, \rho))}{\frac{4}{3}\pi\rho^3} = f(x).$$

Тогда в любой ограниченной области B последовательность операторов $G^{(n)}$, ядрами которых являются функции Грина $G^{(n)}(x, y)$ задач (2) — (3), сильно сходится к интегральному оператору G с ядром $G(x, y)$, удовлетворяющим во всем пространстве уравнению

$$\Delta G(x, y) - 4\pi f(x)\,G(x, y) = -\delta(x, y),$$

т. е. в метрике $L^2(B)$

$$\lim_{n \to \infty} \int G^{(n)}(x, y)\,\varphi(y)\,d\tau_y = \int G(x, y)\,\varphi(y)\,d\tau_y$$

для любой функции $\varphi(x) \in L^2(B)$.

Доказательство этой теоремы в основном аналогично доказательству теоремы 1 и мы его приводить здесь не будем.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. А. Марченко за постановку задачи и руководство работой и Н. С. Ландкофу за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко и Е. Я. Хруслов. Краевые задачи с мелкозернистой границей. «Матем. сб.», т. 65 (107); 3, (1964), 458—472.

2. Н. С. Ландкоф. Основы современной теории потенциала М., 1966 г.

3. Н. С. Ландкоф. Емкости и меры Хаусдорфа. Оценки потенциалов. «Усп. матем. наук», т. 20, вып. 2 (1965).