5. Квадратурные формулы интерполяционного типа с чебышевскими узлами 1-го рода для несобственных и сингулярных интегралов.

5.1. *Интерполяционный полином Лагранжа функции* $f(t), t \in [-1,1]$ *с* n *чебышевскими узлами 1-го рода* $\left\{ t_k^n \right\}_{k=1}^n$ (см. формулу (4.3)) – нулями полинома Чебышева $T_n(t)$ - обозначим $(P_{n-1}^I f)(t)$. Имеем, по определению,

$$\boxed{(P_{n-1}^I f)(t) \equiv \sum_{k=1}^{n} f(t_k^n) l_{n-1,k}^I(t)} \tag{5.1}$$

где $l_{n-1,k}^I(t), k = 1,\ldots,n$ - *фундаментальные интерполяционные полиномы (1-го типа)* определены следующим образом

$$\boxed{l_{n-1,k}^I(t) \equiv \frac{T_n(t)}{T_n'(t_k^n)(t - t_k^n)}\ ,\ k = 1,\ldots,n} \tag{5.2}$$

Легко видеть, что

$$l_{n-1,k}^I(t_m^n) = \delta_{km}\ ;\ k, m = 1,\ldots,n \tag{5.3}$$

Поэтому

$$(P_{n-1}^I f)(t_m^n) = f(t_m^n)\ ,\ m = 1,\ldots,n \tag{5.4}$$

Пусть теперь $f = p_{n-1}(t)$ - полином степени $(n-1)$. В силу (4) два полинома степени $(n-1)$: $p_{n-1}(t)$ и $(P_{n-1}^I p_{n-1})(t)$ совпадают в n различных точках, следовательно

$$(P_{n-1}^I p_{n-1})(t) = p_{n-1}(t)\ ,\ t \in R \tag{5.5}$$

В общем случае для гладких функций $f(t) \in C_{[-1,1]}^{r,\alpha}$ оценка скорости сходимости $(P_{n-1}^I f)(t)$ к $f(t)$ приводится в заключительном пункте настоящего раздела.

5.2. Переходя к выводу *интерполяционной квадратурной формулы* для интеграла с чебышевским весом

$$J_f^I \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \tag{5.6}$$

начнем со случая, когда $f(t) = p_{n-1}(t)$ и подставим в (6) $p_{n-1}(t)$ в форме интерполяционного полинома (1). Имеем

$$J_{p_{n-1}}^I \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} p_{n-1}(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=1}^{n} p_{n-1}(t_k^n)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} l_{n-1,k}^I(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \tag{5.7}$$

Для вычисления интегралов $J_{l_{n-1,k}^I}^I$ воспользуемся явным выражением (2) для фундаментальных интерполяционных полиномов $l_{n-1,k}^I(t)$ и фундаментальным соотношением (4.21).

Получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} l_{n-1,k}^I(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{t-t_k^n}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\frac{1}{T_n'(t_k^n)} = \frac{U_{n-1}(t_k^n)}{T_n'(t_k^n)},$$

и, используя выражение (4.37) для производной полинома Чебышева 1-го рода, находим окончательно

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} l_{n-1,k}^I(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{n}\ ,\ k = 1,\ldots,n} \tag{5.8}$$

Подставляя (8) в (7), получаем

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} p_{n-1}(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=1}^{n} p_{n-1}(t_k^n)\frac{1}{n}} \tag{5.9}$$

5.3. Оказывается, что эта формула интерполяционного типа с n узлами остается справедливой и для полиномов $p_{2n-1}(t)$ степени $(2n-1)$. Действительно, если «разделить с остатком» $p_{2n-1}(t)$ на $T_n(t)$, то будем иметь тождество

$$p_{2n-1}(t) \equiv T_n(t)q_{n-1}(t) + r_{n-1}(t), \tag{5.10}$$

где $q_{n-1}(t)$ и $r_{n-1}(t)$ (соответственно «неполное частное» и «остаток») – полиномы степени $(n-1)$.

Полагая в тождестве (10) $t = t_k^n,\ k = 1,\ldots,n$ и учитывая, что $T_n(t_k^n) = 0$, находим

$$p_{2n-1}(t_k^n)=r_{n-1}(t_k^n)\,. \tag{5.11}$$

С другой стороны, умножая обе части тождества (10) на вес $(1-t^2)^{-1/2}$ и интегрируя, с учетом того факта, что полиномы Чебышева $T_n(t)$ ортогональны (с указанным весом) подпространству Π_{n-1}^I, получаем

$$\int_{-1}^{1} p_{2n-1}(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_{-1}^{1} r_{n-1}(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\,. \tag{5.12}$$

С учетом (11), из (12), в силу (9) находим окончательно *точную для полиномов степени* $(2n-1)$ *квадратурную формулу интерполяционного типа с* n *чебышевскими узлами:*

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} p_{2n-1}(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sum_{k=1}^{n} p_{2n-1}(t_k^n)\frac{1}{n}} \tag{5.13}$$

Используя эту формулу, докажем, что *в пространстве* Π_{n-1}^I *полиномов степени* $(n-1)$ *со скалярным произведением (4.11) фундаментальные интерполяционные полиномы* $l_{n-1,k}^I(t), k=1,\ldots,n$ *образуют ортогональный базис*, и вычислим их нормы.

В силу представления (1) и тождества (5) достаточно доказать ортогональность $l_{n-1,k}^I(t)$ при различных $k=1,\ldots,n$ (и вычислить их нормы).

Поскольку произведение $l_{n-1,k}^I(t)l_{n-1,m}^I(t)$ - полином степени $(2n-2)$, то для вычисления интеграла от этого произведения можно применить квадратурную формулу (13). Используя соотношения (3), находим

$$\int_{-1}^{1} l_{n-1,k}^I(t)l_{n-1,m}^I(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sum_{p=1}^{n} l_{n-1,k}^I(t_p^n)l_{n-1,m}^I(t_p^n)\frac{\pi}{n}=\sum_{p=1}^{n}\delta_{kp}\delta_{mp}\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n}\delta_{km}\,.$$

Итак, доказано

$$\boxed{(l_{n-1,k}^I,l_{n-1,m}^I)=\frac{\pi}{n}\delta_{km}\;,\; k,m=1,\ldots,n} \tag{5.14}$$

и норма в Π_{n-1}^I фундаментального интерполяционного полинома $l_{n-1,k}^I(t), k=1,\ldots,n$ найдена (и не зависит от k): $\left\| l_{n-1,k}^I\right\|=\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}\,,\; k=1,\ldots,n$.

5.4. Пусть теперь $f(t),\ t\in[-1,1]$ – заданная функция, а $(P_{n-1}^{I}f)(t)$ - её интерполяционный полином с n чебышевскими узлами $\left\{t_k^n\right\}_{k=1}^{n}$.

В силу (9) имеем следующую *интерполяционную квадратурную формулу*

$$\boxed{J_f^I\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}f(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sum_{k=1}^{n}f(t_k^n)\frac{1}{n}+r_n} \tag{5.15}$$

где, по определению,

$$r_n\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[f(t)-(P_{n-1}^{I}f)(t)\right]\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\ ,$$

и эта квадратурная формула, как было показано в пункте 5.3, *точна* ($r_n=0$) для полиномов степени $(2n-1)$: $f\in\Pi_{2n-1}^{I}$.

В общем случае, когда f - гладкая функция класса $C_{[-1,1]}^{r,\alpha}$, *оценка остаточного члена* r_n квадратурной формулы (15) приведена в заключительном пункте настоящего раздела.

5.5. Переходя к выводу *квадратурной формулы интерполяционного типа для интеграла* $(L^I f)(t_0)$, определенного формулой (4.30), воспользуемся явным выражением (1) для интерполяционного полинома $(P_n^I f)(t)$ заданной функции $f(t), t\in[-1,1]$. Имеем

$$(L^I f)(t_0)\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t-t_0|f(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sum_{k=1}^{n}f(t_k^n)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t-t_0|l_{n-1,k}^{I}(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}+r_n(t_0), \tag{5.16}$$

где остаточный член, по определению, равен

$$r_n(t_0)\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t-t_0|\left[f(t)-(P_{n-1}^{I}f)(t)\right]\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\ .$$

Вычислим сначала $(L^I l_{n-1,k}^{I})(t_0)$, используя явное представление (2) для $l_{n-1,k}^{I}(t)$ и раскладывая многочлен $T_n(t)(t-t_k^n)^{-1}$ степени $(n-1)$ по ортогональному базису $\{T_k(t)\}_{k=1}^{n-1}\subset\Pi_{n-1}^{I}$:

$$\frac{T_n(t)}{t-t_k^n}=\frac{c_{k,0}^n}{2}+\sum_{p=1}^{n-1}c_{k,p}^nT_p(t)\ ,\ \text{где}\ \ c_{k,p}^n=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)T_p(t)}{t-t_k^n}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\ ,\ p=0,1,\dots,n-1\,.$$

Коэффициенты $c_{k,p}^n$ вычислим, используя тождество $2T_n(t)T_p(t)=$ $=T_{n+p}(t)+T_{n-p}(t)$ (в самом деле, полагая $\theta=\arccos t$, имеем

$T_{n+p}(t)+T_{n-p}(t)=\cos(n+p)\theta+\cos(n-p)\theta=2\cos n\theta\cos p\theta=2T_n(t)T_p(t)$) и фундаментальное соотношение (4.21). Имеем

$$c_{k,p}^n=U_{n+p-1}(t_k^n)+U_{n-p-1}(t_k^n)=2U_{n-1}(t_k^n)T_p(t_k^n)\ ,\ p=0,1,\ldots,n-1 \quad {}^{*)}$$

Итак, получено следующее *представление для фундаментальных интерполяционных полиномов*

$$\boxed{l_{n-1,k}^I(t)=\left[1+2\sum_{p=1}^{n-1}T_p(t_k^n)T_p(t)\right]\frac{1}{n}\ ,\ k=0,1,\ldots,n-1} \qquad (5.17)$$

И, наконец, используя соотношения (4.31) и (4.34), получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t-t_0|\,l_{n-1,k}^I(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\left[\ln 2+2\sum_{p=1}^{n-1}T_p(t_0)\frac{T_p(t_k^n)}{p}\right]\frac{1}{n}. \qquad (5.18)$$

Подставляя найденное выражение (18) в формулу (16) для интеграла $(L^I f)(t_0)$, окончательно получаем следующую *квадратурную формулу интерполяционного типа с n узлами для интеграла с логарифмическим ядром и весом* $(1-t^2)^{-1/2}$

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\,t-t_0|\,f(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\sum_{k=1}^{n}f(t_k^n)\left[\ln 2+2\sum_{p=1}^{n-1}T_p(t_0)\frac{T_p(t_k^n)}{p}\right]\frac{1}{n}+r_n(t_0)} \qquad (5.19)$$

В заключение отметим, что если $f=p_{n-1}(t)$ - полином степени $(n-1)$, то он совпадает со своим интерполяционным полиномом, а остаточный член в формуле (19) $r_n(t_0)\equiv 0$ и мы получаем *точную* квадратурную формулу с n узлами $\left\{t_k^n\right\}_{k=1}^n$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t-t_0|p_{n-1}(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\sum_{k=1}^{n}p_{n-1}(t_k^n)\left[\ln 2+2\sum_{p=1}^{n-1}T_p(t_0)\frac{T_p(t_k^n)}{p}\right]\frac{1}{n}. \qquad (5.20)$$

В общем случае, когда $f(t)\in C_{[-1,1]}^{r,\alpha}$, оценка остаточного члена $r_n(t_0)$ в формуле (19) дана в заключительном пункте настоящего раздела.

---

* В самом деле:

$$U_{n+p-1}(t)+U_{n-p-1}(t)=\frac{\sin(n+p)\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin(n-p)\theta}{\sin\theta}=2\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\cos p\theta=2U_{n-1}(t)T_p(t).$$

5.6. Опишем способ получения *квадратурной формулы интерполяционного типа для интеграла с весом* $(1-t^2)^{-1/2}$ *и с переменным верхним пределом*

$$\int_{-1}^{t_0} f(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{-1}^{t_0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k^n) l_{n-1,k}^I(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + r_n(t_0), \tag{5.21}$$

где, по определению,

$$r_n(t_0) \equiv \int_{-1}^{t_0}\left[f(t)-(P_{n-1}^I f)(t)\right]\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \ -1 < t_0 < 1.$$

Полагая $\theta = \arccos t$, получаем $\int_{-1}^{t_0}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi - \arccos t_0$, и

$$\int_{-1}^{t_0} T_p(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{\arccos t_0}^{\pi}\cos p\theta d\theta = -\frac{\sin p(\arccos t_0)}{p} = \frac{-U_{p-1}(t_0)}{p}\sqrt{1-t_0^2} \ , \ p \in N.$$

Итак, имеем

$$\int_{-1}^{t_0} l_{n-1,k}^I(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \left[\pi - \arccos t_0 - 2\sum_{p=1}^{n-1}\frac{T_p(t_k^n)}{p}U_{p-1}(t_0)\sqrt{1-t_0^2}\right]\frac{1}{n},$$

и окончательно

$$\boxed{\int_{-1}^{t_0} f(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_k^n)\left[\pi - \arccos t_0 - 2\sum_{p=1}^{n-1}\frac{T_p(t_k^n)}{p}U_{p-1}(t_0)\sqrt{1-t_0^2}\right] + r_n(t_0)}. \tag{5.22}$$

5.7. Вывод *квадратурной формулы интерполяционного типа для сингулярного интеграла* проведем следующим образом.

Пусть $p_{2n}(t)$ – полином степени $2n$. В силу (4.20)

$$(\Gamma p_{2n})(t_0) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p_{2n}(t)}{t-t_0}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p_{2n}(t)-p_{2n}(t_0)}{t-t_0}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

и, поскольку $\dfrac{p_{2n}(t)-p_{2n}(t_0)}{t-t_0}$ - многочлен степени $(2n-1)$, применяя точную квадратурную формулу интерполяционного типа (13), получаем:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p_{2n}(t)}{t-t_0}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \equiv \sum_{k=1}^{n}\frac{p_{2n}(t_k^n)-p_{2n}(t_0)}{t_k^n - t_0}\frac{1}{n} \ , \ |t_0| < 1.$$

Если же $t_0 \in (-1,1)\setminus\left\{t_k^n\right\}_{k=1}^{n}$, то имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p_{2n}(t)}{t-t_0}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{p_{2n}(t_k^n)}{t_k^n-t_0}\frac{1}{n}+\frac{p_{2n}(t_0)}{T_n(t_0)}U_{n-1}(t_0)\ ,$$

где использовано соотношение

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{t_0-t_k^n}=\frac{T_n'(t_0)}{T_n(t_0)}=\frac{nU_{n-1}(t_0)}{T_n(t_0)}\ ,\ t_0\notin\left\{t_k^n\right\}_{k=1}^{n}. \tag{5.23}$$

Полагая $t_0\in\left\{t_{0j}^n\right\}_{j=1}^{n-1}$, приходим к следующему, важному для дальнейшего, результату

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p_{2n}(t)}{t-t_{0j}^n}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\equiv\sum_{k=1}^{n}\frac{p_{2n}(t_k^n)}{t_k^n-t_{0j}^n}\frac{1}{n}\ ,\ j=1,\ldots,n-1} \tag{5.24}$$

Пусть теперь $u(t)$ - функция, заданная на отрезке $[-1,1]$. С учетом (23), имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(t)}{t-t_0}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\equiv\sum_{k=1}^{n}\frac{(P_{2n}^I u)(t_k^n)-(P_{2n}^I u)(t_0)}{t_k^n-t_0}\frac{1}{n}+R_n(t_0), \tag{5.25}$$

где, по определению,

$$R_n(t_0)\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(t)-(P_{2n}^I u)(t)}{t-t_0}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\,.$$

Очевидно, что формула (25) *точна* $\left(R_n(t_0)\right)$ для полинома $u=p_{2n}(t)$ степени $2n$.

5.8. Так же как и в случае тригонометрических полиномов, приведем без доказательства джексоновскую оценку для

$$E_n\equiv\inf_{p_n\in\Pi_n^I}\max_{a\le x\le b}\left|p_n(x)-f(x)\right|$$

наименьшего отклонения полиномов из Π_n^I от функции $f(x),x\in[a,b]$ (*наилучшего приближения* к $f(x),x\in[a,b]$ полиномами n–ой степени) *в предположении достаточной гладкости этой функции.*

Имеет место следующая *джексоновская оценка*, справедливая для функций $f(x)$ класса $C_{[a,b]}^{r,\alpha}$ при $n>r$: *)

* И.П. Натансон. Конструктивная теория функций. - М. - Л.:ГИТТЛ, 1949. - 688с.

$$\boxed{E_n \le 12\frac{6^r r^r}{r!}\left(\frac{r+1}{2}\right)^{\alpha}(b-a)^{r+\alpha}\frac{M_r}{n^{r+\alpha}}} \qquad (5.26)$$

Здесь M_r - константа в условии Гёльдера для r–ой производной функции $f(x), x \in [a,b]$.

Оценим среднеквадратичное (с чебышевским весом $(1-t^2)^{-1/2}$*) отклонение* интерполяционного полинома $(P_{n-1}^I f)(t)$ функции $f(t) \in C_{[-1,1]}^{r,\alpha}$ от этой функции. Как известно, [*)] существует полином $\widetilde{p}_{n-1} \in \Pi_{n-1}^I$, такой что имеет место равенство

$$\max_{-1\le t\le 1}\left|\widetilde{p}_{n-1}(t) - f(t)\right| = E_{n-1}\,. \qquad (5.27)$$

Имеем

$$\left\|P_{n-1}^I f - f\right\|_I \le \left\|\widetilde{p}_{n-1} - f\right\|_I + \left\|P_{n-1}^I f - \widetilde{p}_{n-1}\right\|_I \,.$$

Оценим каждое слагаемое в правой части этого неравенства. Находим, используя (27),

$$\left\|\widetilde{p}_{n-1} - f\right\|_I \equiv \left(\int_{-1}^{1}\left|\widetilde{p}_{n-1}(t) - f(t)\right|^2 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{\pi}E_{n-1}\ ,$$

а с учетом (5), (1) и (14), получаем

$$\left\|P_{n-1}^I f - \widetilde{p}_{n-1}\right\|_I^2 \equiv \left\|P_{n-1}^I f - P_{n-1}^I \widetilde{p}_{n-1}\right\|_I^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}\left[f(t_k^n) - \widetilde{p}_{n-1}(t_k^n)\right] l_{n-1,k}^I(t), \sum_{m=1}^{n}\left[f(t_m^n) - \widetilde{p}_{n-1}(t_m^n)\right] l_{n-1,m}^I(t)\right)_I = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|f(t_k^n) - \widetilde{p}_{n-1}(t_k^n)\right|^2$$

и, наконец, учитывая (27), находим

$$\left\|P_{n-1}^I f - \widetilde{p}_{n-1}\right\|_I \le \sqrt{\pi}E_{n-1}$$

Окончательно имеем

$$\boxed{\left\|P_{n-1}^I f - f\right\|_I \le 2\sqrt{\pi}E_{n-1}} \qquad (5.28)$$

где, в силу (26) при $a=-1, b=1$ и $n > r+1$ для E_{n-1} имеет место неравенство

[*] И.П. Натансон. Конструктивная теория функций. - М. - Л.:ГИТТЛ, 1949. - 688с.

$$\boxed{E_{n-1} \le \frac{12^{r+1} r^r}{r!}(r+1)^{\alpha} \frac{M_r}{(n-1)^{r+\alpha}}} \qquad (5.29)$$

Теперь у нас есть возможность оценить остаточные члены в квадратурных формулах интерполяционного типа для несобственных интегралов, которые получены в пунктах 5.4, 5.5 и 5.6.

Используя неравенство Буняковского, получаем

$$\left|\int_{-1}^{1}\left[f(t)-(P_{n-1}^{I}f)(t)\right]\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right|^2 \le \int_{-1}^{1}\left|f(t)-(P_{n-1}^{I}f)(t)\right|^2\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi\left\|f-P_{n-1}^{I}f\right\|_I^2$$

и, с учетом (28), для остаточного члена r_n в формуле (15) имеем

$$\boxed{|r_n| \le 2E_{n-1}} \qquad (5.30)$$

где для E_{n-1} в случае, когда $f(t)\in C_{[-1,1]}^{r,\alpha}$, выполняется джексоновская оценка (29).

Для остаточного члена в *квадратурной формуле (22) для интеграла с переменным верхним пределом* получаем

$$\left|\int_{-1}^{t_0}\left[f(t)-(P_{n-1}^{I}f)(t)\right]\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right| \le \int_{-1}^{1}\left|f(t)-(P_{n-1}^{I}f)(t)\right|\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \le \sqrt{\pi}\left\|f-P_{n-1}^{I}f\right\|_I \le 2\pi\, E_{n-1} \ .$$

Остаточный член в квадратурной формуле (19) для интеграла с логарифмическим ядром оценим, используя неравенство Буняковского. Имеем

$$\left|\int_{-1}^{1}\ln|t-t_0|\left[f(t)-(P_{n-1}^{I}f)(t)\right]\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right| \le$$

$$\le\left(\int_{-1}^{1}\ln^2|t-t_0|\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-1}^{1}\left|f(t)-(P_{n-1}^{I}f)(t)\right|^2\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)^{1/2} \qquad (5.31)$$

и, в силу (28),

$$\left(\int_{-1}^{1}\left|f(t)-(P_{n-1}^{I}f)(t)\right|^2\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)^{\frac{1}{2}} \le 2\sqrt{\pi}E_{n-1} \ .$$

Остается найти оценку для интеграла $\int_{-1}^{1}\ln^2|\,t-t_0|\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Имеем

$$\int_{-1}^{1}\ln^2|t-t_0|\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_{0}^{\pi}\ln^2|\cos\theta-\cos\theta_0|d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\ln^2|\cos\theta-\cos\theta_0|d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ln 2+\ln\left|\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}\right|+\ln\left|\sin\frac{\theta+\theta_0}{2}\right|\right)^2 d\theta\le$$

$$\le\frac{3}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ln^2 2+\ln^2\left|\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}\right|+\ln^2\left|\sin\frac{\theta+\theta_0}{2}\right|\right)d\theta==3\pi\ln^2 2+3\int_{-\pi}^{\pi}\ln^2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta\,.$$

Используя «грубую» оценку интеграла $\int_{-\pi}^{\pi}\ln^2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta<4\pi$, полученную при оценке константы C (3.32), находим

$$\int_{-1}^{1}\ln^2|\,t-t_0|\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}<3\pi(4+\ln^2 2)\,. \qquad (5.32)$$

Теперь из (31), с учетом (28), получаем оценку остаточного члена в квадратурной формуле (19):

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\,t-t_0|\left[f(t)-(P_{n-1}^{I}f)(t)\right]\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right|<2\pi\sqrt{12+3\ln^2 2}E_{n-1}\,. \qquad (5.33)$$

В заключение отметим, что оценки остаточных членов в квадратурных формулах для интегралов с ядром Коши приведены в уже цитированной монографии (И.К. Лифанов. Метод сингулярных уравнений и численный эксперимент. -М.:ТОО «Янус», 1995.-520 с.).