УДК 517.91

В. А. Ткаченко

ОБ ОПЕРАТОРЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Пусть $E_\rho\,(1<\rho<\infty)$ — пространство целых функций одной переменной, топология в котором определяется системой норм

$$\|f\|_{\rho,\,\varepsilon}=\sup_{r\geqslant 1} M_f(r)\exp(-r^{\rho+\varepsilon}),\quad (\varepsilon>0)$$

где, как обычно, $M_f(r)=\max|f(re^{i\theta})|$.

Рассмотрим в пространстве E_ρ^0 дифференциальный оператор

$$L=\left(\frac{d}{dz}\right)^n+p_{n-1}(z)\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}+\ \dots\ +p_0(z), \qquad (1)$$

в котором коэффициенты $p_{n-1}(z), \ldots, p_0(z)$ — целые функции. Мы исследуем вопрос о том, какими должны быть эти коэффициенты, чтобы оператор L был подобен в пространстве E_ρ простейшему оператору $D=\left(\frac{d}{dz}\right)^n$. В работах Дельсарта и Лионса [1], М. К. Фаге [2] и Л. А. Сахновича [3] впервые при $n>2$ для оператора вида (1) с V° коэффициентами был построен такой непрерывный изоморфизм T (оператор преобразования) пространства целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах, что

$$L=T^{-1}DT. \tag{2}$$

Покажем, что непрерывный изоморфизм T, реализующий (2) в пространстве E_ρ, существует лишь при весьма жестких ограничениях на коэффициенты оператора L. Именно справедлива следующая

Теорема. *Для того, чтобы оператор L был подобен оператору D в пространстве E_ρ $(1<\rho<\infty)$, необходимо и достаточно чтобы его коэффициенты $p_{n-1}(z), \ldots, p_0(z)$ были полиномами, степени которых $m_{n-1}, \ldots, m_0$ соответственно удовлетворяют условию*

$$\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\frac{m_k-k+n}{n-k}\leqslant\rho. \tag{3}$$

Необходимость. Оператор преобразования T, если он существует, является изоморфизмом подпространств решений однородных уравнений $Ly=0$ и $Dy=0$. Поэтому всякое решение $Ly=0$ имеет порядок роста не выше ρ. Как показал А. М. Фрей [4] (см. также [5]) в таком случае коэффициенты оператора L — полиномы. Наконец из результатов Ж. Валирона [6] следует, что эти коэффициенты удовлетворяют условию (3).

Замечание. При $\rho\leqslant 1$ из (3) следует $m_k=0$ и L оказывается оператором с постоянными коэффициентами. В частности при $\rho<1$ из предыдущих рассуждений следует, что при выполнении (2) будет $L=D$.

Достаточность. Докажем существование оператора преобразования, используя конструкцию, предложенную Дельсартом и Лионсом [1] и М. К. Фаге [2] в сочетании с оценками, которые следуют из условия (3).

Прежде всего покажем, что при выполнении условия (3) для всякой функции $f\in E_\rho$ выполняются оценки[1]

$$\|L^m f\|_{\rho,\,\omega}\leqslant C^m m^{mn(\rho+\varepsilon-1)(\rho+\varepsilon)^{-1}}\|f\|_{\rho,\,\varepsilon}, \tag{4}$$

$$(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

в которых $0<\varepsilon<\omega$, а величина C может зависеть от ε и ω, но не от m и f

---

[1] Через C мы будем обозначать различные положительные постоянные.

Будем исходить из формулы

$$Lf(z) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{j_1=0}^{m_{k_1}}(-1)^{j_1}\frac{\Gamma(k_1+1)}{\Gamma(j_1+1)}\oint_{C_z}\frac{p_{k_1}^{(j_1)}(\zeta)f(\zeta)\,d(\zeta)}{(\zeta-z)^{k_1-j_1+1}}, \tag{5}$$

в которой C_z — окружность достаточно большего радиуса. Из нее для всякого целого $m>0$ следует

$$L^m f(z) = \sum_{k_m=0}^{n}\sum_{j_m=0}^{m_{k_m}}\cdots\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{j_1=0}^{m_{k_1}}A_{k_1\ldots k_m}^{j_1\ldots j_m}J_{k_1\ldots k_m}^{j_1\ldots j_m}(z),$$

$$A_{k_1\ldots k_m}^{j_1\ldots j_m} = \frac{\Gamma(k_1+1)}{\prod\limits_{i=1}^{m}\Gamma(j_i+1)}\cdot\frac{\Gamma(k_1-j_1+k_2+1)}{\Gamma(k_1-j_1+1)}\cdots\frac{\Gamma\left(\sum\limits_{i=1}^{m-1}(k_i-j_i)+k_m+1\right)}{\Gamma\left(\sum\limits_{i=1}^{m-1}(k_i-j_i)+1\right)},$$

$$J_{k_1\ldots k_m}^{j_1\ldots j_m}(z) = \pm\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{p_{k_m}^{(j_m)}(\zeta)\ldots p_{k_1}^{(j_1)}(\zeta)f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\alpha_m+1}}d\zeta,$$

$$\alpha_m = \sum_{i=1}^{m}(k_i-j_i).$$

Очевидно,

$$\left|A_{k_1\ldots k_m}^{j_1\ldots j_m}\right| \leqslant k_1^{k_1}(k_1+k_2)^{k_2}\ldots(k_1+\ldots+k_m)^{k_m} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m}k_i\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m}k_i}.$$

Поскольку коэффициенты $p_{n-1}(\zeta),\ldots,p_0(\zeta)$ — полиномы, то при всех достаточно больших $|\zeta|$ будет

$$|p_k^{(j)}(\zeta)| \leqslant C|\zeta|^{m_k-j} \quad (0\leqslant k\leqslant n-1).$$

Если в интеграле (5) принять $C_z = \{\zeta : |\zeta| = (1+\delta)|z|;\ \delta>0\}$, получим

$$\left|J_{k_1\ldots k_m}^{j_1\ldots j_m}(z)\right| \leqslant C^m(1+\delta)\delta^{-1}M_f((1+\delta)|z|)|z+\delta z|^{\sum\limits_{i=1}^{m}(m_{k_i}-j_i)}\times$$

$$\times|z\delta|^{-\sum\limits_{i=1}^{m}(k_i-j_i)} \leqslant C^m(1+\delta)\delta^{-1}M_i((1+\delta)|z|)|z|^{\sum\limits_{i=1}^{m}(m_{k_i}-k_i)}\times$$

$$\times(1+\delta)^{\sum\limits_{i=1}^{m}m_{k_i}}\delta^{-\sum\limits_{i=1}^{m}k_i}.$$

Введем для краткости обозначение

$$B_{k_1\ldots k_m}^{j_1\ldots j_m}(z) = A_{k_1\ldots k_m}^{j_1\ldots j_m}J_{k_1\ldots k_m}^{j_1\ldots j_m}(z)$$

и положим далее

$$\delta = |z|^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right)^{(\rho+\varepsilon)^{-1}}$$

Если

$\delta \leqslant 1$, то

$$\left| B^{j_1\ldots j_m}_{k_1\ldots k_m}(z)\right| \leqslant C^m M_f(2|z|)\,|z|^{\sum\limits_{i=1}^{m} m_{k_i}}\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right)^{(1-(\rho+\varepsilon)^{-1})\sum\limits_{i=1}^{m} k_i}.$$

Из условия (3) следует $m_k \leqslant (\rho-1)(n-k)$, так что при $\delta \leqslant 1$ будет

$$\left| B^{j_1\ldots j_m}_{k_1\ldots k_m}(z)\right| \leqslant C^m |z|\, M_f(2|z|)\,|z|^{(\rho-1)\sum\limits_{i=1}^{m}(n-k_i)} \times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right)^{(1-(\rho+\varepsilon^{-1}))\sum\limits_{i=1}^{m} k_i} \leqslant C^m |z|\, M_f(2|z|)\,|z|^{(\rho-1)nm}\times$$

$$\times|z|^{-(\rho-1)\sum\limits_{i=1}^{m} k_i}\,|z|^{(\rho+\varepsilon-1)\sum\limits_{i=1}^{m} k_i} \leqslant C^m |z|\, M_f(2|z|)\,|z|^{(\rho-1+\varepsilon)nm}.$$

В случае $\delta \geqslant 1$ имеем

$$\left| B^{j_1\ldots j_m}_{k_1\ldots k_m}(z)\right| \leqslant C^m \delta M_f(2\delta|z|)\,|\delta z|^{\sum\limits_{i=1}^{m}(m_{k_i}-k_i)}\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m} k_i} \leqslant$$

$$\leqslant C^m \|f\|_{\rho,\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right)^{(\rho+\varepsilon)^{-1}(\rho-1)nm+(1-\rho(\rho+\varepsilon)^{-1})\sum\limits_{i=1}^{m} k_i} \leqslant$$

$$\leqslant C^m \|f\|_{\rho,\varepsilon}\, m^{(\rho+\varepsilon)^{-1}(\rho-1+\varepsilon)mn}.$$

Следовательно,

$$|L^m f(z)| \leqslant C^m\left[M_f(2|z|)\,|z|^{(\rho-1+\varepsilon)mn} + \|f\|_{\rho,\varepsilon}\, m^{(\rho+\varepsilon)^{-1}(\rho-1+\varepsilon)}\right].$$

Непосредственно проверяется, что

$$|z^q\|_{\rho,\varepsilon} \leqslant C^q q^{q(\rho+\varepsilon)^{-1}}. \tag{6}$$

Отсюда сразу получаем (4).

Обозначим, далее, через $l(z,\lambda)$ решение начальной задачи

$$Ll(z,\lambda) = \lambda^n l(z,\lambda),$$

$$e^{(k)}(0,\lambda) = \lambda^k,\quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{7}$$

Разложим функцию $l(z,\lambda)$ по степеням λ:

$$l(z,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k H_k(z). \tag{8}$$

Из (7) следует, что

$$LH_k(z) = 0, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1;$$
$$LH_k(z) = H_{k-n}, \qquad k \geqslant n \tag{9}$$

и

$$H_k^{(r)}(0) = \delta_{kr}, \quad 0 \leqslant k, \ r \leqslant n-1; \tag{10}$$
$$H_k^{(r)}(0) = 0, \quad k \geqslant n, \ 0 \leqslant r \leqslant n-1.$$

Теперь мы проверим, что получившаяся в разложении (8) система функций $\{H_k(z)\}_0^\infty$ образует базис в пространстве E_ρ (L — базис по терминологии М. К. Фаге).

Прежде всего отметим, что при выполнении условий (3) функция $l(z, \lambda)$ при всех больших значениях $|z|$ и $|\lambda|$ допускает оценку

$$|e(z, \lambda)| \leqslant e^{C|z|^\rho} \exp C|\lambda z|, \tag{7,8}$$

в которой $C > 0$ — постоянная, не зависящая от z и λ [7,8]. Поэтому при любых ε и ω $(0 < \varepsilon < \omega)$ имеем

$$\| e(z, \lambda) \|_{\rho, \omega} \leqslant C \exp |\lambda|^{(\rho+\varepsilon)(\rho+\varepsilon-1)^{-1}}.$$

Из неравенств Коши отсюда получаем

$$\| H_k(z) \|_{\rho, \omega} \leqslant C^k k^{-(\rho+\varepsilon)^{-1}(\rho+\varepsilon-1)k} \ (k \geqslant 1, \ 0 < \varepsilon < \omega). \tag{11}$$

Введем, следуя [1, 2], систему линейных функционалов $\{F_k[\cdot]\}_0^\infty$, положив для каждой функции $f \in E_\rho$

$$F_k[f] = \left(\frac{d}{dz}\right)^r L^m f(z)|_{z=0}, \ k = mn + r, \ m \geqslant 0, \ 0 \leqslant r \leqslant n-1.$$

Легко видеть, что системы функций $\{H_k(z)\}_0^\infty$ и функционалов $\{F_k[\cdot]\}_0^\infty$ биортогональны. Кроме того, система $\{F_k[\cdot]\}_0^\infty$ тотальна: если для некоторой функции $f \in E_\rho$ получилось

$$F_k[f] = 0 \ (k \geqslant 0),$$

то $f^{(k)}(0) = 0$ $(k \geqslant 0)$ и $f \equiv 0$. Отметим еще очевидное равенство $F_{k+n}[f] = F_k[L_f]$.

Каждой функции $f \in E_\rho$ сопоставим ряд

$$If(z) = \sum_{k=0}^\infty F_k[f] H_k(z). \tag{12}$$

Из неравенств (4) имеем

$$|F_k[f]| \leqslant C^k k^{k(\rho+\sigma-1)^{-1}} \| f \|_{\rho, \sigma}, \tag{13}$$

где постоянная C зависит лишь от σ. Привлекая еще оценки (11), получаем

$$\| If(z) \|_{\rho, \omega} \leqslant \sum_{k=0}^\infty |F_k[f]| \, \| H_k(z) \|_{\rho, \omega} \leqslant \sum_{k=0}^\infty C^k k^{k(1-(\rho+\sigma)^{-1})} \times$$
$$\times k^{-k(1-(\rho+\varepsilon)^{-1})} \| f \|_{\rho, \varepsilon}$$

при $\omega > \sigma > \varepsilon > 0$. Значит, ряд (12) сходится в E_ρ и определяет в этом пространстве непрерывный линейный оператор. Ввиду тотальности системы $\{F_k[\cdot]\}_0^\infty$ это означает, что $If = f$. Иными словами, всякая функция $f \in E_\rho$ допускает разложение

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k[f] H_k(z), \tag{14}$$

сходящееся в топологии E_ρ.

Определим теперь линейные операторы T и S равенствами

$$T_f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k[f] \frac{z^k}{k!},$$

$$Sf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) H_k(z)$$

Из (6), (11) и (13) немедленно следует, что операторы T и S непрерывны в E_ρ. Проверим, что T и S взаимно обратны. Имеем

$$TSf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) TH_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \frac{z^k}{k!} = f(z)$$

и ввиду (14)

$$STf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k[f] S \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} F_k[f] H_k(z) = f(z).$$

Таким образом, $S = T^{-1}$. Остается проверить, что T — оператор преобразования. Действительно,

$$DTf(z) = \sum_{k=n}^{\infty} F_k[f] \frac{z^{k-n}}{(k-n)!} = \sum_{k=0}^{\infty} F_{k+n}[f] \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} F_k[Lf] \frac{z^k}{k!}$$

или $DT = TL$.

Итак, $L = T^{-1}DT$, и теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Delsartes J. et Lions J. L., Transmutations d'operateurs differencielle dans les domain complexe, Comment. math. helv., 32, N 2, 1957, p. 113—128.
2. Фаге М. К. Операторно-аналитические функции одной независимой переменной.— «Тр. Моск. матем. об-ва», 7, 1958, с. 227—268.
3. Сахнович Л. А. Обратная задача для дифференциальных операторов порядка α с аналитическими коэффициентами.— «Матем. сб.», 46, 1958, с. 61—76.
4. Frei M. Sur l'ordre des solutions entiers d'une equations differentielle lineare, C. r. Acad. sci., 236, 1953, p. 38—40.
5. Витих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., ГИФМЛ, 1960. 112 с.
6. Валирон Ж. Аналитические функции. М., ГИТТЛ, 1957. 140 с.
7. Житомирский Я. И. Классы единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с растущими коэффициентами.— «Изв. АН СССР, сер. мат», 31, 1967, с. 763—782.
8. Золотарев Г. Н. Теоремы единственности для одного класса интегральных представлений.— «Матем. сб.», 78, 120, 1969, с. 407—424.