# ОТДѢЛЕНІЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЧАСТИ
# ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

*М. А. Тихомандрицкаго.*

1. Способъ Остроградскаго для отдѣленія алгебраической части интеграловъ отъ раціональныхъ дробей, примѣненный Алексѣевымъ въ его «Интегральномъ исчисленіи» къ интеграламъ отъ выраженій, содержащихъ квадратный корень изъ полинома 2. степени, распространяется и на гиперэллиптическіе интегралы, т. е. на интегралы отъ выраженій, содержащихъ корень квадратный изъ полинома какой угодно степени. Показать это есть цѣль настоящей замѣтки.

2. Имѣя въ виду сдѣланное уже самимъ Остроградскимъ, мы можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ интеграловъ вида:

$$\int \Phi(x) \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \qquad (1)$$

гдѣ $\Phi(x)$ раціональная функція $x$, такъ какъ общій интегралъ отъ выраженія, зависящаго отъ квадратнаго корня изъ полинома $R(x)$ какой угодно степени, будетъ отъ разсматриваемаго отличаться на интегралъ отъ раціональной дроби. Функція $\Phi(x)$ вообще неправильная дробь; исключая цѣлую часть, мы будемъ имѣть:

$$\Phi(x) = f(x) + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \qquad (2)$$

гдѣ $f(x)$ цѣлая функція, а $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ правильная дробь, такъ что, означая степень полинома по Абелю буквою $\delta$, поставленною предъ знакомъ полинома, будемъ имѣть:

$$\delta\varphi(x) < \delta\psi(x). \qquad (3)$$

На основаніи (2) нашъ интегралъ (1) приведется къ суммѣ двухъ такихъ:

$$\int \frac{f(x)\,dx}{2\sqrt{R(x)}},$$

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},$$

изъ которыхъ каждый мы разсмотримъ отдѣльно, начиная съ перваго.

3. Всегда можно найти такой полиномъ $K(x)$ степени не высшей $f(x)$, что по придачѣ его къ $f(x)$ мы получимъ интегралъ

$$\int \frac{f(x) + K(x)}{2\sqrt{R(x)}}\,dx, \qquad (1)$$

который будетъ интегрироваться алгебраически, слѣдовательно будетъ вида:

$$\int \frac{f(x) + K(x)}{2\sqrt{R(x)}} = X\sqrt{R(x)} + C, \qquad (2)$$

гдѣ $X$ цѣлый полиномъ*. Дѣйствительно, дифференцируя его и умножая затѣмъ на $2\sqrt{R(x)}$, получимъ:

$$f(x)+K(x)=X'.2R(x)+X.R'(x). \qquad (3)$$

---

* Общая форма функціи отъ $x$ и $\sqrt{R(x)}$ будетъ конечно такая:

$$\Theta(x)+\Phi(x)\sqrt{R(x)},$$

гдѣ $\Theta(x)$ и $\Phi(x)$ раціональныя функціи; но тогда, продифференцировавъ равенство:

$$\int\frac{f(x)+K(x)}{2\sqrt{R(x)}}\,dx=\Theta(x)+\Phi(x)\sqrt{R(x)},$$

мы получили бы по умноженіи результата на $2\sqrt{R(x)}$ слѣдующее:

$$f(x)+K(x)=\Theta'(x)\,2\sqrt{R(x)}+\Phi'(x)\,2\,R(x)+\Phi(x)\,R'(x), \qquad (a)$$

откуда слѣдуетъ, такъ какъ $\sqrt{R(x)}$ разсматривается всегда неизвлекомый, что

$$\Theta'(x)=0,$$

т. е.

$$\Theta(x)=C.$$

Что $\Phi(x)$ должна быть полиномъ, а не дробная функція, въ этомъ такъ убѣждаемся. Еслибы $\Phi(x)$ была дробная функція, то по разложеніи на частныя дроби она представилась бы суммою членовъ вида $\frac{A_\mu}{(x-\alpha)^\mu}$; если $m$ наибольшее значеніе $\mu$, то во второй части равенства (а) встрѣтится членъ

$$\frac{-A_m m 2R(\alpha)}{(x-\alpha)^{m+1}},$$

которому подобнаго не будетъ, но который долженъ исчезнуть, такъ какъ первая часть равенства (а) есть цѣлая функція; слѣдовательно если $A_m$ не $=0$, то должно быть $R(\alpha)=0$, т. е. $\alpha$ должно быть корнемъ полинома $R(x)$; но въ такомъ случаѣ старшимъ членомъ во второй части (а) будетъ такой членъ:

$$\frac{-m\,A_m 2R'(\alpha)+A_m R'(\alpha)}{(x-\alpha)^m}=\frac{A_m R'(\alpha)(1-2m}{(x-\alpha)^m},$$

который можетъ исчезнуть лишь когда $A_m=0$, ибо ни $R'(\alpha)$, ни $1-2m$ не $=0$. Но тогда такимъ-же образомъ докажется, что $A_{m-1}=0$, затѣмъ $A_{m-2}=0$ и такъ далѣе до $A_0=0$, т. е. что дробная часть $\Phi(x)$ равна нулю, и слѣдовательно $\Phi(x)$ есть цѣлая функція.

Отсюда слѣдуетъ прежде всего, такъ какъ члены высшей степени направо отъ знака равенства не сокращаются*, что

$$\partial(f(x)+K(x))=\partial X+\partial R-1, \qquad (4)$$

откуда выходитъ, такъ какъ $\partial K(x)<\partial f(x)$, что степень полинома $X$:

$$\partial X=\partial f(x)-(\partial R-1) \qquad (5)$$

— такъ что самый вопросъ возможенъ лишь пока

$$\partial f(x) \geqq \partial R-1, \qquad (6)$$

— и, слѣдовательно, число его неопредѣленныхъ коэффиціентовъ будетъ:

$$\partial X+1=\partial f(x)-(\partial R-2), \qquad (7)$$

тогда какъ всѣхъ уравненій, получаемыхъ чрезъ сравненіе коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ $x$ въ обѣихъ частяхъ равенства (3) числомъ

$$\partial(f(x)+K(x))+1=\partial X+\partial R, \qquad (8)$$

болѣе числа $\partial X+1$ на

$$\partial R-1.$$

Если мы возьмемъ теперь для $K(x)$ полиномъ степени

$$\partial K(x)=\partial R-2, \qquad (10)$$

то общее число неопредѣленныхъ коэффиціентовъ будетъ равно числу уравненій для ихъ опредѣленія. Эти уравненія всѣ будутъ независимы между собою. Дѣйствительно, если мы имѣемъ:

---

* См. ниже равенства (11), гдѣ $2m-\rho+2$ очевидно никогда не можетъ быть $=0$, если $m>\rho-2$.

$$R(x) = a_0 x^\varrho + a_1 x^{\varrho-1} + a_2 x^{\varrho-2} + \ldots + a_\varrho$$

$$f(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_m$$

и положимъ, принимая во вниманіе (5) и (10),

$$X = \alpha_0 x^{m-\varrho+1} + \alpha_1 x^{m-\varrho} + \alpha_2 x^{m-\varrho-1} + \ldots + \alpha_{m-\varrho+1}$$

$$K(x) = \beta_0 x^{\varrho-2} + \beta_1 x^{\varrho-3} + \beta_2 x^{\varrho-4} + \ldots + \beta_{\varrho-2},$$

то первыя два изъ уравненій, о которыхъ идетъ рѣчь, будутъ:

$$\begin{aligned} b_0 &= (2m - \varrho + 2) a_0 \alpha_0, \\ b_1 &= 2(m - \varrho + 1) a_1 \alpha_0 + \varrho a_0 \alpha_1; \end{aligned} \tag{11}$$

каждое же изъ послѣдующихъ будетъ содержать кромѣ нѣкоторыхъ $\alpha$ по одному только коэффиціенту полинома $K$, — будетъ именно вида:

$$b_k = -\beta_{k-2} + \text{линейная функція отъ } (\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{m-\varrho+1})$$

— который не войдетъ ни въ одно изъ остальныхъ уравненій, а потому вторыя части ни котораго изъ нихъ не могутъ быть линейною функціей остальныхъ. Слѣдовательно, рѣшеніе будетъ одно, конечное и опредѣленное, и изъ (2) мы получимъ тогда:

$$\int \frac{f(x)dx}{2\sqrt{R(x)}} = X\sqrt{R(x)} - \int \frac{K(x)dx}{2\sqrt{R(x)}}.$$

Такимъ образомъ чрезъ отдѣленіе алгебраической части отъ нашего интеграла мы сведемъ его къ интегралу того же вида, въ которомъ степень полинома будетъ не превосходить $\partial R - 2$. Въ частномъ случаѣ она можетъ быть меньше $\partial R - 2$, можетъ даже случиться, что всѣ коэффиціенты полинома $K(x)$ окажутся равными нулю; въ такомъ случаѣ предложенный намъ интегралъ (1) будетъ интегрироваться алгебраически, такъ какъ вторая часть (12) приведется тогда къ первому члену ея.

4. Переходя къ интегралу

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ $\delta\varphi(x) < \delta\psi(x)$, мы докажемъ, что всегда можно найти такой полиномъ $K(x)$, степени низшей чѣмъ $\delta\psi(x) + \delta R(x)$, что по придачѣ его къ числителю получится выраженіе:

$$\frac{\varphi(x) + K(x)}{\psi(x)} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},$$

интегрирующееся алгебраически, именно такимъ образомъ, что будетъ:

$$\int \frac{\varphi(x) + K(x)}{\psi(x)} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \frac{X}{Y}\sqrt{R(x)} + C, \qquad (2)$$

гдѣ

$$\delta X < \delta Y^*. \qquad (3)$$

---

* Что членъ несодержащій $\sqrt{R(x)}$ приводится къ постоянной, докажется какъ и выше; что же касается предположенія о правильности дроби $\frac{X}{Y}$, то допустимъ противное и предположимъ, что вторая часть (2) есть

$$\left(\Theta(x) + \frac{X}{Y}\right)\sqrt{R(x)} + C,$$

гдѣ $\frac{X}{Y}$ правильная дробь, а $\Theta(x)$ цѣлая функція; дифференцируя и дѣля на $\sqrt{R(x)}$, мы получимъ тогда такое равенство:

$$\frac{\varphi(x) + K(x)}{\psi(x)} \frac{1}{2R(x)} = \frac{YX' - XY'}{Y^2} + \frac{X}{Y} \cdot \frac{R'(x)}{2R(x)} +$$
$$+ \Theta'(x) + \Theta(x) \frac{R'(x)}{2R(x)}; \qquad (b)$$

но здѣсь цѣлое можетъ заключаться только въ послѣднихъ двухъ членахъ второй части. Пусть $A_m x^m$ старшій членъ въ $\Theta(x)$; тогда во второй части (b) старшіе члены цѣлой части будутъ:

Дѣйствительно, дифференцируя, получимъ по умноженіи на $2\sqrt{R(x)}$:

$$\frac{\varphi(x)+K(x)}{\psi(x)}=\frac{(YX'-XY')}{Y^2}\,2R(x)+\frac{X}{Y}R'(x),$$

или приводя къ одному знаменателю вторую часть:

$$\frac{\varphi(x)+K(x)}{\psi(x)}=\frac{(YX'-XY')\,2R(x)+XYR'(x)}{Y^2}. \quad (4)$$

Здѣсь вторая часть можетъ сократиться только на дѣлителей полинома $Y$, и какъ два члена числителя содержатъ $Y$ множителемъ, а третій его производную $Y'$, помноженную на $X$ и $R(x)$, гдѣ $X$ простой съ $Y$, то это сокращеніе можетъ произойти только на тѣхъ множителей полинома $Y$, которые суть общіе или $Y$ и $Y'$ или $Y$ и $R(x)$. Означая чрезъ $\Theta$ общаго наибольшаго дѣлителя функцій $Y$ и $Y'$, такъ что будетъ слѣдовательно:

$$\Theta=D(Y,Y'), \quad (5)$$

а также полагая

---

$$mA_m x^{m-1}+A_m\frac{\rho}{2}x^{m-1}=\left(m+\frac{\rho}{2}\right)A_m x^{m-1},$$

(если $\partial R(x)=\rho$); но это должно исчезнуть, такъ какъ налѣво отъ знака $=$ въ (b) стоитъ правильная дробь; слѣдовательно должно быть $A_m=0$, такъ какъ $m+\frac{\rho}{2}$ не равно нулю, какъ сумма положительныхъ чиселъ. Но тогда также докажется, что и $A_{m-1}=0$, и наконецъ $A_1=0$. Далѣе $A_0$ войдетъ въ такой членъ:

$$A_0\frac{\rho}{2}\cdot\frac{1}{x},$$

которому сходственнаго между другими не найдется, такъ какъ въ прочихъ членахъ степень числителя меньше степени знаменателя по крайней мѣрѣ на 2 единицы; слѣдовательно $A_0=0$, такимъ образомъ $\Theta(x)=0$, что̀ и требовалось доказать.

$$Y : \Theta = P, \qquad (6)$$

$$Y' : \Theta = Q, \qquad (7)$$

мы, по сокращенiи на $\Theta$ второй части равенства (4), дадимъ ему такой видъ:

$$\frac{\varphi(x) + K(x)}{\psi(x)} = \frac{(PX' - XQ)\,2R(x) + XPR'(x)}{Y \,.\, P}, \qquad (8)$$

гдѣ вторая часть можетъ сократиться уже только на дѣлителей общихъ $P$ и $R(x)$; дѣйствительно, всякiй множитель $Y$ входитъ въ $P$ одинъ разъ, а $R(x)$ кратныхъ не имѣетъ; далѣе $PX' - XQ$ простое съ $P$, и $P$ входитъ множителемъ во второй членъ (8); что же касается до множителей общихъ $P$ и $R'(x)$, которые могутъ случиться, то они не дѣлятъ ни $R(x)$, ибо $R(x)$ не имѣетъ кратныхъ дѣлителей, ни $PX' - XQ$, которое, какъ сейчасъ уже упомянуто, простое съ $P$. Итакъ, вторая часть (8) можетъ сократиться только на общаго наибольшаго дѣлителя $P$ и $R(x)$, который означимъ такъ:

$$z = D(P, R(x)); \qquad (9)$$

введя еще обозначенiя:

$$P : D(P, R(x)) = p$$

$$R(x) : D(P, R(x)) = r(x), \qquad (10)$$

мы получимъ изъ (8) по сокращенiи на $z$ такое равенство:

$$\frac{\varphi(x) + K(x)}{\psi(x)} = \frac{(PX' - XQ)\,2r(x) + XpR'(x)}{Y \,.\, p}, \qquad (11)$$

гдѣ вторая часть будетъ уже несократимая дробь; что же касается первой части, то она можетъ сокращаться на нѣкоторый полиномъ $q$; слѣдовательно мы будемъ имѣть изъ (11):

$$\varphi(x) + K(x) = [(PX' - XQ)\,2r(x) + XpR'(x)]\,.\,q \quad (12)$$

$$\psi(x) = Y.p.q. \quad (13)$$

5. Первое изъ этихъ равенствъ дастъ полиномъ $K(x)$, когда будутъ извѣстны: $P, Q, p, q, r(x)$ и $X$. Послѣдній, а съ нимъ и $K(x)$ вполнѣ опредѣлятся,—послѣ того какъ будутъ извѣстны $P, Q, p, q, r(x)$ и еще $Y$,—изъ условія, чтобы полиномъ

$$K(x) = [(PX' - XQ)\,2r(x) + XpR'(x)]\,q - \varphi(x) \quad (14)$$

дѣлился безъ остатка на $Y$. Въ самомъ дѣлѣ, когда $P, Q, p, q, r(x)$ и $Y$ будутъ извѣстны, то во второй части (14) будетъ только $\partial X + 1 = \partial Y$ неопредѣленныхъ величинъ, именно коэффиціентовъ полинома $X$; слѣдовательно для его опредѣленія, а съ нимъ вмѣстѣ и $K(x)$, можно поставить только $\partial Y$ условій; а такое число условій и даетъ наше требованіе дѣлимости $K(x)$ на $Y(x)$; для этого, какъ извѣстно, остатокъ дѣленія, который будетъ степени $\partial Y - 1 = \partial X$, долженъ имѣть всѣ свои $\partial Y$ коэффиціентовъ равными нулю; потому уравненія для опредѣленія коэффиціентовъ полинома $X$ согласно этому требованію мы получимъ, выполнивъ дѣленіе второй части (14) на $Y(x)$ и приравнивая нулю каждый коэффиціентъ остатка этого дѣленія. Изъ этихъ уравненій коэффиціенты $X$, а слѣдовательно потомъ и коэффиціенты частнаго:

$$L(x) = \frac{[(PX' - XQ)\,2r(x) + XpR'(x)]\,q - \varphi(x)}{Y} \quad (15)$$

вполнѣ опредѣлятся. Уравненія эти вполнѣ независимы; въ самомъ дѣлѣ, если нѣкоторыя изъ нихъ были бы слѣдствіемъ остальныхъ, то равное число коэффиціентовъ полинома $X$, а слѣдовательно и самый полиномъ $X$ до нѣкоторой степени остались бы произвольными; но тогда изъ дѣлимости второй части (14) на $Y$ при произвольности полинома $X$ слѣдовало бы необходимымъ образомъ, что коэффиціенты при $X$, $X'$ и независящій отъ нихъ членъ, т. е. $\varphi(x)$, должны дѣлиться на $Y$; но это послѣднее невозможно, ибо дробь $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ всегда берется несократимая, а $Y$ по (13) есть дѣлитель ея знаменателя $\psi(x)$. Такъ какъ $K(x)$ содержитъ только $\delta Y$ произвольныхъ величинъ, то его нельзя подчинить требованію дѣлиться на полиномъ высшей степени чѣмъ $Y$; наибольшей степени сократимости дроби $\frac{K(x)}{\psi(x)}$, прибавленной къ дроби, стоящей подъ нашимъ интеграломъ, можно достигнуть, слѣдовательно, только увеличеніемъ степени полинома $Y$.

6. Изъ (13) слѣдуетъ, что $Y$, $p$ и $q$ суть дѣлители $\psi(x)$, и такъ какъ мы желаемъ собрать въ $Y$ наивозможно большее число дѣлителей $\psi(x)$, чтобы увеличить его степень, то на долю $q$ мы должны оставить наименьшее число ихъ, ибо $p$ зависитъ отъ $P$ и слѣдовательно отъ $Y$. Изъ (6) имѣемъ

$$Y=\theta . P;$$

далѣе изъ (10) и (9) предыдущаго §

$$P=p . z;$$

внося отсюда и изъ предыдущаго въ (13), будемъ имѣть:

$$\psi(x)=\theta . p^2 . z . q, \tag{1}$$

отсюда слѣдуетъ, что наименьшее значеніе для $q$ получимъ, если соберемъ въ немъ простыхъ множителей $\psi(x)$, отличныхъ отъ множителей полинома $R(x)$; общіе же множители съ послѣднимъ взятые одинъ разъ собраны въ $z$. Написавъ (1) такимъ образомъ

$$\psi(x)=(\theta . p) p . z . q, \tag{2}$$

въ произведенiи $p.z.q$ будемъ имѣть все различныхъ множителей, тогда какъ въ $(\theta p)$ могутъ быть и одинакiе, причемъ входящiе въ $p$ будутъ входить и въ $\theta p$; также могутъ входить въ $\theta p$ нѣкоторые изъ множителей $z$, притомъ множители $\theta p$ непремѣнно будутъ входить по одному разу въ $pz$; что же касается до множителей $q$, то они не будутъ входить въ $\theta p$, ибо, по условiю, это простые множители $\psi(x)$, отличные отъ множителей общихъ у $\psi(x)$ съ $R(x)$. И такъ

$$p.z.q = Pq$$

будетъ произведенiе всѣхъ различныхъ множителей $\psi(x)$, взятыхъ по одному разу. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\theta p = D(\psi(x), \psi'(x)), \qquad \text{(I)}$$

а

$$Pq = \psi(x) : D(\psi(x), \psi'(x)). \qquad \text{(II)}$$

Такъ какъ множители $q$ отличны отъ множителей $R(x)$, то общiй наибольшiй дѣлитель $Pq$ и $R(x)$ будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ $P$ и $R(x)$, т. е. будетъ:

$$z = D(P, R(x)) = D(Pq, R(x)) \qquad \text{(III)}$$

и потому можетъ быть найденъ.

Дѣля на него $R(x)$, найдемъ $r(x)$:

$$r(x) = R(x) : z; \qquad \text{(IV)}$$

дѣля $Pq$ на $z$, найдемъ $pq$:

$$pq = Pq : z. \qquad \text{(V)}$$

Такъ какъ $pq$ содержитъ простыхъ множителей, изъ которыхъ только входящiе въ $p$ входятъ въ $\theta .p$; то $p$ будетъ общiй наибольшiй дѣлитель $pq$ и $\theta p$:

$$p = D(pq, \Theta p). \qquad \text{(VI)}$$

Найдя его, дѣлимъ на него $pq$ и $\Theta p$; получимъ:

$$q = pq : p. \qquad \text{(VII)}$$

$$\Theta = \Theta p : p. \qquad \text{(VIII)}$$

Дѣля $Pq$ на $q$ найдемъ

$$P = Pq : q; \qquad \text{(IX)}$$

перемножая $P$ и $\Theta$, найдемъ

$$Y = P.\Theta; \qquad \text{(X)}$$

дифференцируя его найдемъ $Y'$, и затѣмъ $Q$ по формулѣ

$$Q = \frac{Y'P}{Y}, \qquad \text{(XI)}$$

которая вытекаетъ изъ (6) и (7) § 4. Такимъ образомъ все, входящее въ выраженіе $K(x)$:

$$K(x) = [(PX' - XQ)\,2r(x) + XpR'(x)]\,q - \varphi(x) \qquad \text{(XII)}$$

будетъ теперь извѣстно до степени полинома X включительно; подставляя сюда вмѣсто $X$ полиномъ степени $\delta Y - 1$ съ неопредѣленными коэффиціентами и дѣля вторую часть на $Y$, приравняемъ нулю каждый изъ $\delta Y$ коэффиціентовъ имѣющаго получиться остатка; тогда будемъ имѣть $\delta Y$ уравненій, изъ которыхъ и найдемъ всѣ коэффиціенты полинома X; вставляя ихъ въ частное этого дѣленія

$$\frac{K(x)}{Y} = \frac{[(PX' - XQ)\,2r(x) + XpR'(x)]\,q - \varphi(x)}{Y} = L(x), \quad \text{(XIII)}$$

найдемъ и полиномъ $L(x)$.

Послѣ этого мы будемъ имѣть:

$$\int\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=\frac{X}{Y}\sqrt{R(x)}-\int\frac{L(x)}{p.q}\,\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}. \qquad \text{(XIV)}$$

*Примѣч.* Мы опредѣлили полиномъ $K(x)$ изъ условія дѣлимости выраженія (14) на $Y$; почему же не на другой полиномъ той же степени какъ $Y$, который можно получить, замѣняя нѣкоторые множители $Y$ множителями $q$? но легко видѣть, что это невозможно: въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ первая группа членовъ въ (14), имѣя множителемъ $q$, очевидно дѣлится на него, то остальной членъ $-\varphi(x)$ въ такомъ случаѣ тоже долженъ дѣлиться на $q$, а это невозможно, ибо $q$ есть дѣлитель $\psi(x)$. Отсюда слѣдуетъ, что вышеизложенное приведеніе гиперэллиптическаго интеграла посредствомъ отдѣленія алгебраической части есть единственное.

7. Степень полинома $L(x)$ найдется изъ слѣдующихъ соображеній. Степень обоихъ членовъ выраженія:

$$PX'-XQ, \qquad (1)$$

будетъ

$$\partial P+\partial X-1=\partial P+\partial Y-2,$$

какъ не трудно видѣть, или, такъ какъ

$$\partial P=\partial p+\partial z,$$

слѣдующая:

$$\partial p+\partial z+\partial Y-2;$$

по умноженіи (1) на $2r(x)$, мы получимъ для степени произведенія:

$$\partial p+\partial z+\partial r(x)+\partial Y-2=\partial p+\partial Y+\partial R-2, \qquad (2)$$

ибо

$$\partial R=\partial z+\partial r(x). \qquad (3)$$

Второй членъ выраженія въ [ ] въ (14), или XII, будетъ степени той-же самой:

$$\delta p+\delta Y-1+\delta R-1.$$

Если это выраженіе въ [ ] помножимъ на $q$, то степень произведенія будетъ:

$$\delta p+\delta q+\delta Y+\delta R-2: \tag{4}$$

такъ какъ степень послѣдняго члена $\varphi(x)$ есть

$$\delta\varphi(x)<\delta\psi(x),$$

а по (13) § 4:

$$\delta\psi(x)=\delta p+\delta q+\delta Y,$$

то мы видимъ, что вообще будетъ

$$\delta L(x)=\delta p+\delta q+\delta R-2. \tag{5}$$

Отсюда слѣдуетъ, что въ (XIII) второй членъ разобьется, по разложеніи дроби $\dfrac{L(x)}{p\cdot q}$ на простѣйшія, на сумму интеграловъ того-же вида какъ во второй части (12) § 3, которые разбиваются на интегралы перваго и втораго рода — обращающіеся въ $\infty$ для $x=\infty$, — и интегралы третьяго рода, вида:

$$\int\frac{A\,dx}{(x-\alpha)\,2\sqrt{R(x)}},$$

обращающіеся логариѳмически въ $\infty$ для $x=\alpha$,

$$\sqrt{R(x)}=\pm\sqrt{R(\alpha)}.$$

8. Пояснимъ изложенное въ § 6 слѣдующимъ примѣромъ. Пусть данъ интегралъ

$$\int\frac{(x^2+1)\,dx}{x^2(x-1)\sqrt{x^3-1}}; \tag{1}$$

найдемъ такой полиномъ $K(x)$, чтобы было

$$\int \frac{(x^2+1+K(x))\,dx}{x^2(x-1)\sqrt{x^3-1}} = \frac{X}{Y}\sqrt{x^3-1}. \qquad (2)$$

Въ нашемъ интегралѣ слѣдовательно:

$$R(x) = x^3 - 1 \qquad (3)$$

$$\varphi(x) = x^2 + 1 \qquad (4)$$

$$\psi(x) = x^2(x-1), \qquad (5)$$

и потому будетъ:

I $\quad D(\psi(x), \psi'(x)) = D(x^2(x-1), 3x^2 - 2x) = x = \theta p;$

II $\quad \psi(x) : \theta p = x^2(x-1) : x = x(x-1) = Pq;$

III $\quad D(Pq, R(x)) = D(x(x-1), x^3-1) = x-1 = D(P, R(x)) = z;$

IV $\quad R(x) : z = (x^3-1) : (x-1) = x^2 + x + 1 = r(x);$

V $\quad Pq = z = x(x-1) : (x-1) = x = pq;$

VI $\quad D(\theta p : pq) = D(x, x) = x = p;$

VII $\quad pq : p = x : x = 1 = q;$

VIII $\quad \theta p : p = x : x = 1 = \theta;$

IX $\quad Pq : q = x(x-1) : 1 = x(x-1) = P;$

X $\quad Y = \theta\,.\,P = 1\,.\,x(x-1) = x^2 - x; \quad Y' = 2x - 1; \quad \delta Y = 2;$

XI $\quad Q = \dfrac{Y'.P}{Y} = \dfrac{(2x-1).x(x-1)}{x(x-1)} = 2x - 1;$

такъ какъ $\delta Y = 2$, то полагаемъ

$$X = ax + b; \text{ слѣд. } X' = a,$$

и потому имѣемъ:

$$K(x) = [(PX' - XQ)\,2r(x) + Xp\,.\,R'(x)]\,q - \varphi(x) =$$
$$= [\{x(x-1)a - (ax+b)(2x-1)\}\,2(x^2+x+1) +$$
$$+ (ax+b)\,.\,x\,.\,3x^2]\,.\,1 - x^2 - 1 =$$
$$= ax^4 - (2a+b)x^3 - (2a+2b+1)x^2 - 2bx + 2b - 1.$$

Дѣля на $Y = x^2 - x$, получимъ въ частномъ:

$$L(x) = ax^2 - (a+b)x - (3a+3b+1),$$

а въ остаткѣ:

$$-(3a+5b+1)x + 2b - 1;$$

полагая

$$\left.\begin{aligned} 3a+5b+1 &= 0,\\ 2b-1 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

находимъ:

$$a = -\frac{7}{6},\; b = \frac{1}{2};$$

слѣд.

$$X = -\frac{7x-3}{6}$$

и

$$L(x) = -\frac{1}{6}(7x^2 - 4x - 6),$$

и потому окончательно будемъ имѣть:

$$\int\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x^3-1}} = -\frac{7x-3}{6x(x-1)}\sqrt{x^3-1} +$$
$$+\frac{1}{6}\int\frac{7x^2-4x-6}{x}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x^3-1}}.$$

Послѣдній интегралъ разобьется на три интеграла 2-го, 1-го и 3-го рода.