ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ*

А. Я. Повзнер

(Харьков)

Основные теоремы

1. Пусть H обозначает полное гильбертово пространство функций $f(z)$, определенных на некотором множестве $\mathbf{M}$. Рассмотрим в пространстве H семейство функционалов l_ζ, зависящих от точек множества M и определенных по формуле:

$$l_\zeta(f) = f(\zeta),\ f \in H, \tag{1.1}$$

где ζ — фиксированная точка множества $\mathbf{M}$.

Определение. Пространство H мы будем называть g-пространством, если функционалы семейства (1.1) являются линейными. Это определение эквивалентно следующему: H называется g-пространством, если существует такая функция $\psi(\zeta)$, что для любых $f \in H$, $\zeta \in \mathbf{M}$ имеет место соотношение:

$$|f(\zeta)| \leqslant \psi(\zeta)\, \| f \|. \tag{1.1'}$$

В дальнейшем через $\psi(\zeta)$ будет обозначаться $\| l_\zeta \| = \overline{\lim} \frac{|f(\zeta)|}{\| f \|}$.

По известной теореме Ф. Рисса, каждый линейный функционал в пространстве H можно представить в виде скалярного произведения. Откуда следует, что

$$l_\zeta(f) = f(\zeta) = f(f, g_\zeta),\ f \in H,\ g_\zeta \in H, \tag{1.2}$$

где g_ζ — определенная функция из H с нормой, равной норме функционала l_ζ. Из (1.2) следует, что

$$\| l_\zeta \| = \psi(\zeta) = \sqrt{(g_\zeta, g_\zeta)} = \sqrt{g_\zeta(\zeta)}. \tag{1.3}$$

Обозначим $g_\zeta(z)$ через $g(z, \zeta)$. Функцию $g(z\ \zeta)$ будем называть g-функцией пространства H.

Теорема 1. $g(z, \zeta)$ эрмитово-положительное ядро на $\mathbf{M}$:

$$g(z, \zeta) = \overline{g(\zeta, z)};\quad \sum_{i, k=1}^{n} g(z_i, z_k)\, \xi_i \bar{\xi}_k \geqslant 0.$$

---

* После того, как основные результаты этой работы были опубликованы [1] [2], вышла из печати работа Aronszajn'a [3], в которой изложены основы той же теории.

Доказательство. Вставив в (1.2) вместо f функцию $g_z(\zeta)$, получим:

$$g_z(\zeta) = (g_z, g_\zeta) = \overline{(g_\zeta, g_z)} = \overline{g_\zeta(z)}, \text{ т. е. } g(z, \zeta) = \overline{g(z, \zeta)}.$$

Из последнего равенства немедленно получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g(z_i, z_k)\bar{\xi}_i\xi_k = \left(\sum_{i=1}^{n} g_{z_i}\xi_i, \sum_{k=1}^{n} g_{z_k}\xi_k\right) \geqslant 0,$$

Формула (1.2) относит каждой точке $\zeta \in \mathbf{M}$ единственную функцию $g_\zeta \in H$. Поэтому множество $\mathbf{M}$ можно идентифицировать с некоторым подмножеством $\widetilde{\mathbf{M}}$ функций пространства H. Это множество $\widetilde{\mathbf{M}}$ состоит из функций $\tilde{\zeta} = g_\zeta \in H$, где ζ пробегает $\mathbf{M}$.

2. Предположим, что пространство H сепарабельно. Пусть $\{u_i(z)\}_1^\infty$ — полная ортонормированная система функций в нем. Рассматривая $g(z, \zeta)$ как функцию от z и разлагая ее в ряд Фурье по выбранной системе, будем иметь:

$$g(z, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(z),$$

где

$$c_k = c_k(\zeta) = (g_\zeta, u_k) = \overline{(u_k, g_\zeta)} = \overline{u_k(\zeta)}.$$

Откуда для g-функций пространства H получается билинейная формула

$$g(z, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\overline{u_k(\zeta)}, \; z, \zeta \in \mathbf{M}. \tag{2.1}$$

Ряд (2.1) при фиксированном ζ сходится в метрике H, но о сходимости ряда (2.1) можно сказать несколько больше, в силу следующего предложения.

Лемма 1. Назовем замкнутой ψ-областью совокупность точек $z \in \mathbf{M}$, удовлетворяющих неравенству $\psi(z) \leqslant c$, где c — некоторая константа. Тогда, если последовательность $f_n(z) \in H$ сходится к $f(z)$ в метрике H, то, как немедленно следует из (1.1′), она сходится равномерно в каждой замкнутой ψ-области.

Лемма 2. Линейная оболочка множества $\widetilde{\mathbf{M}}$ функций $g_\zeta(z)$ плотна в пространстве H.

Доказательство. Нужно показать, что из равенства $(f, g_\zeta) = 0$ для всех $\zeta \in \mathbf{M}$ следует, что $f(\xi) \equiv 0$. Но это вытекает из того, что, в силу (1,2), $(f, g_\zeta) = f(\zeta)$.

Выберем в $\mathbf{M}$ такую последовательность точек $\{a_i\}_1^\infty$, чтобы линейная оболочка функций $\{g_{a_i}\}_1^\infty$ была плотна в H и чтобы любая конечная совокупность функций g_{a_i} была линейно независима. Пусть $\{e_i\}_1^\infty$ — ортонормированная система, полученная из последовательности $\{g_{a_i}\}_1^\infty$, процессом ортогонализации. Любой элемент $f \in H$ представим в виде

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} (f, e_i) e_i. \tag{2.2}$$

Известные формулы для e_i дают:

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{D_i D_{i-1}}} \begin{vmatrix} g(a_1, a_1) \ldots g(a_1, a_i) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g(a_{i-1}, a_1) \ldots g(a_{i-1}, a_i) \\ g(z, a_1) \ldots g(z, a_i) \end{vmatrix}, \tag{2.3}$$

$$(f, e_i) = \frac{1}{\sqrt{D_i D_{i-1}}} \begin{vmatrix} g(a_1, a_1) \ldots g(a_i, a_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g(a_1, a_{i-1}) \ldots g(a_i, a_{i-1}) \\ f(a_1) \ldots f(a_i) \end{vmatrix},$$

где

$$D_0 = 1,\ D_k = D(a_1, a_2, \ldots a_k) = |g(a_i, a_k)|_1^k\ (k = 1, 2, 3 \ldots)$$

выражение (2.2) переходит в

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{D_i D_{i-1}}} \begin{vmatrix} g(a_1, a_1) \ldots g(a_i, a_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g(a_1, a_{i-1}) \ldots g(a_i, a_{i-1}) \\ f(a_1) \ldots f(a_i) \end{vmatrix} l_i(z) \tag{2.4}$$

Ряд (2.4) сходится не только в метрике H, но и равномерно в каждой замкнутой ψ-области.

Так как плотность линейной оболочки функций $\{g_{a_i}\}_1^\infty$ означает, что в H не существует функции $f(z)$, обращающейся в нуль в точках $\{a_i\}_1^\infty$, за исключением $f(z) \equiv 0$, то справедлива.

Теорема 2. Если последовательность точек $\{a_i\}_1^\infty$, из $\mathbb{M}$ такова, что в пространстве H не существует функции $f(z) \not\equiv 0$, обращающейся в нуль в этих точках, а последовательность функций $\{g_{a_i}\}_1^\infty$ линейно независима, то любая функция $f(z) \in H$ может быть вычислена по ее значениям в точках $\{a_i\}_1^\infty$ по формуле (2.4).

Очевидной является

Теорема 2'. Для того чтобы последовательность чисел $\{\beta_i\}_1^\infty$ была последовательностью значений некоторой функции $f(z) \in H$ в последовательности точек $\{a_i\}_1^\infty$, удовлетворяющих условию теоремы 2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{\sqrt{D_i D_{i-1}}} \begin{vmatrix} g(a_1, a_1) \ldots g(a_i, a_1) \\ g(a_1, a_{i-1}) \ldots g(a_i, a_{i-1}) \\ \beta_1 \ldots \beta_i \end{vmatrix} \right) \right|^2 < \infty.$$

По лемме 2-й, линейная оболочка множества $\widetilde{\mathbb{M}}$ плотна в H. Поэтому линейная оболочка $\{g_{a_i}\}_1^\infty$, тогда и только тогда плотна в H, если для любой точки $\zeta \in \mathbb{M}$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\min_{c_k} \| g_\zeta - \sum_{k=1}^{n} c_k g_{a_k} \| \right) = 0.$$

Используя детерминантные формулы для минимума, устанавливаем, что справедлива

Теорема 3. Для того чтобы не существовало в пространстве H функции $f(z) \neq 0$, обращающейся в нуль в точках $\{a_i\}_1^\infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:

$$D(g_{a_1}, g_{a_2}, \ldots, g_{a_n}) \neq 0 \text{ при любом } n,$$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{D(g_\zeta, g_{a_1}, g_{a_2}, \ldots, g_{a_n})}{D(g_{a_1}, g_{a_2}, \ldots, g_{a_n})} = 0 \text{ при любом } \zeta \in \mathbf{M}. \tag{2.5}$$

Замечание. Будем говорить, что H обладает A-свойством, если из условия $f(a) = 0$ $(f \not\equiv 0)$ следует существование в H функции $f_1(z)$, обращающейся в нуль в тех же точках, что и $f(z)$, кроме точки a. Если H обладает A-свойством, то в формулировке теоремы 3, нужно требовать только, чтобы выполнялось условие (2.5) лишь для одной точки $a \in \mathbf{M}$, отличной от $\{a_i\}_1^\infty$.

Действительно, если $\{g_{n_i}\}_1^\infty$ не плотна в H, то существует такая функция $f(z) \in H$ $(f(z) \not\equiv 0)$, что $(f, g_{a_i}) = f(a_i) = 0$. Возьмем точку a, отличную от $\{a_i\}_1^\infty$. Тогда в силу A-свойства существует такая функция $f_1(z)$, что $(f_1, g_a) = f_1(a) \neq 0$ и $f_1(a_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Но это противоречит справедливости (2.5) для точки a, так как (2.5) означает, что g_a апроксимируется линейными комбинациями функций $\{g_{a_i}\}_1^\infty$.

Развитые выше соображения, позволяют решить в терминах g-пространств одну, часто встречающуюся, экстремальную задачу.

Пусть в некотором g-пространстве H заданы n точек $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{M}$ и n чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Требуется найти $\min(f, f)$ при условии $f(a_i) = \beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $f \in H$, а также минимизирующую функцую. Решение получается сразу, если переписать данные задачи в виде $(f, g_{ai}) = \beta_i$. Тогда, предполагая линейную независимость функций $\{g_{ai}\}_1^n$, мы для минимизирующей функции f^* получим выражение

$$f^*(z) = \sum_{k=1}^n x_k g(z, a_k),$$

где

$$\sum_{k=1}^n x_k g(a_i, a_k) = \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

а $g(z, \zeta)$ g-функция пространства H.

3. Из леммы 2 и эрмитово-положительности g-функции пространства H следует, что H есть замыкание множества функций $\lambda(z)$ вида

$$\lambda(z) = \sum_{s=1}^n g(z, a_s) \lambda_s$$

с нормой

$$\|\lambda\|^2 = \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n g(a_s, a_t) \overline{\lambda_s} \lambda_t,$$

где $g(z, \zeta)$ — g-функция пространства H.

Мы сейчас покажем обратное.

Пусть задано некоторое множество $\mathbf{M}$ и эрмитово-положительное ядро $K(z, \zeta)$ на нем, т. е. функция $K(z, \zeta)$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{i, k=1}^n K(z_i, z_k) \overline{\lambda_i} \lambda_k \geqslant 0$$

при любых числах n, $\{\lambda_i\}_1^n$ и любых точках $\{z_i\}_1^n \in \mathbf{M}$ и $K(u, v) = K(v, u)$. Рассмотрим совокупность H_k' функций $\lambda(z)$ вида:

$$\lambda(z) = \sum_{s=1}^{n} K(z, a_s)\lambda_s.$$

Определим скалярное произведение функций

$$\lambda = \sum_{s=1}^{n} K(z, a_s)\lambda_s$$

и

$$\mu = \sum_{s=1}^{m} K(z, b_s)\mu_s$$

положив

$$(\lambda, \mu) = \sum_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} K(b_t, a_s)\overline{\mu_t}\lambda_s.$$

Имеет место

Теорема 4. Совокупность функций H_k', при вышеуказанном определении скалярного произведения, образует неполное гильбертово пространство. Замыкание H_k пространства H_k' есть g-пространство, g-функция которого равна $K(z, \zeta)$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что

$$|\lambda(z)| \leqslant \sqrt{K(z, z)}\,\|\lambda\| \tag{3.1}$$

Действительно, пусть

$$\lambda(z) = \sum_{s=1}^{n} K(z, a)\lambda_s.$$

Зафиксируем z и положим

$$a_0 = z,\quad \xi_0 = 0,\quad \xi_i = \lambda_i\ \ (i = 1, 2, \ldots n),\quad \eta_0 = 1, \eta_i = 0\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

В силу неравенства Буняковского

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} K(a_i, a_k)\overline{\eta_i}\xi_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} K(a_i, a_k)\overline{\xi_i}\xi_k}\cdot\sqrt{\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} K(a_i, a_k)\overline{\eta_i}\eta_k},$$

что после подстановки значений a, ξ и η дает (3.1). (3.1) показывает, что из $\|\lambda\| = 0$ следует, что $\lambda(z) \equiv 0$. Обратное тривиально следует из определения нормы. Из (3.1) вытекает также, что пространство H_k есть g-пространство. Далее, из определения скалярного произведения следует, что при фиксированном $\zeta \in \mathbf{M}$ $(\lambda(z), K(z, \zeta)) = \lambda(\zeta)$. А так как множество функций $\lambda(z)$ плотно в H_k, то и для любой фукции $f(z) \in H_k$ справедливо равенство $(f, K(z, \zeta)) = f(\zeta)$, что показывает, что $K(z, \zeta)$ есть g-функция пространства H_k.

4. Предыдущие рассмотрения естественно приводят к следующему общему способу конструкции g-пространств.

Пусть H — некоторое гильбертово пространство и $\mathbf{M}$ — подмножество его элементов, линейная оболочка которого плотна в H. Любому $f \in H$ единственным образом можно поставить в соответствие функцию $f(m)$ на $\mathbf{M}$, полагая $f(m) = (f, m)$ для всех $m \in \mathbf{M}$. Обозначим это пространство функций через H_1. Это соответствие взаимно однозначно, так как из $f(m) = (f, m) = 0$ для всех $m \in \mathbf{M}$ следует, что $f = 0$. Определяя в H_1 скалярное произведение двух функций $f(m)$ и $g(m)$ по формуле $(f(m), g(m)) = (f, g)$, мы получим гильбертово пространство функций $f(m)$, изоморфное исходному. Это пространство есть g-пространство, так как

$$|f(m)| = |(f, m)| \leq \sqrt{(f, f)} \cdot \sqrt{(m, m)} = \sqrt{(m, m)}\, \|f\|.$$

Очевидно, что g-функция пространства H_1 есть

$$g(m, n) = (m, n),$$

ибо

$$f(m) = (f, m) = (f(n), m(n)),$$

т. е.

$$g_m(n) = m(n) = (m, n).$$

Это очевидно есть общий способ построения g-пространств.

Введем в пространстве H слабую топологию, взяв за систему окрестностей $U(f; x_1, x_2, \ldots x_n; \varepsilon)$ элемента $f \in H$ совокупность всех элементов $y \in H$ таких, что

$$|(f, x_i) - (y, x_i)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Все нижеследующие топологические термины относятся к слабой топологии. Определив индуцированную этой топологией топологию в $\mathbf{M}$, мы превратим наши функции $f(m)$ в непрерывные. Предположим теперь для определенности, что H сепарабельно, а $\mathbf{M}$ ограниченное замкнутое подмножество H. Тогда $\mathbf{M}$ является компактом. Пусть, далее, $\tau(\mu)$ — вполне аддативная мера на всех борелевских множествах $\mu \in \mathbf{M}$.

Рассмотрим интегральное уравнение:

$$\varphi(y) = \lambda \int_{\mathbf{M}} (x, y)\, \varphi(x)\, d\tau(x), \quad y \in \mathbf{M}. \tag{4.1}$$

Легко видеть, что к ядру (x, y) можно применить всю теорию интегральных уравнений с симметрическим ядром. Если τ-мера любого открытого множества отлична от нуля, будет справедлива также и теорема Мерсера.

Если

$$\int_{\mathbf{M}} |f(y)|^2\, d\tau(y) = \|f\|_\tau < \infty, \quad \text{то}$$

$$\left|\int_{\mathbf{M}} (m, s)\, \varphi(m)\, d\tau(m)\right|^2 \leq \int_{\mathbf{M}} |(m, s)|^2 |\varphi(m)|^2\, d\tau(m) \cdot \int_{\mathbf{M}} d\tau(m) \leq$$

$$\leq L\, \|s\|^2 \int_{\mathbf{M}} |\varphi(m)|^2\, d\tau(m) \cdot \int_{\mathbf{M}} d\tau(m) \cdot (s \in H),$$

где

$$L = \max_{m \in \mathbf{M}} \|m\|.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{K(s)} = \int_{\mathbf{M}} (s, m)\, f(m)\, d\tau(m)$$

есть линейный функционал в H и значит $K(s) = (U_f, s)$.

Пусть $\varphi(y)$ — решение уравнения (4.1). Тогда, по предыдущему, существует такое $U_\varphi \in H$, что

$$\lambda \int_{\mathbf{M}} (m, s)\, \varphi(m)\, d\tau(m) = (U_\varphi, s), \quad s \in H. \tag{4.2}$$

Таким образом

$$\varphi(n) = (U_\varphi, n), \quad n \in \mathbf{M}, \tag{4.3}$$

т. е. $\varphi(n)$ содержится в пространстве функций $f(n)$, $n \in \mathbf{M}$. (4.2) можно переписать в виде

$$\lambda \int_{\mathbf{M}} \varphi(m)\overline{s(m)}\, d\tau(m) = (U_\varphi, s), \tag{4.2'}$$

где s — любой элемент из H. В частности, если ψ другая собственная функция нашего уравнения, то, вставляя в (4.2′) U_ψ вместо s, получим

$$\lambda \int_{\mathbf{M}} \varphi(m)\overline{\psi(m)}\, d\tau(m) = (U_\varphi, U_\varphi) = (\varphi(m), \psi(m))_1.$$

Пусть теперь $\{\varphi_i(n)\}_1^\infty$, $\{\lambda_i\}_1^\infty$ соответственно собственные функции и собственные числа уравнения (4.1). Тогда из (4.4) получим, что функции $\left\{\frac{\varphi_i(m)}{\sqrt{\lambda_i}}\right\}_1^\infty$ можно считать образующими ортонормированную систему функций нашего g-пространства. Если верна теорема Мерсера (т. е. если τ — мера любого открытого множества отлична от нуля), то

$$(m, n) = \sum \frac{\varphi_i(m)\overline{\varphi_i(n)}}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\overline{\lambda_i}}}. \tag{4.5}$$

Это есть частный случай билинейной формулы (2.1).

Вернемся теперь к пространствам, порождаемым эрмитово-положительным ядром $K(x, y)$ $(x, y \in \mathbf{H})$. Пространство H_k состоит, как мы видели, из функций на множестве $\mathbf{H}$. Если $\mathbf{H}$ означает то множество элементов из H_k, в которое отображается множество $\mathbf{H}$, то очевидно пространство H_k можно устроить вышеуказанным общим способом, взяв H_k вместо H, а вместо множества $\mathbf{M}$ элементов H множество $\tilde{\mathbf{H}}$. Тогда $K(x, y)$ перейдет в (m, n), где $m, n \in \tilde{\mathbf{H}}$.

Естественно возникает вопрос: если множество $\mathbf{H}$ топологизировано, то каким условиям должен удовлетворять $K(x, y)$, чтобы отображение $n \to \tilde{n}$ $(n \in \mathbf{H}, \tilde{n} \in \tilde{\mathbf{H}})$ было непрерывным.

Теорема 5. Пусть $|K(x, x)| < A$. Для того чтобы отображение $n \to \tilde{n}$ было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы $K(x, y)$ было непрерывным по каждому из переменных.

Доказательство. В самом деле, если отображение $n \to \tilde{n}$ непрерывно, то какова бы ни была окрестность $v(\tilde{n}_0)$ элемента $\tilde{n}_0$, всегда найдется такая окрестность $U(n_0)$ элемента n_0, что $\tilde{U}(n_0) \subset v(\tilde{n}_0)$. Возьмем в качестве $v(\tilde{n}_0)$ совокупность элементов $\tilde{n}$ таких, что $|(\tilde{m}, \tilde{n}_0) - (\tilde{m}, \tilde{n})| < \varepsilon$, где m, ε фиксированы. Тогда, если $n \in U(n_0)$, то $|(\tilde{m}, \tilde{n}_0) - (\tilde{m}, \tilde{n})| = |K(m, n_0) - K(m, n)| < \varepsilon$. Покажем обратное: пусть $K(x, y)$ непрерывно по каждому из переменных. Полная система окрестностей элемента $\tilde{n}_0$ множества $\tilde{\mathbf{H}}$ очевидно состоит из множеств $v(\tilde{n}_0, \tilde{y}_1, \ldots \tilde{y}_s; \varepsilon)$ вида

$$|(\tilde{n}, \tilde{y}_i) - (\tilde{n}_0, \tilde{y}_i)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \quad \tilde{y}_i = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{i,k}\, \tilde{m}_k,$$

так как множество $\tilde{\mathbf{H}}$ ограничено $(\|\tilde{n}\|^2 < A)$, или

$$\left|\sum_k \lambda_{i,k}\,[K(n, m_k) - K(n_0, m_k)]\right| < \varepsilon.$$

Ясно, что при фиксированных $\lambda_{i,k}$ и m_k всегда найдется такая окрестность $U(n_0)$, что требуемые неравенства будут удовлетворены для $n \in U(n_0)$. Это завершает доказательство.

Применим этот результат для доказательства следующей теоремы.

Теорема 6. Пусть $K(x, y)$ $(-\infty < a \leqslant x \leqslant b < \infty)$ эрмитово положительное ядро и пусть $\sigma(y)$ неубывающая функция, которая не имеет точек постоянства. Если $K(x, y)$ непрерывно по каждой из переменных, а $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$, $\{\lambda_k\}_1^\infty$ полная ортонормированная система собственных функций и отвечающих им собственных чисел уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, d\,\sigma(y), \tag{4.6}$$

то совокупность функций $f(x)$, представимых в виде:

$$f(x) = \sum_1^\infty d_k \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}, \quad \sum_1^\infty |d_k|^2 < \infty$$

не зависит от выбора функции $\sigma(x)$ и совпадает с H_k.

Доказательство. При построении пространства H_k каждая точка y переходит в элемент $\tilde{y} \in H_k$; так как $y \to \tilde{y}$ непрерывно, то σ-мера интервала (α, β) естественно определяет σ^*-меру на множестве $\tilde{H}$ элементов $\tilde{y}$, а так как $K(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y})$, то уравнение $\varphi(\tilde{x}) = \lambda \int\limits_{\mathbf{H}} (\tilde{x}, \tilde{y})\, \varphi(\tilde{y})\, d\sigma^*(\tilde{y})$ полностью эквивалентно уравнению (4.6). Но тогда билинейная формула (4.5) доказывает наше утверждение.

Отметим еще следующий факт, показывающий связь наших рассмотрений с функциями Грина. Пусть H — некоторое гильбертово пространство функций $f(s)$ на множестве S и D — самосопряженный, строго позитивный оператор в H, т. е. $\inf\limits_{\|f\|=1} (Df, f) > 0$. В таком случае оператор D имеет обратный, который мы обозначим, через A. Введем теперь в области определения оператора D новое скалярное произведение, положив $(f, g)_1 = (Df, g)$ и пусть построенное в новой метрике гильбертово пространство есть g-пространство, а $g(s, t)$ его g-функция. В таком случае справедлива формула.

$$D^{-1} f = Af(s) = (f(t), g(t, s)), \tag{4.7}$$

где s — фиксировано.

Действительно,

$$(f(t), g(t, s)) = U(s) = (DAf(t), g(t, s)) = (Af(t), g(t, s))_1 = Af(s).$$

Приложения теории g-пространств

В этой главе мы рассмотрим приложения развитой выше теории g-пространств к некоторым проблемам теории аналитических функций.

1. Пусть γ обозначает некоторую простую, кусочно-гладкую кривую, ограничивающую односвязную область комплексной плоскости. Обозначим через H_γ совокупность всех регулярных в D функций с интегрируемым квадратом модуля на контуре γ. Определим в H_γ скалярное произведение по формуле:

$$(f, h) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma f(s)\, \overline{h(s)}\, ds, \tag{2.1.1}$$

где ds — диференциал дуги кривой γ.

Теорема 1. Гильбертово пространство H_γ есть g-пространство.

Доказательство. По формуле Коши всякую функцию $f(z) \in H_\gamma$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

откуда, используя неравенство Буняковского,

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int\limits_\gamma |f(\zeta)|^2 ds} \cdot \sqrt{\int\limits_\gamma \frac{ds}{|\zeta - z|^2}}$$

или

$$|f(z)| \leqslant \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int\limits_\gamma \frac{ds}{|\zeta - z|^2}} \cdot \|f\|.$$

Пространство H_γ очевидно обладает A-свойством. Действительно, если $f(z) \in H_\gamma$ и $f(a) = 0$, $a \in D$, то $f_1(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^k}$, где k — кратность корня a, принадлежит H_γ.

Найдем g-функцию пространства H_γ. Если D есть внутренность единичного круга, то последовательность $\{z^n\}_0^\infty$ образует полную ортонормированную систему. Поэтому, в силу билинейной формулы (1, 2.1)

$$g(z, s) = \sum_0^\infty z^n \bar{\zeta}^n = \frac{1}{1 - z\bar{\zeta}}. \tag{2.1.2}$$

В общем случае g-функция может быть найдена с помощью замены переменных. Пусть функция $z = w(u)$ конформно отображает область D плоскости u на единичный круг плоскости z. Тогда из того, что функционал:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} f(z) \overline{\left(\frac{1}{1 - z\bar{\zeta}}\right)} |dz|,$$

получим:

$$f[w(v)] \sqrt{w'(v)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\gamma f[w(u)] \sqrt{w'(u)} \overline{\left(\frac{\sqrt{w'(u)} \cdot \overline{\sqrt{w'(v)}}}{1 - w(u)\overline{w(v)}}\right)} ds.$$

Полагая

$$f[w(v)] \cdot \sqrt{w'(v)} = \Phi(v),$$

получим

$$\Phi(v) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\gamma \Phi(u) \overline{\left[\frac{\sqrt{w'(u)\overline{w'(v)}}}{1 - w(u)\overline{w(v)}}\right]} ds.$$

Так как, очевидно, Φ пробегает все H_γ, то

$$g(u, v) = \frac{\sqrt{w'(u)\overline{w'(v)}}}{1 - w(u)\overline{w(v)}}. \tag{2.1.3}$$

Поставим в случае круга следующую задачу: пусть дана такая последовательность точек $\{a_i\}_1^\infty$, внутри единичного круга γ, что не существует функции $f(z) \not\equiv 0$ из H_γ, которая обращалась бы в нуль в этих точках (хорошо известный критерий Бляшке того, что $\{a_i\}_1^\infty$, удовлетворяет этому требованию получится из (2.5) первого параграфа при $g(z, \zeta) = \frac{1}{1 - z\bar{\zeta}}$. Требуется указать интерполяционную формулу, дающую возможность построить $f(z) \in H_\gamma$ по ее значениям в этих точках и найти необходимое и достаточное условие того, что заданная последовательность чисел $\{\beta_i\}_1^\infty$ совпадает с последовательностью значений $\{f(a_i)\}_1^\infty$ некоторой функций $f(z) \in H_\gamma$.

Решение этой задачи сразу следует из теорем 2 и 2′ первого параграфа, если положить там $g(z, \zeta) = \frac{1}{1 - z\bar{\zeta}}$. Получающиеся при этом формулы были ранее другим методом получены Уолшем [6].

2. Пусть H_D обозначает совокупность функций $f(z)$, регулярных внутри односвязной области D комплексной плоскости. Определим скалярное произведение в H_D положив

$$(f, h) = \frac{1}{\pi} \iint_D f(z) \overline{h(z)}\, dx\, dy, \quad f, h \in H_D \quad z = x + iy.$$

Теорема 2.2. H_D есть -пространство.

Доказательство. Пусть $s \in D$ есть центр круга радиуса r, целиком расположенного в D. Тогда для всякого $\rho \leqslant r$ имеет место равенство:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta + \rho e^{i\varphi})\, d\varphi \quad (\rho \leqslant r).$$

Умножим обе части этого равенства на $\rho\, d\rho$ и проинтегрируем по ρ в пределах от 0 до r; получим:

$$\frac{r^2}{2} f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} f(\zeta + \rho e^{i\varphi})\, d\varphi$$

и в силу неравенства Буняковского

$$\frac{r^2}{2} f(\zeta) \leqslant \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_0^r \int_0^{2\pi} |f(\zeta + \rho e^{i\varphi})|^2 \rho\, d\rho\, d\varphi} \cdot \sqrt{\int_0^r \int_0^{2\pi} \rho\, d\rho\, d\varphi} \leqslant \frac{\sqrt{\pi r^2}}{2\sqrt{\pi}} \|f\|,$$

или

$$|f(\zeta)| \leqslant \frac{1}{r} \|f\|.$$

Если D — круг единичного радиуса, то $\{z^n\}_0^\infty$ образует ортогональную, плотную в H_D систему функций. Так как ортонормированная система будет $\{\sqrt{n+1}\, z^n\}_0^\infty$, то g-функция пространства H_D будет

$$g(z, \zeta) = \frac{1}{(1 - z, \bar{\zeta})^2}.$$

Выражение для g-функции произвольного пространства H_D получается аналогично случаю пространства H_γ. Пространства H_γ и H_D рассматривались соответственно в [4] [5].

3. Пусть $\tau(\rho)$ обозначает непрерывную на всей полуоси $0 \leqslant \rho < \infty$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям

$$\tau(0) = 0, \quad \int_0^\infty e^{-\tau(\rho)} \rho^n\, d\rho < \infty \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Рассмотрим пространство H_τ регулярных во всей плоскости функций $f(\zeta)$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\tau(\rho)} f(\rho e^{i\theta}) \overline{g(\rho e^{i\theta})}\, d\rho\, d\theta.$$

Теорема 2.3. Пространство H_τ есть g-пространство.

Доказательство. Для всякого $R > 0$ имеем

$$\|f\|^2 \geqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-\tau(\rho)} |f(\rho e^{i\theta})|^2\, d\rho\, d\theta \geqslant$$

$$\geqslant M(R) \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^2\, d\rho\, d\theta,$$

где $M(R)$ константа, зависящая от R. Выбрав $R > \zeta$, мы сведем доказательство нужного нам неравенства для $f(\zeta)$ к случаю, подобному H_D, где D — круг радиуса R. Нужно еще показать, что из $f_n \to f$ по норме H_τ следует, что $f(\zeta)$ — регулярная функция во всей плоскости (замкнутость H_τ). Но это следует из того, что если $|\zeta| < R$, то $\psi(\zeta)$ в неравенстве $|f(\zeta)| \leqslant \psi(\zeta) \|f\|$ можно оценить сверху функцией, зависящей только от R.

Последовательность $\{\zeta^n\}_0^\infty$ очевидно плотна в H_τ. Действительно, в противном случае найдется в H_τ такая функция $f(\zeta)$, что

$$\int_0^\infty e^{-\tau(\rho)}\, d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) \rho^n e^{-in\theta}\, d\theta = 0$$

для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$

Зафиксировав n получим, что при заданном ε и $N > N(\varepsilon)$

$$\left| \int_0^N e^{-\tau(\rho)}\, d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) \rho^n e^{-in\theta} d\theta \right| < \varepsilon.$$

Вставив в это неравенство вместо $f(\zeta)$ ее разложение в ряд $f(\zeta) = \sum_0^\infty a_n \zeta^n$, получим, что

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2\pi \int_0^N e^{-\tau(\rho)} \rho^{2n}\, d\rho}, \quad \text{откуда} \quad a_n = 0 \quad \text{для} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

В силу билинейной формулы (2.1) первого параграфа g-функция пространства H_τ имеет следующий вид:

$$g(z, v) = \sum_0^\infty \frac{z^k \overline{v}^k}{c_k} = \varphi(z \overline{v}),$$

где

$$c_k = \int_0^\infty e^{-\tau(\rho)} \rho^{2k}\, d\rho, \quad \varphi(w) = \sum_0^\infty \frac{w^k}{c_k}.$$

Полагая $\tau(\rho) = 2p\rho$ $(p > 0)$, получим, в частности, $c_k = \dfrac{(2k)!}{2p\,(2p)^{2k}}$. Откуда $\varphi(w) = 2p\, ch\,(2p\sqrt{w})$.

Пространство H_τ в случае $\tau(r) = 2pr$ очевидно содержит все функции экспоненциального типа меньше p и тип функции из H_{2pr} не может превосходить p. Теорема 2 первого параграфа дает в этом случае процесс построения функции $f(z) \in H_{2pr}$ по ее значениям в точках $\{a_i\}_1^\infty$ причем $\{a_i\}_1^\infty$ обладает тем свойством, что не существует функции экспоненциального типа меньше p, обращающейся в нуль в этих точках.

Заметим еще, что пространство H_τ обладает A-свойством.

4. В этом разделе мы рассмотрим приложение теории g-пространств к некоторым проблемам ньютонового интерполирования.

Задача ньютонового интерполирования состоит в следующем: дано множество M, последовательность функций $\{u_i(m)\}$ на M и последовательность точек $\{a_i\}_1^\infty \in \mathrm{M}$, удовлетворяющих условиям $u_n(a_i) = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n-1$ и $u_n(a_n) \neq 0$. Требуется найти достаточные условия того, чтобы данная функция $f(m)$ $(m \in \mathrm{M})$ разлагалась в ряд

$$f(m) = \sum_{s=1}^{\infty} p_s u_s(m).$$

Пусть $K(z, v) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k(z) \overline{u_k}(v)$, $\alpha_k > 0$ и ряд для $K(z, v)$ сходится для каждой пары $z, v \in \mathrm{M}$. Ядро $K(z, v)$ очевидно позитивно. Построим с помощью ядра K g-пространство H_k. Ясно, что $u_i(z)$ содержится в H_k, ибо $K(z, a_s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k(z) \overline{u_k(a_s)} = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k u_k(z) \overline{u_k(a_s)}$, откуда следует, что $u_p(z)$ — есть линейная комбинация функций $K(z, a_s)$ $(s = 1, 2, \ldots, p)$. Соотношения $u_n(a_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ можно переписать в виде $(u_n, g_{a_i}) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Положим $g_{a_i} = \tilde{a}_i$. Так как u_p есть линейная комбинация элементов $\{\tilde{a}_i\}_1^p$, то $(u_n, u_p) = 0$ $(p < n)$ или $\{u_i\}_1^\infty$ образует ортогональную систему в H_k. Ясно, что $\{\sqrt{\alpha_i} u_i\}_1^\infty$ есть полная ортонормированная система в H_k. Полнота следует из представления $K(z, v) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k(z) \overline{u_k(v)}$. Таким образом, каждая функция из H_k разлагается в интерполяционный ряд. Сходимость равномерна в каждой замкнутой области $K(z, z) \leqslant M$.

Естественно поэтому, подбирая так или иначе константы α_i, искать затем достаточные условия для того, чтобы $f(z)$ находилась в построенном с помощью констант α_i пространстве H_k. Эти условия и будут достаточными для сходимости ньютонового процесса интерполяции к $f(z)$.

Мы применим эти соображения, в несколько измененном виде, к классическому ньютоновскому процессу интерполирования.

Составим ядро

$$K_c(z,v) = c\left(1 + \frac{z\overline{v}}{c \cdot 1} + \frac{z(z-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\overline{v(v-1)}}{c(c+1)} + \ldots\right) = c\,\Gamma(c) \frac{\Gamma(z + \overline{v} + c)}{\Gamma(z+c)\,\Gamma(\overline{v} + c)} \tag{4.1}$$

Ряд (4.1) сходится при $\mathrm{Re}(z + \overline{v} + c) > 0$. Будем в дальнейшем считать, что $-1 < c \leqslant 0$. В этом случае $c\,\Gamma(c) > 0$ и ядро $K_c(z, v)$ позитивно на множестве M_c, составленном из точек w с $\mathrm{Re}(w) > -\frac{c}{2}$.

Действительно,

$$\sum_1^n \sum_1^n K_c(z_i, z_k)\, \xi_i \overline{\xi_k} = \sum\sum c\,\Gamma(c) \int_0^\infty e^{-t} t^{z_i+\overline{z_k}+c-1} \cdot \frac{\xi_i}{\Gamma(z_i+c)} \cdot \frac{\overline{\xi_k}}{\Gamma(\overline{z_k}+c)}\, dt =$$

$$= c\,\Gamma(c) \int_0^\infty e^{-t} t^{c-1} \left| \sum_1 \frac{t^{z_i}\xi_i}{\Gamma(z_i+c)} \right|^2 dt \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Найдем общий вид функций из пространства H_{k_c}. Всякая функция $F(z) \in H_{k_c}$ есть предел линейных комбинаций функций вида $F_n(z) = \sum_{i=1}^n K_c(z, z_i)\overline{\xi_i}$, а $\|F_n\|^2$ определяется выражением, стоящим в правой части (4.2).

Функции $F_n(z)$ можно еще представить в виде

$$F_n(z) = \frac{c\,\Gamma(c)}{\Gamma(z+c)} \int_0^\infty e^{-t} t^{z+c-1} f_n(t)\, dt \tag{4.3}$$

с

$$\|F_n\|^2 = c\,\Gamma(c) \int_0^\infty e^{-t} t^{c-1} |f_n(t)|^2\, dt, \tag{4.4}$$

где $f_n(t) \sum_1^n \frac{t^{\overline{z_i}}\overline{\xi_i}}{\Gamma(\overline{z_i}+c)} = \sum_{i=1}^n \eta_i t^{w_i}$; η_i — произвольные числа, а w_i — любые точки из M_c. Из (4.4) следует, что H_{k_c} совпадает с совокупностью функций $F(z)$, представимых в виде

$$F(z) = \frac{c\,\Gamma(c)}{\Gamma(z+c)} \int_0^\infty e^{-t} t^{z+c-1} f(t)\, dt, \tag{4.5}$$

где $f(t)$ любая функция, удовлетворяющая условию

$$c\,\Gamma(c) \int_0^\infty e^{-t} t^{c-1} |f(t)|^2\, dt < \infty. \tag{4.6}$$

Далее:

$$\|F\|^2 = c\,\Gamma(c) \int_0^\infty e^{-t} t^{c-1} |f(t)|^2\, dt. \tag{4.7}$$

Действительно, очевидным является, что если $F \in H_{k_c}$, то F удовлетворяет (4.5) — (4.7). Обратное следует из того, что функции $f_n(t)$ плотны в возникающем двойственном Гильбертовом пространстве.

Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма 1. Пусть позитивное ядро $K(x, y)$, заданное на множестве M, имеет следующий вид:

$$K(x, y) = \sum_1^\infty p_k(x)\, v_k(y).$$

Пусть, далее, существует такая последовательность элементов $\{A_i\}_1^\infty \in H_k$, что при каждом n функции $p_1(x) p_2(x), \ldots, p_n(x)$ суть линейные комбинации $A_1, A_2, \ldots A_n$ и пусть существует такая последовательность $\{G_n(x, y)\}_1^\infty$, что $G_n(x, y)$ при фиксированном y принадлежит H_k, $g_n(x, y) \to g(x, y)$ при каждом фиксированном y в метрике H_k и

$$(K(x, y) + G_n(x, y) - \sum P_k(x) v_k(y),\ A_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.8}$$

при каждом фиксированном y.

Тогда ряд $\sum\limits_1^\infty P_k(x) v_k(y)$ при каждом фиксированном y сходится в метрике H_k.

Доказательство. (4.8) означает, что $\sum\limits_1^n P_k(x) v_k(y)$ есть проекция элемента $K(x, y) + g_n(x, y)$ (y — фиксировано) на пространство T_n, натянутое на векторах $A_1, A_2, \ldots, A_n$, что доказывает наше утверждение, так как $\| g_n(x, y) - G(x, y) \| \to 0$ при $n \to \infty$ (y — фиксировано).

Введем теперь новое ядро

$$T_c(z, v) = K_c(z, v) - c = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z(z-1):.:(z-k)}{(1+k!)} \cdot \overline{\frac{v(v-1):.:(v-k)}{(c+1):.:(c+k)}} \tag{4.9}$$

и связанное с ним G-пространство H_{T_c}.

Положим $\quad w_k(z) = \dfrac{z(z-1):.:(z-k)}{\sqrt{(k+1)!(c+1):.:)(c+k)}}$.

Тогда

$$T_c(z, v) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(z) \overline{w_k(v)}. \tag{4.10}$$

Положим $\tilde{a}_k = T_c(z, k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Ясно, что линейная оболочка элементов $w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}$ совпадает с линейной оболочкой $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots$. Так как с другой стороны

$$\left(T_c(z, v) - \sum_{k=0}^{n-1} w_k(z) \overline{w_k(v)},\ \tilde{a}_s \right) = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

то из леммы 1 настоящего параграфа следует, что $\{ w_k(z) \}_1^\infty$ образует ортонормированную систему в H_{T_c} и (4.10) есть билинейная формула для ядра $T_c(z, v)$.

Пространство H_{T_c} содержит все полиномы, так как $T_c(z_1 - c) = -c$, а линейная оболочка элементов $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$ состоит из всех полиномов степени не выше n, обращающихся в нуль в нуле. В частности, полиномы $\tilde{b}_p = K_c(z, p)$ можно считать одновременно элементами H_{k_c} и H_{T_c} $(p = 1, 2, \ldots)$.

Вычислим нормы $\| b \|_k$ и $\| b \|_T$ элемента $b = \sum\limits_{p=1}^n \tilde{b}_p \xi_p$, рассматриваемого как элемент H_{k_c} и H_{T_c}. Имеем

$$\| b \|_k^2 = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n K(p, q) \bar{\xi}_p \xi_q.$$

С другой стороны,

$$\sum_{k=1}^n \tilde{b}_k \xi_k = \sum_{k=1}^n T_c(z, k) \xi_k + c\eta,$$

где
$$\eta=\sum_{k=1}^{n}\xi_k .$$
Откуда
$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\widetilde{b}_k\xi_k\right\|_T^2=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}T(p,q)\overline{\xi_p}\xi_q+2c|\eta|^2+c^2|\eta|^2=$$
$$=\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}K(p,q)\overline{\xi_p}\xi_q-c|\eta|^2+2c|\eta|^2+c^2|\eta|^2=\|b\|_k^2+c(c+1)|\eta|^2.$$
Так как $-1<c\leqslant 0$, то из этого следует
$$\|b\|_T\leqslant\|b\|_k . \tag{4.11}$$
Но совокупность элементов b плотна в H_{k_c}. Поэтому из неравенства (4.11) следует:

Лемму 2. Всякая функция $F(z)\in H_{k_c}$ содержится в H_{T_c}. Из этой леммы и (4.10) вытекает

Теорема 3. Всякая функция $F(z)\in H_{k_c}$ представима в виде
$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k w_k(z)\quad\text{с}\quad\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|^2<\infty. \tag{4.12}$$
Займемся теперь определением наибольшей области, в которой $F(z)\in H_{k_c}$ представима в виде
$$F(z)=\beta_0+\beta_1(z-1)+\beta_2\frac{(z-1)(z-2)}{2!}+\ldots \tag{4.13}$$
Полагая $\mu_k=\dfrac{1}{\sqrt{(k+1)!(c+1)\dots(c+k)}}$, получим из (4.12)
$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k}{\mu_k}[(k+1)(z-1)\dots(z-k)+(z-1)\dots(z-k-1)]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\alpha_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{k-1}}{\mu_{k-1}}+\frac{\alpha_k}{\mu_k}(k+1)\right)(z-1)\dots(z-k)+\frac{\alpha_n}{\mu_n}(z-1)\dots(z-n-1)\right]. \tag{4.14}$$
Но
$$\left|\frac{\alpha_n}{\mu_n}(z-1)\dots(z-n-1)\right|=\frac{|\alpha_n|\delta_n}{\operatorname{Re}z-\frac{1}{2}+\frac{c}{2}},$$
где
$$0<\lim_{n\to\infty}\delta_n<\infty .$$
Так как $|\alpha_n|$ ограничены, то
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\mu_n}(z-1)\dots(z-w-1)=0$$
при
$$\operatorname{Re}(z)>\frac{1}{2}-\frac{c}{2}.$$
Поэтому $(c>-1)$ ряд (4.13) наверно сходится при $\operatorname{Re}(z)\geqslant 1$, и значит коэффициенты $\beta_0,\beta_1,\dots$ однозначно определяются значениями функции $F(z)$ в точках $z=1, 2, 3, \dots$. Но тогда ясно, что справедлива следующая

Теорема 4. Для сходимости ряда (4.13) необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha_n|}{n^{\mathrm{Re}(z)-\frac{1}{2}+\frac{c}{2}}}=0. \tag{4.15}$$

Для β в (4.13) очевидно будем иметь

$$\beta_0=\alpha_0,\quad \frac{\alpha_k}{\mu_k}(K+1)!+\frac{\alpha_{k-1}}{\mu_{k-1}}=\frac{\beta_k}{k!}\quad k=1,\,2,\dots \tag{4.16}$$

Представляя $F(z)$ в виде

$$F(z)=\frac{c\,\Gamma(c)}{\Gamma(z+c)}\int_0^\infty e^{-t}\,t^{z+c-1}f(t)\,dt$$

и находя $\beta_0,\ \beta_1,\dots$ через $F(1),\ F(2),\dots$ получим

$$\beta_n=c\,\Gamma(c)\int_0^\infty e^{-t}\,t^{c-1}f_n(t)\,dt, \tag{4.17}$$

где

$$f_0(t)=\frac{t}{\Gamma(1+c)},\quad f_n(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\frac{t^{k+1}}{\Gamma(c+k+1)}\,c_n^k. \tag{4.18}$$

Решение системы (4.16) относительно α дает

$$\alpha_n=c\,\Gamma(c)\int_0^\infty e^{-t}\,t^{c-1}f(t)\,\Phi_n(t)\,dt,\quad n=1,\,2,\dots, \tag{4.19}$$

где

$$\Phi_n(t)=\frac{\mu_n}{(n+1)!}\sum(-1)^{n+k}\frac{(n+1):.:(n-k+1)}{\Gamma(k+c+1)\,(k+1)!}\,t^{k+1}=$$
$$=(-1)^{n+1}\,\Gamma_n\left(L_{n+1}^{c-1}(t)-L_{n+1}^{c-1}(0)\right), \tag{4.20}$$

$L_{n+1}^{c-1}(t)$ — полиномы Лагерра относительно веса $e^{-t}\,t^{c-1}$.

Нетрудно заметить, что с полиномами $f_n(t)$ связаны полиномы $f_n(t)$, образующие вместе с полиномами $f_n(t)$ биортогональную систему.

Действительно, так как $F(-c)=0$, то (4.13) можно переписать в виде

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(\tau_k(z)-\tau_k(-c)\,\beta_k,\quad \tau_k(z)=\frac{(z-1):.:(z-k)}{k!}$$

Но для $\tau_n(z)-\tau_n(-c)$ имеет место представление

$$\tau_n(z)-\tau_n(-c)=\frac{c\,\Gamma(c)}{\Gamma(z+c)}\int_0^\infty e^{-t}\,t^{z+c-1}\widetilde{f}_n(t)\,dt, \tag{4.21}$$

где

$$\widetilde{f}_n(t)=\frac{(c+1):.:(c+n)}{n!}\sum_{k-1}^{n}\frac{c_n^k\,(-1)^{k+n}\,t^k}{\Gamma(k+c+1)}. \tag{4.22}$$

Так как

$$\tau_n(z) - \tau_n(-c) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \frac{(z-1):.:(z-k)}{k!}$$

с

$$\beta_0 = -\tau(-c), \quad \beta_k = \delta_n^k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

то, применяя (4.17), получим

$$c\Gamma(c) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{c-1} f_n(t) \widetilde{f}_n(t)\, dt = \delta_n^k \quad (k, n = 1, 2, \ldots). \tag{4.23}$$

Для ядра $K_c(z, v)$ представление (4.13) имеет вид

$$K_c(z, v) = (\overline{v+c}) + (z-1)\,\overline{\frac{v(v+c)}{c+1}} - \frac{(z-1)(z-2)}{2!} \cdot \overline{\frac{v(v-1)(v+c)}{(c+1)(c+2)}} + \ldots \tag{4.24}$$

Используя интегральное представление для $K_c(z, v)$ и формулу (4.17) $\left(\text{в этом случае } \overline{\beta}_k = u_k(v) = \frac{v(v-1):.:(v-k+1)(v+c)}{(c+1):.:(c+k)}\right)$, получим

$$u_n(v) = \frac{c\Gamma(c)}{\Gamma(z+c)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{v+c-1} f_n(t)\, dt, \tag{4.25}$$

откуда следует, что $\tau_k(z) - \tau_k(-c)$ и $u_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ образуют биортогональную систему в H_{K_c}, что соответствует разложению

$$K_c(z, v) = \sum_{k=1}^{\infty} (\tau_k(z) - \tau_k(-c))\, \overline{u_k(v)}. \tag{4.24'}$$

5. Рассмотрим теперь класс $\mathbf{H}$ функций $F(z)$, регулярных в правой полуплоскости и удовлетворяющих условию

$$|F(re^{i\theta})| \leqslant e^{r\psi(\theta)}(1+r)^{\beta+\varepsilon(r)}. \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\beta \leqslant -\frac{1}{2}\right), \tag{5.1}$$

где

$$\lim_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0, \quad \psi(\theta) = \cos\theta \ln(2\cos\theta + \theta\sin\theta.$$

Теорема 5. Если $F \in \mathbf{H}$ и $F(-c) = 0$ то $F \in H_{K_c}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi(z) = F(z)\Gamma(z+c)$. Эта функция регулярна в правой полуплоскости и при $r > r_0$.

$$|\Phi(re^{i\theta})| \leqslant A_0 \left| e^{r\psi(\theta) + \left(re^{i\theta} + c - \frac{1}{2}\right)\ln(re^{i\theta}+c) - re^{i\theta}} \cdot r^{\beta+\varepsilon(r)} \right| =$$

$$= A_0 \left| e^{r\cos\theta\ln(2\cos\theta + r\theta\sin\theta + (\beta+\varepsilon(r))\ln r + \left(r\cos\theta + ir\sin\theta + + c - \frac{1}{2}\right)\left(\ln r + i\theta + 0\left(\frac{1}{r}\right)\right)} \times \right.$$

$$\left. \times e^{-r\cos\theta - ir\sin\theta} \right| \leqslant A_1 e^{x\ln\frac{2x}{e} + \left(c - \frac{1}{2} + \beta + \varepsilon(r)\right)\ln r}. \tag{5.2}$$

где A_0, A_1 — некоторые константы, $z = re^{i\theta} = x + iy$.

Полагая $c - \frac{1}{2} - \beta = -\mu_1$, получим, что $\mu_1 > 1$, и взяв число $\mu \in (1, \mu_1)$, будем иметь

$$\Phi(x+iy) \leqslant A \frac{e^{x\ln\frac{2x}{e}}}{\left[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} + 1\right]^{\mu}}\; x \geqslant 0. \tag{5.3}$$

Из (5.3) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)^2\, dy < \infty \quad (x \geqslant 0)\,.$$

Поэтому, в силу теоремы Планшереля,

$$\Phi(x+iy) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{(x+iy)t}\, dt \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 e^{2xt}\, dt < \infty\right), \tag{5.3'}$$

где

$$f(t)\, e^{xt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x+iy)\, e^{-tyt}\, dy^{*}$$

Нам нужно показать, что

$$\Phi(z) = \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}\, t^{\frac{c-1}{2}}\, t^z g(t)\, dt, \tag{5.5}$$

где

$$\int_{0}^{\infty} |g|^2\, dt < \infty\,. \tag{5.4}$$

Но

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}\, t^{\frac{c-1}{2}}\, t^z g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}e^{s}} \cdot e^{\frac{c-1}{2}s} e^{sz} g(e^s)\, e^s\, ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}e^{s}}\, e^{s\frac{c}{2}} e^{sx}\, e^{isy}\, g_1(s)\, ds\,, \tag{5.6}$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_1(s)|^2\, ds < \infty.$$

Сравнивая это выражение для правой части (5.5) с (5.3), получим, что наше утверждение будет доказано, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_1(s)|^2\, ds < \infty,$$

где

$$g_1(s) = f(s)\, e^{\frac{1}{2}e^{s}}\, e^{-s\frac{c}{2}}\,.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{0} |g_1(s)|^2\, ds < \infty\,,$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt < \infty\,,$$

---

* Тот факт, что $f(t)$ не зависит от x следует сразу из того, что

$$\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \Phi(z) e^{-zt}\, dt$$

не зависит от t и δ при $t > 0$, $\delta > 0$, что следует из интегрирования $\Phi(z)\, e^{-zt}$ по контуру соответствующего прямоугольника и оценки (5.2) для $\Phi(z)$.

а $c \leqslant 0$. С другой стороны из (5.4) и (5.2) получим

$$|f(t)|e^{xt} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ae^{x\ln\frac{2x}{e}}}{[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+1]^{\mu}}\,dy \leqslant \frac{A}{2\pi}\frac{1}{x^{\mu-1}}e^{x\ln\frac{2x}{e}}, \tag{5.7}$$

и полагая в (5.7)

$$\ln\frac{2x}{e} = t-1,$$

найдем

$$|f(t)| \leqslant \frac{A}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}e^t}e^{-(\mu-1)t}, \tag{5.8}$$

что дает

$$g_1(s) \geqslant \frac{A}{2\pi}e^{-(\mu-1)s-\frac{cs}{2}} = \frac{A}{2\pi}e^{-\left(\mu-1+\frac{c}{2}\right)s}.$$

Так как μ — любое число между $\mu_1 = -\beta+\frac{1}{2}-c$ и единицей, то его всегда можно выбрать так, чтобы $\mu-1+\frac{c}{2}$ было положительным, а тогда

$$\int_0^{\infty}|g_1(s)|^2\,ds < \infty.$$

Таким образом теорема доказана.

Как было доказано Норлундом [7], каждая функция класса $\mathbf{H}$ разлагается в интерполяционный ряд (4.13) при $\operatorname{Re}(z) > 0$. Пользуясь построенной в теореме 4 настоящего параграфа функцией f_c, представляющей $F(z)-F(-c)$ $(F \in \mathbf{H})$ в виде

$$F(z)-F(-c) = \frac{1}{\Gamma(z+c)}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z+c-1}f_c(t)\,dt$$

и теоремой 4, можно получить сходимость ряда (4.13) при $\operatorname{Re}(z) > -c$. В силу произвольности c это дает теорему Норлунда (коэффициенты ряда (4.13) не зависят от c).

6. Укажем теперь вкратце на приложение g-пространств в теории квазианалитических функций.

Рассмотрим класс T функций $f(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$, имеющих производные любого порядка и удовлетворяющих условию

$$\int_0^{\infty}|f_{(t)}^{(k)}|^2\,dt \leqslant A_k^2 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{6.1}$$

где A_k — заданные константы. Говорят, что константы A_k определяют квазианалитический класс, если из условия $f \in T$, $f_{(0)}^{(k)} = 0$ $k = 0, 1, 2, \ldots$ следует, что $f(x) \equiv 0$.

Легко показать, что класс T тогда и только тогда квазианалитичен, если не существует функции $f(t)$, отличной от нуля, с

$$f_{(0)}^{(k)} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и такой, что

$$\|f\|^2 = \sum\frac{1}{A_k^2}\int_0^{\infty}|f_{(t)}^{(k)}|^2\,dt < \infty \tag{6.2}$$

Таким образом, для того, чтобы класс не был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы гильбертово пространство T_0 функций $f(t)$, с нормой (6.2) и обращающихся в нуль вместе со всеми производными в нуле, было не пусто. Пространство T_0, если оно не пусто, очевидно является G-пространством. Действительно, для

$$f \in T_0, \quad |f(x)|^2 = \left|\int_0^x f'(t)\,dt\right|^2 \leqslant x^2 \int_0^\infty |f'(x)|^2\,dx \leqslant A_1^2 \|f\|^2.$$

Пусть $g(x, y)$ есть g-функция этого пространства. Рассмотрим пространство T_n функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_n^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{A_k^2} \int_0^\infty |f^{(k)}_{(t)}|^2\,dt \tag{6.3}$$

и удовлетворяющих условию

$$f^{(k)}_{(0)} = 0 \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1).$$

T_n также является g-пространством.

Пусть $g_n(x, y)$ есть g-функция T_n. Если функция $f(x) \in T_{n+1}$, то очевидно, $f(x) \in T_n$. В частности, $g_{n+1}(x, y)$ при фиксированном y, содержится в T_n. Поэтому

$$g_{n+1}(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{A_k^2} \int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial t^k} g_{n+1}(t, y) \cdot \frac{\partial^k}{\partial t^k} \overline{g_n(t, x)}\,dt$$

и значит

$$|g_{n+1}(x, y)| \leqslant \|g_{n+1}(t, y)\|_{n+1} \|g_n(t, x)\|_n = \sqrt{g_{n+1}(y, y)} \cdot \sqrt{g_n(x, x)}.$$

Полагая $x = y$, получим: $g_{n+1}(x, x) \leqslant g_n(x, x)$. Так как, рассматривая $f \in T_0$ как элемент T_n, получим, что $|f(x)| \leqslant \|f\| \sqrt{g_n(x, x)}$, то ясно, что если $\lim\limits_{n \to \infty} g_n(x, x) = 0$, то пространство T_0 пусто. Если же $\lim\limits_{n \to \infty} g_n(x, x) \neq 0$ тождественно, то, как легко показать, существует и предел $g_n(x, y)$ при любых x, y и предельная функция есть g-функция пространства T_0.

Таким образом для того, чтобы класс был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n \to \infty} g_n(x, x) = 0$. Но $g_n(x, x)$ легко вычислить

$$g_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_\infty^0 E_n(x + t)\,\overline{E_n(y + t)}\,dt,$$

где

$$E_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R_n(s)} e^{ist}\,ds, \qquad R_n(z) = \left(1 - \frac{z}{b_1}\right)\left(1 - \frac{z}{b_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{b_n}\right),$$

а $b_1, \ldots, b_n$ — корни уравнения

$$\frac{1}{A_0^2} - \frac{z^2}{A_1^2} + \ldots \pm \frac{z^{2n}}{A_n^2} = 0,$$

лежащие в верхней полуплоскости (считая для определенности, что уравнение не имеет действительных корней).

Переход к пределу даст известный критерий квазианалитичности Карлемана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. Повзнер. DAH, 68, № 5, 1949.
2. А. Повзнер. DAH, 74. № 1, 1950.
3. Aronszayn. Theory of reproducing Kernels. Transactions cf the Am. math. Soc., V. 68, № 3, 1950.
4. Szegô. Math. Zs., 9, 218.
5. Carleman. Ark. for Math., 17, № 9.
6. Walsh. Interpolation and Approximation by Rat. Functions. Am. Math. Soc., Coll. Publ. 305.
7. Nörlund. Leçons sur les séries d'interpolation.
8. С. Бергман. Изв. н.-и. инст. мат. и мех. Томск. гос. ун-та 1, 663 п. 3 1937.