Новое аналитическое доказательство параллелограмма силъ.

В. Г. Имшенецкаго.

1. Аналитическихъ даказательствъ основной теоремы статики предложено немного, сравнительно съ обиліемъ доказательствъ синтетическихъ или геометрическихъ.

Лучшія аналитическія доказательства принадлежатъ *Даламберу*[1]), *Лапласу*[2]) и *Пуассону*[3]).

Наше доказательство, сходное по основнымъ допущеніямъ съ двумя первыми изъ только что упомянутыхъ, приводитъ къ цѣли проще, съ помощію однихъ лишь элементарныхъ средствъ анализа, между тѣмъ какъ для доказательствъ Даламбера и Лапласа потребовались средства анализа безконечномалыхъ.

2. Если p и q означаютъ величину двухъ силъ, которыхъ направленія въ общей точкѣ ихъ приложенія O составляютъ прямой уголъ, а r и α представляютъ соотвѣтственно величину равнодѣйствующей и уголъ, не больше прямого, между направленіями силъ p и r; то легко заключить, какъ извѣстно, что между этими четырьмя величинами должны существовать два уравненія общаго вида

$$r = pf\left(\frac{q}{p}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

и

$$\frac{q}{p} = \varphi(\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

вслѣдствіе необходимаго требованія однородности отъ этихъ уравненій.

---

[1]) Opuscules mathématiques, t. VI, p. 368.

[2]) Mécanique céleste, t. I, p. 1.

[3]) Traité de Mécanique, t. I, p. 45 (2-e éd).

Наша задача состоитъ поэтому въ отысканіи вида неизвѣстныхъ функцій f и φ, а изъ ея сущности легко непосредственно сдѣлать слѣдующія заключенія объ ихъ свойствахъ.

Перемѣнивъ q на p и обратно мы неизмѣнимъ величины r, но вслѣдствіе этого уголъ α перемѣнится въ дополнительный уголъ $\frac{\pi}{2}-\alpha$.

Слѣдовательно, вмѣстѣ съ (1) и (2) имѣемъ уравненія:

$$r=qf\left(\frac{p}{q}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\frac{p}{q}=\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

изъ которыхъ первое показываетъ, что r есть функція отъ p и q не только однородная первой степени, но и симметричная.

Изъ совокупности предыдущихъ четырехъ уравненій обнаруживаются свойства функцій, выраженныя въ слѣдующихъ уравненіяхъ:

$$\varphi(\alpha)\,\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=1\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

и

$$f\left(\frac{q}{p}\right):f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{q}{p},\quad \text{или}\quad f(\varphi(\alpha)):f\left(\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\varphi(\alpha)\ldots(6)$$

Кромѣ того ясно, что, допуская только положительныя или равныя нулю значенія p и q и значенія α, не выходящія изъ границъ 0 и $\frac{\pi}{2}$, мы всегда будемъ имѣть:

$$pf\left(\frac{q}{p}\right)\geqq 0 \quad \text{и} \quad \varphi(\alpha)\geqq 0.$$

При томъ нетрудно видѣть, что функція $pf\left(\frac{q}{p}\right)$, или $qf\left(\frac{p}{q}\right)=0$ только для $p=0$ и $q=0$, а функція $\varphi(\alpha)=0$, только для $\alpha=0$.

Первое утвержденіе не есть самостоятельное допущеніе, но только слѣдствіе другого необходимаго допущенія, что силы приложенныя къ точкѣ должны имѣть единственную равнодѣйствующую. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что двѣ неравныя нулю силы p и q, приложенныя къ точкѣ подъ какимъ-нибудь угломъ, различнымъ отъ двухъ прямыхъ, находятся въ равновѣсіи, и прилагая къ той-же точкѣ третью силу s, равную по величинѣ и противуположную p, мы для трехъ силъ p, q и s могли-бы получить двѣ различныхъ равнодѣйствующихъ s и q: такъ какъ сами по себѣ уравновѣшиваются p и q, по предположенію, а p и s—какъ равныя и противуположныя [1]).

Второе утвержденіе означаетъ только, что $\varphi(\alpha)$ т. е. отношеніе $\frac{q}{p}$, при конечной величинѣ p, можетъ быть равно нулю лишь для $q=0$, вслѣдствіе чего $\alpha=0$, потому что тогда направленія силъ p и r совпадаютъ.

Замѣтимъ еще, что для $\alpha=\frac{\pi}{4}$ изъ (5) имѣемъ

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=1$$

и такъ какъ $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$, то

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

3. Перейдемъ теперь къ опредѣленію вида функцій φ и f.

Изъ (1) и (2) уравненій слѣдуетъ, что

$$p=\frac{r}{f(\varphi(\alpha))} \quad \text{и} \quad q=\frac{r\varphi(\alpha)}{f(\varphi(\alpha))} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Послѣднія формулы могутъ служить для разложенія силы на двѣ прямоугольныя слагающія, когда дано направленіе одной изъ нихъ.

Чтобы воспользоваться формулами (8), проведемъ черезъ O, точку приложенія силъ p, q и r, двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя xx' и yy' такъ, чтобы направленіе силы r составляло съ Ox и Oy соотвѣтственно углы $\alpha+\beta\leqq\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta$.

Означая слагающія силъ r, p и q, направленныя по осямъ xx' и yy' соотвѣтственно черезъ r' и r'', p' и p'', q' и q'', получимъ по формуламъ (8) слѣдующія ихъ выраженія:

---

[1]) Это разсужденіе заимствовано изъ статьи *G. Darboux*: Sur la composition des forces. Bull. des sc. math. t. VIII, p. 284. См. также *Despeyroux*. Cours de Mécanique t. I, Note I, p. 373.

$$r' = \frac{r}{f(\varphi(\alpha+\beta))}, \quad r'' = \frac{r\varphi(\alpha+\beta)}{f(\varphi(\alpha+\beta))};$$

$$p' = \frac{p}{f(\varphi(\beta))} = \frac{r}{f(\varphi(\alpha))\, f(\varphi(\beta))}, \quad p'' = \frac{p\varphi(\beta)}{f(\varphi(\beta))} = \frac{r\varphi(\beta)}{f(\varphi(\alpha))\, f(\varphi(\beta))};$$

$$q' = -\frac{q\varphi(\beta)}{f(\varphi(\beta))} = -\frac{r\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)}{f(\varphi(\alpha))\, f(\varphi(\beta))}, \quad q'' = \frac{q}{f(\varphi(\beta))} = \frac{r\varphi(\alpha)}{f(\varphi(\alpha))\, f(\varphi(\beta))}.$$

Чтобы яснѣе показать соотношенiе между шестью предыдущими силами, приложимъ къ точкѣ O еще силу r_1, равную и противуположную r, и означая черезъ r_1' и r_1'' слагающiя r_1, направленныя по xx' и yy', будемъ имѣть

$$r_1' = -r' \qquad \text{и} \qquad r_1'' = -r''.$$

Такъ какъ три силы p, q и r_1 находятся въ равновѣсiи, то должны находиться въ равновѣсiи и шесть силъ p', q', r_1' и p'', q'', r_1'', изъ которыхъ три первыя, направленныя по xx', имѣютъ равнодѣйствующую

$$X = p' + q' + r_1' = p' + q' - r',$$

а три послѣднiя, направленныя по yy', можно замѣнить равнодѣйствующей

$$Y = p'' + q'' + r_1'' = p'' + q'' - r''.$$

И такъ, приложенныя къ точкѣ O двѣ силы и X и Y составляютъ прямой уголъ и находятся въ равновѣсiи; слѣдовательно, какъ мы видѣли выше, необходимо

$$X = 0 \qquad \text{и} \qquad Y = 0;$$

т. е.

$$r' = p' + q' \qquad \text{и} \qquad r'' = p'' + q''.$$

Введя данныя выше значенiя всѣхъ членовъ двухъ послѣднихъ равенствъ, получаемъ:

$$\frac{r}{f(\varphi(\alpha+\beta))} = \frac{r[1-\varphi(\alpha)\varphi(\beta)]}{f(\varphi(\alpha))\, f(\varphi(\beta))} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\frac{r\varphi(\alpha+\beta))}{f(\varphi(\alpha+\beta))} = \frac{r[\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)]}{f(\varphi(\alpha))\, f(\varphi(\beta))} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

и, посредствомъ дѣленiя (10) на (9), находимъ

$$\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)}{1-\varphi(\alpha)\varphi(\beta)},$$

теорему сложенія аргументовъ для функціи $\varphi(\alpha)$ вида подобнаго формулѣ

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Кромѣ того мы видѣли, что значенія $\varphi(\alpha)$ и $\operatorname{tg}\alpha$ равны для $\alpha=0$ и $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Отсюда, какъ извѣстно, легко заключить о существованіи равенства

$$\varphi(\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$$

сначала для всѣхъ значеній $\alpha=\frac{m}{2^n}\left(\frac{\pi}{4}\right)\leqq\frac{\pi}{2}$, гдѣ m и n произвольныя цѣлыя, и потомъ вообще для значеній α, не выходящихъ изъ предѣловъ 0 и $\frac{\pi}{2}$.

4. Обращаемся къ отысканію вида функціи f, чего можно достичь, не зная найденнаго выше вида функціи φ, но только основываясь на ихъ свойствахъ, выраженныхъ уравненіями (1) — (6).

Дѣйствительно, полагая

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2},$$

мы заключаемъ, на основаніи (5), что вторая часть равенства (9), представляющая значеніе r', обращается въ нуль; поэтому r равно второй части равенства (10), которая представляетъ значеніе слагающей r''. Отсюда легко замѣтить, что

$$f(\varphi(\alpha)).f\left(\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\varphi(\alpha)+\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Умноживъ это послѣднее уравненіе на (6) и обращая вниманіе на (5), находимъ

$$f(\varphi(\alpha))^2=\varphi(\alpha)^2+1,$$

а такъ какъ значеніе $f(\varphi(\alpha))$ можетъ быть только положительнымъ, то

$$f(\varphi(\alpha))=+\sqrt{\varphi(\alpha)^2+1}$$

Слѣдовательно видъ функціи f найденъ и, въ силу уравненій (1) и (2), вмѣстѣ съ этимъ получаемъ формулу

$$r = p\sqrt{\frac{q^2}{p^2} + 1} = \sqrt{p^2 + q^2}$$

представляющую величину равнодѣйствующей двухъ силъ приложенныхъ къ точкѣ подъ прямымъ угломъ.

Переходъ къ случаю, когда двѣ силы въ точкѣ ихъ приложенія составляютъ не прямой уголъ, какъ извѣстно очень простъ; поэтому оставляемъ его безъ разсмотрѣнія.
