УДК 517.94

И. Е. ЕГОРОВА

О ПОЛНОМ НАБОРЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ОПЕРАТОРА ДИРАКА С ПРЕДЕЛЬНО-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Цель данной работы — нахождение полного набора независимых спектральных данных для одномерного оператора Дирака, задаваемого в $\vec{L}^2(\boldsymbol{R})$ дифференциальной операцией вида

$$D_q \equiv B\frac{d}{dx} + \Omega(x), \tag{1}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & r(x) \\ r(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

p, r — вещественные функции. Функция $q(x) = -r(x) + ip(x)$, называемая потенциалом, является предельно-периодической в метрике Степанова [1] функцией, сверхэкспоненциально быстро аппроксимирующейся периодическими. Задача решается путем «замыкания» соответствующих результатов спектральной теории периодического оператора Дирака [2], и использует технику, разработанную в работе [3] для оператора Штурма — Лиувилля.

Приведем в удобной форме необходимые результаты работы [2].

Предположим, что функция q принадлежит пространству $\widetilde{W}_2^k(a)$ a-периодических функций, имеющих k суммируемых с квадратом производных на интервале $[0, a]$. Пусть $\vec{c}(\lambda, x) = (c_1(\lambda, x), c_2(\lambda, x))$, $\vec{s}(\lambda, x) = (s_1(\lambda, x), s_2(\lambda, x))$ — фундаментальная система решений уравнения

$$D_q[\vec{y}] = \lambda\vec{y}, \tag{2}$$

определенная начальными условиями

$$s_1(\lambda, 0) = c_2(\lambda, 0) = 0, \; c_1(\lambda, 0) = s_2(\lambda, 0) = 1.$$

Введем обозначения:

$$u_+(\lambda) = \frac{1}{2}(c_1(\lambda, a) + s_2(\lambda, a)) - \tag{3}$$

функция Ляпунова; γ_m — корни функции $\dot{u}_+(z)$; $\Theta(z)$ — квазиимпульс, определяемый соотношением

$$u_+(z) = \cos\frac{a}{\pi}\Theta(z); \tag{4}$$

$u_-(\lambda)$ — функция, описываемая равенством

$$u_-(\lambda) = 1/2\,(c_1(\lambda, a) - s_2(\lambda, a)). \tag{5}$$

Пусть, далее $\ldots < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ — собственные значения первой, $\ldots \leqslant \mu_{-2}^{\pm} < \mu_0^- \leqslant \mu_0^+ < \ldots$ — периодической, $\ldots < \mu_{-1}^- \leqslant \leqslant \mu_{-1}^+ < \mu_1^- \leqslant \ldots$ — антипериодической краевых задач.

Введем последовательность комплексных чисел $\{\theta_m\}_{m\in Z}$, являющихся независимыми спектральными данными оператора D_q, по формулам

$$\begin{cases} |\theta_m| = \operatorname{Im}\Theta(\gamma_m)|, \\ |\operatorname{Im}\theta_m| = |\operatorname{Im}\Theta(\lambda_m)|, \\ \operatorname{sign}\operatorname{Im}\theta_m = \operatorname{sign}u_-(\lambda_m), \\ \operatorname{sign}\operatorname{Re}\theta_m = \operatorname{sign}(\gamma_m - \lambda_m). \end{cases} \tag{6}$$

Этими равенствами определяется оператор $T: T[q] = \theta$, взаимнооднозначно отображающий пространство $\widetilde{W}_2^k(a)$ на пространство $w_2^k(a)$ последовательностей $\theta = \{\theta_m\}$ с нормой

$$\|\theta\|_{w_2^k(a)} = \left(|\theta_0|^2 + \sum_m \left|\left(\frac{\pi m}{a}\right)^k \theta_m\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим теперь пространство S^2 почти периодических функций Степанова с нормой

$$\|f\|_{S^2} = \sup_x \left(\int_x^{x+1} \{ |f(x)|^2 + |f^{(k)}(x)|^2 \} \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Обозначим через $A = \{a_n\}_1^\infty$ возрастающую последовательность положительных чисел такую, что $a_{n+1}/a_n \in \boldsymbol{N} \setminus \{1\}$, и через R_n множество чисел вида $r = \frac{\pi m}{a_n}$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Положим $R(A) = \bigcup R_n$.

Будем говорить, что функция $q \in S^2$ принадлежит классу $S_\infty^k(A)$, если найдется такая последовательность функций $q_n \in \widetilde{W}_2^k \times \times (a_n)$, что выполняется условие

$$\forall b > 0 \quad \lim_{n \to \infty} e^{ba_{n+1}} \|q - q_n\|_{S^2} = 0. \tag{8}$$

Нетрудно проверить, что при этом условии метрика Степанова (7) эквивалентна метрике Безиковича [1]

$$\|f\|_{B^2} = \lim_{a \to \infty} \left(\frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \{ |f(x)|^2 + |f^{(k)}(x)|^2 \} \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

которой нам будет удобнее пользоваться в дальнейшем.

Введем пространство $K^k(A)$ комплексозначных последовательностей $\varkappa = \{\varkappa_r\}_{r \in R(A)}$ с нормой

$$\|\varkappa\| = \left(\sum_{r \in R(A)} r^{2k} |\varkappa_r|^2 + |\varkappa_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Выделим в нем множество $K_\infty^k(A)$ последовательностей, для которых выполняется соотношение

$$\forall b > 0 \lim_{n \to \infty} e^{ba_{n+1}} \sum_{r \in R(A) \setminus R_n} |\varkappa_r|^2 r^{2k} = 0. \tag{9}$$

Пусть теперь $\{\theta_m^{(n)}\}_{-\infty}^{+\infty}$ — полный набор спектральных данных оператора D_{q_n}, вводимый по формулам (6), где $q_n(x)$ — член последовательности, аппроксимирующей потенциал $q \in S_\infty^k(A)$.

Положим

$$\varkappa_r^{(n)} = \begin{cases} \theta_m^{(n)}, & r = \frac{\pi m}{a_n} \in R_n, \\ 0, & r \notin R_n. \end{cases} \tag{10}$$

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Последовательность $\varkappa^{(n)} = \{\varkappa_r^{(n)}\}_{r \in R(A)}$ сходится в метрике пространства $K^k(A)$ к пределу $\varkappa$. Этот предел принадлежит $K_\infty^k(A)$ и не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности q_n, а оператор T_∞, сопоставляющий потенциалу q предел $\varkappa$, взаимно-однозначно отображает $S_\infty^k(A)$ на $K_\infty^k(A)$.*

Для простоты доказательство этой теоремы проводится в случае $k=1$ и опирается на следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $q_1,\ q_2 \in \widetilde{W}_2^1(\pi)$, $\theta(1)$, $\theta(2)$ — *соответствующие им наборы спектральных данных. Тогда*

$$\|\theta(1)-\theta(2)\|_{w_2^1(\pi)} \leqslant P(\bar{Q})\, e^{CQ} \|q_1-q_2\|_1^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

$$\|q_1-q_2\|_1 \leqslant P(\bar{\tau})\, e^{C(\widetilde{H}+\tau)} \|\theta(1)-\theta(2)\|_{w_2^1(\pi)}^{\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

где введены обозначения $\|f\| = \|f\|_{L^2[0,\pi]}$,

$$\|f\|_1 = \|f\|_{\widetilde{W}_2^1[0,\pi]}, \quad \tau = \max_{i=1,2} \|\theta(i)\|_{l^2},$$

$$\bar{\tau} = \max_i \|\theta(i)\|_{w_2^1(\pi)}, \quad Q = \max_i \|q_i\|,$$

$$\bar{Q} = \max_i \|q_i\|_1, \quad \widetilde{H} = \max_{m,i} |\theta_m(i)|,$$

а постоянная C, коэффициенты и степень полинома $P(z)$ *не зависят от потенциалов.*

Доказательство теоремы 2. Пусть $\vec{e}(\lambda, x)$ — решение системы (2) с начальными условиями $\vec{e}(\lambda, 0)=\vec{e}=(1,\ i)$. Как известно [2], существует интегральный оператор преобразования H с вещественным матричным ядром $H(x,\ t)$ такой, что

$$\vec{e}(z,\ x) = e^{-izx}\vec{e} + \int_{-x}^{x} H(x,\ t)\,\vec{e}e^{-izt}dt. \tag{13}$$

Все элементы матрицы H определяются функциями

$$\varphi(x,\ t) = (H(x,\ t)\vec{e},\ \vec{e}),\quad \psi(x,\ t) = (H(x,\ t)\vec{e},\ \bar{\vec{e}}).$$

Можно показать, что эти функции удовлетворяют системе уравнений

$$\varphi(x,\ y) = -\int_{\frac{x-y}{2}}^{x} \overline{q(t)}\,\psi(t,\ y-x+t)\,dt, \tag{14}$$

$$\psi(x,\ y) = -q\left(\frac{x+y}{2}\right) - \int_{\frac{x+y}{2}}^{x} q(t)\,\varphi(t;\ x-t+y)\,dt. \tag{15}$$

Продифференцируем эту систему по второй переменной и применим метод итераций. Тогда для функций $\psi(y)=\psi(\pi,\ y)$, $\varphi(y) = \varphi(\pi,\ y)$ получаем оценки

$$\|\varphi\|,\ \|\psi\| \leqslant Ce^{CQ},\quad \|\varphi'\|,\ \|\psi'\| \leqslant P(\bar{Q})\,e^{CQ}. \tag{16}$$

Здесь и всюду в дальнейшем под обозначениями C и $P(z)$ понимаются постоянная и полином, не зависящие от потенциала.

Для двух потенциалов $q_1,\ q_2 \in \widetilde{W}_2^1(\pi)$ имеют место оценки

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|,\ \|\psi_1 - \psi_2\| \leqslant Ce^{CQ}\|q_1 - q_2\|,$$

$$\|\varphi_1' - \varphi_2'\|,\ \ \|\psi_1' - \psi_2'\| \leqslant P(\overline{Q})\, e^{CQ}\|q_1 - q_2\|_1, \tag{17}$$

которые выводятся аналогично из соотношений, представляющих собой разность соответствующих уравнений системы (14)—(15), записанных для q_1 и q_2.

В следующих ниже леммах удобно использовать тот факт, что для λ_m и γ_m применима лемма 3 работы [4], и так как

$$|\lambda_{m+1} - \lambda_m|,\ |\gamma_{m+1} - \gamma_m| \geqslant C^{-1}e^{-CQ},$$

то $\forall f \in L^2(-\pi,\ \pi)$,

$$\sum_m \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-i\lambda_m t}dt \right|^2 \leqslant \|f\|^2 Ce^{CQ}. \tag{18}$$

Лемма 1. *Пусть* $q \in \widetilde{W}_2^1(\pi)$. *Тогда при* $m \neq 0$ *справедливы формулы*

$$\lambda_m = m + \frac{\|q\|^2}{2\pi m} + \frac{\omega_m'}{m}, \tag{19}$$

$$\gamma_m = m + \frac{\|q\|^2}{2\pi m} + \frac{\omega_m''}{m}, \tag{20}$$

где ω_m', ω_m'' *удовлетворяют оценке*

$$\left(\sum \omega_m^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant P(\overline{Q})\, e^{CQ}. \tag{21}$$

Доказательство. Из представлений (13)—(15) получаем, что λ_m удовлетворяют уравнению

$$0 = s_1(\lambda_m,\ \pi) \equiv -\sin\lambda_m\pi + \frac{\|q\|^2}{2\lambda_m}\cos\lambda_m\pi -$$

$$- \frac{\operatorname{Im} q(0)}{\lambda_m}\sin\lambda_m\pi - \operatorname{Re}\frac{1}{\lambda_m}\int_{-\pi}^{\pi} N(t)\, e^{-i\lambda_m t}dt, \tag{22}$$

где $N(t) = \dfrac{\varphi'(t) + \psi'(t)}{2}$.

Стандартными рассуждениями с использованием теоремы Руше и неравенств (16) можно получить сначала грубую оценку

$$|\lambda_m - m| \leqslant \frac{P(\overline{Q})\, e^{CQ}}{m}. \tag{23}$$

Пусть $l = [10P(\overline{Q})\, e^{CQ}]$, где P и C берутся из оценки (23). При $|m| \leqslant l$ формула (19) очевидна. При $|m| > l$ $|\lambda_m - m| < \frac{1}{10}$, и из (16), (18), (22), (23) вытекают следующие неравенства:

$$\left|\lambda_m - m - \frac{\|q\|^2}{2\pi m} + \frac{1}{\pi} s_1(\lambda_m, \pi)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\lambda_m - m - \frac{1}{\pi}\sin\pi(\lambda_m - m)\right| +$$

$$+ \left|\frac{\|q\|^2}{2\pi m} - \frac{\|q\|^2}{2\pi\lambda_m}\cos\lambda_m\pi\right| + \frac{\omega_m}{\lambda_m} \leqslant \frac{\omega'_m}{m},$$

где ω_m, ω'_m удовлетворяют (21), что и доказывает (19).

Для получения оценки (20) продифференцируем формулу

$$u_+(z) = \cos\pi z + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)e^{-izt}dt, \tag{24}$$

вытекающую из (3) и (13). Получим уравнение для γ_m:

$$\frac{1}{\pi}\dot{u}_+(\gamma_m) \equiv -\sin\gamma_m\pi + \frac{\|q\|^2}{2\gamma_m}\cos\gamma_m\pi -$$

$$-\frac{\|q\|^2}{2\gamma_m^2\pi}\sin\pi\gamma_m + \frac{1}{2\gamma_m^2\pi}\operatorname{Im}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi' e^{-i\gamma_m t}dt -$$

$$-\frac{1}{2\gamma_m\pi}\operatorname{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi'(t)\cdot te^{-i\gamma_m t}dt = 0. \tag{25}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны.

Лемма 2. *Справедливы оценки*

$$\lambda_m(2) - \lambda_m(1) = \frac{\|q_2\|^2 - \|q_1\|^2}{2\pi m} + \frac{\Omega'_m}{m}, \tag{26}$$

$$\gamma_m(2) - \gamma_m(1) = \frac{\|q_2\|^2 - \|q_1\|^2}{2\pi m} + \frac{\Omega''_m}{m}, \tag{27}$$

где величины Ω'_m, Ω''_m удовлетворяют неравенству

$$\left(\sum \Omega_m^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant P(\overline{Q})e^{CQ}\|q_1 - q_2\|_1. \tag{28}$$

Доказательство. Из вариационного принципа и гладкости потенциалов q_1 и q_2 вытекает равномерная оценка

$$|\lambda_m(1) - \lambda_m(2)| \leqslant C\|q_1 - q_2\|, \tag{29}$$

из которой следует справедливость формулы (26) при $|m| \leqslant l$. Число l введено в лемме 1. При $|m| > l$ воспользуемся неравенствами (23), (29), (16), (17), (18) и уравнением (22), записанным для q_1 и q_2. Тогда

$$\left|\lambda_m(1) - \lambda_m(2) - \frac{\|q_1\|^2 - \|q_2\|^2}{2\pi m} + \frac{1}{\pi}s_1^{(1)}(\lambda_m(1), \pi) -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}S_1^{(2)}(\lambda_m(2), \pi)\right| \leqslant \left|\lambda_m(1) - \lambda_m(2) - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\lambda_m(1) - \lambda_m(2)}{2}\pi \times\right.$$

$$\times \cos\pi\left|\frac{\lambda_m(1)+\lambda_m(2)}{2}\right|+\left|\frac{\|q_1\|^2-\|q_2\|^2}{2\pi m}-\right.$$

$$-\left.\frac{\|q_1\|^2-\|q_2\|^2}{2\pi\lambda_m(1)}\cos\lambda_m(1)\pi\right|+\|q_2\|^2\left|\frac{\cos\lambda_m(1)\pi}{2\pi\lambda_m(1)}-\right.$$

$$-\left.\frac{\cos\lambda_m(2)\pi}{2\pi\lambda_m(2)}\right|+\frac{\sin\lambda_m(1)\pi}{\pi\lambda_m(1)}|\operatorname{Im} q_1(0)-\operatorname{Im} q_2(0)|+$$

$$+|\operatorname{Im} q_2(0)|\left|\frac{\sin\lambda_m(1)\pi}{\pi\lambda_m(1)}-\frac{\sin\lambda_m(2)\pi}{\pi\lambda_m(2)}\right|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{\lambda_m(1)}-\frac{1}{\lambda_m(2)}\right|\left|\operatorname{Re}\int_{-\pi}^{\pi}N_1e^{-i\lambda_m(1)t}dt\right|+$$

$$+\frac{1}{|2\pi\lambda_m(2)|}\left|\operatorname{Re}\int_{-\pi}^{\pi}N_2e^{-i\lambda_m(1)t}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-it)^n}{n!}(\lambda_m(2)-\lambda_m(1))^n\,dt\right|+$$

$$+\frac{1}{|2\pi\lambda_m(2)|}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(N_1-N_2)\,e^{-i\lambda_m(1)t}dt\right|\leqslant\frac{\Omega_m}{m},$$

где величины Ω_m удовлетворяют оценке (28). Представление (27) для γ_m может быть получено с использованием следующего неравенства:

$$|\gamma_m(1)-\gamma_m(2)|\leqslant P(\overline{Q})\,e^{CQ}\,\|q_1-q_2\|,$$

доказательство которого можно провести тем же методом, что и в работе [3].

Лемма 3. *Имеет место формула*

$$u_+(z)=\cos\pi z+\frac{\|q\|^2}{2\pi z}\sin\pi z-\frac{d}{4z^2}\left(\sin\pi z-\frac{\|q\|^2}{2z}\cos\pi z\right)-$$

$$-\frac{\|q\|^4}{8z^2}\cos\pi z+\frac{A}{8z^3}\sin\pi z+\frac{1}{8z^3}\operatorname{Im}\int_{-\pi}^{\pi}G'\left(\frac{\pi-t}{2}\right)e^{-izt}dt-$$

$$-\frac{1}{2z^2}\left|\int_0^{\pi}q'(t)\,e^{-2izt}dt\right|^2\cos\pi z+\frac{\sin\pi z}{4z^2}\times$$

$$\times\operatorname{Im}\int_0^{\pi}dv e^{2izv}\int_v^{\pi}dt\overline{q'(t)}\,q'(t-v), \qquad (29)$$

где

$$A=|q(0)|^2\|q\|^2-\frac{\|q\|^6}{6}+$$

$$+\operatorname{Re}\int_0^{\pi}dt\ |q(t)|^2\int_0^t q'(\tau)\,\overline{q(\tau)}\,d\tau;$$

$$d=-i\int_0^{\pi}\overline{q'(t)}q(t)\,dt,$$

$$G(y) = -\overline{q(\pi)}\, q(\pi - y) \int_0^{\pi-y} |q(t)|^2\, dt + \int_y^{\pi} \overline{q'(t)} \times$$

$$\times\, q(t-y) \int_0^{t-y} |q(\tau)|^2\, d\tau dt + 2\overline{q(y)} \int_0^y q(t) \times$$

$$\times\, \varphi'(t, -t)\, dt - 2 \int_0^{\pi-y} \overline{q(t-y)}\, q(t)\, \varphi'(t, t)\, dt.$$

Для доказательства этой леммы нужно дважды проинтегрировать по частям второе слагаемое в формуле (24), подставить в полученное выражение результат двукратного дифференцирования тождества

$$\varphi(x, y) = \int_{\frac{x-y}{2}}^{x} q\left(t - \frac{x-y}{2}\right) \overline{q(t)}\, dt +$$

$$+ \int_{\frac{x-y}{2}}^{x} dt\, \overline{q(t)} \int_{t-\frac{x-y}{2}}^{t} q(\tau)\, \varphi(\tau, 2t - y + x - \tau)\, d\tau,$$

вытекающего из системы (14)—(15), и взять вещественную часть от получившихся внеинтегральных членов.

Заметим, что функция $G(y)$ гладкая и допускает оценку вида (16), а для двух потенциалов вида (17).

Лемма 4. *Имеют место оценки*

$$\left| u_+^{(1)}(\gamma_m(1)) - u_+^{(2)}(\gamma_m(2)) \right| \leqslant \frac{\tilde{\Omega}_m \tilde{\omega}_m}{m^2}. \tag{30}$$

Доказательство. Из представлений (29), (25), а также результатов лемм 1, 2 следует, что

$$u_+(\gamma_m) = \cos \pi\gamma_m + \frac{\|q\|^2}{2\gamma_m} \sin \pi\gamma_m - \frac{\|q\|^4}{8\gamma_m^2} \cos \pi\gamma_m + \frac{\omega_m}{m},$$

$$\left| u_+^{(1)}(\gamma_m(1)) - u_+^{(2)}(\gamma_m(2)) \right| \leqslant \frac{\Omega_m}{m},$$

$$u_+^{(1)}(\gamma_m(1)) - u_+^{(2)}(\gamma_m(2)) = \cos \pi\gamma_m(1) -$$

$$- \cos \pi\gamma_m(2) + \frac{\|q_1\|^2}{2\gamma_m(1)} \sin \pi\gamma_m(1) - \frac{\|q_2\|^2}{2\gamma_m(2)} \sin \pi\gamma_m(2) -$$

$$- \frac{\|q_1\|^4}{8\gamma_m^2(1)} \cos \pi\gamma_m(1) + \frac{\|q_2\|^4}{8\gamma_m^2(2)} \cos \pi\gamma_m(2) + \frac{\Omega_m''' \omega_m'''}{m^2},$$

где ω_m, ω_m''' удовлетворяют (21), а Ω_m, Ω_m''', соответственно (28). Отсюда, учитывая неравенство $|u_+(\gamma_m)| \geqslant 1$, получаем следующие оценки:

$$\left| u_+^{(1)}(\gamma_m(1)) - u_+^{(2)}(\gamma_m(2)) \right| \leqslant \left| \left(u_+^{(1)}(\gamma_m(1)) - u_+^{(2)}(\gamma_m(2)\right) \times\right.$$

$$\times\left(u_+^{(1)}(\gamma_m(1)) + u_+^{(2)}(\gamma_m(2))\right)| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \left(\sin \pi\gamma_m(1) - \frac{\|q_1\|^2}{2\gamma_m(1)} \cos \pi\gamma_m(1)\right)^2 - \right.$$

$$\left. -\left(\sin \pi\gamma_m(2) - \frac{\|q_2\|^2}{2\gamma_m^2} \cos \pi\gamma_m(2)\right)^2 \right| +$$

$$+ \frac{\omega_m\Omega_m}{m^2} + Ce^{CQ} \frac{\omega_m^{'''}\Omega_m^{'''}}{m^2} \leqslant \frac{\tilde{\Omega}_m\tilde{\omega}_m}{m^2}.$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству неравенства (11). Из формул (6) и равенства $u_+^2(\lambda_m) - u_-^2(\lambda_m) = 1$ следует, что $\operatorname{sh} \operatorname{Im} \theta_m = u_-(\lambda_m)$.

Из формул (5), (13)—(15) можно получить представление

$$u_-(\lambda) = -2 \operatorname{Re} q(0) \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda} - \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \psi'(t) e^{-i\lambda t} dt,$$

из которого видно, что

$$| u_-^{(1)}(\lambda_m(1)) - u_-^{(2)}(\lambda_m(2)) | \leqslant \frac{\Omega_m}{m},$$

$$| u_-(\lambda_m) | \leqslant \frac{\omega_m}{m},$$

где ω_m, Ω_m удовлетворяют условиям (21) и (28). Поэтому

$$| \operatorname{Im} \theta_m(1) - \operatorname{Im} \theta_m(2) | \leqslant | \operatorname{sh} \operatorname{Im} \theta_m(1) - \operatorname{sh} \operatorname{Im} \theta_m(2) | \leqslant \frac{\Omega_m}{m}, \quad (31)$$

$$| \operatorname{Im} \theta_m | \leqslant \frac{\omega_m}{m}. \quad (32)$$

Далее, так как $\dot{u}_+(\gamma_m) = 0$, то в силу (4) и (6)

$$\operatorname{Re}^2\theta_m \leqslant \operatorname{ch} |\theta_m| - \operatorname{ch} | \operatorname{Im} \theta_m | \leqslant Ce^{CQ} (\gamma_m - \lambda_m)^2. \quad (33)$$

Из леммы 2 вытекает

$$| \gamma_m(1) - \lambda_m(1) - \gamma_m(2) + \lambda_m(2) | \leqslant \frac{\Omega_m' + \Omega_m''}{m} = \frac{\Delta_m}{m}.$$

Если для данного номера m $| \gamma_m(1) - \lambda_m(1) | \leqslant 2 \frac{\Delta_m}{m}$, то $| \gamma_m(2) - \lambda_m(2) | \leqslant \frac{3\Delta_m}{m}$, и тогда из неравенства (33)

$$(\operatorname{Re} \theta_m(1) - \operatorname{Re} \theta_m(2))^2 \leqslant Ce^{CQ} \frac{\Delta_m^2}{m^2}. \quad (34)$$

Если же $| \gamma_m(1) - \lambda_m(1) | > \frac{2\Delta_m}{m}$, то в силу формул (6) $\operatorname{sign} \operatorname{Re} \theta_m(1) = \operatorname{sign} \operatorname{Re} \theta_m(2)$, а значит, из леммы 4, а также из неравенств (31) и (32) вытекает следующая оценка:

$$(\operatorname{Re}\theta_m(1)-\operatorname{Re}\theta_m(2))^2\leqslant|\operatorname{ch}|\theta_m(1)|-\operatorname{ch}|\theta_m(2)||+$$
$$+|\operatorname{Im}\theta_m(1)-\operatorname{Im}\theta_m(2)|\{|\operatorname{Im}\theta_m(1)|+|\operatorname{Im}\theta_m(2)|\}\leqslant$$
$$\leqslant|u_+^{(1)}(\gamma_m(1))-u_+^{(2)}(\gamma_m(2))|+\frac{\Omega_m\omega_m}{m^2}\leqslant$$
$$\leqslant(\tilde{\Omega}_m\tilde{\omega}_m+\Omega_m\omega_m)\,m^{-2}. \tag{35}$$

Объединяя неравенства (31), (34), (35), (28), (21), а также легко получаемую из приведенных выше рассуждений оценку

$$|\theta_0(1)-\theta_0(2)|\leqslant P(\overline{Q})\,e^{CQ}\,\|q_1-q_2\|_1,$$

окончательно получаем неравенство (11). Обратное неравенство (12) устанавливается методом работ [5, 2]. Этим завершается доказательство теоремы 2.

Следствие. *Пусть* $q_1,\ q_2\in\tilde{W}_2^1(a)$. *Тогда имеют место оценки*

$$\|\theta(1)-\theta(2)\|_{w_2^1(a)}\leqslant Ce^{Ca\beta}\|q_1-q_2\|_{B^2}^{\frac{1}{2}}, \tag{36}$$

$$\|q_1-q_2\|_{B^2}\leqslant Ce^{Ca\alpha}\|\theta(1)-\theta(2)\|_{w_2^1(a)}^{\frac{1}{2}}, \tag{37}$$

где

$$\beta=\overline{Q}+\sqrt{\overline{Q}}+1,\quad \alpha=\bar{\tau}+\sqrt{\bar{\tau}}+1+H,$$
$$\overline{Q}=\max_i\|q_i\|_{B^2},\quad \bar{\tau}=\max_i\|\theta(i)\|_{w_2^1(a)},\quad H=\max_{i,m}|\theta_m(i)|.$$

Это следствие несложно получить, используя результаты § 11 работы [2].

Доказательство теоремы 1.

Прежде всего отметим, что если рассматривать потенциал $q_n(x)$ как функцию периода a_{n+1}, то ее спектральные данные будут иметь вид

$$\tilde{\theta}_k^{(n)}=\begin{cases}\theta_m^{(n)}, & k=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}m,\\[2ex] 0, & k\neq\dfrac{a_{n+1}}{a_n}m,\quad m\in\boldsymbol{Z},\end{cases}$$

т. е. последовательностям $\{\tilde{\theta}_m^{(n)}\}$ и $\{\tilde{\theta}_m^{(n)}\}$ отвечает по формулам (10) одна и та же функция $\varkappa^{(n)}\in K^1(A)$. Так как $\sup_n\|q_n\|_{B^2}<\infty$, то из (36) и (8) вытекают следующие неравенства:

$$\|\varkappa^{(n+1)}-\varkappa^{(n)}\|_{K^1(A)}=\|\theta^{(n+1)}-\tilde{\theta}^{(n)}\|_{w_2^1(a_{n+1})}\leqslant$$

$$\leqslant Ce^{Ca_{n+1}\beta} \| q_{n+1} - q_n \|_{B^2}^{\frac{1}{2}} \leqslant Ce^{-a_{n+1}b/2}$$

при $b > 4C\beta$.

Аналогично при $k > n$

$$\| \varkappa^{(k)} - \varkappa^{(n)} \| \leqslant Ce^{-a_{n+1}b/4}, \tag{38}$$

т. е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \varkappa^{(n)} = \varkappa \in K^1(A)$. Этот предел принадлежит $K^1_\infty(A)$. Действительно, так как $\varkappa_r^{(n)} = 0$ при $r \notin R_n$, то из (38)

$$\sum_{r \in R(A) \setminus R_n} r^2 |\varkappa_r|^2 \leqslant \| \varkappa - \varkappa^{(n)} \|^2_{K^1(A)} \leqslant Ce^{-ba_{n+1}/4}.$$

Пусть теперь $\varkappa$ — произвольный элемент пространства $K^1_\infty(A)$. Для любого фиксированного $n \geqslant 1$ положим $\theta_m^{(n)} = \varkappa_r^{(n)}$ при $m = a_n r/\pi$, $r \in R_n$. Пусть $q_n(x)$ — отвечающий этому спектральному набору a_n-периодический потенциал. Рассмотрим его как потенциал периода a_{n+1}. Тогда из (37) и (9) вытекают следующие неравенства:

$$\| q_{n+1} - q_n \|_{B^2} \leqslant Ce^{Ca_{n+1}\alpha} \| \theta^{(n+1)} - \tilde{\theta}^{(n)} \|^{\frac{1}{2}}_{w_2^1(a_{n+1})} \leqslant$$

$$\leqslant Ce^{Ca_{n+1}\alpha} \Big(\sum_{r \in R(A) \setminus R_n} r^2 |\varkappa_r|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant Ce^{-ba_{n+1}/4} \text{ при } b > 4C\alpha.$$

Теорема 1 доказана.

Автор выражает глубокую признательность Л. А. Пастуру за постановку задачи и внимание к работе, а также В. А. Ткаченко за ценные советы.

Список литературы: 1. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. — М.: Гос. изд-во тех.-теорет. лит., 1953.—396 с. 2. *Мисюра Т. В.* Обратная задача для одномерного оператора Дирака с периодическими коэффициентами. — Дис.... канд. физ.-мат. наук, Х., 1980.—106 с. 3. *Пастур Л. А., Ткаченко В. А.* К спектральной теории одномерного оператора Шредингера с предельно-периодическим потенциалом. — Докл. АН СССР, 1984, **279**, № 5, с. 1050—1053. 4. *Левин Б. Я.* Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа. — Тр. ФТИНТ АН УССР. Мат. физика и функцион. анализ, вып. 1, 1969, с. 136—146. 5. *Марченко В. А., Островский И. В.* Аппроксимация периодических потенциалов конечнозонными. — Вестн. Харьк. ун-та, № 205. Прикл. математика и механика. Вып. 45. — Х.: Вища шк., 1980, с. 4—40.

Поступила в редколлегию 26.04.85.