УДК 517.9

Л. К. МАСЛОВ

ОПИСАНИЕ МНОЖЕСТВА СИЛЬНЫХ ПРЕДЕЛОВ БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ ЯКОБИ

1. Обозначим через J бесконечную в обе стороны трехдиагональную матрицу с коэффициентами

$$J_{ij} = b(j)\,\delta(i-j-1) + a(i)\,\delta(i-j) + b(i)\,\delta(i-j+1)$$

$$(i,\ j \in \mathbf{Z},\quad \operatorname{Im} a(i) = 0,\ b(i) > 0)$$

и через $P(\lambda,\ n)$ и $Q(\lambda,\ n)$ — фундаментальную систему решений конечно-разностного уравнения

$$b(n-1)\,\psi(n-1) + a(n)\,\psi(n) + b(n)\,\psi(n+1) = \lambda\psi(n) \qquad (1.1)$$

с начальными данными

$$P(-1) = 0,\quad Q(-1) = 1,$$
$$P(0) = 1,\quad Q(0) = 0.$$

Согласно теореме Вейля—Хеллингера [1] существуют такие голоморфные вне вещественной оси функции $m^{\pm}(\lambda)$, что решения

$$\psi^{+}(\lambda,\ n) = m^{+}(\lambda)\,P(\lambda,\ n) + Q(\lambda,\ n);$$
$$\psi^{-}(\lambda,\ n) = P(\lambda,\ n) + m^{-}(\lambda)\,Q(\lambda,\ n)$$

уравнения (1.1) принадлежат пространствам $l_2(Z_{\pm})$ и

$$-b(-1)\frac{\operatorname{Im} m^{+}(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}|\psi^{+}(\lambda,\ k)|^2;\ -b(-1)\frac{\operatorname{Im} m^{-}(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} = \sum_{k=-\infty}^{-1}|\psi^{-}(\lambda,\ k)|^2.$$

Функции $m^{\pm}(\lambda)$ принимают сопряженные значения в сопряженных точках и

$$\frac{\operatorname{Im} m^{\pm}(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} > 0,\quad m^{\pm}(\lambda) = \frac{b(-1)}{\lambda} + O(\lambda^{-2}),\quad \operatorname{Im}\lambda \to \infty.$$

Следуя работе [2], вместо пары функций $m^{\pm}(\lambda)$ введем одну функцию $m(z)$, определенную равенствами

$$m(z) = \begin{cases} m^{+}(z + z^{-1}), & |z| < 1 \\ (m^{-}(z + z^{-1}))^{-1}, & |z| > 1. \end{cases}$$

и будем называть ее функцией Вейля матрицы J. Функция $m(z)$ однозначно определяет всю матрицу J и обладает свойствами:
1) $m(z)$ голоморфна вне вещественной оси и единичной окружности;

2) $\dfrac{\operatorname{Im} m(z)}{\operatorname{Im} z} > 0 \quad (|z| \neq 1,\ \operatorname{Im} z \neq 0)$;

3) $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{it}{m(it)} = \lim\limits_{t\to+0}\dfrac{m(it)}{it} = b(-1)$;

(См. [2] лемма 1.1).

Матрица называется быстроубывающей, если

$$\sum_{-\infty}^{\infty} n\,|a(n)| < \infty, \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} n\,|b^2(n) - 1| < \infty.$$

Для быстроубывающих якобиевых матриц вместо стандартных пектральных характеристик (функции Вейля и спектральные функции) можно ввести альтернативные характеристики, возникающие в теории рассеяния (коэффициент отражения, дискретный спектр и нормировочные коэффициенты). Быстроубывающие матрицы, у которых коэффициент отражения равен нулю, называются безотражательными. Доказано [2], что для того, чтобы функция $m(z)$ была функцией Вейля безотражательной матрицы, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление вида

$$m(z) = C\left(z + \sum_{j=1}^{N} \frac{-\alpha_j}{\lambda_j - z} - \sum_{j=1}^{N} \frac{-\alpha_j}{\lambda_j}\right), \tag{1.2}$$

где $-\alpha_j > 0$, а $\lambda_j \in R$ — попарно различные вещественные числа причем, если $\|J\| < M + M^{-1}$, то

$$M^{-1} < |\lambda_j| < M \tag{1.3}$$

(см. [2] (2.17), лемма 2.2. и теорема 2.2). При этом $C = b^{-1}(-1)$ и из формулы $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{m(z)}{z} = \overset{-1}{b}(-1)$ следует, что $b^2(-1) = 1 + \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{-\alpha_j}{\lambda_j^2}$.

Обозначим через $\rho(\lambda)$ дискретную меру

$$d\rho(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} -\alpha_j \delta(\lambda - \lambda_j)\,d\lambda.$$

Тогда представление (1.2) можно записать в виде

$$m(z) = C\left(z + \int \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda - z} - \int \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda}\right);$$

$$C = b^{-1}(-1) = \left(1 + \int \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2}\right)^{-1/2}. \tag{1.4}$$

Основным результатом настоящей работы является

Теорема. *Для того чтобы функция $m(z)$ была функцией Вейля сильного предела последовательности безотражательных матриц Якоби, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление вида (1.4), где $\rho(\lambda)$ — борелевская мера, сосредоточенная на компакте вещественной оси, не содержащем нуля.*

Для доказательства теоремы сделаем вначале следующее замечание. Пусть $\{J_N\}$ — последовательность якобиевых матриц и $m_N(z)$ — их функции Вейля. Пусть $J_N \to J$ в смысле сильной сходимости, а $m_N(z) \to m(z)$ при каждом z ($|z| \neq 1$, $\operatorname{Im} z \neq 0$). Тогда $m(z)$ является функцией Вейля матрицы J. Действительно, канонические решения $P_N(\lambda, n)$, $Q_N(\lambda, n)$, соответствующие матрицам J_N, при каждом λ

сходятся к каноническим решениям $P(\lambda, n)$, $Q(\lambda, n)$ уравнения $J\psi = \lambda\psi$. При $\lambda = z + z^{-1}$ ($|z| \neq 1$, $\operatorname{Im} z \neq 0$) функции

$$\psi_N(z, n) = m_N(z) P_N(z + z^{-1}, n) + Q_N(z + z^{-1}, n)$$

являются решениями Вейля, удовлетворяющими уравнениям $J_N\psi_N(z, n) = (z + z^{-1})\psi_N(z, n)$. Кроме того, при $|z| < 1$

$$-b_N(-1)\frac{\operatorname{Im} m_N(z)}{\operatorname{Im}(z + z^{-1})} = \|\psi_N(z, n)\|_{l_2(Z_+)}, \tag{1.5}$$

а при $|z| > 1$

$$-b_N(-1)\frac{\operatorname{Im} m_N(z)}{\operatorname{Im}(z + z^{-1})} = \|\psi_N(z, n)\|_{l_2(Z_-)}. \tag{1.6}$$

Переходя к пределу в равенствах (1.5), (1.6) при $N \to \infty$, получим, что $m(z) = \lim m_N(z)$ есть функция Вейля матрицы J.

Обратимся к доказательству теоремы.

Необходимость Пусть $\{J_N\}_{N=1}^{\infty}$ — последовательность безотражательных якобиевых матриц и $J_N \to J$ в смысле сильной сходимости. Безотражательные матрицы J_N ограничены, а поскольку они имеют сильный предел, то ограничены в совокупности. Пусть $\|J_N\| < M + M^{-1} \forall N \in \mathbf{N}$. Функции Вейля $m_N(z)$ матриц J_N имеют вид

$$m_N(z) = C_N\left(z + \int\frac{d\rho_N(\lambda)}{\lambda - z} - \int\frac{d\rho_N(\lambda)}{\lambda}\right),$$

где $\rho_N(\lambda)$ — дискретные меры, сосредоточенные на множестве $\left[-M, -\frac{1}{M}\right] \cup \left[\frac{1}{M}, M\right]$. Кроме того,

$$C_N = b_N^{-1}(-1) = \left(1 + \int\frac{d\rho_N(\lambda)}{\lambda^2}\right)^{-1/2}$$

откуда, в частности, вытекает, что

$$\int d\rho_N(\lambda) \leqslant M^2(b^2(-1) - 1) \leqslant M^2((M + M^{-1})^2 - 1) = M^4 + M^2 + 1.$$

Пользуясь теоремой Хелли, выделим подпоследовательность $\rho_{N'}(\lambda) \to \rho(\lambda)$. Тогда $m_{N'}(z) \to m(z)$ при каждом z ($|z| \neq 1$, $\operatorname{Im} z \neq 0$) и значит $m(z)$ есть функция Вейля матрицы J.

Достаточность. Пусть некоторая функция $m(z)$ имеет вид (1.4), где $\operatorname{supp}\rho(\lambda) \subset \left[-M, -\frac{1}{M}\right] \cup \left[\frac{1}{M}, M\right]$. Пусть $\int d\rho(\lambda) = \rho$. Построим последовательность дискретных мер $\rho_N(\lambda) \to \rho(\lambda)$ таких, что $\int d\rho_N(\lambda) = \rho$ для всех $N \in \mathbf{N}$. Тогда последовательность рациональных функций

$$m_N(z) = C_N\left(z + \int\frac{d\rho_N\lambda}{\lambda - z} - \int\frac{d\rho_N(\lambda)}{\lambda}\right);$$

$$C_N = \left(1 + \int\frac{d\rho_N\lambda}{\lambda^2}\right)^{-1/2}$$

сходится к $m(z)$. Каждая из них является функцией Вейля некоторой безотражательной матрицы J_N. Последовательность J_N ограничена, поэтому из нее можно выделить сильно сходящуюся подпоследо-

...тельность $J_{N'}$. Тогда, согласно сделанному выше замечанию, $m(z)$ является функцией Вейля матрицы $J = \lim\limits_{N'\to\infty} J_{N'}$

Следствие 1. *Для того, чтобы матрица J была сильным пределом безотражательных якобиевых матриц, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и ее функция Вейля была голоморфна при $|z| = 1$, $z \neq \pm 1$.*

Необходимость следует из представления (1.4).

Достаточность. Пусть функция Вейля $m(z)$ ограниченной матрицы J голоморфна на единичной окружности. Из ограниченности матрицы J следует, что ее канонические функции Вейля $m^{\pm}(\lambda)$ не имеют особенностей вне некоторого компакта вещественной оси. Пусть $m^{\pm}(\lambda)$ голоморфны вне отрезка $\left[-M - \frac{1}{M}, \frac{1}{M} + M\right]$. Тогда все особенности функции

$$m(z) = \begin{cases} m^{+}(z + z^{-1}), & |z| < 1 \\ (m^{-}(z + z^{-1}))^{-1}, & |z| > 1 \end{cases}$$

лежат на отрезках $\left[-M, -\frac{1}{M}\right] \cup \left[\frac{1}{M}, M\right]$. С учетом свойства (2) функции $m(z)$ это означает, что $m(z)$ есть функция Неванлинны и поэтому допускает представление

$$m(z) = C\left(z + D + \int \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda - z}\right),$$

причем $\operatorname{supp} \rho(\lambda) \subset \left[-M, -\frac{1}{M}\right] \cup \left[\frac{1}{M}, M\right]$. Находя коэффициенты C и D из свойства 3) функции $m(z)$, получим представление (1.4), откуда в силу теоремы 1 заключаем, что J есть сильный предел безотражательных матриц.

Замыкание множества безотражательных матриц будем обозначать $\tilde{B}$. Класс $\tilde{B}$ можно описать в терминах канонических функций Вейля $m^{\pm}(\lambda)$.

Следствие 2. *Для того чтобы матрица J принадлежала классу $\tilde{B}$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и ее канонические функции Вейля удовлетворяли условию*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} m^{+}(\lambda - i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{m^{-}(\lambda + i\varepsilon)} \tag{1.7}$$

при всех $\lambda \in (-2, 2)$.

Доказательство. Покажем, что голоморфность функции $m(z)$ на единичной окружности эквивалентна (1.7). Поскольку функция $m(z)$ принимает сопряженные значения в сопряженных точках, можно ограничиться рассмотрением верхней полуплоскости $0 < \arg z < \pi$. Согласно определению функций Вейля,

$$m((1 - i\delta)e^{i\varphi}) = m^{+}(2\cos\varphi - 2i\delta\sin\varphi + O(\delta^2)), \quad \delta \to 0;$$

$$m((1 + i\delta)e^{i\varphi}) = (m^{-}(2\cos\varphi + 2i\delta\sin\varphi + O(\delta^2)))^{-1}, \quad \delta \to 0.$$

Отсюда получаем, что непрерывность $m(z)$ на дуге $\{|z| = 1, 0 < \arg z < \pi\}$ эквивалентна равенству пределов (1.7).

В приложениях важную роль играют якобиевы матрицы вида $\alpha J + \beta$, где $\alpha > 0$, $\beta \in \boldsymbol{R}$, а $J \in \tilde{B}$. Обозначим это множество матриц через $\boldsymbol{R}_+\tilde{B} + \boldsymbol{R}$. Для его описания достаточно заметить, что если $m^\pm(\lambda)$ функции Вейля матрицы J, то $m^\pm\left(\frac{\lambda - \beta}{\alpha}\right)$ будут функциями Вейля матрицы $\alpha J + \beta$. Такое преобразование переводит отрезок $[-2; 2]$ в отрезок $\left[\frac{-2-\beta}{\alpha}, \frac{2-\beta}{\alpha}\right]$, откуда вытекает

Следствие 3. Для того чтобы матрица J принадлежала классу $\boldsymbol{R}_+\tilde{B} + \boldsymbol{R}$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и ее канонические функции Вейля удовлетворяли условию (1.7) при всех $\lambda \in (a, b)$. При этом $J = \alpha J_0 + \beta$, где

$$\alpha = \frac{4}{b-a}; \qquad \beta = 2\frac{a+b}{a-b}; \qquad J_0 \in \tilde{B}.$$

2. Приведем примеры якобиевых матриц, принадлежащих классу $\boldsymbol{R}_+\tilde{B} + \boldsymbol{R}$

Быстроубывающие матрицы. Для быстроубывающих матриц существуют решения Йоста $e^+(z, n) \in l_2(\mathbf{Z}_\pm)$ [2] уравнения

$$J\psi(z, n) = (z + z^{-1})\psi(z, n). \tag{2.1}$$

Решения Вейля $\psi^\pm(z, n)$ определены с точностью до постоянного множителя, поэтому

$$m^+(\lambda) = \frac{\psi^+(\lambda, 0)}{\psi^+(\lambda, -1)} = \frac{e^+(z, 0)}{e^+(z, -1)};$$

$$\frac{1}{m^-(\lambda)} = \frac{\psi^-(\lambda, 0)}{\psi^-(\lambda, -1)} = \frac{e^-(z, 0)}{e^-(z, -1)}, \quad \lambda = z + z^{-1}.$$

Отсюда следует, что условие

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} m^+(2\cos\varphi - i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{m^-(2\cos(\varphi + i\varepsilon))}, \quad \varphi_1 < \varphi < \varphi_2 \tag{2.2}$$

эквивалентно равенству

$$e^+(z, 0)e^-(z, -1) = e^-(z, 0)e^+(z, -1), \quad |z| \neq 1, \ \varphi_1 < \arg z < \varphi_{2_0}. \tag{2.3}$$

Равенство (2.3) означает, что на дуге единичной окружности $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$ имеет место линейная зависимость $e^-(z, n) = A(z) \times e^+(z, n)$, т. е. коэффициент отражения равен нулю на этой дуге. Следовательно, *для того, чтобы быстроубывающая матрица J принадлежала классу $\boldsymbol{R}_+\tilde{B} + \boldsymbol{R}$ необходимо и достаточно, чтобы ее коэффициент отражения равнялся нулю на некоторой дуге единичной окружности.*

Матрицы с периодическими коэффициентами. Пусть коэффициенты якобиевой матрицы J имеют период L, т. е. $a(n+L) = a(n)$, $b(n+L) = b(n)$. Тогда для любого решения уравнения

$$J\psi(\lambda, n) = \lambda\psi(\lambda, n) \tag{2.4}$$

раведливо равенство

$$\begin{pmatrix}\psi(n-1+L)\\ \psi(n+L)\end{pmatrix}=A_L\begin{pmatrix}\psi(n-1)\\ \psi(n)\end{pmatrix}, \qquad (2.5)$$

е

$$A_L(\lambda)=\begin{pmatrix}Q(L-1,\ \lambda) & P(L-1,\ \lambda)\\ Q(L,\ \lambda) & P(L,\ \lambda)\end{pmatrix}$$

-матрица монодромии. Собственные значения k матрицы монодромии ычисляются из уравнения

$$k^2-2uk+1=0, \qquad (2.6)$$

е $u(\lambda)=\frac{1}{2}(P(L,\ \lambda)+Q(L-1,\ \lambda))$.

Множество отрезков $\sigma=\{\lambda\in R;\ |u(\lambda)|\leqslant 1\}$ образует спектр матри- ц J. Проведем разрезы вдоль этих отрезков и рассмотрим функцию $k(\lambda)=u(\lambda)-\sqrt{u^2(\lambda)-1}$ на $C\setminus\sigma$. При этом ветвь радикала выбе- ри так, чтобы $\sqrt{u^2(\lambda)-1}>0$ при $\lambda>\max\sigma$. Поскольку внутри юго замкнутого контура области $C\setminus\sigma$ лежит четное число точек ветвления $\{\lambda: u^2(\lambda)=1\}$, то $k(\lambda)$ является однозначной аналитической функцией на $C\setminus\sigma$. Далее, при $\lambda\in\sigma$ $k(\lambda\pm i\varepsilon)\to 1$ при $\varepsilon\to 0$, т. е. бортиках разрезов $|k(\lambda)|=1$, а при $\lambda\to\infty$ $|k(\lambda)|\to 0$. Следова- тельно, по принципу максимума, $|k(\lambda)|<1$ при всех $\lambda\in C\setminus\sigma$. нкция $k(\lambda)$ удовлетворяет уравнению (2.6) и, очевидно, $k^{-1}(\lambda)$ же является однозначной аналитической функцией вне σ и удов- летворяет уравнению (2.6). Отметим также, что $k(\bar\lambda)=\overline{k(\lambda)}$, так как на $R\setminus\sigma$ функция $k(\lambda)$ принимает вещественные значения.

Собственным значениям $k^{\pm 1}(\lambda)$ матрицы $A_L(\lambda)$ отвечают собствен- ные векторы

$$f^{\pm}(\lambda)=\begin{pmatrix}-P(L-1,\ \lambda)\\ Q(L-1,\ \lambda)-k^{\pm 1}(\lambda)\end{pmatrix}.$$

Если ψ — решение уравнения (2.4) и

$$\begin{pmatrix}\psi(n-1)\\ \psi(n)\end{pmatrix}=C^+f^+(\lambda)+C^-f^-(\lambda),$$

то согласно (2.5)

$$\begin{pmatrix}\psi(n-1+mL)\\ \psi(n+mL)\end{pmatrix}=k^m(\lambda)C^+f^+(\lambda)+k^{-m}(\lambda)C^-f^-(\lambda), \quad |k(\lambda)|<1.$$

Поэтому решения Вейля $\psi^{\pm}(n,\ \lambda)$ уравнения (2.4) удовлетворяют начальным условиям

$$\begin{pmatrix}\psi^{\pm}(-1)\\ \psi^{\pm}(0)\end{pmatrix}=Cf^{\pm}(\lambda).$$

Соответственно выражения для функций Вейля $m^{\pm}(n,\ \lambda)$ имеют вид

$$(m^{\pm}(\lambda))^{\pm 1}=\frac{Q(L-1,\ \lambda)-k^{\pm 1}(\lambda)}{-P(L-1,\ \lambda)}.$$

Поскольку при $\lambda\in\sigma$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}k(\lambda+i\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\overline{k(\lambda-i\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}k^{-1}(\lambda-i\varepsilon),$$

предельные значения $m^{+}(\lambda)$ и $(m^{-}(\lambda))^{-1}$ на отрезках множества совпадают и согласно следствию 3 *любая периодическая матри Якоби принадлежит множеству* $\boldsymbol{R}_{+}\tilde{B} + \boldsymbol{R}$.

Список литературы: 1. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М., 1961 310 с. 2. *Маслов Л. К.* Спектральные свойства безотражательных матриц Якоби / Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1992. Вып. 57. С. 25—46 3. *Перколаб Л. Б.* Обратная задача для периодической матрицы Якоби // Теори функций, функцион. анализ и их приложения. 1984. Вып. 42. С. 107—121.

Поступило в редколлегию 10.09.91