ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVI. Серия 4 1960

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ПО МАТРИЦЕ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

З. С. Агранович и В. А. Марченко

(Харьков)

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья* посвящена так называемой обратной задаче квантовой теории рассеяния. Эта задача может быть сформулирована следующим образом.

Рассматривается граничная задача, порождаемая системой дифференциальных уравнений

$$y''_\alpha + \lambda^2 y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} v_{\alpha\beta}(x)\, y_\beta, \quad 0 \leqslant x < \infty \qquad (1)$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

и граничным условием **

$$y_\alpha(0) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2 \ldots n). \qquad (2)$$

Требуется, зная асимптотическое поведение на бесконечности нормированных собственных вектор-функций граничной задачи (1)—(2), восстановить потенциальную матрицу

$$V(x) = \| v_{\alpha\beta}(x) \|_1^n.$$

Мы предполагаем в этой работе, что матрица $V(x)$ эрмитова и удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty x\, | v_{\alpha\beta}(x) |\, dx < \infty \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n). \qquad (3)$$

В этом случае граничная задача (1)—(2) имеет конечное число p собственных значений вида λ_ν^2, $\lambda_\nu = -i\mu_\nu$, $\mu_\nu > 0$, а непрерывный спектр этой задачи заполняет всю положительную полуось. Нормированные собственные вектор-функции являются столбцами матрицы $U(x, \lambda)$, которая при $x \to \infty$ асимптотически равна

$$\begin{aligned} U(x, \lambda_\nu) &\sim e^{-\mu_\nu x} \cdot M_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots p), \\ U(x, \lambda) &\sim e^{i\lambda x} \cdot I - e^{-i\lambda x} \cdot S(-\lambda) \quad (\lambda^2 > 0), \end{aligned} \qquad (4)$$

где M_ν — эрмитова матрица, имеющая ранг, равный кратности собственного значения λ_ν^2, I — единичная матрица, $S(\lambda)$ — унитарная матрица, обладающая свойством

$$S(-\lambda) = S^{-1}(\lambda).$$

Матрицы M_ν называются *нормировочными матрицами*, $S(\lambda)$ — *матрицей рассеяния* граничной задачи (1) — (2).

---

* Основные результаты этой работы опубликованы в [1].

** Вместо (2) мы могли бы взять любое самосопряженное граничное условие. В работе рассматривается условие (2), поскольку именно оно возникает в физике.

Таким образом, рассматриваемая нами задача сводится к следующему.

1) Дать метод восстановления потенциальной матрицы $V(x)$ по заданным матрице рассеяния $S(\lambda)$, собственным значениям $\lambda_\nu^2 = -\mu_\nu^2$, $\mu_\nu > 0$, и нормировочным матрицам M_ν, $\nu = 1, 2, \dots p$ (совокупность этих данных для краткости будем называть *данными рассеяния*).

2) Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданные унитарная матрица $S(\lambda)$, числа $-\mu_\nu^2$, $\mu > 0$, и эрмитовы матрицы M_ν, $\nu = 1, 2, \dots p$, были данными рассеяния некоторой граничной задачи (1)—(2) с эрмитовым потенциалом $V(x)$, удовлетворяющим условию (3).

Первый из указанных вопросов рассматривался в недавней работе Ньютона и Иоста [2]. Эти авторы, накладывая на потенциал более жесткие, чем (3), требования, свели задачу к построению по данным рассеяния спектральной матрицы, зная которую можно восстановить потенциал методом И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [3]. Для случая одного уравнения ($n = 1$) эту задачу рассматривал другими методами М. Г. Крейн [4].

Мы даем метод непосредственного восстановления потенциала по данным рассеяния, следуя идее, изложенной для одного уравнения в заметке [5]. Этот метод позволяет также полностью решить и второй из поставленных выше вопросов.

Вместо системы (1) удобнее рассматривать матричное дифференциальное уравнение

$$Y'' + \lambda^2 Y = V(x) \cdot Y, \tag{5}$$

где Y — матрица, столбцы которой являются, очевидно, решениями системы (1).

Отправным пунктом наших исследований является следующая теорема, доказанная в § 1.

При условии (3) существует матрица — решение $\mathcal{E}(x,\lambda)$ уравнения (5), представимое в виде

$$\mathcal{E}(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} \cdot I + \int_x^\infty K(x,t)\, e^{-i\lambda t}\, dt, \quad \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0, \tag{6}$$

причем матрица $K(x,t)$ и потенциал $V(x)$ связаны равенством

$$V(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x,x) \quad (x > 0). \tag{7}$$

Этот факт для случая одного уравнения впервые доказан Б. Я. Левиным [6] при несколько более жестких предположениях относительно потенциала.

Обозначим через $G(x,\lambda)$ решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям

$$G(0,\lambda) = 0, \quad G'(0,\lambda) = I.$$

Матрицы $U(x, \lambda)$ (см. (4)), $\mathcal{E}(x,\lambda)$ и $G(x,\lambda)$ связаны между собой равенствами (§ 2 и 3):

$$U(x, \lambda_\nu) = \mathcal{E}(x, \lambda_\nu) \cdot M_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots p),$$

$$U(x, \lambda) = 2i\lambda\, G(x, \lambda)\, [\mathcal{E}^*(0, -\lambda)]^{-1} = \mathcal{E}(x, -\lambda) - \mathcal{E}(x, \lambda) \cdot S(-\lambda). \tag{8}$$

Умножая второе из равенств (8) на $e^{-i\lambda y}$, $y > x$ и интегрируя по λ в промежутке $(-\infty, \infty)$, мы с помощью контурного интегрирования получаем в § 3 следующее основное уравнение $(0 \leqslant x < y < \infty)$:

$$F(x+y) + K(x, y) + \int_x^\infty K(x, t)\, F(t+y)\, dt = 0, \tag{9}$$

где $F(u)$ определяется через данные рассеяния по формуле

$$F(u)=\sum_{\nu=1}^{p} M_\nu^2\cdot e^{-\mu_\nu u}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[I-S(\lambda)]\,e^{i\lambda u}\,d\lambda. \tag{10}$$

Равенство (9) есть линейное интегральное уравнение относительно матрицы $K(x, y)$ (если $F(u)$, т. е. данные рассеяния, известны). Это основное уравнение (9) совместно с формулой (7) решает первый из поставленных выше вопросов, т. е. позволяет восстановить потенциал по данным рассеяния.

Анализ граничной задачи (1)—(2) с потенциальной матрицей $V(x)$, удовлетворяющей условию (3), (теоремы 2. 1, 3. 1 и 4. 3) показывает, что данные рассеяния этой задачи обладают следующими свойствами.

I_s. Матрица $I-S(\lambda)$ есть преобразование Фурье эрмитовой матрицы $F_1(u)$, так что

$$F_1(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[I-S(\lambda)]\,e^{i\lambda u}\,d\lambda.$$

При этом элементы матрицы $F_1(u)$ суммируемы на полуоси $(0, \infty)$, а на полуоси $(-\infty, 0)$ представимы в виде суммы двух функций, одна из которых суммируема, а другая ограничена и суммируема с квадратом.

II_s. Уравнение

$$-x(t)+\int_{-\infty}^{0}x(\xi)\,F_1(t+\xi)\,d\xi=0, \quad -\infty<t\leqslant 0 \tag{11}$$

не имеет ненулевых вектор-решений, компоненты которых суммируемы с квадратом в промежутке $(-\infty, 0)$.

III_s. При любом $u>0$ существует производная $F_1'(u)$ и

$$\int_{0}^{\infty}u\,|F_1'(u)|\,du<\infty^{*}.$$

IV. Уравнение

$$x(t)+\int_{0}^{\infty}x(\xi)\,F(t+\xi)\,d\xi=0, \quad 0\leqslant t<\infty,$$

где

$$F(u)=\sum_{\nu=1}^{p}M_\nu^2 e^{-\mu_\nu u}+F_1(u),$$

не имеет ненулевых вектор-решений, компоненты которых суммируемы в промежутке $(0, \infty)$.

V. Сумма рангов нормировочных матриц M_ν $(\nu=1,2,\dots p)$ равна числу линейно независимых вектор-решений уравнения

$$x(t)+\int_{0}^{\infty}x(\xi)\,F_1(t+\xi)\,d\xi=0, \quad 0\leqslant t<\infty \tag{12}$$

с суммируемыми в промежутке $(0, \infty)$ компонентами.

Таким образом, перечисленные пять условий необходимы для того, чтобы заданные унитарная матрица $S(\lambda)$, эрмитовы матрицы M_ν и числа $-\mu_\nu^2$, $\mu_\nu>0$ $(\nu=1,2\dots p)$ были данными рассеяния некоторой граничной задачи (1)—(2) с потенциалом $V(x)$, удовлетворяющим условию (3).

---

* Абсолютную величину $|A|$ любой матрицы $A=\|a_{\alpha\beta}\|$ определяем формулой

$$|A|=\max_{\alpha}\sum_{\beta}|a_{\alpha\beta}|.$$

В § 4, 5, 6 и 7 доказывается, что эти пять условий являются также и достаточными.

Предполагая сначала, что заданная унитарная матрица $S(\lambda)$ удовлетворяет только условию I_s, а эрмитовы матрицы M_ν и числа $\mu_\nu > 0$ $(\nu = 1,2, \ldots p)$ заданы произвольно, мы в § 4 (теорема 4.1) доказываем, что основное уравнение (9), в котором $F(u)$ определена по указанным выше данным формулой (10), имеет при каждом $x > 0$ единственное решение $K(x, y)$. В § 5 доказывается, что построенные с помощью этой матрицы $K(x, y)$ по формулам (6), (8) матрицы $U(x, \lambda_\nu)$, $\lambda_\nu = -i\mu_\nu$, и $U(x, \lambda)$ дают следующее разложение δ-функции:

$$\delta(x-y) \cdot I = \sum_{\nu=1}^{p} U(x, \lambda_\nu) U^*(y, \lambda_\nu) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty U(x, \lambda) U^*(y, \lambda)\, d\lambda,$$

равносильное равенству Парсеваля.

Если матрица $S(\lambda)$, кроме условия I_s, удовлетворяет также условию III_s, то матрицы $U(x, \lambda_\nu)$ и $U(x, \lambda)$ являются решениями уравнения (5) с эрмитовой потенциальной матрицей

$$V(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x),$$

удовлетворяющей при любом $\varepsilon > 0$ неравенству

$$\int_\varepsilon^\infty x |V(x)|\, dx < \infty.$$

Если, сверх того, выполнено и условие IV, то матрица $V(x)$ удовлетворяет этому неравенству при $\varepsilon = 0$, т. е. удовлетворяет условию (3). (Заметим, что если условие IV не выполнено, то $V(x)$, вообще говоря, не будет удовлетворять неравенству (3)).

Эти результаты составляют содержание § 6.

Свойства I_s, III_s и IV в общем случае недостаточны для выполнения граничного условия (2), т. е. матрицы $U(x, \lambda_\nu)$ и $U(x, \lambda)$ могут не исчезать при $x = 0$.

В § 7 доказывается, что выполнение граничного условия (2) на дискретном спектре, т. е. равенство

$$U(0, \lambda_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1,2, \ldots p),$$

обеспечивается свойствами I_s, IV и V; если, кроме того, имеет место свойство II_s, то граничное условие выполняется и на непрерывном спектре, т. е.

$$U(0, \lambda) = 0 \qquad (0 < \lambda < \infty).$$

Этим и завершается доказательство достаточности свойств I_s, II_s, III_s, IV, V, а вместе с тем получаем полный ответ и на второй из поставленных выше вопросов.

В § 7 попутно доказывается также, что свойства I_s, II_s и III_s необходимы и достаточны для того, чтобы унитарная матрица $S(\lambda)$ была матрицей рассеяния некоторой граничной задачи (1) — (2) с эрмитовым потенциалом, удовлетворяющим условию (3). Иными словами, если задана унитарная матрица $S(\lambda)$, обладающая тремя указанными свойствами, то всегда можно найти такие числа $\mu_\nu > 0$ и эрмитовы матрицы M_ν $(\nu = 1,2, \ldots p)$, которые совместно с матрицей $S(\lambda)$ будут удовлетворять всем условиям I_s, II_s, III_s, IV и V.

В ходе исследования (§ 3 и 6) нами получены следующие неравенства:

$$|V(x) - 4F'(2x)| \leq C_1 \cdot \left\{\int\limits_x^\infty |V(s)|\,ds\right\}^2,$$

$$|V(x) - 4F'(2x)| \leq C_2 \cdot \left\{\int\limits_x^\infty |F'(2s)|\,ds\right\}^2.$$

Эти неравенства показывают, что в существенном поведение потенциальной матрицы $V(x)$ вблизи нуля и на бесконечности такое же, как и матрицы $F'(2x)$.

Относительно фактического решения основного уравнения (9) заметим следующее. Если элементы матрицы $S(\lambda)$ — рациональные функции, то ядро основного уравнения $F(t+y)$ вырождено и уравнение решается элементарно. Очевидно также, что основное уравнение (9) при больших x всегда можно решить методом последовательных приближений.

В § 4 (теорема 4.2) доказывается следующий более глубокий факт.

Если дискретный спектр отсутствует, т. е. все $M_\nu = 0$, то основное уравнение (9) решается методом последовательных приближений при всех $x > 0$.

Как известно [2], общий случай можно свести к случаю, когда дискретного спектра нет. Поэтому решение основного уравнения всегда можно свести к решению двух вспомогательных уравнений, одно из которых допускает применение метода последовательных приближений, а другое — вырождено.

Указанные выше пять свойств, характеризующих данные рассеяния граничной задачи рассматриваемого нами вида, как легко показать (§ 8), независимы одно от другого. Однако, их можно заменить другой системой характеристических свойств, которая в некоторых случаях может оказаться предпочтительнее. Этому вопросу посвящено приложение II.

При некоторых дополнительных предположениях там выведена формула

$$m_+ - m_- = \frac{1}{2\pi}[\eta(0) - \eta(+\infty)] - \frac{1}{2}q, \tag{13}$$

где m_- и m_+ число линейно независимых решений, соответственно, уравнений (11) и (12), $i\eta(\lambda) = \ln[\det S(\lambda)]$, q — ранг матрицы $I - S(0)$. Эта формула заведомо верна, если потенциал $V(x)$, кроме условия (3), удовлетворяет еще неравенству

$$\int\limits_0^\infty x^2 |v_{\alpha\beta}(x)|\,dx < \infty \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n). \tag{14}$$

Если в этом случае сумма рангов r матриц M_ν $(\nu = 1, 2, \ldots p)$ равна

$$r = \frac{1}{2\pi}[\eta(0) - \eta(+\infty)] - \frac{1}{2}q, \tag{15}$$

то свойства II_s и V вытекают из свойства IV, а значит их можно заменить формулой (15).

Следует заметить, что доказательства почти всех теорем значительно упростились бы, если бы мы предположили, что потенциал $V(x)$ удовлетворяет одновременно условиям (3) и (14). Это замечание относится и к тому случаю, когда потенциал удовлетворяет только условию (3), но отсутствует виртуальный уровень, т. е. при $\lambda = 0$ система (1) не имеет нетривиальных ограниченных решений, удовлетворяющих условию (2).

С другой стороны, некоторые теоремы можно было бы доказать при менее жестких, чем (3) (соответственно III_s), требованиях. Не желая усложнять изложение, мы не пошли по этому пути. По той же причине мы в анализе граничной задачи (§ 1, 2, 3) предполагаем потенциал вещественным и непрерывным при $x > 0$. Случай любого комплексного эрмитова потенциала, удовлетворяющего условию (3), не представляет ничего принципиально нового, но потребовал бы некоторых дополнительных рассмотрений *.

§ 1. СПЕЦИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ. ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Некоторые предварительные сведения и обозначения

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$y''_\alpha + \lambda^2 y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} v_{\alpha\beta}(x)\, y_\beta \qquad (\alpha = 1,2, \ldots n), \tag{1.1}$$

где матрица

$$V(x) = \| v_{\alpha\beta}(x) \|_1^n$$

(потенциальная матрица) вещественна, непрерывна ** и симметрична при всех x из интервала $0 < x < \infty$, λ произвольный параметр.

Каждые n векторов-решений этой системы можно представить в виде квадратной матрицы n-го порядка $Y(x, \lambda)$, которая будет удовлетворять уравнению

$$Y'' + \lambda^2 Y = V(x) \cdot Y. \tag{1.2}$$

Ясно, что и наоборот — столбцы любой матрицы-решения уравнения (1.2) дают решения системы (1.1).

Это позволяет вместо системы (1.1) рассматривать матричное дифференциальное уравнение (1.2), что оказывается более удобным.

Условимся называть абсолютной величиной матрицы $A = \| a_{\alpha\beta} \|$ и обозначать символом $|A|$ неотрицательное число

$$|A| = \max_\alpha \sum_\beta |a_{\alpha\beta}|. \tag{1.3}$$

Легко проверить, что для любых двух матриц A и B (для которых имеют смысл операции сложения и умножения) справедливы неравенства

$$|A+B| \leqslant |A| + |B|,$$
$$|AB| \leqslant |A| \cdot |B|$$

и что для любой суммируемой в промежутке (a, b) матрицы-функции $A(x)$

$$\left| \int_a^b A(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |A(x)|\, dx.$$

---

* *Примечание при корректуре.* Настоящая статья была сдана в редакцию в январе 1957 года. Впоследствии, отправляясь от результатов этой работы, авторы провели аналогичное исследование в случае, когда потенциал имеет вблизи нуля и на бесконечности особенность порядка $\frac{1}{x^2}$. Краткое изложение этих результатов опубликовано в ДАН СССР, 118, № 6, 1055 (1958), а подробному изложению всего круга вопросов посвящена монография «Обратная задача теории рассеяния», находящаяся в печати (10.4 1960 г.).

** Непрерывность матрицы означает, что все ее элементы являются непрерывными функциями. В этом же смысле мы будем говорить о суммируемости, дифференцируемости, регулярности и т. д. матрицы-функции.

Мы будем в дальнейшем предполагать, что потенциальная матрица $V(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty x\,|V(x)|\,dx < \infty, \tag{1.4}$$

и будем систематически пользоваться обозначениями

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \int_x^\infty |V(s)|\,ds \qquad (x > 0), \\ \sigma_1(x) &= \int_x^\infty s\,|V(s)|\,ds \qquad (x \geqslant 0). \end{aligned} \tag{1.5}$$

2. Специальное решение

Теорема* * *1. 1. *Если выполнено условие* (1.4), *то уравнение* (1.2) *имеет решение* $\mathcal{E}(x, \lambda)$, *представимое в виде*

$$\mathcal{E}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} I + \int_x^\infty K(x, t)\, e^{-i\lambda t}\, dt, \quad \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0, \tag{1.6}$$

где I — *единичная матрица, а матрица* $K(x, t)$ *непрерывна в области* $0 < x \leqslant t < \infty$ *и удовлетворяет неравенству*

$$|K(x, t)| \leqslant \frac{1}{2} e^{\sigma_1(x)} \cdot \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right), \tag{1.7}$$

из которого следует, что

$$\int_x^\infty |K(x, t)|\,dt < \infty \quad \text{при любом } x \geqslant 0, \tag{1.8}$$

$$\int_0^\infty \int_x^\infty |K(x, t)|^2\, dt\, dx < \infty. \tag{1.9}$$

При каждом $x \geqslant 0$ *матрица* $\mathcal{E}(x, \lambda)$ *регулярна в полуплоскости* $\operatorname{Im}\lambda < 0$ *и непрерывна там вплоть до вещественной оси.*

Доказательство. Заметив, что из равенства (1.6) следует

$$\lim_{x \to +\infty} e^{i\lambda x} \mathcal{E}(x, \lambda) = I, \tag{1.10}$$

рассмотрим интегральное уравнение

$$\mathcal{E}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} I + \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} V(t)\, \mathcal{E}(t, \lambda)\, dt, \tag{1.11}$$

равносильное дифференциальному уравнению (1.2) с граничным условием (1.10).

* Для справедливости этой теоремы вещественность и симметричность матрицы $V(x)$ не требуется.

Для скалярного уравнения $y'' + \lambda^2 y = v(x)\, y$ аналогичная теорема впервые доказана Б. Я. Левиным [6] при более жестком, чем (1.4), условии

$$\int_0^\infty (1 + x^2)\, |v(x)|\, dx < \infty.$$

Наше доказательство отличается от доказательства Б. Я. Левина.

Будем формально искать решение уравнения (1.11) в виде (1.6). Подставляя в (1.11) вместо $\mathcal{E}(x, \lambda)$ его выражение (1.6), получим

$$\int_x^\infty K(x, s)\, e^{-i\lambda s} ds = \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} e^{-i\lambda t} V(t)\, dt +$$

$$+ \int_x^\infty V(t)\, dt \int_t^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} e^{-i\lambda u} K(t, u)\, du = J_1 + J_2. \tag{1.12}$$

Преобразуем интегралы в правой части этого равенства, воспользовавшись тем, что

$$\frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} e^{-i\lambda t} = \frac{e^{-i\lambda(2t-x)} - e^{-i\lambda x}}{-2i\lambda} = \frac{1}{2}\int_x^{2t-x} e^{-i\lambda s}\, ds,$$

$$\frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} e^{-i\lambda u} = \frac{e^{-i\lambda(u+t-x)} - e^{-i\lambda(u+x-t)}}{-2i\lambda} = \frac{1}{2}\int_{u+x-t}^{u+t-x} e^{-i\lambda s}\, ds,$$

и изменяя в них порядок интегрирования.

Получим

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_x^\infty V(t)\, dt \int_x^{2t-x} e^{-i\lambda s}\, ds = \int_x^\infty e^{-i\lambda s}\left[\frac{1}{2}\int_{\frac{x+s}{2}}^\infty V(t)\, dt\right] ds;$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\int_x^\infty V(t)\, dt \int_t^\infty K(t, u)\, du \int_{u+x-t}^{u+t-x} e^{-i\lambda s}\, ds = \tag{1.13}$$

$$= \int_x^\infty e^{-i\lambda s}\left[\frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+s}{2}} V(t)\, dt \int_{s+x-t}^{s+t-x} K(t, u)\, du + \frac{1}{2}\int_{\frac{x+s}{2}}^\infty V(t)\, dt \int_t^{s+t-x} K(t, u)\, du\right] ds.$$

Заметим, что законность перестановки порядка интегрирования в интеграле J_1 легко доказывается с помощью условия (1.4); что касается интеграла J_2, то в нем эта операция произведена формально и ее законность будет обоснована позже.

Подставив найденные для J_1 и J_2 выражения в равенство (1.12) и воспользовавшись единственностью разложения в интеграл Фурье, получаем следующее интегральное уравнение для матрицы-функции $K(x, s)$:

$$K(x, s) = \frac{1}{2}\int_{\frac{x+s}{2}}^\infty V(t)\, dt + \frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+s}{2}} V(t)\, dt \int_{s+x-t}^{s+t-x} K(t,u)\, du +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\frac{x+s}{2}}^\infty V(t) dt \int_t^{s+t-x} K(t, u)\, du. \qquad (0 \leqslant x \leqslant s) \tag{1.14}$$

Покажем, что это уравнение имеет решение, которое может быть получено методом последовательных приближений. С этой целью положим

$$K_0(x, s) = \frac{1}{2}\int_{\frac{x+s}{2}}^{\infty} V(t)\,dt,$$

$$\begin{aligned} K_n(x, s) = K_0(x, s) + \frac{1}{2}\int_{x}^{\frac{x+s}{2}} V(t)\,dt \int_{s+x-t}^{s+t-x} K_{n-1}(t, u)\,du + \\ + \frac{1}{2}\int_{\frac{x+s}{2}}^{\infty} V(t)\,dt \int_{t}^{s+t-x} K_{n-1}(t, u)\,du \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Используя обозначения (1.5), получаем следующие оценки:

$$|K_0(x, s)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{\frac{x+s}{2}}^{\infty} \left|V(t)\right| dt = \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+s}{2}\right);$$

$$|K_1(x, s) - K_0(x, s)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{x}^{\frac{x+s}{2}} |V(t)|\,dt \int_{s+x-t}^{s+t-x} \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{t+u}{2}\right) du +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\frac{x+s}{2}}^{\infty} |V(t)|\,dt \int_{t}^{s+t-x} \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{t+u}{2}\right) du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+s}{2}\right)\int_{x}^{\infty} t\,|V(t)|\,dt = \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+s}{2}\right)\cdot \sigma_1(x)$$

и затем по индукции

$$|K_n(x, s) - K_{n-1}(x, s)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+s}{2}\right)\cdot \frac{\sigma_1^n(x)}{n!}. \tag{1.16}$$

Действительно, полагая неравенство (1.16) доказанным, будем иметь

$$|K_{n+1}(x, s) - K_n(x, s)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{x}^{\frac{x+s}{2}} |V(t)|\,dt \int_{s+x-t}^{s+t-x} \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{t+u}{2}\right)\frac{\sigma_1^n(t)}{n!}\,du +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\frac{x+s}{2}}^{\infty} |V(t)|\,dt \int_{t}^{s+t-x} \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{t+u}{2}\right)\frac{\sigma_1^n(t)}{n!}\,du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+s}{2}\right)\int_{x}^{\infty} t\,|V(t)|\,\frac{\sigma_1^n(t)}{n!}\,dt = \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+s}{2}\right)\frac{\sigma_1^{n+1}(x)}{(n+1)!}.$$

Таким образом, оценка (1.16) справедлива при всех $n = 1, 2, 3, \ldots$

Из этих оценок и из неравенства (1.4) следует, что ряд

$$K_0(x, s) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[K_n(x, s) - K_{n-1}(x, s)\right]$$

равномерно сходится в области $0 < a \leqslant x \leqslant s$ при любом заданном $a > 0$. Обозначая его сумму через $K(x, s)$, имеем

$$\lim_{n \to \infty} K_n(x, s) = K(x, s)$$

равномерно в указанной выше области и, переходя к пределу в равенстве (1.15), находим, что эта функция $K(x, s)$ является решением интегрального уравнения (1.14).

Из неравенства (1.16) следует далее, что

$$|K(x, s)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+s}{2}\right)e^{\sigma_1(x)} \tag{1.7}$$

и тем более,

$$|K(x, s)| \leqslant C\sigma\left(\frac{x+s}{2}\right), \tag{1.17}$$

где $C = \frac{1}{2}e^{\sigma_1(0)}$.

Используя эту оценку, а также то, что при любом $x \geqslant 0$

$$\int_x^\infty \sigma(u)\,du = \int_x^\infty du \int_u^\infty |V(t)|\,dt = \int_x^\infty |V(t)|\,dt \int_x^t du =$$

$$= \int_x^\infty (t - x)\,|V(t)|\,dt \leqslant \sigma_1(x),$$

находим

$$\int_x^\infty |K(x, s)|\,ds \leqslant C\int_x^\infty \sigma\left(\frac{x+s}{2}\right)ds = 2C\int_x^\infty \sigma(u)\,du \leqslant 2C\sigma_1(x) \tag{1.18}$$

и, значит, при любом $x \geqslant 0$

$$\int_x^\infty |K(x, s)|\,ds < \infty; \tag{1.8}$$

$$\int_x^\infty |K(x, s)|^2\,ds \leqslant C^2\int_x^\infty \sigma^2\left(\frac{x+s}{2}\right)ds \leqslant 2C^2\sigma(x)\int_x^\infty \sigma(u)\,du \leqslant$$

$$\leqslant 2C^2\sigma_1(x)\,\sigma(x) \leqslant C_1\sigma(x),$$

где $C_1 = 2C^2\sigma_1(0)$, и следовательно,

$$\int_0^\infty dx \int_x^\infty |K(x, s)|^2\,ds \leqslant C_1\int_0^\infty \sigma(x)\,dx = C_1\sigma_1(0) < \infty. \tag{1.9}$$

С помощью неравенства (1.18) можно теперь оправдать перестановку порядка интегрирования в интеграле J_2 (см. (1.13)). Действительно, мы вправе применить здесь теорему Фубини, ибо

$$\int_x^\infty t\,|V(t)|\,dt \int_x^\infty |K(t, u)|\,du \leqslant 2C\int_x^\infty t\,|V(t)| \cdot \sigma_1(t)\,dt = C\sigma_1^2(x) < \infty.$$

Тем самым доказано, что формула (1.6) с ядром $K(x, t)$, удовлетворяющим уравнению (1.14), дает решение уравнения (1.2). Из представления (1.6) и неравенства (1.8) очевидным образом следует, что матрица $\mathscr{E}(x, \lambda)$ при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda < 0$ и непрерывна там вплоть до вещественной оси.

Замечание 1. Доказанная теорема может быть, как легко видеть, обобщена на случай когда выполнено более слабое, чем (1.4), условие

$$\int_\varepsilon^\infty x\,|V(x)|\,dx < \infty \quad \text{при всяком } \varepsilon > 0. \tag{1.4'}$$

В этом случае матрица $K(x, t)$, определяемая уравнением (1.14), будет удовлетворять условию (1.8) при всяком $x > 0$ и условию

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\int\limits_{x}^{\infty} |K(x, t)|^2 \, dt \, dx < \infty \quad \text{при всяком } \varepsilon > 0, \tag{1.9'}$$

а указанные в теореме аналитические свойства $\mathcal{E}(x, \lambda)$ как функции от λ, будут иметь место при всяком $x > 0$.

Замечание 2. Из уравнения (1.14) усматриваем, что матрица $K(x, s)$ имеет непрерывные частные производные по каждому из аргументов, причем

$$K'_x(x, s) = -\frac{1}{4} V\left(\frac{x+s}{2}\right) - \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\frac{x+s}{2}} V(t) K(t, s+x-t)\, dt - \\ -\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\infty} V(t) K(t, s+t-x)\, dt \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant s, \\ x+s > 0 \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

и для $K'_s(x, s)$ имеем аналогичное равенство.

Из (1.19) с помощью оценки (1.17) получаем

$$|K'_x(x, s)| \leqslant \frac{1}{4}\left|V\left(\frac{x+s}{2}\right)\right| + \frac{1}{2} C\sigma\left(\frac{x+s}{2}\right)\int\limits_{x}^{\frac{x+s}{2}} |V(t)|\, dt + \\ + \frac{1}{2} C \int\limits_{x}^{\infty} |V(t)|\, \sigma\left(\frac{2t+s-x}{2}\right) dt \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{4}\left|V\left(\frac{x+s}{2}\right)\right| + C\sigma\left(\frac{x+s}{2}\right)\sigma(x). \tag{1.20}$$

В случае, когда $V(x)$ дифференцируема, матрица $K(x, s)$ имеет вторые частные производные и из (1.14) можно получить для $K(x, s)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial x^2} - V(x) K(x, s) = \frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial s^2}. \tag{1.21}$$

Непосредственно из (1.14) следует еще важное для дальнейшего равенство

$$K(x, x) = \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\infty} V(t)\, dt. \tag{1.22}$$

Легко проверить, что обратно, если матрица $K(x, s)$ удовлетворяет уравнению (1.21), равенству (1.22) и условию на бесконечности

$$\lim_{x+s\to\infty} K'_x(x, s) = \lim_{x+s\to\infty} K'_s(x, s) = 0, \tag{1.23}$$

то она является решением уравнения (1.14) и, следовательно, построенная по ней с помощью формулы (1.6) матрица $\mathcal{E}(x, \lambda)$ дает решение уравнения (1,2) с $V(x) = -2\frac{d}{dx} K(x, x)$.

3. Фундаментальная система решений

Заменяя в правой части (1.6) λ на $-\lambda$, очевидно, получим второе решение уравнения (1.2)

$$\mathcal{E}(x, -\lambda) = e^{i\lambda x} \cdot I + \int\limits_{x}^{\infty} K(x, t) e^{i\lambda t}\, dt, \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0, \tag{1.24}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-i\lambda x}\cdot \mathscr{E}(x,-\lambda)=I. \tag{1.25}$$

При каждом $x\geqslant 0$ матрица $\mathscr{E}(x,-\lambda)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>0$ и непрерывна там вплоть до вещественной оси.

Для производных по x от матриц $\mathscr{E}(x,\lambda)$ и $\mathscr{E}(x,-\lambda)$ справедливы следующие асимптотические равенства:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} e^{i\lambda x}\,\mathscr{E}'(x,\lambda)&=-i\lambda\cdot I \qquad (\operatorname{Im}\lambda\leqslant 0),\\ \lim_{x\to+\infty} e^{-i\lambda x}\,\mathscr{E}'(x,-\lambda)&=i\lambda\cdot I \qquad (\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0).\end{aligned} \tag{1.26}$$

Действительно, дифференцируя (1.6), получаем

$$\mathscr{E}'(x,\lambda)=-i\lambda e^{-i\lambda x}\cdot I-K(x,x)\,e^{-i\lambda x}+\int_x^\infty K'_x(x,t)\,e^{-i\lambda t}\,dt=$$

$$=e^{-i\lambda x}\left\{-i\lambda\cdot I-K(x,x)+\int_x^\infty K'_x(x,t)\,e^{-i\lambda(t-x)}dt\right\}.$$

Но, в силу оценок (1.17) и (1.20), матрица

$$-K(x,x)+\int_x^\infty K'_x(x,t)\,e^{-i\lambda(t-x)}\,dt \qquad (\operatorname{Im}\lambda\leqslant 0),$$

как легко видеть, стремится к нулю при $x\to+\infty$, что доказывает справедливость первого из равенств (1.26). Второе равенство (1.26) доказывается аналогично.

Заметим еще, что при вещественных λ

$$\mathscr{E}(x,-\lambda)=\overline{\mathscr{E}(x,\lambda)} \qquad (\operatorname{Im}\lambda=0). \tag{1.27}$$

Лемма I. I. *При вещественном* $\lambda\neq 0$ матрицы $\mathscr{E}(x,\lambda)$ и $\mathscr{E}(x,-\lambda)$ *образуют фундаментальную систему решений уравнения* (1.2).

Доказательство. Так как потенциальная матрица $V(x)$ в уравнении (1.2) симметрическая, то вронскиан любых двух решений $Y(x)$ и $Z(x)$ этого уравнения, т. е. выражение

$$\mathrm{W}\{Y,Z\}=Z'_t(x)\cdot Y(x)-Z_t(x)\cdot Y'(x) \tag{1.28}$$

(индексом t обозначена операция транспонирования) не зависит от x.

В частности, имеем

$$W\{\mathscr{E}(x,\lambda),\ \mathscr{E}(x,\lambda)\}=0,\quad W\{\mathscr{E}(x,-\lambda),\ \mathscr{E}(x,-\lambda)\}=0 \tag{1.29}$$

(соответственно при $\operatorname{Im}\lambda\leqslant 0$ и $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$) и

$$W\{\mathscr{E}(x,\lambda),\ \mathscr{E}(x,-\lambda)\}=2i\lambda\cdot I \qquad (\operatorname{Im}\lambda=0), \tag{1.30}$$

так как, в силу асимптотических соотношений (1.10), (1.25) и (1.26), эти равенства выполняются при $x\to\infty$.

Если теперь $Y(x,\lambda)$ решение уравнения (1.2) при вещественном $\lambda\neq 0$, удовлетворяющее произвольно заданным начальным условиям

$$Y(x_0,\lambda)=Y_0,\quad Y'(x_0,\lambda)=Y'_0 \qquad (x_0>0),$$

то, отыскивая его в виде

$$Y(x,\lambda)=\mathscr{E}(x,\lambda)\,A+\mathscr{E}(x,-\lambda)\,B$$

и используя при этом равенства (1.29) и (1.30), найдем

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2i\lambda}\left[\mathscr{E}'_t(x_0,-\lambda)\cdot Y_0-\mathscr{E}_t(x_0,-\lambda)\cdot Y'_0\right],\\ B&=\frac{-1}{2i\lambda}\left[\mathscr{E}'_t(x_0,\lambda)\cdot Y_0-\mathscr{E}_t(x_0,\lambda)\cdot Y'_0\right],\end{aligned} \tag{1.31}$$

и лемма, таким образом, доказана.

Лемма I. 2. *При всяком λ из нижней полуплоскости* ($\operatorname{Im}\lambda < 0$) *существует матрица-решение $\mathscr{E}_1(x, \lambda)$ уравнения* (1.2), *удовлетворяющая условиям*

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} e^{-i\lambda x}\,\mathscr{E}_1(x,\lambda) = I \\ &\lim_{x\to+\infty} e^{-i\lambda x}\mathscr{E}_1'(x,\lambda) = i\lambda\cdot I. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Матрицы $\mathscr{E}(x, \lambda)$ и $\mathscr{E}_1(x, \lambda)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.2).

Доказательство. Будем отыскивать решение $\mathscr{E}_1(x, \lambda)$ в виде

$$\mathscr{E}_1(x, \lambda) = \mathscr{E}(x, \lambda)\,Z(x, \lambda).$$

Подставляя это выражение в (1.2), получим для неизвестной матрицы $Z(x, \lambda)$ уравнение

$$2\mathscr{E}'(x, \lambda)\,Z'(x, \lambda) + \mathscr{E}(x, \lambda)\,Z''(x, \lambda) = 0,$$

или после умножения слева на $\mathscr{E}_t(x, \lambda)$

$$2\mathscr{E}_t(x, \lambda)\,\mathscr{E}'(x, \lambda)\,Z'(x, \lambda) + \mathscr{E}_t(x, \lambda)\,\mathscr{E}(x, \lambda)\,Z''(x, \lambda) = 0.$$

Это уравнение можно записать в виде

$$[\mathscr{E}_t(x, \lambda)\,\mathscr{E}(x, \lambda)]'\cdot Z'(x, \lambda) + \mathscr{E}_t(x, \lambda)\,\mathscr{E}(x, \lambda)\,Z''(x, \lambda) = 0,$$

то есть

$$[\mathscr{E}_t(x, \lambda)\,\mathscr{E}(x, \lambda)\,Z'(x, \lambda)]' = 0, \tag{1.33}$$

так как, в силу (1.29),

$$\begin{aligned}[\mathscr{E}_t(x, \lambda)\,\mathscr{E}(x, \lambda)]' &= \mathscr{E}_t'(x, \lambda)\,\mathscr{E}(x, \lambda) + \mathscr{E}_t(x, \lambda)\,\mathscr{E}'(x, \lambda) = \\ &= 2\mathscr{E}_t(x, \lambda)\,\mathscr{E}'(x, \lambda).\end{aligned}$$

Из (1.33) следует, что $\mathscr{E}_t(x, \lambda)\,\mathscr{E}(x, \lambda)\,Z'(x, \lambda)$ есть постоянная (относительно x) матрица и мы положим

$$\mathscr{E}_t(x, \lambda)\,\mathscr{E}(x, \lambda)\,Z'(x, \lambda) = 2i\lambda\cdot I.$$

Заметив еще, что, согласно (1.10), матрица $\mathscr{E}(x, \lambda)$ при всех достаточно больших $x \geqslant a$ является неособенной, находим

$$Z(x, \lambda) = 2i\lambda\int_a^x [\mathscr{E}_t(s, \lambda)\,\mathscr{E}(s, \lambda)]^{-1}\,ds,$$

и, следовательно,

$$\mathscr{E}_1(x, \lambda) = 2i\lambda\,\mathscr{E}(x, \lambda)\int_a^x [\mathscr{E}_t(s, \lambda)\,\mathscr{E}(s, \lambda)]^{-1}\,ds. \tag{1.34}$$

Этой формулой решение $\mathscr{E}_1(x, \lambda)$ определено при $x \geqslant a$; его продолжение на интервал $0 < x < a$ производится, как обычно, с помощью начальных условий при $x = a$.

Покажем, что определенная формулой (1.34) матрица $\mathscr{E}_1(x, \lambda)$ удовлетворяет условиям (1.32). Из (1.10) следует, что

$$\mathscr{E}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x}\,[I + O_1(x, \lambda)]$$

и, значит,

$$[\mathscr{E}_t(x, \lambda)\,\mathscr{E}(x, \lambda)]^{-1} = e^{2i\lambda x}\,[I + O_2(x, \lambda)],$$

где $O_1(x, \lambda)$, $O_2(x, \lambda)$ — матрицы, все элементы которых стремятся к нулю при $x \to +\infty$. В силу этого имеем при $a \leqslant N \leqslant x$

$$\left|2i\lambda e^{-2i\lambda x}\int_a^x [\mathscr{E}_t(s, \lambda)\,\mathscr{E}(s, \lambda)]^{-1}\,ds - I\right| =$$

$$= \left|2i\lambda e^{-2i\lambda x}\int_a^x e^{2i\lambda s}[I + O_2(s, \lambda)]\,ds - I\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|e^{-2i\lambda(x-a)}I\right| + \left|2i\lambda e^{-2i\lambda x}\int_a^N e^{2i\lambda s}\,O_2(s, \lambda)\,ds\right| +$$

$$+ \left|2i\lambda e^{-2i\lambda x}\int_N^x e^{2i\lambda s}O_2(s, \lambda)\,ds\right| \leqslant e^{-2|\operatorname{Im}\lambda|(x-a)} +$$

$$+ 2|\lambda|\,e^{-2|\operatorname{Im}\lambda|x}\int_a^N e^{2|\operatorname{Im}\lambda|s}\,|O_2(s, \lambda)|\,ds +$$

$$+ 2|\lambda|\,e^{-2|\operatorname{Im}\lambda|x}\int_N^x e^{2|\operatorname{Im}\lambda|s}\,|O_2(s, \lambda)|\,ds.$$

Правую часть этого неравенства, как легко видеть, можно сделать меньше любого $\varepsilon > 0$, если взять сначала достаточно большое N, а затем при фиксированном N взять достаточно большое $x > N$. Это означает, что

$$\lim_{x\to+\infty} 2i\lambda e^{-2i\lambda x}\int_a^x [\mathscr{E}_t(s, \lambda)\,\mathscr{E}(s, \lambda)]^{-1}\,ds = I,$$

а отсюда и из (1.10) следует, согласно формуле (1.34), первое из равенств (1.32). Используя еще соотношение (1.26), получим второе из равенств (1.32), так как при $x \geqslant a$

$$\mathscr{E}_1'(x, \lambda) = 2i\lambda\mathscr{E}'(x, \lambda)\int_a^x [\mathscr{E}_t(s, \lambda)\,\mathscr{E}(s, \lambda)]^{-1}\,ds +$$

$$+ 2i\lambda\mathscr{E}(x, \lambda)\,[\mathscr{E}_t(x, \lambda)\cdot\mathscr{E}(x, \lambda)]^{-1}.$$

Доказательство того, что матрицы $\mathscr{E}(x, \lambda)$ и $\mathscr{E}_1(x, \lambda)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.2), проводится так же, как и доказательство леммы 1.1.

Замечание 1. Столбцы матриц $\mathscr{E}(x, \lambda)$ и $\mathscr{E}_1(x, \lambda)$ при каждом λ, $\operatorname{Im}\lambda < 0$, образуют, очевидно, фундаментальную систему решений системы (1.1). Отсюда вытекает, что любое решение системы (1.1) с суммируемыми в промежутке $(0, \infty)$ квадратами компонент имеет вид $\mathscr{E}(x, \lambda)\,a$, где a — некоторый постоянный вектор, $\operatorname{Im}\lambda < 0$.

Замечание 2. При $\lambda = 0$ уравнение (1.2) имеет одним из своих решений матрицу $\mathscr{E}(x, 0)$, которая согласно (1.6), удовлетворяет асимптотическим равенствам

$$\lim_{x\to+\infty}\mathscr{E}(x, 0) = I, \quad \lim_{x\to+\infty}\mathscr{E}'(x, 0) = 0.$$

Применяя тот же прием, что и в лемме 1.2, можно с помощью $\mathscr{E}(x, 0)$ построить другое решение $\mathscr{E}_1(x, 0)$ уравнения (1.2) с $\lambda = 0$, которое удовлетворяет при $x \to +\infty$ равенствам

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\mathscr{E}_1(x, 0) = I, \quad \lim_{x\to+\infty}\mathscr{E}_1'(x, 0) = I.$$

4. Операторы преобразования.

Обозначим через $\mathbf{L}_n^p(0, \infty)$, $p = 1, 2, \infty$, линейное нормированное пространство всех квадратных матриц-функций $\Phi(x)$ порядка n с суммируемой в промежутке $(0, \infty)$ p-ой степенью абсолютной величины и нормой

$$\|\Phi\|_p = \left\{\int_0^\infty |\Phi(x)|^p\, dx\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (p = 1,2),$$

$$\|\Phi\|_\infty = \operatorname*{vrai\,max}_{0 \leqslant x < \infty} |\Phi(x)| \qquad (p = \infty).$$

В каждом из пространств $\mathbf{L}_n^p(0, \infty)$, $p = 1, 2, \infty$, будем рассматривать операторы Вольтерра вида

$$W[\Phi] = \Phi(x) + \int_x^\infty A(x, y)\,\Phi(y)\,dy,$$

где $A(x, y)$ квадратная матрица-функция n-го порядка.

Лемма 1.3. *Пусть матрица $A(x, y)$ удовлетворяет условию*

$$|A(x, y)| \leqslant \alpha(x+y), \qquad 0 < x \leqslant y, \tag{1.35}$$

где $\alpha(u)$ — невозрастающая функция, суммируемая в промежутке $(0, \infty)$. Тогда оператор

$$W[\Phi] = \Phi(x) + \int_x^\infty A(x, y)\,\Phi(y)\,dy \tag{1.36}$$

определен на всех матрицах-функциях, принадлежащих $\mathbf{L}_n^p(0, \infty)$, $p = 1, 2, \infty$, и отображает каждое из этих пространств на себя; существует обратный оператор W^{-1}, который также является оператором Вольтерра

$$W^{-1}[\Phi] = \Phi(x) + \int_x^\infty \widetilde{A}(x, y)\,\Phi(y)\,dy, \tag{1.37}$$

причем

$$|\widetilde{A}(x, y)| \leqslant c \cdot \alpha(x+y), \tag{1.38}$$

где $c = e^{\int_0^\infty \alpha(u)\,du}$.

Доказательство. Используя неравенство (1.35), находим:

$$\|W[\Phi]\|_1 \leqslant \|\Phi\|_1 + \left\|\int_x^\infty A(x, y)\,\Phi(y)\,dy\right\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \|\Phi\|_1 + \int_0^\infty \alpha(x)\left[\int_x^\infty |\Phi(y)|\,dy\right]dx \leqslant$$

$$\leqslant \|\Phi\|_1 \cdot \left\{1 + \int_0^\infty \alpha(x)\,dx\right\};$$

$$\|W[\Phi]\|_2 \leqslant \|\Phi\|_2 + \left\|\int_x^\infty A(x, y)\,\Phi(y)\,dy\right\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \|\Phi\|_2 + \|\Phi\|_2 \left\{\int_0^\infty dx \int_x^\infty \alpha^2(x+y)\,dy\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \| \Phi \|_2 \cdot \left\{1 + \int_0^\infty \alpha(x)\,dx\right\};$$

$$\| W[\Phi] \|_\infty \leqslant \| \Phi \|_\infty + \left\| \int_x^\infty A(x, y)\,\Phi(y)\,dy \right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \| \Phi \|_\infty \cdot \left\{1 + \max_{0 \leqslant x < \infty} \int_x^\infty \alpha(x+y)\,dy\right\} =$$

$$= \| \Phi \|_\infty \cdot \left\{1 + \int_0^\infty \alpha(y)\,dy\right\}.$$

Из этих оценок следует, что оператор W отображает каждое из пространств $\mathbf{L}_n^p(0, \infty)$, $p = 1, 2, \infty$, в себя.

Полагая теперь

$$W[\Phi] = \Psi(x) \tag{1.39}$$

и отыскивая $\Phi(x)$ из этого уравнения методом последовательных приближений, формально получим

$$\Phi(x) = \Psi(x) + \int_x^\infty \widetilde{A}(x, y)\,\Psi(y)\,dy, \tag{1.40}$$

где

$$\widetilde{A}(x, y) = \sum_{m=1}^\infty (-1)^m A_m(x, y),$$

$$A_1(x, y) = A(x, y), \quad A_m(x, y) = \int_x^y A(x, s)\,A_{m-1}(s, y)\,ds \qquad (m = 2, 3, \ldots)$$

Для повторных ядер имеем, в силу (1.35), следующие оценки:

$$|A_2(x, y)| \leqslant \int_x^y |A(x, s)| \cdot |A(s, y)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \alpha(x+y) \int_x^y \alpha(x+s)\,ds \leqslant \alpha(x+y) \int_x^\infty \alpha(s)\,ds;$$

$$|A_3(x, y)| \leqslant \int_x^y |A(x, s)| \cdot |A_2(s, y)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \alpha(x+y) \int_x^y \alpha(x+s) \left[\int_s^\infty \alpha(u)\,du\right] ds \leqslant \frac{\alpha(x+y)}{2} \left[\int_x^\infty \alpha(s)\,ds\right]^2$$

и вообще

$$|A_m(x, y)| \leqslant \frac{\alpha(x+y)}{(m-1)!} \left[\int_x^\infty \alpha(s)\,ds\right]^{m-1}, \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{1.41}$$

что доказывается методом индукции.

Из этих оценок следует, прежде всего, что ряд для $\widetilde{A}(x, y)$ сходится при $0 < x \leqslant y$ и что

$$|\widetilde{A}(x, y)| \leqslant \alpha(x+y)\, e^{\int_x^\infty \alpha(s)ds} \leqslant c \cdot \alpha(x+y),$$

где $c = e^{\int_0^\infty \alpha(s)ds}$.

Правая часть этого неравенства является, очевидно, мажорантой и для любой частичной суммы ряда, изображающего $\widetilde{A}(x, y)$, а так как

$$\int_x^\infty \alpha(x+y)\,|\Psi(y)|\,dy \leqslant \begin{cases} \alpha(2x)\,\|\Psi\|_1, \text{ если } \Psi(y) \in \mathbf{L}_n^1(0, \infty) \\ \sqrt{\alpha(2x)\int_0^\infty \alpha(u)\,du} \cdot \|\Psi\|_2, \text{ если } \Psi(y) \in \mathbf{L}_n^2(0, \infty) \\ \int_{2x}^\infty \alpha(u)\,du \cdot \|\Psi\|_\infty \text{ если } \Psi(y) \in \mathbf{L}_n^\infty(0, \infty), \end{cases}$$

то, в силу теоремы Лебега, при каждом фиксированном $x > 0$ и любой $\Psi(y) \in \mathbf{L}_n^p(0, \infty)$, $p = 1, 2, \infty$,

$$\int_x^\infty \widetilde{A}(x, y)\,\Psi(y)\,dy = \sum_{m=1}^\infty (-1)^m \int_x^\infty A_m(x, y)\,\Psi(y)\,dy.$$

Аналогично доказывается, что какова бы ни была матрица-функция $\Psi(y) \in \mathbf{L}_n^p(0, \infty)$, $p = 1, 2, \infty$, при каждом фиксированном $x > 0$

$$\int_x^\infty A(x, s)\,ds \int_s^\infty \widetilde{A}(s, y)\,\Psi(y)\,dy = \sum_{m=1}^\infty (-1)^m \int_x^\infty A(x, s)\,ds \int_s^\infty A_m(s, y)\,\Psi(y)\,dy.$$

Заметим, наконец, что в силу теоремы Фубини

$$\int_x^\infty A(x, s)\,ds \int_s^\infty A_m(s, y)\,\Psi(y)\,dy = \int_x^\infty \left[\int_x^y A(x, s)\,A_m(s, y)\,ds\right] \Psi(y)\,dy =$$

$$= \int_x^\infty A_{m+1}(x, y)\,\Psi(y)\,dy,$$

так как, если $x > 0$, то

$$\int_x^\infty |A(x, s)|\,ds \int_s^\infty |A_m(s, y)| \cdot |\Psi(y)|\,dy \leqslant$$

$$\leqslant c \int_x^\infty \alpha(x+s)\,ds \int_s^\infty \alpha(s+y)\,|\Psi(y)|\,dy < \infty$$

для любой $\Psi(y) \in \mathbf{L}_n^p(0, \infty)$, $p = 1, 2, \infty$.

Используя эти результаты, можем непосредственно проверить, что формула (1.40) действительно дает решение уравнения (1.39).

Тем самым доказано, что существует оператор W^{-1}, определенный на всех матрицах-функциях $\Phi(x)$, принадлежащих $\mathbf{L}_n^p(0, \infty)$, $p = 1, 2, \infty$, формулой (1.37). Так как ядро $\widetilde{A}(x, y)$ удовлетворяет неравенству (1.38), то в силу ранее доказанного оператор W^{-1} отображает каждое из пространств $\mathbf{L}_n^p(0, \infty)$, $p = 1, 2, \infty$, в себя, и лемма полностью доказана.

Вернемся теперь к рассмотрению матрицы $K(x, y)$, определяемой уравнением (1.14). Так как (см. (1.17)) для этой матрицы выполнено условие (1.35) с $\alpha(u) = C\sigma\left(\frac{u}{2}\right)$, то, в силу доказанной леммы, будем иметь два взаимно-обратных оператора Вольтерра

$$W[\Phi] = \Phi(x) + \int_x^\infty K(x, y)\,\Phi(y)\,dy, \tag{1.42}$$

$$W^{-1}[\Phi] = \Phi(x) + \int_x^\infty \tilde{K}(x, y)\Phi(y)\,dy, \tag{1.43}$$

отображающих на себя каждое из пространств $\mathbf{L}_n^p(0, \infty)$, $p = 1, 2, \infty$. Здесь

$$\tilde{K}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m K_m(x, y),$$

$$K_1(x, y) = K(x, y),\ K_m(x, y) = \int_x^y K(x, s)K_{m-1}(s, y)\,ds \qquad (m = 2, 3, \ldots)$$

и

$$|\tilde{K}(x, y)| \leqslant C_1\sigma\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

где C_1 — положительная постоянная.

Из самого определения матрицы $K(x, y)$ и результатов п. 3 следует, что оператор W преобразует любое принадлежащее $\mathbf{L}_n^p(0, \infty)$, $p = 1, 2, \infty$, решение $Y_0(x, \lambda)$ уравнения $Y'' + \lambda^2 Y = 0$ в решение $Y(x, \lambda)$ уравнения (1.2), принадлежащее тому же пространству $\mathbf{L}_n^p(0, \infty)$ и удовлетворяющее условию

$$\lim_{x\to+\infty}[Y(x, \lambda) - Y_0(x, \lambda)] = 0.$$

З а м е ч а н и е. Операторы преобразования (1.42) и (1.43) существуют и тогда, когда потенциальная матрица $V(x)$ удовлетворяет ослабленному условию

$$\int_\varepsilon^\infty x|V(x)|\,dx < \infty \text{ при любом } \varepsilon > 0, \tag{1.4'}$$

но в этом случае они отображают на себя каждое из пространств $L_n^p(\varepsilon, \infty)$, $p = 1, 2, \infty$, при всяком $\varepsilon > 0$. Определение пространств $L_n^p(\varepsilon, \infty)$ аналогично определению пространств $\mathbf{L}_n^p(0, \infty)$.

§ 2. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА

1. Решение, исчезающее при $x = 0$

Нас будет в дальнейшем интересовать граничная задача для системы (1.1):

$$\left.\begin{aligned} y_\alpha'' + \lambda^2 y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} v_{\alpha\beta}(x)\,y_\beta, \quad 0 \leqslant x < \infty \\ y_\alpha(0) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

В соответствии с этим мы введем в рассмотрение и обозначим через $G(x, \lambda)$ решение матричного уравнения (1.2)

$$Y'' + \lambda^2 Y = V(x)\cdot Y,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$G(0, \lambda) = 0, \quad G'(0, \lambda) = I. \tag{2.2}$$

В рассматриваемом нами случае, когда матрица $V(x) = \|v_{\alpha\beta}(x)\|$ удовлетворяет условию (1.4), такое решение $G(x, \lambda)$ существует и при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ является целой функцией от λ. Этот результат может быть без особого труда получен из интегрального уравнения

$$G(x, \lambda) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \cdot I + \int_0^x \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda} V(t)\, G(t, \lambda)\, dt, \tag{2.3}$$

равносильного дифференциальному уравнению (1.2) с начальными условиями (2.2).

Действительно, беря сначала $\operatorname{Im} \lambda \leqslant 0$ и полагая

$$Z(x, \lambda) = \frac{1}{x} e^{-i\lambda x} G(x, \lambda), \tag{2,4}$$

найдем из (2.3):

$$Z(x, \lambda) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda x} e^{-i\lambda x} \cdot I + \int_0^x \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda x} e^{-i\lambda(x-t)}\, tV(t)\, Z(t, \lambda)\, dt \tag{2.5}$$

Решение этого уравнения будем искать методом последовательных приближений в виде ряда

$$Z(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(x, \lambda), \tag{2.6}$$

где

$$Z_0(x, \lambda) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda x} e^{-i\lambda x} \cdot I,$$

$$Z_k(x, \lambda) = \int_0^x \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda x} e^{-i\lambda(x-t)} \cdot tV(t)\, Z_{k-1}(t, \lambda)\, dt.$$

$$(k = 1, 2, \ldots)$$

Так как при $\operatorname{Im} \lambda \leqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant x$

$$\left| \frac{\sin \lambda x}{\lambda x} e^{-i\lambda x} \right| = \left| \frac{1}{x} \int_0^x e^{-2i\lambda s}\, ds \right| \leqslant 1,$$

$$\left| \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda x} e^{-i\lambda (x-t)} \right| \leqslant 1 - \frac{t}{x} \leqslant 1,$$

то ряд (2.6) для $Z(x, \lambda)$ мажорируется рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k(x),$$

где

$$\zeta_0(x) = |I| = 1, \quad \zeta_k(x) = \int_0^x t\, |V(t)|\, \zeta_{k-1}(t)\, dt \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Этот последний ряд заведомо сходится (равномерно при $0 \leqslant x < \infty$), ибо, как легко видеть,

$$0 \leqslant \zeta_k(x) = \frac{1}{k!} \left[\int_0^x t\, |V(t)|\, dt \right]^k \leqslant \frac{1}{k!} \sigma_1^k(0)$$

$$\left(\sigma_1(0) = \int_0^{\infty} t\, |V(t)|\, dt\right).$$

Отсюда следует, что ряд (2.6) сходится равномерно в области $0 \leqslant x < \infty$, $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$, его сумма $Z(x,\lambda)$ является решением уравнения (2.5) и, очевидно, удовлетворяет неравенству

$$|Z(x,\lambda)| \leqslant e^{\sigma_1(0)} = C.$$

Но это означает, что матрица-функция

$$G(x,\lambda) = xe^{i\lambda x} Z(x,\lambda) \quad (\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0)$$

удовлетворяет уравнению (2.3) и неравенству

$$|e^{-i\lambda x} G(x,\lambda)| \leqslant Cx \qquad (x \geqslant 0, \quad \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0). \tag{2.7}$$

Из равномерной сходимости ряда (2.6) следует далее, что его сумма $Z(x,\lambda)$ (и, значит, матрица $G(x,\lambda)$) при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda < 0$ и непрерывна там вплоть до вещественной оси, так как этими свойствами обладают все члены ряда (2.6).

Аналогичным образом доказывается, что $G(x,\lambda)$ при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и непрерывна там вплоть до вещественной оси. Отсюда вытекает, что $G(x,\lambda)$ при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ является целой функцией от λ.

Нам понадобится в дальнейшем еще следующая

Лемма 2. 1. *При всех* $x \geqslant 0$ *и* $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$

$$|\lambda e^{-i\lambda x} G(x,\lambda)| \leqslant C_1, \tag{2.8}$$

где C_1 — *абсолютная постоянная.*

При каждом фиксированном $x \geqslant 0$ *и* $|\lambda| \to \infty$

$$|\lambda e^{-i\lambda x} G(x,\lambda) - \sin\lambda x \cdot e^{-i\lambda x} \cdot I| \to 0 \tag{2.9}$$

равномерно в области $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$.

Доказательство. Из равенства (2.3) имеем

$$\lambda e^{-i\lambda x} G(x,\lambda) = \sin\lambda x \cdot e^{-i\lambda x} \cdot I +$$
$$+ \int_0^x \sin\lambda(x-t)\, e^{-i\lambda(x-t)} V(t)\, [e^{-i\lambda t} G(t,\lambda)]\, dt, \tag{2.10}$$

а отсюда, в силу неравенств (2.7) и

$$|\sin\lambda x \cdot e^{-i\lambda x}| \leqslant 1 \qquad (\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0),$$

находим

$$|\lambda e^{-i\lambda x} G(x,\lambda)| \leqslant |I| + C\int_0^x t\,|V(t)|\,dt \leqslant 1 + C\sigma_1(0) = C_1,$$

т. е. неравенство (2.8).

Что касается соотношения (2.9), то при $x = 0$ оно тривиально. Если же $x > 0$, то беря $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$, $\sqrt{|\lambda|} > \frac{1}{x}$ и используя оценки (2.7), (2.8), найдем из (2.10)

$$|\lambda e^{-i\lambda x} G(x,\lambda) - \sin\lambda x \cdot e^{-i\lambda x} \cdot I| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}} |V(t)| \cdot |e^{-i\lambda t} G(t,\lambda)|\, dt + \frac{1}{|\lambda|} \int_{\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}}^x |V(t)| \cdot |\lambda e^{-i\lambda t} G(t,\lambda)|\, dt \leqslant$$
$$\leqslant C\int_0^{\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}} t \cdot |V(t)|\, dt + \frac{C_1}{|\lambda|} \int_0^\infty t\,|V(t)|\, dt;$$

правая часть этого неравенства, очевидно, стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$.

2. Матрица рассеяния

В этом пункте мы будем считать λ вещественным. Тогда, согласно лемме 1. 1,

$$G(x,\lambda)=\mathscr{E}(x,\lambda)\cdot A+\mathscr{E}(x,-\lambda)B,$$

где матрицы A и B определяются формулами (см. (3.1.1):

$$A=\frac{1}{2i\lambda}\left[\ \mathscr{E}_t'(x_0,-\lambda)\,G(x_0,\lambda)-\mathscr{E}_t(x_0,-\lambda)\,G'(x_0,\lambda)\right],$$

$$B=-\frac{1}{2i\lambda}\left[\ \mathscr{E}_t'(x_0,\lambda)\,G(x_0,\lambda)-\mathscr{E}_t(x_0,\lambda)\,G'(x_0,\lambda)\ \right].$$

Здесь $x_0>0$ может быть взято произвольно, причем ясно, что A и B от x_0 не зависят.

Мы покажем, что при любом вещественном λ

$$\lim_{x\to+0}\mathscr{E}_t'(x,\lambda)\,G(x,\lambda)=0, \tag{2.11}$$

а тогда, устремляя в выражениях для A и B x_0 к нулю и используя второе из равенств (2.2), получим

$$A=-\frac{1}{2i\lambda}\,\mathscr{E}_t(-\lambda),\quad B=\frac{1}{2i\lambda}\,\mathscr{E}_t(\lambda),$$

где

$$\mathscr{E}(\lambda)=\mathscr{E}(0,\lambda),\quad \mathscr{E}(-\lambda)=\mathscr{E}(0,-\lambda), \tag{2.12}$$

и, следовательно,

$$G(x,\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}\,[\mathscr{E}(x,-\lambda)\,\mathscr{E}_t(\lambda)-\mathscr{E}(x,\lambda)\,\mathscr{E}_t(-\lambda)]. \tag{2.13}$$

Для доказательства равенства (2.11) нам достаточно показать, что

$$\lim_{x\to+0}x\,|\,\mathscr{E}'(x,\lambda)\,|=0;$$

это следует из оценки (2.7) и из очевидного неравенства

$$|\,\mathscr{E}_t'(x,\lambda)\,|\leqslant n\,|\mathscr{E}'(x,\lambda)\,|.$$

Так как (см. (1.6))

$$\mathscr{E}'(x,\lambda)=-i\lambda e^{-i\lambda x}\cdot I-K(x,x)\,e^{-i\lambda x}+\int_x^\infty K_x'(x,t)\,e^{-i\lambda t}\,dt,$$

то с помощью оценок (1.17) и (1.20) находим, что при $\operatorname{Im}\lambda=0$

$$|\,\mathscr{E}'(x,\lambda)\,|\leqslant|\,\lambda\,|+C\,\sigma(x)+\frac{1}{4}\int_x^\infty\left|\,V\left(\frac{x+t}{2}\right)\right|dt+C\sigma(x)\int_x^\infty\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)dt=$$

$$=|\,\lambda\,|+C\sigma(x)+\frac{1}{2}\int_x^\infty|V(s)\,|\,ds+2\,C\sigma(x)\int_x^\infty\sigma(s)\,ds\leqslant$$

$$\leqslant|\,\lambda\,|+\left[\,C+\frac{1}{2}+2\,C\sigma_1(0)\,\right]\sigma(x).$$

Отсюда и вытекает, что $\lim\limits_{x\to+0}x\,|\,\mathscr{E}'(x,\lambda)\,|=0$, так как при $0<x<1$

$$x\,\sigma(x)=x\int_x^\infty|\,V(s)\,|\,ds=x\left\{\int_x^{\sqrt{x}}+\int_{\sqrt{x}}^\infty|\,V(s)\,|\,ds\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\int_x^{\sqrt{x}}s\,|\,V(s)\,|\,ds+\sqrt{x}\int_0^\infty s\,|\,V(s)\,|\,ds$$

и, значит, $\lim\limits_{x\to+0}x\sigma(x)=0$.

Итак, доказана справедливость равенства (2.11), а следовательно и равенства (2.13).

Полагая в равенстве (2.13) $x=0$, получим важную формулу

$$\mathcal{E}(-\lambda)\,\mathcal{E}_t(\lambda)=\mathcal{E}(\lambda)\,\mathcal{E}_t(-\lambda). \tag{2.14}$$

Лемма 2. 2. *Если* $\operatorname{Im}\lambda=0$, $\lambda\neq 0$, *то при любом* $x\geqslant 0$ *существует* $\mathcal{E}^{-1}(x,\lambda)$.

Доказательство. Воспользуемся равенством (1.30), которое, в силу (1.27), можно записать в виде

$$\mathcal{E}'^{*}(x,\lambda)\,\mathcal{E}(x,\lambda)-\mathcal{E}^{*}(x,\lambda)\,\mathcal{E}'(x,\lambda)=2i\lambda\cdot I$$

(звездочкой обозначен переход к эрмитово-сопряженной матрице).

Умножая это равенство справа на столбцевую матрицу (вектор) a, слева на эрмитово-сопряженную к ней матрицу a^*, получим

$$a^*\left[\mathcal{E}'^{*}(x,\lambda)\,\mathcal{E}(x,\lambda)-\mathcal{E}^{*}(x,\lambda)\,\mathcal{E}'(x,\lambda)\right]a=2i\lambda\,\|a\|^2,$$

где $\|a\|$ — норма вектора a.

Отсюда непосредственно заключаем, что если $\mathcal{E}(x,\lambda)\,a=0$, то $\|a\|=0$ и, значит, $a=0$.

Доказанная лемма позволяет преобразовать выражение (2.13) к виду

$$G(x,\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}\left[\mathcal{E}(x,-\lambda)-\mathcal{E}(x,\lambda)\cdot S(-\lambda)\right]\mathcal{E}_t(\lambda), \tag{2.15}$$

где

$$S(\lambda)=\mathcal{E}_t(\lambda)\,\mathcal{E}_t^{-1}(-\lambda).$$

Используя равенство (2.14), находим, что

$$S(\lambda)=\mathcal{E}_t(\lambda)\,\mathcal{E}_t^{-1}(-\lambda)=\mathcal{E}^{-1}(-\lambda)\,\mathcal{E}(\lambda)=S_t(\lambda), \tag{2.16}$$

а отсюда с помощью (1.27) получаем еще

$$S^{-1}(\lambda)=\mathcal{E}^{-1}(\lambda)\,\mathcal{E}(-\lambda)=S(-\lambda)=\overline{S(\lambda)}=S^*(\lambda). \tag{2.17}$$

Таким образом, $S(\lambda)$ является симметрической и унитарной матрицей; она называется *матрицей рассеяния.*

Замечание. Можно доказать, что если потенциальная матрица $V(x)$ эрмитова (но необязательно вещественна), то вместо (2.15) будем иметь

$$G(x,\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}\left[\mathcal{E}(x,-\lambda)-\mathcal{E}(x,\lambda)\,S(-\lambda)\right]\mathcal{E}^{*}(-\lambda),$$

где матрица рассеяния

$$S(\lambda)=\mathcal{E}^{*}(-\lambda)\left[\mathcal{E}^{*}(\lambda)\right]^{-1}=\mathcal{E}^{-1}(-\lambda)\,\mathcal{E}(\lambda)$$

не будет, вообще говоря, симметрической, но сохраняет унитарность и свойство

$$S(-\lambda)=S^*(\lambda).$$

Теорема 2.1. *Матрица* $\widetilde{F}_1(\lambda)=I-S(\lambda)$ *является преобразованием Фурье вещественной симметрической матрицы* $F_1(u)$, *т. е.*

$$\widetilde{F}_1(\lambda)=I-S(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(u)\,e^{-i\lambda u}\,du,\,^{*} \tag{2.18}$$

* Если $|F_1(u)|\in L(-\infty,\infty)$, то интеграл этот сходится абсолютно; если $F_1(u)=F_1^{(1)}(u)+F_1^{(2)}(u)$ и $|F_1^{(1)}(u)|\in L(-\infty,\infty)$, $|F_1^{(2)}(u)|\in L^2(-\infty,\infty)$, то правая часть (2,18) означает сумму

$$\int_{-\infty}^{\infty}F_1^{(1)}(u)e^{-i\lambda u}\,du+\int_{-\infty}^{\infty}F_1^{(2)}(u)\,e^{-i\lambda u}\,du,$$

где первый интеграл абсолютно сходится, а второй сходится в среднем квадратичном. Заметим еще, что принадлежность абсолютной величины матрицы-функции к $L(-\infty,\infty)$ (к$L^2(-\infty,\infty)$) равносильна принадлежности к $L(-\infty,\infty)$ (к$L^2(-\infty,\infty)$) всех элементов этой матрицы.

причем

$$F_1(u) = F_1^{(1)}(u) + F_1^{(2)}(u),$$

где $|F_1^{(1)}(u)| \in L(-\infty, \infty)$, *а* $|F_1^{(2)}(u)| \in L^2(\infty, \infty)$ *и ограничена на всей вещественной оси.*

Доказательство. Условимся обозначать через $\widetilde{L}$ линейное многообразие функций $\widetilde{f}(\lambda)$, являющихся преобразованиями Фурье функций из $L(-\infty, \infty)$, т. е. представимых в виде

$$\widetilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\lambda u} du, \qquad f(u) \in L(-\infty, \infty).$$

Произведение любых двух функций из $\widetilde{L}$, как известно, также принадлежит $\widetilde{L}$.

Рассмотрим теперь элементы матрицы $\widetilde{F}_1(\lambda)$, т. е. функции

$$\widetilde{f}_{\alpha\beta}(\lambda) = \delta_{\alpha\beta} - s_{\alpha\beta}(\lambda),$$

где

$$\|\delta_{\alpha\beta}\|_1^n = I, \quad \|s_{\alpha\beta}(\lambda)\|_1^n = S(\lambda) = \mathcal{E}^{-1}(-\lambda)\mathcal{E}(\lambda). \tag{2.19}$$

Согласно (1.6) и (1.24) имеем

$$\mathcal{E}(\lambda) = \|\delta_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta}(\lambda)\|_1^n, \quad \mathcal{E}(-\lambda) = \|\delta_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta}(-\lambda)\|_1^n, \tag{2.20}$$

где

$$\|k_{\alpha\beta}(\lambda)\|_1^n = \int_0^{\infty} K(0, t) e^{-i\lambda t} dt;$$

последнее равенство показывает (если учесть еще оценку (1.8)), что каждая из функций $k_{\alpha\beta}(\lambda)$ и $k_{\alpha\beta}(-\lambda)$ принадлежит $\widetilde{L}$.

Из (2.20) следует далее, что

$$\det \mathcal{E}(-\lambda) = 1 + p(\lambda), \tag{2.21}$$

где $p(\lambda)$ есть сумма произведений, составленных из функций $k_{\alpha\beta}(-\lambda)$, и потому $p(\lambda) \in \widetilde{L}$. Точно так же находим, что алгебраические дополнения элементов $\det \mathcal{E}(-\lambda)$, которые мы обозначим через $\mathcal{E}_{\alpha\beta}(-\lambda)$, имеют вид

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta}(-\lambda) = \delta_{\alpha\beta} + p_{\alpha\beta}(\lambda), \tag{2.22}$$

где $p_{\alpha\beta}(\lambda) \in \widetilde{L}$ $\quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n)$.

Из (2.19), (2.20), (2.21) и (2.22) получаем, таким образом,

$$s_{\alpha\beta}(\lambda) = \frac{1}{\det \mathcal{E}(-\lambda)} \sum_{\gamma=1}^{n} \mathcal{E}_{\gamma\alpha}(-\lambda)[\delta_{\gamma\beta} + k_{\gamma\beta}(\lambda)] =$$

$$= \frac{1}{1+p(\lambda)} \sum_{\gamma=1}^{n} [\delta_{\gamma\alpha} + p_{\gamma\alpha}(\lambda)][\delta_{\gamma\beta} + k_{\gamma\beta}(\lambda)],$$

что приводится к виду:

$$s_{\alpha\beta}(\lambda) = \frac{\delta_{\alpha\beta} + \varphi_{\alpha\beta}(\lambda)}{1 + p(\lambda)}, \tag{2.23}$$

где $\varphi_{\alpha\beta}(\lambda) \in \widetilde{L}$ $\quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n)$.

Предположим, что $\det \mathscr{E}(0) \neq 0$. В этом случае $\det \mathscr{E}(-\lambda) = 1 + p(\lambda) \neq 0$ на всей замкнутой прямой (см. лемму 2.2 и формулу (1.24)), а тогда по известной теореме Винера

$$\frac{1}{1+p(\lambda)} = 1 + d(\lambda), \quad d(\lambda) \in \widetilde{L},$$

и, следовательно (см. 2.23)),

$$\widetilde{f}_{\alpha\beta}(\lambda) = \delta_{\alpha\beta} - s_{\alpha\beta}(\lambda) = \delta_{\alpha\beta} - [\delta_{\alpha\beta} + \varphi_{\alpha\beta}(\lambda)][1 + d(\lambda)] = \\ = -\varphi_{\alpha\beta}(\lambda) - \delta_{\alpha\beta} \cdot d(\lambda) - \varphi_{\alpha\beta}(\lambda) \cdot d(\lambda).$$

Отсюда заключаем, что $\widetilde{f}_{\alpha\beta}(\lambda) \in \widetilde{L}$, т. е. что в рассматриваемом случае, когда $\det \mathscr{E}(0) \neq 0$, справедливо равенство (2.18) и $|F_1(u)| \in L(-\infty, \infty)$.

Пусть теперь $\det \mathscr{E}(0) = 0$. Так как

$$\det \mathscr{E}(-\lambda) = 1 + p(\lambda) \to 1 \text{ при } |\lambda| \to \infty$$

(см. (1.24)), то $p(\lambda) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$.

Поэтому найдется такое $l > 0$, что

$$|p(\lambda)| < 1 \text{ при } |\lambda| \geqslant l.$$

Рассмотрим функцию

$$h(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\lambda| < l \\ 0, & \text{если } |\lambda| > l + 1 \\ -|\lambda| + l + 1, & \text{если } l \leqslant |\lambda| \leqslant l + 1 \end{cases}$$

и положим

$$p(\lambda) - h(\lambda)\,p(\lambda) = q(\lambda).$$

Так как $h(\lambda) \in \widetilde{L}$ и $p(\lambda) \in \widetilde{L}$, то $q(\lambda)$ принадлежит $\widetilde{L}$, причем

$$|q(\lambda)| < 1, \quad -\infty \leqslant \lambda \leqslant \infty \tag{2.24}$$

и

$$q(\lambda) = p(\lambda) \text{ при } |\lambda| > l + 1. \tag{2.25}$$

Положим далее

$$s_{\alpha\beta}(\lambda) = \frac{\delta_{\alpha\beta} + \varphi_{\alpha\beta}(\lambda)}{1 + q(\lambda)} + \left[s_{\alpha\beta}(\lambda) - \frac{\delta_{\alpha\beta} + \varphi_{\alpha\beta}(\lambda)}{1 + q(\lambda)}\right] = s_{\alpha\beta}^{(1)}(\lambda) + s_{\alpha\beta}^{(2)}(\lambda). \tag{2.26}$$

Так как, в силу (2.24), $1 + q(\lambda) \neq 0$ на всей замкнутой прямой, то так же, как и в случае $\det \mathscr{E}(0) \neq 0$, доказываем, что

$$s_{\alpha\beta}^{(1)}(\lambda) = \frac{\delta_{\alpha\beta} + \varphi_{\alpha\beta}(\lambda)}{1 + q(\lambda)} = \delta_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}(\lambda), \tag{2.27}$$

где

$$\psi_{\alpha\beta}(\lambda) \in \widetilde{L} \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots\ n).$$

Что касается функции

$$s_{\alpha\beta}^{(2)}(\lambda) = s_{\alpha\beta}(\lambda) - s_{\alpha\beta}^{(1)}(\lambda),$$

то, в силу (2.23), (2.25) и (2.27), она равна нулю при $|\lambda| > l + 1$; легко показать также, что $s_{\alpha\beta}^{(2)}(\lambda)$ ограничена при всех вещественных $\lambda \neq 0$. Действительно, в силу унитарности матрицы $S(\lambda)$,

$$|s_{\alpha\beta}(\lambda)| \leqslant 1 \quad (\operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \neq 0),$$

а $s_{\alpha\beta}^{(1)}(\lambda)$ непрерывна при всех вещественных λ и стремится к $\delta_{\alpha\beta}$ при $|\lambda| \to \infty$ (это следует из представления (2.27)).

Поэтому $s_{\alpha\beta}^{(2)}(\lambda)$ есть преобразование Фурье ограниченной функции из $L^2(-\infty, \infty)$ (являющейся, к тому же, целой функцией экспоненциального типа).

Итак, в случае, когда $\det \mathscr{E}(0) = 0$, имеем (см. (2.26) и (2.27))

$$\tilde{f}_{\alpha\beta}(\lambda) = \delta_{\alpha\beta} - s_{\alpha\beta}(\lambda) = -\psi_{\alpha\beta}(\lambda) - s^{(2)}_{\alpha\beta}(\lambda),$$

где $\psi_{\alpha\beta}(\lambda) \in \tilde{L}$, а $s^{(2)}_{\alpha}(\lambda)$ является преобразованием Фурье ограниченной функции из $L^2(-\infty, \infty)$.

Нам осталось еще доказать вещественность матрицы $F_1(u)$ (ее симметричность очевидна). Но это следует из формулы (2.18) и свойств матрицы $S(\lambda)$.

Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F_1(u)}\, e^{-i\lambda u} du = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)\, e^{i\lambda u} du} = \overline{I - S(-\lambda)} = I - S(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)\, e^{-i\lambda u} du$$

и, следовательно, $\overline{F_1(u)} = F_1(u)$.

Замечание. Если потенциальная матрица $V(x)$ эрмитова (но необязательно вещественная), то и матрица $F_1(u)$ будет эрмитовой, вообще говоря, невещественной.

3. Точечный спектр

Обозначим, как и ранее (см. (2.12)),

$$\mathscr{E}(\lambda) = \mathscr{E}(0, \lambda)$$

и предположим, что при некотором $\lambda = \lambda_0$, $\operatorname{Im}\lambda_0 < 0$, имеет место равенство $\det \mathscr{E}(\lambda_0) = 0$, а значит, существует вектор $a \neq 0$ такой, что

$$\mathscr{E}(\lambda_0) \cdot a = 0.$$

В таком случае вектор-функция $\mathscr{E}(x, \lambda_0) \cdot a$, являющаяся решением системы (1.1), обращается в нуль при $x = 0$ и экспоненциально стремится к нулю при $x \to +\infty$. Это означает, что λ_0^2 является собственным значением граничной задачи (2.1). Так как, в силу самосопряженности граничной задачи (2.1), все ее собственные значения вещественны, то $\lambda_0 = -i\mu_0$, $\mu_0 > 0$.

Таким образом, регулярная в нижней полуплоскости функция $\det \mathscr{E}(\lambda)$ может иметь там нули только на мнимой оси и квадраты этих нулей являются собственными значениями граничной задачи (2.1).

Согласно замечанию 1 к лемме 1.2, других, отличных от квадратов нулей $\det \mathscr{E}(\lambda)$, собственных значений граничная задача (2.1) не имеет.

Заметим теперь, что (см. (2.12) и (1.6))

$$\mathscr{E}(\lambda) \to I \quad \text{при } |\lambda| \to \infty,\ \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0,$$

и потому нули $\det \mathscr{E}(\lambda)$ образуют ограниченное множество, которое может иметь единственную предельную точку $\lambda = 0$. Поэтому если $\det \mathscr{E}(0) \neq 0$, то множество нулей $\det \mathscr{E}(\lambda)$ (а значит и множество собственных значений граничной задачи (2.1)) конечно. Оказывается, что это обстоятельство имеет место и в случае, когда $\det \mathscr{E}(0) = 0$, т. е. справедлива теорема:

граничная задача (2.1), *где потенциальная матрица* $V(x)$ *эрмитова и удовлетворяет условию* (1.4), *имеет конечное число собственных значений (отрицательных)*.

Доказательство этой теоремы дано в приложении 1 (теорема 1).

Рассмотрим теперь матрицу-функцию $\mathscr{E}^{-1}(\lambda)$.

Из приведенных выше результатов следует, что $\mathscr{E}^{-1}(\lambda)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda < 0$, кроме, быть может, конечного числа точек на мнимой оси, где $\det \mathscr{E}(\lambda) = 0$ и, следовательно, $\mathscr{E}^{-1}(\lambda)$ имеет полюсы. Можно доказать (см. приложение 1, теорема 2), что все эти полюсы простые.

Согласно лемме 2.2, матрица-функция $\mathscr{E}^{-1}(\lambda)$ определена и сохраняет непрерывность при всех вещественных значениях λ, кроме, возможно, точки $\lambda = 0$. В приложении 1 (лемма 3) доказано также что матрица-функция $\lambda \mathscr{E}^{-1}(\lambda)$, $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$, ограничена вблизи точки $\lambda = 0$.

§ 3. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

1. Вывод основного уравнения

В этом параграфе будет показано, что матрица-функция $K(x, y)$ (см. теорему 1.1) удовлетворяет линейному интегральному уравнению, ядро которого выражается явно через матрицу рассеяния $S(\lambda)$, собственные значения граничной задачи (2.1) λ_ν^2 и матрицы M_ν, определяющие кратность этих собственных значений и нормировку соответствующих собственных вектор-функций.

Для вывода этого основного в нашем исследовании уравнения мы используем равенство (2.15), записав его в виде

$$2i\lambda G(x, \lambda)\, \mathscr{E}_t^{-1}(\lambda) = \mathscr{E}(x, -\lambda) - \mathscr{E}(x, \lambda)\, S(-\lambda). \tag{3.1}$$

Подставив вместо $\mathscr{E}(x, \lambda)$ и $\mathscr{E}(x, -\lambda)$ их выражения (1.6) и (1.24), отсюда находим:

$$\begin{gathered}2i\lambda G(x, \lambda)\, \mathscr{E}_t^{-1}(\lambda) = e^{-i\lambda x} I - e^{-i\lambda x} S(-\lambda) + \\ + \int_x^\infty K(x, t)\,[e^{i\lambda t}\cdot I - e^{-i\lambda t}\cdot S(-\lambda)]\, dt = 2i \sin\lambda x \cdot I + \\ + e^{-i\lambda x}[I - S(-\lambda)] + \int_x^\infty K(x, t)\,\{e^{i\lambda t}\cdot I - e^{-i\lambda t} I + e^{-i\lambda t}[I - S(-\lambda)]\}\, dt\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}2i\lambda\, G(x, \lambda)\,[\mathscr{E}_t^{-1}(\lambda) - I] + 2i\,[\lambda G(x, \lambda) - \sin\lambda x\cdot I] = \\ = e^{-i\lambda x}[I - S(-\lambda)] + \int_x^\infty K(x, t)\, e^{i\lambda t}\, dt - \int_x^\infty K(x, t)\, e^{-i\lambda t}\, dt + \\ + \int_x^\infty K(x, t)\, e^{-i\lambda t}\, dt\,[I - S(-\lambda)].\end{gathered} \tag{3.2}$$

Согласно теореме 2.1, матрица $I - S(\lambda)$ есть преобразование Фурье матрицы $F_1(u)$, каждый элемент которой представим в виде суммы двух функций, одна из которых суммируема, а другая ограничена и суммируема с квадратом на всей вещественной оси. Используя эту теорему, а также известные теоремы о свертке*, заключаем, что правая (а значит и левая) часть равенства (3.2) есть преобразование Фурье матрицы

$$F_1(x - t) + K(x, -t) - K(x, t) + \int_x^\infty K(x, s)\, F_1(s - t)\, ds. \tag{3.3}$$

---

* См., например, Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, 1948. стр. 119, теоремы 64 и 65.

Умножим теперь левую часть равенства (3.2) на $e^{-i\lambda y}$ и, считая $y > x$, проинтегрируем полученное выражение по λ в промежутке $(-\infty, \infty)$. Мы докажем, что этот интеграл существует (в смысле главного значения) и что он может быть вычислен с помощью контурного интегрирования. Действительно, первое из слагаемых в подынтегральном выражении —

$$2\, i\lambda G(x, \lambda)\, [\mathcal{E}_t^{-1}(\lambda) - I]\, e^{-i\lambda y}$$

регулярно всюду в нижней λ — полуплоскости, кроме конечного числа точек $\lambda_\nu = -i\mu_\nu$, $\mu_\nu > 0$, являющихся простыми полюсами матрицы $\mathcal{E}_t^{-1}(\lambda)$, непрерывно при всех вещественных $\lambda \neq 0$, а вблизи $\lambda = 0$, $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$, остается ограниченным (см. п. 3 § 2).

Так как, согласно лемме 2.1, матрица-функция $\lambda G(x, \lambda)\, e^{-i\lambda x}$ при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ ограничена в области $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$, а

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} [\mathcal{E}_t^{-1}(\lambda) - I] = 0$$

равномерно при $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$ (см. формулу (1,6)), то, воспользовавшись леммой Жордана, находим, что при $x < y$.

$$\lim_{l \to \infty} \int_{-l}^{l} 2\, i\lambda G(x, \lambda)\, [\mathcal{E}_t^{-1}(\lambda) - I]\, e^{-i\lambda y}\, d\lambda =$$

$$= -2\pi i \sum Res = 4\pi \sum_{\nu=1}^{p} \lambda_\nu\, G(x, \lambda_\nu)\, N_t^{(\nu)}\, e^{-i\lambda_\nu y},$$

где $N^{(\nu)}$ — вычет матрицы $\mathcal{E}^{-1}(\lambda)$ относительно полюса λ_ν.

Что касается второго слагаемого

$$2i\, [\lambda G(x, \lambda) - \sin\lambda x \cdot I]\, e^{-i\lambda y},$$

то это целая функция от λ, а в силу соотношения (2.9), мы вправе и к нему применить лемму Жордана, так что

$$\lim_{l \to \infty} \int_{-l}^{l} 2i\, [\lambda G(x, \lambda) - \sin\lambda x \cdot I]\, e^{-i\lambda y}\, d\lambda = 0.$$

Итак, доказано, что

$$\lim_{l \to \infty} \int_{-l}^{l} \{2\, i\lambda G(x, \lambda)\, [\mathcal{E}_t^{-1}(\lambda) - I] + 2i\, [\lambda G(x, \lambda) - \sin\lambda x \cdot I]\}\, e^{-i\lambda y}\, d\lambda =$$

$$= 4\pi \sum_{\nu=1}^{p} \lambda_\nu\, G(x, \lambda_\nu)\, N_t^{(\nu)}\, e^{-i\lambda_\nu y}. \qquad (3.4)$$

Но, как выше было замечено, выражение в фигурных скобках под знаком интеграла (3.4) есть преобразование Фурье матрицы (3.3) (при фиксированном x), и потому интеграл (3.4) равен значению этой матрицы при $t = -y$, умноженному на 2π. Учитывая еще, что $K(x, t) = 0$ при $t < x$, получаем следующее равенство:

$$F_1(x + y) + K(x, y) + \int_{x}^{\infty} K(x, s)\, F_1(s + y)\, ds =$$

$$= 2 \sum_{\nu=1}^{p} \lambda_\nu\, G(x, \lambda_\nu)\, N_t^{(\nu)}\, e^{-i\lambda_\nu y}, \quad (x < y), \qquad (3.5)$$

где

$$F_1(u) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [I - S(\lambda)] e^{i\lambda u} d\lambda. \tag{3.6}$$

Относительно формулы (3.6) заметим, что она пока означает только, что $I - S(\lambda)$ есть преобразование Фурье матрицы $F_1(u)$ и, следовательно, правая часть этой формулы суммируема средними арифметическими к $F_1(u)$ почти всюду. Однако в п. 2 этого параграфа будет доказана дифференцируемость $F_1(u)$ при всех $u > 0$, откуда следует, что интеграл в (3.6) сходится при любом $u > 0$ в смысле главного значения и, значит,

$$F_1(u) = \lim_{l \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-l}^{l} [I - S(\lambda)] e^{i\lambda u} d\lambda, \quad (u > 0).$$

Займемся теперь преобразованием правой части равенства (3.5).

С этой целью воспользуемся соотношением (см. приложение 1, формула (13))

$$\dot{\mathcal{E}}_t(x, \lambda_\nu) \mathcal{E}'(x, \lambda_\nu) - \dot{\mathcal{E}}_t'(x, \lambda_\nu) \mathcal{E}(x, \lambda_\nu) = -2\lambda_\nu \int\limits_x^{\infty} \mathcal{E}_t(u, \lambda_\nu) \mathcal{E}(u, \lambda_\nu) du, \tag{3.7}$$

где точкой сверху обозначено дифференцирование по λ, а также равенствами

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}(\lambda_\nu) N^{(\nu)} = N^{(\nu)} \mathcal{E}(\lambda_\nu) = 0, \\ \mathcal{E}(\lambda_\nu) N_0^{(\nu)} + \dot{\mathcal{E}}(\lambda_\nu) N^{(\nu)} = N_0^{(\nu)} \mathcal{E}(\lambda_\nu) + N^{(\nu)} \dot{\mathcal{E}}(\lambda_\nu) = I, \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

которые непосредственно получаются из разложений

$$\mathcal{E}^{-1}(\lambda) = \frac{N^{(\nu)}}{\lambda - \lambda_\nu} + N_0^{(\nu)} + \dots; \quad \mathcal{E}(\lambda) = \mathcal{E}(\lambda_\nu) + (\lambda - \lambda_\nu) \dot{\mathcal{E}}(\lambda_\nu) + \dots$$

Обозначим через P_ν вещественную симметрическую матрицу, проектирующую на ядро* матрицы $\mathcal{E}(\lambda_\nu)$, так что

$$\mathcal{E}(\lambda_\nu) \cdot P_\nu = 0. \tag{3.9}$$

Используя равенства (3.8), легко также доказать, что множество векторов вида $N^{(\nu)} a$, где a произвольный вектор, совпадает с ядром матрицы $\mathcal{E}(\lambda_\nu)$. Отсюда следует, что ранги матриц $N^{(\nu)}$ и P_ν одинаковы и что

$$P_\nu N^{(\nu)} = N^{(\nu)}. \tag{3.10}$$

Если мы теперь умножим равенство (3.7) справа на P_ν, слева на $N_t^{(\nu)}$, а затем устремим $x \to 0$, то, в силу (3.9), получим

$$N_t^{(\nu)} \dot{\mathcal{E}}_t(\lambda_\nu) \mathcal{E}'(0, \lambda_\nu) P_\nu = -2\lambda_\nu N_t^{(\nu)} A_\nu P_\nu, \tag{3.11}$$

где

$$A_\nu = \int\limits_0^{\infty} \mathcal{E}_t(u, \lambda_\nu) \mathcal{E}(u, \lambda_\nu) du \tag{3.12}$$

и

$$\mathcal{E}'(0, \lambda_\nu) P_\nu = \lim_{x \to 0} \mathcal{E}'(x, \lambda_\nu) P_\nu$$

(этот предел существует; см. в приложении 1 формулу (15) и далее вывод формулы (16)). Легко видеть, что A_ν — вещественная симметрическая положительно определенная матрица.

* Ядром матрицы A, как известно, называется множество всех векторов a таких, что $A \cdot a = 0$.

Воспользовавшись вторым из равенств (3.8), а затем равенством (1.29), преобразуем (3.11) к виду

$$\mathscr{E}'(0,\ \lambda_\nu) P_\nu = -2\lambda_\nu N_t^{(\nu)} A_\nu P_\nu. \tag{3.13}$$

Заметим далее, что, в силу (2.2) и (3.9), справедливо равенство*

$$\mathscr{E}(x,\ \lambda_\nu) P_\nu = G(x,\ \lambda_\nu)\, \mathscr{E}'(0,\ \lambda_\nu) P_\nu,$$

которое с помощью (3.13) и (3.10) приводится к виду:

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(x,\ \lambda_\nu) P_\nu &= -2\lambda_\nu G(x,\ \lambda_\nu) N_t^{(\nu)} A_\nu P_\nu = \\ &= -2\lambda_\nu G(x,\ \lambda_\nu) N_t^{(\nu)} [P_\nu A_\nu P_\nu + (I - P_\nu)].\end{aligned} \tag{3.14}$$

Но, как легко видеть, вещественная симметрическая матрица

$$B_\nu = P_\nu A_\nu P_\nu + (I - P_\nu)$$

является положительно определенной и потому неособенной.

Действительно, пусть $(a,\ b)$ обозначает скалярное произведение векторов a и b в эвклидовом пространстве. Если $a_1 \neq 0,\ P_\nu a_1 = 0$, то

$$(B_\nu a_1,\ a_1) = (a_1,\ a_1) > 0;$$

если $a_2 \neq 0,\ P_\nu a_2 = a_2$, то

$$(B_\nu a_2,\ a_2) = (P_\nu A_\nu P_\nu a_2,\ a_2) = (A_\nu a_2,\ a_2) > 0.$$

Общий случай сводится к двум рассмотренным, и тем самым положительная определенность матрицы B_ν доказана.

Поэтому из (3.14) находим окончательно:

$$-2\lambda_\nu G(x,\ \lambda_\nu) N_t^{(\nu)} = \mathscr{E}(x,\ \lambda_\nu) \cdot M_\nu^2, \tag{3.15}$$

где

$$M_\nu^2 = P_\nu B_\nu^{-1} = P_\nu [P_\nu A_\nu P_\nu + (I - P_\nu)]^{-1}. \tag{3.16}$$

Легко проверить**, что вещественная матрица M_ν^2 симметрическая неотрицательная и что ядро матрицы M_ν совпадает с ядром матрицы P_ν (так

---

* Используем единственность решения уравнения (1.2), удовлетворяющего заданным начальным условиям.

** Полагая для любого вектора a

$$\tilde{a} = B_\nu^{-1} a,$$

имеем:

$$(P_\nu B_\nu^{-1} a,\ b) = (P_\nu \tilde{a},\ B_\nu \tilde{b}) = (P_\nu \tilde{a},\ P_\nu A_\nu P_\nu \tilde{b}) = (P_\nu A_\nu P_\nu \tilde{a},\ P_\nu \tilde{b}) =$$

$$= (B_\nu \tilde{a},\ P_\nu \tilde{b}) = (a,\ P_\nu B_\nu^{-1} b);$$

$$(P_\nu B_\nu^{-1} a,\ a) = (P_\nu A_\nu P_\nu \tilde{a},\ P_\nu \tilde{a}) = (A_\nu P_\nu \tilde{a},\ P_\nu \tilde{a}) \geqslant 0.$$

Из равенства

$$(P_\nu B_\nu^{-1} a,\ b) = (P_\nu a,\ B_\nu^{-1} b)$$

следует, что ядра матриц $M_\nu^2 = P_\nu B_\nu^{-1}$ и P_ν совпадают, так как вектор $B_\nu^{-1} b$ пробегает все пространство одновременно с вектором b. Остается еще заметить, что матрицы M_ν^2 и M_ν имеют одно и то же ядро. Действительно, если $M_\nu a = 0$, то, очевидно, и $M_\nu^2 \cdot a = 0$. Обратно, если $M_\nu^2 \cdot a = 0$, то для любого вектора b будем иметь $(M_\nu^2 a,\ b) = 0$ или $(M_\nu a,\ M_\nu b) = 0$) беря, в частности, $b = a$, получим $(M_\nu a,\ M_\nu a) = 0$, откуда $M_\nu a = 0$.

что и ранги этих матриц одинаковы). Матрицы M_ν в дальнейшем будем называть *нормировочными матрицами* *.

Подставляя (3.15) в равенство (3.5) и используя затем формулу (1.6), получим окончательно уравнение $(x < y)$

$$F(x+y) + K(x, y) + \int_x^\infty K(x, t) F(t+y)\, dt = 0, \tag{3.17}$$

где

$$F(u) = \sum_{\nu=1}^{p} M_\nu^2 e^{-i\lambda_\nu u} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [I - S(\lambda)]\, e^{i\lambda u}\, d\lambda. \tag{3.18}$$

Из (3.18) усматриваем, что матрица $F(u)$ вещественная и симметрическая. Используя известные нам свойства $F(u)$ и свойства матрицы $K(x, t)$, из уравнения (3.17) легко находим, что $F(u)$ непрерывна при всех $u > 0$. Действительно, из уравнения (3.17) находим, что

$$F(x+y+\Delta y) - F(x+y) = -[K(x, y+\Delta y) - K(x, y)] - $$
$$- \int_x^\infty K(x, t)\, [F(t+y+\Delta y) - F(t+y)]\, dt,$$

и так как $K(x, y)$ непрерывна при $0 < x < y$, то нам достаточно доказать равенство

$$\lim_{\Delta y \to 0} \int_x^\infty K(x, t)\, [F(t+y+\Delta y) - F(t+y)]\, dt = 0. \tag{3.19}$$

Но, в силу теоремы 2.1,

$$F(u) = F^{(1)}(u) + F^{(2)}(u),$$

причем элементы матрицы $F^{(1)}(u)$ суммируемы, а элементы матрицы $F^{(2)}(u)$ суммируемы с квадратом (и ограничены) в промежутке (x, ∞), $x \geqslant 0$.

Используя оценку (1.17), имеем поэтому

$$\left| \int_x^\infty K(x, t)\, [F^{(1)}(t+y+\Delta y) - F^{(1)}(t+y]\, dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant C\sigma(x) \int_x^\infty | F^{(1)}(t+y+\Delta y) - F(t+y) |\, dt \to 0,$$

при $\Delta y \to 0$, а с помощью неравенства Буняковского получаем

$$\left| \int_x^\infty K(x, t)\, [F^{(2)}(t+y+\Delta y) - F^{(2)}(t+y)]\, dt \right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_x^\infty |K(x, t)|^2\, dt \cdot \int_x^\infty | F^{(2)}(t+y+\Delta y) - F^{(2)}(t+y) |^2\, dt,$$

что также стремится к нулю при $\Delta y \to 0$. Это и доказывает справедливость равенства (3.19).

---

* Это название оправдывается тем, что, оператор

$$\int_0^\infty \mathscr{E}(x, \lambda_\nu)\, M_\nu\, [\mathscr{E}(y, \lambda_\nu) \cdot M_\nu]_t\, a(y)\, dy$$

является оператором проектирования вектор-функции $a(x)$ на собственное подпространство граничной задачи (2.1), соответствующее собственному значению λ_ν^2.

Нетрудно также показать, что уравнение (3.17), выведенное нами в предположении $0 < x < y$, по непрерывности остается в силе при $y = x > 0$ и $0 \leq x < y$.

Замечание. В случае, когда потенциальная матрица $V(x)$ эрмитова (но необязательно вещественная), можно получить для $K(x, y)$ то же самое основное уравнение (3.17). Сохраняется также и формула (3.18) для матрицы $F(u)$, но в этом случае $F(u)$ и нормировочные матрицы M_ν являются эрмитовыми, вообще говоря, невещественными.

2. Свойства ядра основного уравнения

В этом пункте мы изучим свойства матрицы $F(u)$ при $u > 0$.

Воспользуемся для этого уравнением (3.17). Заменяя в нем x через $\frac{x}{2}$ и полагая $y = \frac{x}{2}$, будем иметь:

$$F(x) + K\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right) + \int_{\frac{x}{2}}^{\infty} K\left(\frac{x}{2}, t\right) F\left(\frac{x}{2} + t\right) dt = 0$$

или (см. (1.22))

$$F(x) + \frac{1}{2}\int_{\frac{x}{2}}^{\infty} V(t)\, dt + \int_{x}^{\infty} K\left(\frac{x}{2}, y - \frac{x}{2}\right) F(y)\, dy = 0. \tag{3.20}$$

Вводя еще обозначения

$$F(x) + \frac{1}{2}\int_{\frac{x}{2}}^{\infty} V(t)\, dt = \Phi(x),$$

$$K\left(\frac{x}{2}, y - \frac{x}{2}\right) = H(x, y),$$

$$\int_{x}^{\infty} K\left(\frac{x}{2}, y - \frac{x}{2}\right)\left[\frac{1}{2}\int_{\frac{y}{2}}^{\infty} V(t)\, dt\right] dy = \Psi(x),$$

можем преобразовать равенство (3.20) к виду:

$$\Phi(x) + \int_{x}^{\infty} H(x, y)\, \Phi(y)\, dy = \Psi(x). \tag{3.21}$$

Заметим теперь, что согласно (1.17) при $x \leq y$

$$|H(x, y)| = \left|K\left(\frac{x}{2}, y - \frac{x}{2}\right)\right| \leq C\sigma\left(\frac{y}{2}\right) \leq C\sigma\left(\frac{x + y}{4}\right)$$

и

$$|\Psi(x)| = \left|\int_{x}^{\infty} K\left(\frac{x}{2}, y - \frac{x}{2}\right)\left[\frac{1}{2}\int_{\frac{y}{2}}^{\infty} V(t)\, dt\right] dy\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} C\int_{x}^{\infty} \sigma^2\left(\frac{y}{2}\right) dy \leq C\sigma\left(\frac{x}{2}\right)\int_{\frac{x}{2}}^{\infty} \sigma(s)\, ds \leq C\sigma\left(\frac{x}{2}\right)\sigma_1\left(\frac{x}{2}\right), \tag{3.22}$$

так что

$$\|\Psi\|_1 = \int_0^\infty |\Psi(x)|\,dx < \infty.$$

Поэтому к уравнению (3.21) применима лемма 1.3, в силу которой

$$\Phi(x) = \Psi(x) + \int_x^\infty \widetilde{H}(x, y)\,\Psi(y)\,dy$$

и

$$|\widetilde{H}(x, y)| \leqslant C\sigma\left(\frac{x+y}{4}\right) e^{C\int_0^\infty \sigma\left(\frac{u}{4}\right)du} = \widetilde{C}\sigma\left(\frac{x+y}{4}\right).$$

Отсюда, учитывая (3.22), находим:

$$|\Phi(x)| = |F(x) + \frac{1}{2}\int_{\frac{x}{2}}^\infty V(t)\,dt| \leqslant |\Psi(x)| + \widetilde{C}\int_x^\infty \sigma\left(\frac{x+y}{4}\right)|\Psi(y)|\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C\sigma\left(\frac{x}{2}\right)\sigma_1\left(\frac{x}{2}\right) + \widetilde{C}\,C\int_x^\infty \sigma\left(\frac{x+y}{4}\right)\sigma\left(\frac{y}{2}\right)\sigma_1\left(\frac{y}{2}\right)dy \leqslant$$

$$\leqslant \left[C + \widetilde{C}C\int_0^\infty \sigma\left(\frac{y}{2}\right)dy\right]\sigma\left(\frac{x}{2}\right)\sigma_1\left(\frac{x}{2}\right),$$

т. е.

$$|F(x) + \frac{1}{2}\int_{\frac{x}{2}}^\infty V(t)\,dt| \leqslant C_1\sigma\left(\frac{x}{2}\right)\sigma_1\left(\frac{x}{2}\right), \tag{3.23}$$

где C_1 — постоянная. Из (3.23) имеем еще:

$$|F(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{\frac{x}{2}}^\infty |V(t)|\,dt + C_1\sigma\left(\frac{x}{2}\right)\sigma_1\left(\frac{x}{2}\right)$$

и, следовательно,

$$|F(x)| \leqslant C_2\sigma\left(\frac{x}{2}\right), \tag{3.24}$$

где $C_2 = \frac{1}{2} + C_1\sigma_1(0)$.

Покажем далее, что при $u > 0$ существует непрерывная производная $F'(u)$ и что ее можно получить из основного уравнения (3.17) дифференцированием по x, т. е. $(x \leqslant y)$

$$F'(x+y) = -K'_x(x, y) + K(x, x)F(x+y) - \int_x^\infty K'_x(x, t)F(t+y)\,dt. \tag{3.25}$$

Достаточно, очевидно, доказать, что интеграл в правой части (3.25) сходится равномерно относительно x в области $0 < \varepsilon \leqslant x$ при любом заданном $\varepsilon > 0$.

Но с помощью оценок (1.20) и (3.24) находим, что при $0 < \varepsilon \leqslant x \leqslant y$ и любом $N > x$

$$\int_N^\infty |K_x'(x, t)|\,|F(t+y)|\,dt \leqslant \frac{C_2}{4}\int_N^\infty \left|V\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| \sigma\left(\frac{y+t}{2}\right) dt +$$

$$+ CC_2\sigma(x)\int_N^\infty \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\sigma\left(\frac{y+t}{2}\right) dt \leqslant \frac{C_2}{4}\int_N^\infty \left|V\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) dt +$$

$$+ CC_2\sigma(\varepsilon)\,\sigma\left(\frac{N}{2}\right)\int_N^\infty \sigma\left(\frac{t}{2}\right) dt,$$

а так как

$$\int_N^\infty \left|V\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) dt = 2\int_{\frac{N+x}{2}}^\infty \sigma(s)\,|V(s)|\,ds = \sigma^2\left(\frac{N+x}{2}\right) \leqslant \sigma^2\left(\frac{N}{2}\right)$$

и

$$\int_N^\infty \sigma\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2\int_{\frac{N}{2}}^\infty \sigma(s)\,ds \leqslant 2\sigma_1\left(\frac{N}{2}\right),$$

то

$$\int_N^\infty |K_x'(x, t)|\,|F(t+y)|\,dt \leqslant \frac{C_2}{4}\sigma^2\left(\frac{N}{2}\right) + 2CC_2\sigma(\varepsilon)\,\sigma\left(\frac{N}{2}\right)\sigma_1\left(\frac{N}{2}\right).$$

Это неравенство и доказывает равномерную сходимость интеграла в правой части (3.25), а вместе с тем и существование производной $F'(u)$, удовлетворяющей этому равенству. Из (3.25) непосредственно усматриваем, что $F'(u)$ непрерывна при $u > 0$.

Полагая в равенстве (3.25) $y = x$ и учитывая при этом (см. (1.19)), что

$$K_x'(x, y)\big|_{y=x} = -\frac{1}{4}V(x) - \frac{1}{2}\int_x^\infty V(t)\,K(t, t)\,dt,$$

получим

$$F'(2x) = \frac{1}{4}V(x) + \frac{1}{2}\int_x^\infty V(t)\,K(t, t)\,dt +$$

$$+ K(x, x)\,F(2x) - \int_x^\infty K_x'(x, t)\,F(x+t)\,dt. \qquad (3.26)$$

В силу (1.17), (1.20) и (3.24) имеем:

$$\left|\int_x^\infty V(t)\,K(t, t)\,dt\right| \leqslant C\int_x^\infty |V(t)|\,\sigma(t)\,dt = \frac{C}{2}\sigma^2(x);$$

$$|K(x, x)F(2x)| \leqslant CC_2\sigma^2(x);$$

$$\left|\int_x^\infty K'_x(x, t) F(x+t)\, dt\right| \leqslant \frac{C_2}{4}\int_x^\infty \left|V\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) dt +$$

$$+ CC_2\sigma(x)\int_x^\infty \sigma^2\left(\frac{x+t}{2}\right) dt \leqslant \frac{C_2}{2}\int_x^\infty \left|V(s)\right| \sigma(s)\, ds + 2CC_2\sigma^2(x)\int_x^\infty \sigma(s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2}{4}\sigma^2(x) + 2CC_2\sigma^2(x)\,\sigma_1(x) \leqslant \left[\frac{C_2}{4} + 2CC_2\sigma_1(0)\right]\sigma^2(x)$$

и, следовательно,

$$\left|F'(2x) - \frac{1}{4}V(x)\right| \leqslant C_3\sigma^2(x), \tag{3.27}$$

где C_3 — постоянная.

Заметим еще, что

$$x\sigma(x) = x\int_x^\infty \left|V(s)\right| ds \leqslant \int_x^\infty s\left|V(s)\right| ds = \sigma_1(x)$$

и, следовательно,

$$\int_x^\infty x\sigma^2(x)\, dx \leqslant \int_0^\infty \sigma_1(x)\,\sigma(x)\, dx \leqslant \sigma_1(0)\int_0^\infty \sigma(x)\, dx = \sigma_1^2(0).$$

На основании этого неравенства и неравенства (1.4), из (3.27) следует, что

$$\int_0^\infty u\left|F'(u)\right| du < \infty. \tag{3.28}$$

Объединяя полученные нами в этом пункте результаты, имеем следующую теорему.

Теорема 3. 1. *Если потенциальная матрица $V(x)$ непрерывна при $0 < x < \infty$ и удовлетворяет условию (1.4), то матрица $F(u)$, определяемая равенством (3.18), обладает свойствами:*

$$1)\quad \left|F(u) + \frac{1}{2}\int_{\frac{u}{2}}^\infty V(t)\, dt\right| \leqslant C_1\sigma\left(\frac{u}{2}\right)\sigma_1\left(\frac{u}{2}\right), \tag{3.23}$$

где C_1 — постоянная;

2) при всех $u > 0$ существует непрерывная производная $F'(u)$, причем

$$\left|F'(u) - \frac{1}{4}V\left(\frac{u}{2}\right)\right| \leqslant C_3\sigma^2\left(\frac{u}{2}\right), \tag{3.27}$$

где C_3 — постоянная, и следовательно,

$$\int_0^\infty u\,|F'(u)|\, du < \infty. \tag{3.28}$$

Следствие. Справедливы неравенства:

$$\int_0^\infty |F(u)|\, du < \infty \tag{3.29}$$

и

$$\int_0^\infty u\,|F(u)|^2\, du < \infty. \tag{3.30}$$

Действительно,

$$|F(u)| \leqslant \int_u^\infty |F'(s)|\,ds,$$

$$u\,|F(u)| \leqslant u\int_u^\infty |F'(s)|\,ds \leqslant \int_u^\infty s\,|F'(s)|\,ds$$

и потому, в силу (3.28), имеем:

$$\int_0^\infty |F(u)|\,du \leqslant \int_0^\infty du \int_u^\infty |F'(s)|\,ds = \int_0^\infty |F'(s)|\,ds \int_0^s du = \int_0^\infty s\,|F'(s)|\,ds < \infty;$$

$$\int_0^\infty u\,|F(u)|^2\,du \leqslant \int_0^\infty |F(u)| \left\{\int_u^\infty s\,|F'(s)|\,ds\right\} du \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty s\,|F'(s)|\,ds \cdot \int_0^\infty |F(u)|\,du < \infty.$$

§ 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ

1. Леммы об интегральных уравнениях с ядром, зависящим от суммы

Обозначим через $L_n^p(\varepsilon, \infty)$, $p = 1, 2, \infty$, линейные нормированные пространства вектор-функций $x(t) = \{x_i(t)\}_1^n$, в которых нормы определены формулами:

$$\|x\|_p^{(\varepsilon)} = \left\{\int_\varepsilon^\infty \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}, \qquad (p = 1,2)$$

$$\|x\|_\infty^{(\varepsilon)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\ \operatorname{vrai}\max_{\varepsilon \leqslant t \leqslant \infty} |x_i(t)|. \qquad (p = \infty)$$

Мы будем в дальнейшем рассматривать векторы как однострочные матрицы и потому, пользуясь понятием абсолютной величины матрицы (см. (1.4)), можем, очевидно, записать:

$$\|x\|_1^{(\varepsilon)} = \int_\varepsilon^\infty |x(t)|\,dt. \tag{4.1}$$

Заметим, что при фиксированном t рассматриваемые вектор-функции образуют n-мерное векторное пространство, в котором обычным образом вводится скалярное произведение:

$$(x(t), y(t)) = \sum_{i=1}^n x_i(t)\,\overline{y_i(t)}. \tag{4.2}$$

Рассмотрим квадратную матрицу-функцию n-го порядка $A(t)$, у которой строки, а значит и столбцы, являются элементами пространства $L_n^1(\varepsilon, \infty)$, где $\varepsilon \geqslant 0$. Из теоремы о свертке двух суммируемых функций следует, что матрица $A(t)$ порождает в $L_n^1(\varepsilon, \infty)$ линейный оператор $\mathbf{A}$, определяемый формулой

$$\mathbf{A}[x] = \int_\varepsilon^\infty x(\xi)\,A(t+\xi)\,d\xi, \quad x(t) \in L_n^1(\varepsilon, \infty). \tag{4.3}$$

Оценим норму оператора $\mathbf{A}$. Имеем:

$$\|\mathbf{A}[x]\|_1^{(\varepsilon)} = \int_\varepsilon^\infty |\mathbf{A}[x]|\, dt \leqslant \int_\varepsilon^\infty dt \int_\varepsilon^\infty |x(\xi)|\,|A(t+\xi)|\, d\xi =$$

$$= \int_\varepsilon^\infty |x(\xi)|\, d\xi \int_{\varepsilon+\xi}^\infty |A(u)|\, du \leqslant \|x\|_1^{(\varepsilon)} \cdot \int_\varepsilon^\infty |A(u)|\, du$$

и, следовательно,

$$\|\mathbf{A}\| \leqslant \int_\varepsilon^\infty |A(u)|\, du. \tag{4.4}$$

Оператор $\mathbf{A}^*$, сопряженный к оператору $\mathbf{A}$, действует в пространстве $L_n^\infty(\varepsilon, \infty)$ и, как легко проверить, определяется формулой

$$\mathbf{A}^*[f] = \int_\varepsilon^\infty f(\xi)\, A_t(\eta+\xi)\, d\xi, \qquad f(\xi) \in L_n^\infty(\varepsilon, \infty). \tag{4.5}$$

Лемма 4.1. *Операторы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{A}^*$ *вполне непрерывны.*

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $L_n^1(\varepsilon, \infty)$ единичный шар $\|x\|_1^{(\varepsilon)} \leqslant 1$ и обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех вектор-функций вида

$$y(t) = \mathbf{A}[x], \quad \|x\|_1^{(\varepsilon)} \leqslant 1.$$

Непосредственно из определения имеем:

α) $\|y\|_1^{(\varepsilon)} \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|x\|_1^{(\varepsilon)} \leqslant \|\mathbf{A}\|$ для всех $y(t) \in \mathfrak{M}$.

Используя формулу (4.3), находим далее, что

$$\int_\varepsilon^\infty |y(t+h) - y(t)|\, dt \leqslant \int_\varepsilon^\infty dt \int_\varepsilon^\infty |x(\xi)|\,|A(t+h+\xi) - A(t+\xi)|\, d\xi =$$

$$= \int_\varepsilon^\infty |x(\xi)|\, d\xi \int_{\varepsilon+\xi}^\infty |A(u+h) - A(u)|\, du \leqslant \|x\|_1^{(\varepsilon)} \int_\varepsilon^\infty |A(u+h) - A(u)|\, du$$

и, значит, какое бы мы ни задали $\delta > 0$, при достаточно малом $|h|$ будет выполнено неравенство

β) $\displaystyle\int_\varepsilon^\infty |y(t+h) - y(t)|\, dt < \delta$ для всех $y(t) \in \mathfrak{M}$.

Согласно той же формуле (4.3) имеем, наконец,

$$\int_a^\infty |y(t)|\, dt \leqslant \int_a^\infty dt \int_\varepsilon^\infty |x(\xi)|\,|A(t+\xi)|\, d\xi =$$

$$= \int_\varepsilon^\infty |x(\xi)|\, d\xi \int_{a+\xi}^\infty |A(u)|\, du \leqslant \|x\|_1^{(\varepsilon)} \int_a^\infty |A(u)|\, du$$

и, значит, каково бы ни было заданное $\delta > 0$, при достаточно большом a справедливо неравенство

γ) $\displaystyle\int_a^\infty |y(t)|\, dt < \delta$ для всех $y(t) | \in \mathfrak{M}$.

Из α), β) и γ) следует, как известно*, что множество $\mathfrak{M}$ компактно в $L_n^1(\varepsilon, \infty)$, и тем самым полная непрерывность оператора $\mathbf{A}$, а значит и $\mathbf{A}^*$, доказана.

---

* См., например, В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 5, гл. V, п. 191.

Следствие. Уравнение

$$a(t) + \lambda x(t) + \mathbf{A}[x] = 0,$$

где $a(t) \in L_n^1(\varepsilon, \infty)$, имеет единственное решение $x(t) \in L_n^1(\varepsilon, \infty)$, если однородное уравнение

$$\lambda x(t) + \mathbf{A}[x] = 0$$

имеет только нулевое решение в $L_n^1(\varepsilon, \infty)$.

В дальнейшем нам придется иногда иметь дело с вектор-функциями, которые могут и не принадлежать введенным выше пространствам, но представимы в виде суммы двух слагаемых, из которых одно принадлежит $L_n^1(\varepsilon, \infty)$, а второе принадлежит одновременно $L_n^2(\varepsilon, \infty)$ и $L_n^\infty(\varepsilon, \infty)$. Множество всех таких вектор-функций обозначим через $\mathfrak{M}_n(\varepsilon, \infty)$.

Лемма 4.2. Если строки (а значит и столбцы) матрицы $B(t)$ принадлежат $\mathfrak{M}_n(\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon \geqslant 0$, то любое решение уравнения

$$f(t) + \int_\varepsilon^\infty f(\xi) B(t+\xi)\, d\xi = 0,$$

принадлежащее $\mathfrak{M}_n(\varepsilon, \infty)$, является элементом пространства $L_n^\infty(\varepsilon, \infty)$, а значит и элементом пространства $L_n^2(\varepsilon, \infty)$.

Доказательство. Пусть

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t), \quad B(t) = B_1(t) + B_2(t),$$

где $f_1(t)$ и строки матрицы $B_1(t)$ принадлежат $L_n^1(\varepsilon, \infty)$, а $f_2(t)$ и строки матрицы $B_2(t)$ принадлежат одновременно $L_n^2(\varepsilon, \infty)$ и $L_n^\infty(\varepsilon, \infty)$. Тогда

$$f_1(t) + \int_\varepsilon^\infty f_1(\xi) B_1(t+\xi)\, d\xi =$$

$$= -\left\{f_2(t) + \int_\varepsilon^\infty f_1(\xi) B_2(t+\xi)\, d\xi + \int_\varepsilon^\infty f_2(\xi) B_1(t+\xi)\, d\xi + \int_\varepsilon^\infty f_2(\xi) B_2(t+\xi)\, d\xi\right\}.$$

Построим теперь матрицу $B_3(t)$ со строками (и столбцами) из $L_n^\infty(\varepsilon, \infty)$ так, чтобы матрица

$$C(t) = B_1(t) - B_3(t)$$

удовлетворяла неравенству

$$\int_\varepsilon^\infty |C(t)|\, dt < \frac{1}{2}. \tag{4.6}$$

Мы получим, таким образом, для $f_1(t)$ уравнение

$$f_1(t) + \int_\varepsilon^\infty f_1(\xi) C(t+\xi)\, d\xi = \varphi(t), \tag{4.7}$$

где

$$\varphi(t) = -\left\{f_2(t) + \int_\varepsilon^\infty f_1(\xi) B_2(t+\xi)\, d\xi + \int_\varepsilon^\infty f_2(\xi) B_1(t+\xi)\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_\varepsilon^\infty f_2(\xi) B_2(t+\xi)\, d\xi + \int_\varepsilon^\infty f_1(\xi) B_3(t+\xi)\, d\xi\right\}.$$

Легко видеть, что вектор-функция $\varphi(t)$ принадлежит $L_n^\infty(\varepsilon, \infty)$.

Из неравенства (4.6) следует, что уравнение (4.7) имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений, сходящихся к $f_1(t)$ в метрике пространства $L_n^\infty(\varepsilon, \infty)$. Поэтому $f_1(t) \in L_n^\infty(\varepsilon, \infty)$, а так как по условию $f_1(t) \in L_n^1(\varepsilon, \infty)$, то $f_1(t) \in L_n^2(\varepsilon, \infty)$. Следовательно, и $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ принадлежит одновременно, как $L_n^\infty(\varepsilon, \infty)$, так и $L_n^2(\varepsilon, \infty)$, что и требовалось доказать.

Следствие. Если строки (а значит и столбцы) матрицы $A(t)$ принадлежат $L_n^1(\varepsilon, \infty)$, то любое решение уравнения

$$x(t) + \int_\varepsilon^\infty x(\xi) A(t+\xi)\, d\xi = 0$$

из пространства $L_n^1(\varepsilon, \infty)$ принадлежит одновременно $L_n^\infty(\varepsilon, \infty)$, а значит и $L_n^2(\varepsilon, \infty)$.

Замечание. Аналогично доказывается, что если строки матрицы $A(t)$ принадлежат $L_n^1(\varepsilon, \infty)$, то любое решение уравнения

$$f(t) + \int_\varepsilon^\infty f(\xi) A(t+\xi)\, d\xi = 0$$

из пространства $L_n^\infty(\varepsilon, \infty)$ принадлежит также $L_n^1(\varepsilon, \infty)$, а значит и $L_n^2(\varepsilon, \infty)$.

2. Разрешимость основного уравнения

Обозначим через $F_1(u)$ квадратную матрицу n-го порядка, удовлетворяющую следующим условиям.

1⁰. Ее строки, а значит и столбцы принадлежат $\mathfrak{M}_n(-\infty, \infty)$;

2⁰. Ее преобразование Фурье равно

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) e^{-i\lambda u} du = I - S(\lambda),$$

где $S(\lambda)$ унитарная матрица, обладающая еще свойством

$$S(-\lambda) = S^*(\lambda).$$

Это свойство матрицы $S(\lambda)$, как легко видеть*, равносильно эрмитовости матрицы $F_1(u)$.

Напомним, что если $S(\lambda)$ матрица рассеяния граничной задачи (2.1) с эрмитовой потенциальной матрицей $V(x)$, удовлетворяющей условию (1.4), то $I - S(\lambda)$ является преобразованием Фурье матрицы $F_1(u)$, обладающей свойствами 1⁰ и 2⁰ (см. п. 2 § 2).

---

* Действительно, если $S(-\lambda) = S^*(\lambda)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1^*(u) e^{-i\lambda u} du = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) e^{i\lambda u} du \right\}^* = [I - S(-\lambda)]^* =$$

$$= [I - S^*(\lambda)]^* = I - S(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) e^{-i\lambda u} du,$$

и значит, $F_1^*(u) = F_1(u)$.

Обратно, если $F_1^*(u) = F(u)$, то

$$I - S^*(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1^*(u) e^{i\lambda u} du = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) e^{i\lambda u} du = I - S(-\lambda)$$

и значит, $S(-\lambda) = S^*(\lambda)$.

Пусть вектор-функция $x(t)$ принадлежит $L_n^2(-\infty, \infty)$ и $\tilde{x}(\lambda)$ ее преобразование Фурье:

$$\tilde{x}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\lambda t} dt.$$

Из теорем о свертках* следует, что вектор-функция

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi)\, F_1(t+\xi)\, d\xi \tag{4.8}$$

существует для почти всех t, принадлежит $L_n^2(-\infty, \infty)$ и ее преобразование Фурье равно $\tilde{x}(-\lambda)[I - S(\lambda)]$. Поэтому

$$y(t) = x(-t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(-\lambda)\, S(\lambda)\, e^{i\lambda t} d\lambda. \tag{4.9}$$

Рассмотрим при $\varepsilon \geqslant 0$ в пространстве $L_n^2(\varepsilon, \infty)$ линейный оператор

$$\mathbf{F}_1[x] = \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi)\, F_1(t+\xi)\, d\xi.$$

Из формул (4.8) и (4.9), если положить там $x(t) = 0$ при $t < \varepsilon$, следует, что

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} (\mathbf{F}_1[x], \quad \mathbf{F}_1[x])\, dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{x}(-\lambda)\, S(\lambda), \quad \tilde{x}(-\lambda)\, S(\lambda))\, d\lambda$$

для любой вектор-функции $x(t) \in L_n^2(\varepsilon, \infty)$ (естественно, равной нулю вне промежутка (ε, ∞)), а отсюда, в силу унитарности $S(\lambda)$, получаем:

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} (\mathbf{F}_1[x]\ , \mathbf{F}_1[x])dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{x}(-\lambda),\ \tilde{x}(-\lambda))\ \ d\lambda = \int_{\varepsilon}^{\infty} (x(t),\ x(t))\, dt.$$

Поэтому уравнение

$$\nu x(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi)\, F_1(t+\xi)\, d\xi = 0$$

при $|\nu| > 1$ имеет в пространстве $L_n^2(\varepsilon, \infty)$ только нулевое решение.

Из тех же формул (4.8) и (4.9) следует, что

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} (\mathbf{F}_1[x], x(t))\, dt = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{x}(-\lambda)\, S(\lambda), \tilde{x}(\lambda))\, d\lambda. \tag{4.10}$$

Используя унитарность $S(\lambda)$ и неравенство Буняковского, получим

$$|(\tilde{x}(-\lambda)\ S(\lambda),\ \tilde{x}(\lambda))| \leqslant \frac{1}{2}\ [(\tilde{x}(-\lambda), \tilde{x}(-\lambda)) + (\tilde{x}(\lambda),\ \tilde{x}(\lambda))]$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{x}(-\lambda)\ \ S(\lambda), \tilde{x}(\lambda))\, d\lambda\right| \leqslant \int_{\varepsilon}^{\infty} (x(t),\ x(t))\ \ dt.$$

** См., например, Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, 1948. стр. 119, теоремы 64 и 65.

Это неравенство в соединении с (4.10) показывает, что

$$\operatorname{Re}\left\{\int_{\varepsilon}^{\infty}(x(t), x(t))\,dt \pm \int_{\varepsilon}^{\infty}(\mathrm{F}_1[x], x(t))\,dt\right\} \geqslant 0,$$

причем знак равенства возможен здесь только тогда, когда

$$(\tilde{x}(-\lambda) S(\lambda), \tilde{x}(\lambda)) = \pm\frac{1}{2}\left[(\tilde{x}(-\lambda), \tilde{x}(-\lambda)) + (\tilde{x}(\lambda), \tilde{x}(\lambda))\right]. \qquad (4.11)$$

Покажем еще, что (4.11) равносильно равенству

$$\tilde{x}(-\lambda) S(\lambda) = \pm\tilde{x}(\lambda). \qquad (4.12)$$

Действительно, из (4.12) находим, что

$$(\tilde{x}(-\lambda) S(\lambda), \tilde{x}(\lambda)) = \pm(\tilde{x}(\lambda), \tilde{x}(\lambda))$$

и, в силу унитарности $S(\lambda)$,

$$(\tilde{x}(-\lambda), \tilde{x}(-\lambda)) = (\tilde{x}(-\lambda) S(\lambda), \tilde{x}(-\lambda) S(\lambda)) = (\tilde{x}(\lambda), \tilde{x}(\lambda)),$$

а отсюда получаем (4.11).

Пусть выполнено (4.11). Тогда, полагая

$$\tilde{x}(-\lambda) S(\lambda) = \pm x(\lambda) + z(\lambda),$$

в силу унитарности $S(\lambda)$ получим

$$(\tilde{x}(-\lambda), \tilde{x}(-\lambda)) = (\tilde{x}(\lambda), \tilde{x}(\lambda)) \pm (\tilde{x}(\lambda), z(\lambda)) \pm (z(\lambda), \tilde{x}(\lambda)) + (z(\lambda), z(\lambda)),$$

а в силу (4.11) будем иметь

$$\pm(\tilde{x}(\lambda), \tilde{x}(\lambda)) + (z(\lambda), \tilde{x}(\lambda)) = \pm\frac{1}{2}\left[(\tilde{x}(-\lambda), \tilde{x}(-\lambda)) + (\tilde{x}(\lambda), \tilde{x}(\lambda))\right].$$

Из последних двух равенств заключаем, что $(z(\lambda), \tilde{x}(\lambda))$ вещественно, и далее находим, что

$$(z(\lambda), z(\lambda)) = (\tilde{x}(-\lambda), \tilde{x}(-\lambda)) - (\tilde{x}(\lambda), \tilde{x}(\lambda)) \mp 2(z(\lambda), \tilde{x}(\lambda)),$$

$$2(z(\lambda), \tilde{x}(\lambda)) = \pm\left[(\tilde{x}(-\lambda), \tilde{x}(-\lambda)) - (\tilde{x}(\lambda), \tilde{x}(\lambda))\right],$$

то-есть $(z(\lambda), z(\lambda)) = 0$ и, следовательно, $z(\lambda) = 0$.

Пусть теперь вектор-функция $x(t) \in L_n^2(\varepsilon, \infty)$ является решением уравнения

$$\pm x(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F_1(t+\xi)\,d\xi = 0, \quad \varepsilon \leqslant t < \infty.$$

Тогда по доказанному

$$\tilde{x}(-\lambda) S(\lambda) = \pm x(\lambda)$$

и, согласно (4.8) и (4.9), будем иметь

$$\pm x(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F_1(t+\xi)\,d\xi = \pm x(t) + x(-t) \mp x(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

то-есть

$$\pm x(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F_1(t+\xi)\,d\xi = x(-t), \quad -\infty < t < \infty.$$

Итак, мы доказали следующую лемму.

Лемма 4.3. *Пусть* $\varepsilon \geqslant 0$ *и* $F_1(u)$ *удовлетворяет условиям 1° и 2°. Тогда*

1) при $|\nu| > 1$ *уравнение*

$$\nu x(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F_1(t+\xi)\, d\xi = 0$$

имеет в пространстве $L_n^2(\varepsilon, \infty)$ *только нулевое решение;*

$$2)\ \operatorname{Re}\left\{\int_{\varepsilon}^{\infty}(x(t),\ x(t))\, dt \pm \int_{\varepsilon}^{\infty}\Big(\int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F_1(t+\xi)\, d\xi,\ \ x(t)\Big)\, dt\right\} \geqslant 0,$$

причем знак равенства достигается здесь тогда и только тогда, когда

$$\tilde{x}(-\lambda) S(\lambda) = \pm \tilde{x}(\lambda);$$

3) *если* $x(t) \in L_n^2(\varepsilon, \infty)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\pm x(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F_1(t+\xi)\, d\xi = 0, \quad \varepsilon \leqslant t < \infty,$$

то*

$$\pm x(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F_1(t+\xi)\, d\xi = x(-t), \quad -\infty < t < \infty.$$

Следствие. Пусть

$$F(u) = \sum_{\nu=1}^{p} M_\nu^2 e^{-\mu_\nu u} + F_1(u),$$

где M_ν — эрмитовы матрицы, $\mu_\nu > 0$. Для того, чтобы вектор-функция $x(t) \in L_n^2(\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon \geqslant 0$ удовлетворяла уравнению

$$x(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F(t+\xi)\, d\xi = 0, \tag{4.13}$$

необходимо и достаточно, чтобы для ее преобразования Фурье выполнялись равенства:

$$\tilde{x}(-i\mu_\nu) \cdot M_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots p), \tag{4.14}$$

$$\tilde{x}(-\lambda) S(\lambda) = \tilde{x}(\lambda). \tag{4.15}$$

Действительно, пусть $x(t) \in L_n^2(\varepsilon, \infty)$ удовлетворяет уравнению (4.13). Умножая обе части этого уравнения скалярно на $x(t)$ и интегрируя, получим

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}(x(t), x(t))\, dt + \int_{\varepsilon}^{\infty}\Big(\int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F_1(t+\xi)\, d\xi,\ x(t)\Big)\, dt +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{p}(\tilde{x}(-i\mu_\nu)\ \ M_\nu^2,\ \ \tilde{x}(-i\mu_\nu)) = 0$$

или (используя эрмитовость матриц M_ν)

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}(x(t),\ x(t))\, dt + \int_{\varepsilon}^{\infty}\Big(\int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F_1(t+\xi)\, d\xi, x(t)\Big)\, dt +$$

$$\sum_{\nu=1}^{p}(\tilde{x}(-i\mu_\nu) M_\nu, \tilde{x}(-i\mu_\nu) M_\nu) = 0.$$

---

* При этом $x(t) = 0$, если $t < \varepsilon$.

Беря вещественную часть от обеих частей этого равенства и используя утверждение 2) леммы 4.3, получим равенства (4.14) и (4.15). Достаточность этих условий проверяется непосредственно.

Заметим еще, что (4.15) равносильно равенству

$$x(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi)\, F_1(t+\xi)\, d\xi = 0, \quad \varepsilon \leqslant t < \infty.$$

Это следует непосредственно из формул (4.8), (4.9) и единственности преобразования Фурье.

Лемма 4.4. *Пусть строки (значит, и столбцы) матрицы* $\Phi(t)$ *принадлежат* $\mathfrak{M}_n(-\infty, \infty)$, *а ее преобразование Фурье*

$$\widetilde{\Phi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt$$

непрерывно на всей вещественной оси и стремится к нулю при $\lambda \to \pm\infty$. *Тогда при любом* $\varepsilon > -\infty$ *оператор*

$$\mathbf{\Phi}[x] = \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi)\, \Phi(t+\xi)\, d\xi$$

вполне непрерывен в пространстве $L_n^2(\varepsilon, \infty)$.

Доказательство. Известно, что оператор

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi)\; A(t+\xi)\, d\xi$$

будет вполне непрерывен в $L_n^2(\varepsilon, \infty)$, если матрица $A(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{\varepsilon}^{\infty} |A(t+\xi)|^2\, dt\, d\xi < \infty,$$

то-есть, если

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} dt \int_{\varepsilon+t}^{\infty} |A(u)|^2\, du = \int_{2\varepsilon}^{\infty} |A(u)|^2\, du \int_{\varepsilon}^{u-\varepsilon} dt = \int_{2\varepsilon}^{\infty} (u-2\varepsilon)\, |A(u)|^2\, du < \infty.$$

Построим теперь последовательность матриц $\{\Phi_k(t)\}$, удовлетворяющих условиям

$$\max_{-\infty<\lambda<\infty} |[\widetilde{\Phi}_k(\lambda) - \widetilde{\Phi}(\lambda)]_t| < \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{4.16}$$

где $\widetilde{\Phi}_k(\lambda)$ преобразование Фурье матрицы $\Phi_k(t)$, и

$$\int_{2\varepsilon}^{\infty} (u - 2\varepsilon)\, |\Phi_k(u)|^2\, du < \infty \qquad (k = 1, 2\ldots),$$

что, как легко видеть, возможно*.

Операторы

$$\mathbf{\Phi}_k[x] = \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi)\, \Phi_k(t+\xi)\, d\xi \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

будут тогда вполне непрерывными в $L_n^2(\varepsilon, \infty)$.

---

* Достаточно взять в качестве $\widetilde{\Phi}_k(\lambda)$ произвольные непрерывно дифференцируемые финитные матрицы, удовлетворяющие условию (4.16), а это возможно в силу условий, которым подчинена матрица $\widetilde{\Phi}(\lambda)$.

Далее

$$\Phi_k[x] = \int_\varepsilon^\infty x(\xi)\, \Phi_k(t+\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \tilde{x}(-\lambda)\, \tilde{\Phi}_k(\lambda)\, e^{i\lambda t}\, d\lambda,$$

$$\Phi[x] = \int_\varepsilon^\infty x(\xi)\, \Phi(t+\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \tilde{x}(-\lambda)\, \tilde{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda t}\, d\lambda$$

и, следовательно,

$$\{\| \Phi_k[x] - \Phi[x] \|_2^{(\varepsilon)}\}^2 = \int_\varepsilon^\infty ((\Phi_k - \Phi)[x],\ (\Phi_k - \Phi)[x])\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (\tilde{x}(-\lambda)\, [\tilde{\Phi}_k(\lambda) - \tilde{\Phi}(\lambda)],\ \tilde{x}(-\lambda)\, [\tilde{\Phi}_k(\lambda) - \tilde{\Phi}(\lambda)])\, d\lambda. \tag{4.17}$$

Заметим еще, что для любого вектора $p = \{p_\alpha\}_1^n$ и матрицы $A = \| a_{\alpha\beta} \|_1^n$ справедливо неравенство*

$$(pA,\ pA) \leqslant n\, |A_t|^2 \cdot (p,\ p).$$

Поэтому из (4.16) и (4.17) получаем:

$$\{\| \Phi_k[x] - \Phi[x] \|_2^{(\varepsilon)}\}^2 \leqslant \frac{n}{2\pi k^2} \int_{-\infty}^\infty (\tilde{x}(-\lambda),\ \tilde{x}(-\lambda))\, d\lambda =$$

$$= \frac{n}{k^2} \int_\varepsilon^\infty (x(t),\ x(t))\, dt = \frac{n}{k^2} \{\| x \|_2^{(\varepsilon)}\}^2,$$

а отсюда следует, что

$$\| \Phi_k - \Phi \| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{k}.$$

Это неравенство показывает, что операторы Φ_k при $k \to \infty$ равномерно сходятся к оператору Φ и, значит, оператор Φ вполне непрерывен в $L_n^2(\varepsilon, \infty)$.

Следствие. Если строки $\Phi(t)$ принадлежат $L_n^1(\varepsilon, \infty)$, то оператор

$$\Phi[x] = \int_\varepsilon^\infty x(\xi)\, \Phi(t+\xi)\, d\xi$$

вполне непрерывен в пространстве $L_n^2(\varepsilon, \infty)$.

Действительно, в данном случае ($\Phi(t) = 0$ при $t < \varepsilon$)

$$\tilde{\Phi}(\lambda) = \int_\varepsilon^\infty \Phi(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt,$$

очевидно, непрерывна и стремится к нулю при $\lambda \to \pm\infty$.

---

* Действительно, обозначая $pA = q$, имеем

$$|q_\alpha| = \left|\sum_{\beta=1}^n p_\beta\, a_{\beta\alpha}\right| \leqslant \sqrt{(p,p)} \sum_{\beta=1}^n |a_{\beta\alpha}| \leqslant \sqrt{(p,p)} \cdot |A_t|$$

и, значит,

$$(q,q) = \sum_{\alpha=1}^n |q_\alpha|^2 \leqslant n\, |A_t|^2 \cdot (p,p).$$

Возвращаясь к матрице $F_1(u)$, введенной в начале этого пункта, заметим, что из свойства 1° следует суммируемость ее элементов в каждом конечном промежутке. Поэтому если известно, что ее строки принадлежат $L_n^1(a, \infty)$ при каком-либо $a < \infty$, то они принадлежат $L_n^1(\varepsilon, \infty)$ при любом $\varepsilon > -\infty$ и, следовательно, операторы

$$\mathbf{F}_1[x] = \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F_1(t+\xi)\, d\xi$$

вполне непрерывны в $L_n^2(\varepsilon, \infty)$ при любом $\varepsilon > -\infty$.

Лемма 4.5. *Если $\varepsilon > 0$ и строки матрицы $F_1(t)$ принадлежат $L_n^1(\varepsilon, \infty)$, то уравнение*

$$\nu x(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F_1(t+\xi)\, d\xi = 0, \quad \varepsilon \leqslant t < \infty$$

при $|\nu| \geqslant 1$ *имеет в пространстве $L_n^2(\varepsilon, \infty)$ только нулевое решение.*

Доказательство. Справедливость этого утверждения при $|\nu| > 1$ была доказана в лемме 4.3. Если же $x(t) \in L_n^2(\varepsilon, \infty)$ удовлетворяет уравнению

$$\pm x(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F_1(t+\xi)\, d\xi = 0, \qquad \varepsilon \leqslant t < \infty,$$

то, согласно утверждению 3) леммы 4.3,

$$\pm x(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F_1(t+\xi)\, d\xi = x(-t), \quad -\infty < t < \infty$$

и, значит, при любом h

$$\pm x(t+h) + \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi)\, F_1(t+h+\xi)\, d\xi = x(-t-h),$$

$$\pm x(t-h) + \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F_1(t-h+\xi)\, d\xi = x(-t+h).$$

Считая теперь $0 < h < \frac{\varepsilon}{2}$ и помня, что $x(t) = 0$ при $t < \varepsilon$ по определению, из последних двух равенств получаем:

$$\pm [x(t+h) + x(t-h)] + \int_{\varepsilon-h}^{\infty} [x(\eta+h) + x(\eta-h)] F_1(t+\eta)\, d\eta = \\ = x(-t-h) + x(-t+h),$$

а отсюда (учитывая снова, что $x(t) = 0$ при $t < \varepsilon$)

$$\pm z_h(t) + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\infty} z_h(\eta) F_1(t+\eta) d\eta = 0, \qquad \frac{\varepsilon}{2} \leqslant t < \infty, \tag{4.18}$$

где

$$z_h(t) = x(t+h) + x(t-h), \quad 0 < h < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.19}$$

Таким образом, если бы $x(t)$ не было равно нулю почти всюду в промежутке (ε, ∞), то уравнение (4.18) имело бы в пространстве $L_n^2\left(\frac{\varepsilon}{2}, \infty\right)$

бесконечное множество линейно независимых решений (4.19), а это противоречит полной непрерывности оператора, порождаемого в $L_n^2\left(\frac{\varepsilon}{2}, \infty\right)$ матрицей $F_1(t)$ (см. следствие из предыдущей леммы).

Теорема 4.1. *Пусть M_ν — эрмитовы матрицы, $\mu_\nu > 0$, $\nu = 1, 2, \ldots p$, и строки матрицы*

$$F(u) = \sum_{\nu=1}^{p} M_\nu^2 e^{-\mu_\nu u} + F_1(u)$$

принадлежат $L_n^1(\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$.

Какова бы ни была вектор-функция $f(t) \in L_n^1(\varepsilon, \infty)$, уравнение

$$f(t) + x(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F(t+\xi)\, d\xi = 0, \quad \varepsilon \leqslant t < \infty$$

имеет в пространстве $L_n^1(\varepsilon, \infty)$ единственное решение.

Доказательство. Согласно следствиям из лемм 4.1 и 4.2 достаточно доказать, что однородное уравнение

$$x(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F(t+\xi)\, d\xi = 0, \qquad \varepsilon \leqslant t < \infty$$

не имеет ненулевых решений в $L_n^2(\varepsilon, \infty)$.

Но, в силу следствия из леммы 4.3, каждое решение $x(t) \in L_n^2(\varepsilon, \infty)$ этого уравнения удовлетворяет также уравнению

$$x(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F_1(t+\xi)\, d\xi = 0,$$

а это последнее уравнение, как доказано в лемме 4.5, имеет в $L_n^2(\varepsilon, \infty)$ только нулевое решение.

Теорема 4.2. *Если строки $F_1(t)$ принадлежат $L_n^1(\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$, то уравнение*

$$f(t) + x(t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F_1(t+\xi)\, d\xi = 0,$$

где $f(t) \in L_n^2(\varepsilon, \infty)$, можно решить методом последовательных приближений.

Доказательство. Согласно следствию из леммы 4.4, оператор

$$\mathbf{F}_1[x] = \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\xi) F_1(t+\xi)\, d\xi$$

вполне непрерывен в пространстве $L_n^2(\varepsilon, \infty)$. Из эрмитовости матрицы $F_1(t)$ следует также, что этот оператор самосопряженный. Воспользовавшись теперь леммой 4.5, в силу которой все собственные значения оператора $\mathbf{F}_1$ по модулю меньше 1, заключаем, что и $\|\mathbf{F}_1\| < 1$. Следовательно, ряд Неймана

$$(\mathbf{E} + \mathbf{F}_1)^{-1} = \mathbf{E} - \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1^2 - \ldots.$$

сходится, и теорема доказана.

Из теорем 4.1 и 4.2 следует, в частности, что основное уравнение (3.17), в котором матрица $F(u)$ построена по данным рассеяния граничной задачи (2.1), имеет единственное решение при любом $x > 0$ и что в случае, когда граничная задача (2.1) не имеет дискретного спектра, основное уравнение (3.17) можно решить методом последовательных приближений.

Заметим еще, что если на матрицу $F(u)$ не налагать никаких дополнительных условий, кроме тех, при которых была доказана теорема 4.1, то эта теорема не будет, вообще говоря, справедлива при $\varepsilon=0$. Однако, имеет место

Теорема 4. 3. *Если матрица*

$$F(u)=\sum_{\nu=1}^{p} M_\nu^2 e^{-\mu_\nu u}+F_1(u)$$

построена по данным рассеяния граничной задачи (2.1), *то уравнения*

$$(\mathrm{I})\quad x(t)+\int^{\infty} x(\xi)F(t+\xi)\,d\xi=0,\qquad 0\leqslant t<\infty$$

и

$$(\mathrm{II})\ \pm y(t)+\int_0^{\infty} y(\xi)F_1(-t-\xi)\,d\xi=0,\quad 0\leqslant t<\infty$$

не имеют ненулевых решений в $\mathfrak{M}_n(0,\ \infty)$, *а уравнение*

$$(\mathrm{III})\quad z(t)+\int_0^{\infty} z(\xi)F_1(t+\xi)\,d\xi=0,\quad 0\leqslant t<\infty$$

имеет столько линейно независимых решений, какова сумма рангов матриц* M_ν.

Доказательство. Согласно лемме 4.2, все решения рассматриваемых уравнений из $\mathfrak{M}_n(0,\ \infty)$ принадлежат $L_n^2(0,\ \infty)$.

Решениями же уравнений (II) и (III), согласно лемме 4.3, будут соответственно те $y(t)\in L_n^2(0,\ \infty)$ и $z(t)\in L_n^2(0,\ \infty)$, для которых**

$$\begin{aligned}\tilde y(-\lambda)S(\lambda)&=\pm\tilde y(\lambda),\\ \tilde z(-\lambda)S(\lambda)&=\tilde z(\lambda),\end{aligned}\tag{4.20}$$

где вектор функции

$$\tilde y(\lambda)=\int_0^{\infty} y(t)e^{-i\lambda t}\,dt,\quad \tilde z(\lambda)=\int_0^{\infty} z(t)e^{-i\lambda t}\,dt$$

аналитичны в нижней полуплоскости.

Воспользуемся теперь тем, что матрица рассеяния граничной задачи (2.1) имеет вид

$$S(\lambda)=\mathscr{E}_t(\lambda)\,\mathscr{E}_t^{-1}(-\lambda)=\mathscr{E}^{-1}(-\lambda)\,\mathscr{E}(\lambda)$$

(см. формулу (2.16)), где матрица $\mathscr{E}(\lambda)$ аналитична в нижней полуплоскости. Из этого представления $S(\lambda)$ и формул (4.20) следует:

$$\tilde y(-\lambda)\,\mathscr{E}_t(-\lambda)=\pm\tilde y(\lambda)\,\mathscr{E}_t(\lambda),\qquad \operatorname{Im}\lambda=0,\tag{4.21}$$

$$\tilde z(-\lambda)\,\mathscr{E}^{-1}(-\lambda)=\tilde z(\lambda)\,\mathscr{E}^{-1}(\lambda),\qquad \operatorname{Im}\lambda=0.\tag{4.22}$$

---

* Напомним, что эта сумма равна сумме размерностей всех собственных подпространств граничной задачи (2.1) (см. § 3, п. 1).

** При замене $F_1(u)$ на $F_1(-u)$, как в уравнении (II), следует, очевидно, $S(\lambda)$ заменить на $S(-\lambda)$.

Равенство (4.21) показывает, что аналитическая в верхней полуплоскости вектор-функция $y(-\lambda)\mathcal{E}_t(-\lambda)$ совпадает на вещественной оси с аналитической в нижней полуплоскости вектор-функцией $\pm\tilde{y}(\lambda)\mathcal{E}_t(\lambda)$. Значит, $\tilde{y}(\lambda)\mathcal{E}_t(\lambda)$ целая вектор-функция, а так как $\mathcal{E}_t(\lambda)\to I$ и $\tilde{y}(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\infty$, то $\tilde{y}(\lambda)\mathcal{E}_t(\lambda)\equiv 0$. Отсюда, в силу леммы 2.2, следует, что $\tilde{y}(\lambda)\equiv 0$ и, значит, $y(t)\equiv 0$. Таким образом, доказано, что уравнение (II) имеет в $\mathfrak{M}_n(0,\ \infty)$ только нулевое решение.

Обратимся теперь к равенству (4.22). Из него, в силу тех же соображений, следует, что вектор-функция

$$\varphi(\lambda)=\begin{cases}\tilde{z}(-\lambda)\,\mathcal{E}^{-1}(-\lambda) & \text{при } \operatorname{Im}\lambda\geqslant 0\\ \tilde{z}(\lambda)\,\mathcal{E}^{-1}(\lambda) & \text{при } \operatorname{Im}\lambda\leqslant 0\end{cases} \tag{4.23}$$

мероморфна во всей плоскости, причем имеет лишь конечное число простых полюсов в точках $\pm i\mu_\nu$, $\mu_\nu>0$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots\ p$, и, возможно, особенность в точке 0 (см. п. 3 § 2). Так как $\lambda\mathcal{E}^{-1}(\lambda)$ ограничена вблизи нуля (см. приложение 1, лемму 3), то вектор-функция $\lambda\varphi(\lambda)$ уже не имеет особенности в нуле и, согласно (4.23),

$$\lambda\varphi(\lambda)=\lambda\left[\sum_{\nu=1}^{p}\frac{\tilde{z}(-i\mu_\nu)\,N^{(\nu)}}{\lambda+i\mu_\nu}-\sum_{\nu=1}^{p}\frac{\tilde{z}(-i\mu_\nu)\,N^{(\nu)}}{\lambda-i\mu_\nu}\right]+\psi(\lambda),$$

где $N^{(\nu)}$ — вычет матрицы $\mathcal{E}^{-1}(\lambda)$ в точке $-i\mu_\nu$, а $\psi(\lambda)$ — целая функция, растущая медленнее, чем $|\lambda|$. Поэтому $\psi(\lambda)=c$, где c — постоянный вектор, и, значит,

$$\varphi(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{p}\frac{-2\,i\mu_\nu}{\lambda^2+\mu_\nu^2}\,\tilde{z}(-i\mu_\nu)\,N^{(\nu)}+\frac{c}{\lambda}\,.$$

Но при вещественных λ имеем, согласно (4.23), $\varphi(-\lambda)=\varphi(\lambda)$ и потому $c=0$. Итак,

$$\varphi(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{p}\frac{-2\,i\mu_\nu}{\lambda^2+\mu_\nu^2}\,\tilde{z}(-i\mu_\nu)\,N^{(\nu)}$$

и, в силу (4.23),

$$\tilde{z}(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{p}\frac{-2\,i\mu_\nu}{\lambda^2+\mu_\nu^2}\,\tilde{z}(-i\mu_\nu)\,N^{(\nu)}\,\mathcal{E}(\lambda). \tag{4.24}$$

Мы показали, таким образом, что для преобразования Фурье любого решения уравнения (III) имеет место равенство (4.24). Обратно, если мы зададим произвольно векторы $\tilde{z}(-i\mu_\nu)$ и построим $\tilde{z}(\lambda)$ по формуле (4.24), то непосредственная проверка показывает, что эта вектор-функция удовлетворяет второму из равенств (4.20) и, следовательно, является преобразованием Фурье решения уравнения (III).

Отсюда следует, что число линейно независимых решений уравнения (III) совпадает с числом линейно независимых вектор-функций вида

$$\sum_{\nu=1}^{p}\frac{-2\,i\mu_\nu}{\lambda^2+\mu_\nu^2}\,c^{(\nu)}N^{(\nu)}, \tag{4.25}$$

где $c^{(\nu)} = \{c_\alpha^{(\nu)}\}_1^n$, $\nu = 1, 2, \ldots p$, произвольные постоянные векторы, и поэтому, как легко видеть *, равно сумме рангов матриц $N^{(\nu)}$ или, что все равно (см. п. I § 3), сумме рангов матриц M_ν.

Нам осталось еще доказать, что уравнение (I) не имеет ненулевых решений. Согласно следствию леммы 4.3, всякое решение $x(t) \in L_n^2(0, \infty)$ уравнения (I) является одновременно решением уравнения (III) и удовлетворяет условиям

$$\tilde{x}(-i\mu_\nu) M_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p). \tag{4.26}$$

Поскольку $x(t)$ решение уравнения (III), то для ее преобразования Фурье $\tilde{x}(\lambda)$ выполнено равенство (4.24), т. е.

$$\tilde{x}(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{-2i\mu_\nu}{\lambda^2 + \mu_\nu^2} \tilde{x}(-i\mu_\nu) N^{(\nu)} \mathscr{E}(\lambda).$$

Заметим, наконец, что, согласно результатам п. I § 3, из равенства (4.26) следует **

$$\tilde{x}(-i\mu_\nu) N^{(\nu)} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p),$$

поэтому $\tilde{x}(\lambda) \equiv 0$ и, значит, $x(t) \equiv 0$.

§ 5. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА. РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ

1. Постановка задачи

Из полученных нами результатов (теоремы 2.1, 3.1 и 4.3) вытекает, что матрица рассеяния $S(\lambda)$, нормировочные матрицы M_ν и собственные значения λ_ν^2 $(\lambda_\nu = -i\mu_\nu)$, т. е. данные рассеяния граничной задачи (2.1) с эрмитовой потенциальной матрицей, удовлетворяющей условию (1.4), обладают следующими свойствами.

---

* Обозначим через $\mathfrak{M}$ линейное многообразие вектор-функций вида (4.25), через $\mathfrak{M}_\nu$ — линейные многообразия вектор-функций вида $\frac{-2i\mu_\nu}{\lambda^2 + \mu_\nu^2} cN^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2 \ldots p$, где c — произвольный постоянный вектор. Для любой вектор-функции $f(\lambda) \in \mathfrak{M}$ имеем по определению

$$f(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{p} f_\nu(\lambda), \qquad f_\nu(\lambda) \in \mathfrak{M}_\nu,$$

а так как из равенства $\sum_{\nu=1}^{p} f_\nu(\lambda) = 0$ следует, очевидно, что $f_\nu(\lambda) = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots p$, то $\mathfrak{M}$ есть прямая сумма линейных многообразий $\mathfrak{M}_\nu$.

Ясно также, что размерность $\mathfrak{M}_\nu$ равна рангу матрицы $N^{(\nu)}$, и, следовательно, размерность $\mathfrak{M}$ равна сумме рангов матриц $N^{(\nu)}$.

** Так как ядра матриц M_ν и P_ν одинаковы (см. п. I § 3), то из (4.26) следует $\tilde{x}(-i\mu_\nu) P_\nu = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots p$, а отсюда, в силу (3.10), получаем $\tilde{x}(-i\mu_\nu) N^{(\nu)} = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots p$.

I_s. *Матрица* $I - S(\lambda)$ *есть преобразование Фурье эрмитовой матрицы* $F_1(u)$, *так что*

$$F_1(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[I - S(\lambda)]\,e^{i\lambda u}d\lambda. \tag{5.1}$$

При этом элементы матрицы $F_1(u)$ *суммируемы на полуоси* $(0, \infty)$, *а на полуоси* $(-\infty, 0)$ *представимы в виде суммы двух функций, из которых одна суммируема, а другая ограничена и суммируема с квадратом.*

II_s. *Уравнение*

$$-x(t) + \int_{-\infty}^{0} x(\xi)\,F_1(t+\xi)\,d\xi = 0, \quad -\infty < t \leqslant 0$$

не имеет ненулевых решений в $\mathfrak{M}_n(-\infty, 0)$.

III_s. *При любом* $u > 0$ *существует производная* $F_1'(u)$ *и*

$$\int_0^{\infty} u\,|F_1'(u)|\,du < \infty.$$

IV. *Уравнение*

$$x(t) + \int_0^{\infty} x(\xi)\,F(t+\xi)\,d\xi = 0, \quad 0 \leqslant t < \infty,$$

где

$$F(u) = \sum_{\nu=1}^{p} M_\nu^2 e^{-\mu_\nu u} + F_1(u), \tag{5.2}$$

не имеет ненулевых решений в $\mathfrak{M}_n(0, \infty)$.

V. *Число линейно независимых решений уравнения*

$$x(t) + \int_0^{\infty} x(\xi)\,F_1(t+\xi)\,d\xi = 0, \quad 0 \leqslant t < \infty$$

равно сумме рангов матриц M_ν $(\nu = 1, 2, \ldots p)$.

Заметим, что первые три свойства относятся только к матрице рассеяния $S(\lambda)$; на это и указывает индекс s.

Мы переходим теперь к рассмотрению обратной задачи. Окончательный результат, который будет получен в этом и в следующих двух параграфах, заключается в том, что указанные пять свойств не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы унитарная матрица $S(\lambda)$, эрмитовы матрицы M_ν и числа $-\mu_\nu^2$, $\mu_\nu > 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots p)$ являлись данными рассеяния некоторой граничной задачи (2.1) с эрмитовой потенциальной матрицей, удовлетворяющей условию (1.4).

Условимся обозначать через $\mathbf{L}_n(\varepsilon, \infty)$ линейное нормированное пространство всех квадратных матриц-функций n-го порядка $\Phi(t)$, суммируемых в промежутке (ε, ∞), с нормой

$$\|\Phi\|^{(\varepsilon)} = \int_\varepsilon^{\infty} |\Phi(t)|\,dt$$

(см. п. 4 § 1).

Пусть произвольно заданы эрмитовы матрицы M_ν, числа $\mu_\nu > 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots p)$ и унитарная матрица $S(\lambda)$, обладающая свойством I_s. По этим данным мы, согласно формулам (5.1) и (5.2), можем построить матрицу $F(u)$, а по ней — основное уравнение

$$F(x+y) + K(x, y) + \int_x^{\infty} K(x,t)\,F(t+y)\,dt = 0 \tag{5.3}$$

с неизвестной матрицей $K(x, y)$. В силу теоремы 4.1, уравнение (5.3) имеет при любом фиксированном $x > 0$ единственное решение $K(x, y) \in \mathbf{L}_n(x, \infty)$.

При помощи $K(x, y)$ можно построить матрицу-функцию $\mathcal{E}(x, \lambda)$ по формуле

$$\mathcal{E}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} \cdot I + \int_0^\infty K(x, t)\, e^{-i\lambda t}\, dt. \tag{5.4}$$

В этом параграфе мы докажем, что матрицы-функции

$$U(x, \lambda) = \mathcal{E}(x, -\lambda) - \mathcal{E}(x, \lambda)\, S(-\lambda), \quad 0 < \lambda < \infty, \tag{5.5}$$

$$U(x, \lambda_\nu) = \mathcal{E}(x, \lambda_\nu)\, M_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots p, \tag{5.6}$$

где $\lambda_\nu = -i\mu_\nu$, образуют полную систему, то есть что для любой вектор-функции $f(t) = \{f_\alpha(t)\}_1^n$ из $L_n^2(0, \infty)$ справедливо следующее равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty (f(t), f(t))\, dt = \sum_{\nu=1}^p (u_f(\lambda_\nu), u_f(\lambda_\nu)) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (u_f(\lambda), u_f(\lambda))\, d\lambda, \tag{5.7}$$

где

$$u_f(\lambda) = \operatorname*{l.i.m}_{N \to \infty} \int_{\frac{1}{N}}^{N} f(t)\, U(t, \lambda)\, dt.$$

При доказательстве этого факта будет использовано только свойство I_s.

2. Вспомогательные сведения

Если в основном уравнении (5.3) сделать замену $t = \xi + x$, $y = \eta + x$, то оно примет вид

$$F(2x + \eta) + K(x, x + \eta) + \int_0^\infty K(x, x + \xi)\, F(2x + \xi + \eta)\, d\xi = 0, \tag{5.8}$$

где $x > 0$, $\eta \geqslant 0$.

Так как, согласно свойству I_s, матрица $F(u) \in \mathbf{L}_n(0, \infty)$, то она порождает в $\mathbf{L}_n(0, \infty)$ семейство операторов $\mathbf{F}_x$, $x > 0$, по формуле

$$\mathbf{F}_x[\Phi] = \int_0^\infty \Phi(t)\, F(2x + t + y)\, dt, \tag{5.9}$$

причем для нормы $\|\mathbf{F}_x\|$ этих операторов справедлива оценка

$$\|\mathbf{F}_x\| \leqslant \int_{2x}^\infty |F(u)|\, du \tag{5.10}$$

(см. п. I § 4).

Поэтому уравнение (5.8) можно записать в виде

$$(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)[K(x, x + \eta)] = -F(2x + \eta). \tag{5.11}$$

В силу теоремы 4.1, при каждом $x > 0$ существует ограниченный оператор $(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1}$.

Лемма 5.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует зависящая только от ε постоянная $c(\varepsilon)$ такая, что*

$$\|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1}\| \leqslant c(\varepsilon) \quad \text{для всех } x \geqslant \varepsilon. \tag{5.12}$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что, в силу (5.10)

$$\|\mathbf{F}_x\| \to 0 \text{ при } x \to +\infty$$

и потому найдется такое $a > \varepsilon$, что при $x \geqslant a$ будем иметь $\|\mathbf{F}_x\| \leqslant \frac{1}{2}$ и, следовательно,

$$\|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|\mathbf{F}_x\|} \leqslant 2 \quad \text{при} \quad x \geqslant a. \tag{5.13}$$

Далее используем очевидные равенства

$$\begin{gathered}
\mathbf{E} + \mathbf{F}_x = (\mathbf{E} + \mathbf{F}_{x_0})\{\mathbf{E} + (\mathbf{E} + \mathbf{F}_{x_0})^{-1}(\mathbf{F}_x - \mathbf{F}_{x_0})\}, \\
(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1} = \{\mathbf{E} + (\mathbf{E} + \mathbf{F}_{x_0})^{-1}(\mathbf{F}_x - \mathbf{F}_{x_0})\}^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{F}_{x_0})^{-1}, \\
(\mathbf{E} + \mathbf{F}_{x_0})^{-1} = \{\mathbf{E} + (\mathbf{E} + \mathbf{F}_{x_0})^{-1}(\mathbf{F}_x - \mathbf{F}_{x_0})\}(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1},
\end{gathered}$$

справедливые при любых $x > 0$, $x_0 > 0$, и находим из них, что

$$\begin{aligned}
&\|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1}\| \leqslant \|\{\mathbf{E} + (\mathbf{E} + \mathbf{F}_{x_0})^{-1}(\mathbf{F}_x - \mathbf{F}_{x_0})\}^{-1}\| \cdot \|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_{x_0})^{-1}\|, \\
&\|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_{x_0})^{-1}\| \leqslant \|\{\mathbf{E} + (\mathbf{E} + \mathbf{F}_{x_0})^{-1}(\mathbf{F}_x - \mathbf{F}_{x_0})\}\| \cdot \|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1}\|.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Так как для любой матрицы $\Phi(t) \in \mathbf{L}_n(0, \infty)$ имеем $(x > 0,\ x_0 > 0)$

$$\begin{aligned}
\|(\mathbf{F}_x - \mathbf{F}_{x_0})[\Phi]\|^{(0)} &= \int_0^\infty \left| \int_0^\infty \Phi(t)\,[F(2x + t + y) - F(2x_0 + t + y)]\,dt \right| dy \leqslant \\
&\leqslant \int_0^\infty |\Phi(t)|\,dt \int_0^\infty |F(2x + t + y) - F(2x_0 + t + y)|\,dy = \\
&= \int_0^\infty |\Phi(t)|\,dt \int_t^\infty |F(2x + s) - F(2x_0 + s)|\,ds \leqslant \\
&\leqslant \|\Phi\|^{(0)} \cdot \int_0^\infty |F(2x + s) - F(2x_0 + s)|\,ds,
\end{aligned}$$

то

$$\|\mathbf{F}_x - \mathbf{F}_{x_0}\| \leqslant \int_0^\infty |F(2x + s) - F(2x_0 + s)|\,ds$$

и, значит,

$$\|\mathbf{F}_x - \mathbf{F}_{x_0}\| \to 0 \quad \text{при} \quad x \to x_0 \qquad (x > 0,\ x_0 > 0).$$

Поэтому, каково бы ни было $\delta > 0$ $(\delta < 1)$, для всех x достаточно близких к x_0 $(x_0 > 0)$ будем иметь

$$\|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_{x_0})^{-1}(\mathbf{F}_x - \mathbf{F}_{x_0})\| < \delta.$$

Но тогда из неравенств (5.14) получим

$$\begin{gathered}
\|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \delta}\|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_{x_0})^{-1}\|, \\
\|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_{x_0})^{-1}\| \leqslant (1 + \delta)\|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1}\|,
\end{gathered}$$

а отсюда следует, что $\|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1}\|$ является непрерывной функцией от x при любом $x > 0$ и, значит, существует

$$\max_{\varepsilon \leqslant x \leqslant a} \|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1}\| = c(\varepsilon, a).$$

Отсюда и из (5.13) получаем неравенство (5.12), где

$$c(\varepsilon) = \max\{c(\varepsilon, a),\ 2\}.$$

Замечание. Если, кроме I_s, выполнено еще условие IV, то существует оператор $(\mathbf{E}+\mathbf{F}_0)^{-1}$. Так же, как и в лемме 5.1, можно доказать, что в этом случае справедливо неравенство

$$\|(\mathbf{E}+\mathbf{F}_x)^{-1}\| \leqslant c \text{ для всех } x \geqslant 0, \tag{5.12'}$$

где c — постоянная.

Обратимся теперь к уравнению (5.11). Согласно лемме 5.1, из него находим, что для всех $x \geqslant \varepsilon > 0$

$$\int_0^\infty |K(x, x+\eta)|\, d\eta = \int_x^\infty |K(x, y)|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \|(\mathbf{E}+\mathbf{F}_x)^{-1}\| \cdot \int_0^\infty |F(2x+\eta)|\, d\eta \leqslant c(\varepsilon) \int_{2x}^\infty |F(u)|\, du. \tag{5.15}$$

Аналогичным образом для матрицы $K^*(y, \eta)$ при всех $y \geqslant \varepsilon > 0$ имеем

$$\int_y^\infty |K^*(y, \eta)|\, d\eta \leqslant c(\varepsilon) \int_{2y}^\infty |F(u)|\, du. \tag{5.15'}$$

Лемма 5.2. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует зависящая только от ε постоянная $c_1(\varepsilon)$ такая, что*

$$\sup_{x,\ y\geqslant\varepsilon} \int_{-h}^{h} \Big| F(x+y+t) + \int_x^\infty K(x, \xi) F(y+t+\xi)\, d\xi \Big|\, dt \leqslant c_1(\varepsilon) \cdot \delta(\varepsilon, h),$$

$$\sup_{x,\ y\geqslant\varepsilon} \int_{-h}^{h} \Big| F(x+y+t) + \int_y^\infty F(x+t+\eta) K^*(y, \eta)\, d\eta \Big|\, dt \leqslant c_1(\varepsilon) \cdot \delta(\varepsilon, h),$$

где

$$\delta(\varepsilon, h) = \max_{u\geqslant 2\varepsilon} \int_{-h}^{h} |F(u+t)|\, dt \to 0$$

при $h \to 0$.

Доказательство. Пусть $x, y \geqslant \varepsilon$. Тогда

$$\int_{-h}^{h} \Big| F(x+y+t) + \int_x^\infty K(x, \xi) F(y+t+\xi)\, d\xi \Big|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-h}^{h} |F(x+y+t)|\, dt + \int_x^\infty |K(x, \xi)|\, d\xi \int_{-h}^{h} |F(y+t+\xi)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \max_{u\geqslant 2\varepsilon} \int_{-h}^{h} |F(u+t)|\, dt \cdot \Big\{1 + \int_x^\infty |K(x, \xi)|\, d\xi\Big\}$$

и, согласно (5.15),

$$\sup_{x,\ y\geqslant\varepsilon} \int_{-h}^{h} \Big| F(x+y+t) + \int_x^\infty K(x, \xi) F(y+t+\xi)\, d\xi \Big|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \max_{u\geqslant 2\varepsilon} \int_{-h}^{h} |F(u+t)|\, dt \cdot \Big\{1 + c(\varepsilon) \int_{2\varepsilon}^\infty |F(u)|\, du\Big\} = c_1(\varepsilon)\, \delta(\varepsilon, h).$$

Второе неравенство получается аналогично. Остается только доказать, что $\delta(\varepsilon, h) \to 0$ при $h \to 0$. Но это есть следствие того, что $F(u) \in \mathbf{L}_n(\varepsilon, \infty)$.

Следствие. При $x,\ y \geqslant \varepsilon > 0$ справедливы неравенства

$$\sup_{x,\ y \geqslant \varepsilon} \int_{-h}^{h} |K(x,\ y+t)|\,dt \leqslant c_1(\varepsilon)\cdot\delta(\varepsilon,\ h),$$
$$\sup_{x,\ y \geqslant \varepsilon} \int_{-h}^{h} |K^*(y,\ x+t)|\,dt \leqslant c_1(\varepsilon)\cdot\delta(\varepsilon,\ h). \tag{5.16}$$

Действительно, так как $K(x,\ y+t) = 0$ при $x > y+t$, а при $x \leqslant y+t$

$$K(x,\ y+t) = -F(x+y+t) - \int_x^{\infty} K(x,\ \xi)\,F(y+t+\xi)\,d\xi,$$

то первое из неравенств (5.16) непосредственно следует из доказанной леммы. Второе из этих неравенств доказывается аналогично.

3. Доказательство равенства Парсеваля

Заметим прежде всего, что эрмитовость матрицы $F_1(u)$, преобразованием Фурье которой (в силу свойства I_s) является матрица $I - S(\lambda)$, равносильна равенству

$$S(-\lambda) = S^*(\lambda) = S^{-1}(\lambda)$$

(см. сноску на стр. 40).

Используя это свойство матрицы $S(\lambda)$ и выражение (5.4) для матрицы $\mathscr{E}(x,\ \lambda)$, непосредственно получаем из (5.5):

$$U(x,\ \lambda)\,U^*(x,\ \lambda) = (e^{i\lambda(x-y)} + e^{-i\lambda(x-y)})\,I - e^{-i\lambda(x+y)}\,S(-\lambda) - e^{i\lambda(x+y)}S(\lambda) +$$
$$+ \int_x^{\infty} K(x,\ \xi)\,\{(e^{i\lambda(\xi-y)} + e^{-i\lambda(\xi-y)})\,I - e^{-i\lambda(\xi+y)}\,S(-\lambda) - e^{i\lambda(\xi+y)}\,S(\lambda)\}\,d\xi +$$
$$+ \int_y^{\infty} \{(e^{i\lambda(x-\eta)} + e^{-i\lambda(x-\eta)})\,I - e^{-i\lambda(x+\eta)}S(-\lambda) - e^{i\lambda(x+\eta)}S(\lambda)\}\,K^*(y,\ \eta)\,d\eta +$$
$$+ \int_y^{\infty}\int_x^{\infty} K(x,\ \xi)\,\{(e^{i\lambda(\xi-\eta)} + e^{-i\lambda(\xi-\eta)})\,I - e^{-i\lambda(\xi+\eta)}S(-\lambda) -$$
$$- e^{i\lambda(\xi+\eta)}S(\lambda)\}\,K^*(y,\ \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Но

$$(e^{i\lambda(x-y)} + e^{-i\lambda(x-y)})\,I - e^{-i\lambda(x+y)}S(-\lambda) - e^{i\lambda(x+y)}S(\lambda) =$$
$$= 4\sin\lambda x\cdot\sin\lambda y\cdot I + e^{-i\lambda(x+y)}\widetilde{F}_1(-\lambda) + e^{i\lambda(x+y)}\widetilde{F}_1(\lambda),$$

где

$$\widetilde{F}_1(\lambda) = I - S(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)\,e^{-i\lambda u}\,du,$$

и потому

$$U(x,\ \lambda)\,U^*(y,\ \lambda) - 4\sin\lambda x\cdot\sin\lambda y\cdot I = \widetilde{A}(x,\ y,\ \lambda) + \widetilde{A}(x,\ y,\ -\lambda), \tag{5.17}$$

где

$$\widetilde{A}(x,\ y,\ \lambda) = e^{i\lambda(x+y)}\widetilde{F}_1(\lambda) + \int_x^{\infty} K(x,\ \xi)\,\{(e^{i\lambda(\xi-y)} - e^{i\lambda(\xi+y)})\,I +$$
$$+ e^{i\lambda(\xi+y)}\widetilde{F}_1(\lambda)\}\,d\xi + \int_y^{\infty} \{(e^{i\lambda(x-\eta)} - e^{i\lambda(x+\eta)})\,I + e^{i\lambda(x+\eta)}\widetilde{F}_1(\lambda)\}\,K^*(y,\ \eta)\,d\eta +$$
$$+ \int_y^{\infty}\int_x^{\infty} K(x,\ \xi)\,\{(e^{i\lambda(\xi-\eta)} - e^{i\lambda(\xi+\eta)})\,I + e^{i\lambda(\xi+\eta)}\,\widetilde{F}_1(\lambda)\}\,K^*(y,\ \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Умножим теперь обе части формулы (5.17) на $\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\lambda h}{\lambda h}\right)^2$ и проинтегрируем по λ в промежутке $(0, \infty)$. Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\lambda h}{\lambda h}\right)^2 \left[\widetilde{A}(\lambda) + \widetilde{A}(-\lambda)\right] d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\sin\lambda h}{\lambda h}\right)^2 \widetilde{A}(\lambda)\, d\lambda$$

и функция $\left(\frac{\sin\lambda h}{\lambda h}\right)^2$ есть преобразование Фурье функции

$$\varphi_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2h}\left(1 - \frac{|t|}{2h}\right), & |t| \leqslant 2h \\ 0 & |t| > 2h, \end{cases}$$

то, пользуясь четностью функции $\varphi_h(t)$ и теоремой о свертке, получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \{U(x, \lambda) U^*(y, \lambda) - 4\sin\lambda x \sin\lambda y \cdot I\} \left(\frac{\sin\lambda h}{\lambda h}\right)^2 d\lambda = \int_{-2h}^{2h} \varphi_h(t)\, A(x, y, t)\, dt,$$

где

$$A(x, y, t) = F_1(x+y+t) + K(x, y+t) - K(x, t-y) +$$
$$+ \int_x^\infty K(x, \xi) F_1(\xi + y + t)\, d\xi + K^*(y, x+t) - K^*(y, t-x) +$$
$$+ \int_y^\infty F_1(x+\eta+t) K^*(y, \eta)\, d\eta + \int_y^\infty K(x, \eta+t) K^*(y, \eta)\, d\eta -$$
$$- \int_y^\infty K(x, t-\eta) K^*(y, \eta)\, d\eta + \int_y^\infty \int_x^\infty K(x, \xi) F_1(\xi+\eta+t) K^*(y, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Так как интегрирование по t ведется в пределах $(-2h, 2h)$, то при любом $\varepsilon > 0$ для всех $x, y \geqslant \varepsilon$ и $2h < \varepsilon$ получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \{U(x, \lambda) U^*(y, \lambda) - 4\sin\lambda x \cdot \sin\lambda y \cdot I\} \left(\frac{\sin\lambda h}{\lambda h}\right)^2 d\lambda =$$
$$= \int_{-2h}^{2h} \varphi_h(t) \{F_1(x+y+t) + K(x, y+t) + \int_x^\infty K(x, \xi) F_1(\xi + y + t)\, d\xi +$$
$$+ K^*(y, x+t) + \int_y^\infty F_1(x+\eta+t) K^*(y, \eta)\, d\eta + \int_y^\infty K(x, \eta+t) K^*(y, \eta)\, d\eta +$$
$$+ \int_y^\infty \int_x^\infty K(x, \xi) F_1(\xi+\eta+t) K^*(y, \eta)\, d\xi\, d\eta\}\, dt. \tag{5.18}$$

Далее имеем (см. (5.6) и (5.4)):

$$U(x, \lambda_\nu)\; U^*(y, \lambda_\nu) = M_\nu^2 e^{-\mu_\nu(x+y)} + \int_x^\infty K(x, \xi) M_\nu^2 e^{-\mu_\nu(\xi+y)}\, d\xi +$$
$$+ \int_y^\infty M_\nu^2 K^*(y, \eta)\, e^{-\mu_\nu(x+\eta)} d\eta + \int_y^\infty \int_x^\infty K(x, \xi) M_\nu^2 e^{-\mu_\nu(\xi+\eta)} K^*(y, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Умножая эти равенства на $e^{-\mu_\nu t}\varphi_h(t)$, суммируя по $\nu = 1, 2, \ldots p$ и интегрируя по t, получим:

$$\sum_{\nu=1}^{p} U(x,\ \lambda_\nu) U^*(y,\ \lambda_\nu)\left(\frac{\operatorname{sh}\mu_\nu h}{\mu_\nu h}\right)^2 =$$

$$= \int_{-2h}^{2h} \varphi_h(t)\left\{\sum_{\nu=1}^{p}[M_\nu^2 e^{-\mu_\nu(x+y+t)} + \int_x^\infty K(x,\ \xi)\, M_\nu^2 e^{-\mu_\nu(\xi+y+t)} d\xi +\right.$$

$$\left. + \int_y^\infty M_\nu^2 K^*(y,\ \eta) e^{-\mu_\nu(x+\eta+t)}\, d\eta + \int_y^\infty\int_x^\infty K(x,\ \xi)\, M_\nu^2 e^{-\mu_\nu(\xi+\eta+t)} K^*(y,\ \eta)\, d\xi d\eta]\right\} dt.$$

Прибавляя это равенство к (5.18) и используя формулу

$$F(u) = \sum_{\nu=1}^{p} M_\nu^2 e^{-\mu_\nu u} + F_1(u),$$

получим:

$$\sum_{\nu=1}^{p} U(x,\ \lambda_\nu) U^*(y,\ \lambda_\nu)\left(\frac{\operatorname{sh}\mu_\nu h}{\mu_\nu h}\right)^2 + \tag{5.19}$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \{U(x,\ \lambda)\, U^*(y,\ \lambda) - 4\sin\lambda x \sin\lambda y \cdot I\}\left(\frac{\sin\lambda h}{\lambda h}\right)^2 d\lambda = R(x,\ y,\ h),$$

где

$$R(x,\ y,\ h) = \int_{-2h}^{2h} \varphi_h(t)\, \{F(x+y+t) + K(x,\ y+t) +$$

$$+ \int_x^\infty K(x,\ \xi)\, F(\xi+y+t)\, d\xi + K^*(y,\ x+t) + \int_y^\infty F(x+\eta+t)\, K^*(y,\ \eta)\, d\eta +$$

$$+ \int_y^\infty K(x,\ \eta+t)\, K^*(y,\ \eta)\, d\eta + \int_y^\infty\int_x^\infty K(x,\ \xi)\, F(\xi+\eta+t)\, K^*(y,\ \eta)\, d\xi\, d\eta\}\, dt.$$

Из этой формулы и основного уравнения (5.3) следует, очевидно, что $R(x,\ y,\ h) = 0$ при $x,\ y \geqslant \varepsilon$, $2h < \varepsilon$ и $|x-y| > 2h$. Если же $|x-y| \leqslant 2h$, то с помощью леммы 5.2, оценок (5.15′), (5.16) и неравенства $|\varphi_h(t)| \leqslant \frac{1}{2h}$ находим, что

$$|R(x,\ y,\ h)| < \frac{1}{h} c_2(\varepsilon) \cdot \delta(\varepsilon,\ 2h).$$

Поэтому

$$\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} |R(x,\ y,\ h)|\, dx\, dy < c_3(\varepsilon) \cdot \delta(\varepsilon,\ 2h), \tag{5.20}$$

где $c_3(\varepsilon)$ — постоянная, зависящая только от ε.

Пусть теперь $f(t) = \{f_\alpha(t)\}_1^n$ произвольная вектор-функция, все компоненты которой ограничены и равны нулю вне промежутка $\left(\varepsilon,\ \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Рассматривая этот вектор как однострочную матрицу, умножим равенство (5.19) слева на $f(x)$, справа на $f^*(y)$ и проинтегрируем по x и y. Если обозначить

$$u_f(\lambda) = \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} f(t)\, U(t,\ \lambda)\, dt,$$

$$s_f(\lambda) = \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} f(t) \sin\lambda t\, dt,$$

то результат интегрирования запишется в виде:

$$\sum_{\nu=1}^{p}(u_f(\lambda_\nu),\ u_f(\lambda_\nu))\left(\frac{\operatorname{sh}\mu_\nu h}{\mu_\nu h}\right)^2+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty (u_f(\lambda),\ u_f(\lambda))\left(\frac{\sin\lambda h}{\lambda h}\right)^2 d\lambda=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty (s_f(\lambda),\ s_f(\lambda))\left(\frac{\sin\lambda h}{\lambda h}\right)^2 d\lambda+\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,R(x,\ y,\ h)\,f^*(y)\,dx\,dy.$$

Отсюда при $h\to 0$, в силу (5.20) и равенства Парсеваля для синус-преобразований Фурье, получим (5.7).

Таким образом, равенство Парсеваля (5.7) доказано для ограниченных вектор-функций, исчезающих вне некоторого промежутка $\left(\varepsilon,\ \frac{1}{\varepsilon}\right)$, где $\varepsilon>0$ произвольно. Так как множество таких вектор-функций плотно в $L_n^2(0,\ \infty)$, то равенство Парсеваля (5.7) справедливо для всех вектор-функций из $L_n^2(0,\ \infty)$.

§ 6. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ $U(x,\ \lambda)$

1. Оценки для $K(x,\ y)$

Пусть задана матрица $F(u)$, стремящаяся к нулю, когда $u\to\infty$, и удовлетворяющая следующим двум условиям:

(A_ε) при всех $u>0$ существует производная $F'(u)$ и

$$\int_\varepsilon^\infty u\,|F'(u)|\,du<\infty \quad \text{при любом} \quad \varepsilon>0;$$

(B_ε) каковы бы ни были $\varepsilon>0$ и матрица $\Psi(x)\in\mathbf{L}_n(\varepsilon,\ \infty)$, уравнение

$$\Phi(x)+\int_\varepsilon^\infty \Phi(t)\,F(t+x)\,dt=\Psi(x)$$

имеет единственное решение в $\mathbf{L}_n(\varepsilon,\ \infty)$.

Эти условия заведомо выполнены, если $F(u)$ построена по формулам (5.1), (5.2) с помощью заданных эрмитовых матриц M_ν, чисел $\mu_\nu>0$ и унитарной матрицы $S(\lambda)$, обладающей свойствами I_s и III_s. Если эти данные обладают, кроме того, свойством IV, то $F(u)$ удовлетворяет более сильным условиям:

(A_0) $\displaystyle\int_0^\infty u\,|F'(u)|\,du<\infty;$

(B_0) каковы бы ни были $\varepsilon\geqslant 0$ и матрица $\Psi(x)\in\mathbf{L}_n(\varepsilon,\ \infty)$, уравнение

$$\Phi(x)+\int_\varepsilon^\infty \Phi(t)\,F(t+x)\,dt=\Psi(x)$$

имеет единственное решение в $\mathbf{L}_n(\varepsilon,\ \infty)$.

Для простоты изложения мы еще будем предполагать, что $F'(u)$ при $u>0$ непрерывна.

Пусть теперь $\mathscr{E}(x,\ \lambda)$ матрица, определенная формулой

$$\mathscr{E}(x,\ \lambda)=e^{-i\lambda x}I+\int_x^\infty K(x,\ t)\,e^{-i\lambda t}\,dt, \tag{6.1}$$

где $K(x, y)$ является решением основного уравнения

$$F(x+y)+K(x, y)+\int_x^\infty K(x, t)F(t+y)\,dt=0, \tag{6.2}$$

построенного по заданной матрице $F(u)$.

Мы докажем в этом параграфе, что $\mathscr{E}(x, \lambda)$ является решением дифференциального уравнения

$$Y''+\lambda^2 Y=V(x)Y, \tag{6.3}$$

где

$$V(x)=-2\frac{d}{dx}K(x, x), \tag{6.4}$$

причем

$$\int_\varepsilon^\infty x|V(x)|\,dx<\infty \text{ при любом } \varepsilon>0. \tag{6.5}$$

При доказательстве этого факта используются только условия (A_ε) и (B_ε), а специальный вид матрицы $F(u)$ и другие ее свойства несущественны. В случае, когда $F(u)$ удовлетворяет условиям (A_0) и (B_0), будет доказано также неравенство

$$\int_0^\infty x|V(x)\,dx<\infty.$$

Начнем с некоторых вспомогательных неравенств.

Из условия (A_ε), как легко видеть*, следует, что $F(u)\in \mathbf{L}_n(\varepsilon, \infty)$ при любом $\varepsilon>0$. Поэтому для операторов

$$\mathbf{F}_x[\Phi]=\int_0^\infty \Phi(t)F(2x+t+y)\,dt, \tag{6.6}$$

порождаемых при $x>0$ матрицей $F(u)$ в пространстве $\mathbf{L}_n(0, \infty)$, справедлива лемма 5.1 и, следовательно, матрица $K(x, y)$, определяемая уравнением (6.2), удовлетворяет неравенству (5.15). Полагая

$$K(x, x+\eta)=A(x, \eta), \tag{6.7}$$

можем это неравенство записать в виде:

$$\int_0^\infty |A(x, \eta)|\,d\eta\leqslant c(\varepsilon)\int_{2x}^\infty |F(u)|\,du \qquad (x\geqslant\varepsilon).$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned}\tau(x)&=\int_x^\infty |F'(u)|\,du \qquad (x>0),\\ \tau_1(x)&=\int_x^\infty u|F'(u)|\,du \qquad (x>0)\end{aligned} \tag{6.8}$$

и замечая, что

$$\int_{2x}^\infty |F(u)|\,du\leqslant\int_{2x}^\infty du\int_u^\infty |F'(s)|\,ds=\int_{2x}^\infty |F'(s)|\,ds\int_{2x}^s du\leqslant\tau_1(2x),$$

---

* $\int_\varepsilon^\infty |F(u)|\,du\leqslant\int_\varepsilon^\infty du\int_u^\infty |F'(s)|\,ds=\int_\varepsilon^\infty |F'(s)|\,ds\int_\varepsilon^s du\leqslant\int_\varepsilon^\infty s|F'(s)\,ds<\infty.$

получаем

$$\int_0^\infty |A(x,\ \eta)|\,d\eta = \int_x^\infty |K(x,\ y)|\,dy \leqslant c(\varepsilon)\,\tau_1(2x), \qquad (x \geqslant \varepsilon). \tag{6.9}$$

Используя этот результат и неравенство

$$|F(u)| \leqslant \int_u^\infty |F'(s)|\,ds = \tau(u),$$

находим из уравнения (6.2), что при $0 < \varepsilon \leqslant x \leqslant y$

$$|K(x,\ y)| \leqslant |F(x+y)| + \int_x^\infty |K(x,\ t)|\,|F(t+y)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \tau(x+y) + \tau(x+y)\int_x^\infty |K(x,\ t)\,dt \leqslant \tau(x+y)\,\{1 + c(\varepsilon)\,\tau_1(2x)\},$$

т. е., каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$|K(x,\ y)| \leqslant c_1(\varepsilon)\,\tau(x+y) \qquad (0 < \varepsilon \leqslant x \leqslant y), \tag{6.10}$$

$$|A(x,\ \eta)| = |K(x,\ x+\eta)| \leqslant c_1(\varepsilon)\,\tau(2x+\eta) \quad (0 < \varepsilon \leqslant x;\ 0 \leqslant \eta), \tag{6.11}$$

где $c_1(\varepsilon) = 1 + c(\varepsilon)\,\tau_1(2\varepsilon)$.

Если $F(u)$ удовлетворяет условиям (A_0) и (B_0), так что для оператора $\mathbf{F}_x$ выполнено неравенство (5.12′) (см. замечание к лемме 5.1), то вместо (6.10) и (6.11) будем, очевидно, иметь:

$$|K(x,\ y)| \leqslant c_1\tau(x+y) \quad (0 \leqslant x \leqslant y;\ y \neq 0), \tag{6.10′}$$

$$|A(x,\ \eta)| \leqslant c_1\tau(2x+\eta) \qquad (x \geqslant 0,\ \eta \geqslant 0,\ x+\eta \neq 0), \tag{6.11′}$$

где $c_1 = 1 + c\,\tau_1(0)$.

2. Существование производных матрицы $K(x, y)$

Лемма 6.1. *Если матрица $F(u)$ удовлетворяет условиям (A_ε) и (B_ε), то при каждом $x > 0$ и $y \geqslant x$ существует частная производная $K'_y(x, y)$ и ее можно получить из* (6.2) *дифференцированием по y, т. е.*

$$K'_y(x,\ y) = -F'(x+y) - \int_x^\infty K(x,\ t)\,F'(t+y)\,dt. \tag{6.12}$$

Доказательство. Считая $x > 0$ фиксированным и используя неравенство (6.10), имеем при любом $N > x$:

$$\left|\int_N^\infty K(x,\ t)\,F'(t+y)\,dt\right| \leqslant c_1(x)\int_N^\infty \tau(x+t)\,|F'(t+y)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c_1(x)\,\tau(N)\int_{N+y}^\infty |F'(s)|\,ds \leqslant c_1(x)\cdot\tau^2(N),$$

где $c_1(x)$ — постоянная, зависящая от x. Из этой оценки следует, что интеграл в правой части (6.12) сходится равномерно относительно $y \geqslant x$, а это и доказывает справедливость формулы (6.12).

Замечание 1. Из (6.12) усматриваем, что $K'_y(x,\ y)$ непрерывна по переменной y и что при всяком фиксированном $x > 0$ $K'_y(x,\ y) \in \mathbf{L}_n(x,\ \infty)$.

Замечание 2. Предполагая дополнительно, что $F(u)$ имеет при всех $u>0$ непрерывную вторую производную и что

$$\int_x^\infty |F''(u)|\,du<\infty \text{ при всех } x>0,$$

можно так же доказать существование непрерывной по y производной $K''_{yy}(x, y)$, $x>0$, $y \geqslant x$, и равенство

$$K''_{yy}(x, y)=-F''(x+y)-\int_x^\infty K(x, t)\,F''(t+y)\,dt. \tag{6.13}$$

Из этого равенства следует, что при каждом фиксированном $x>0$ $K''_{yy}(x, y)\in \mathbf{L}_n(x, \infty)$.

Рассмотрим теперь матрицу $A(x, \eta)$, определяемую формулой (6.7). Из (6.2) находим, что $A(x, \eta)$ удовлетворяет уравнению

$$A(x, \eta)+F(2x+\eta)+\int_0^\infty A(x, \xi)\,F(2x+\xi+\eta)\,d\xi=0. \tag{6.14}$$

Лемма 6.2. *Если матрица* $F(u)$ *удовлетворяет условиям* (A_ε) и (B_ε), *то при всяком* $x>0$ *и* $\eta \geqslant 0$ *существует* $A'_x(x, \eta)$ *и справедливо равенство*

$$\begin{aligned}A'_x(x, \eta)=-2F'(2x+\eta)-2\int_0^\infty A(x, \xi)\,F'(2x+\xi+\eta)\,d\xi-\\ -\int_0^\infty A'_x(x, \xi)\,F(2x+\xi+\eta)\,d\xi,\end{aligned} \tag{6.15}$$

которое получается из (6.14) *дифференцированием по* x.

Доказательство. Заменяя в (6.14) x на $x+h$, вычитая из полученного равенства само уравнение (6.14) и деля эту разность на h, получим

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_x A(x, \eta)}{h}+\frac{\Delta_x F(2x+\eta)}{h}+\int_0^\infty \frac{\Delta_x A(x, \xi)}{h}\,F(2x+2h+\xi+\eta)\,d\xi+\\ +\int_0^\infty A(x, \xi)\,\frac{\Delta_x F(2x+\xi+\eta)}{h}\,d\xi=0,\end{aligned} \tag{6.16}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_x A(x, \eta)&=A(x+h, \eta)-A(x, \eta),\\ \Delta_x F(2x+\eta)&=F(2x+2h+\eta)-F(2x+\eta)=\\ &=2hF'(2x+2\theta h+\eta)\qquad (0<\theta<1).\end{aligned}$$

Обозначая через $\Phi_h(x, \eta)$ выражение

$$\Phi_h(x, \eta)=-\frac{\Delta_x F(2x+\eta)}{h}-\int_0^\infty A(x, \xi)\,\frac{\Delta_x F(2x+\xi+\eta)}{h}\,d\xi$$

и замечая, что при фиксированных $x>0$ и $h\neq 0$, удовлетворяющих условию $x+h>0$, матрицы $\Phi_h(x, \eta)$ и $\frac{\Delta_x A(x, \eta)}{h}$ принадлежат $\mathbf{L}_n(0, \infty)$ (см. (6.9)), можем записать уравнение (6.16) в виде

$$(\mathbf{E}+\mathbf{F}_{x+h})\left[\frac{\Delta_x A(x, \eta)}{h}\right]=\Phi_h(x, \eta)$$

(см. (6.6)), откуда

$$\frac{\Delta_x A(x,\ \eta)}{h} = (\mathbf{E} + \mathbf{F}_{x+h})^{-1}[\Phi_h(x,\ \eta)]. \tag{6.17}$$

Используя свойства $F(u)$ и неравенства (6.9), (6.11), легко проверить также, что при $h \to 0$ матрица $\Phi_h(x,\ \eta)$ сходится к матрице

$$\Phi_0(x,\ \eta) = -2F'(2x+\eta) - 2\int_0^\infty A(x,\ \xi)F'(2x+\xi+\eta)\,d\xi$$

как в смысле обычной сходимости, так и в метрике $\mathbf{L}_n(0,\ \infty)$ по переменной η.

Так как, далее (см. (5.10)), при всяком $x > 0$

$$\|\mathbf{F}_{x+h} - \mathbf{F}_x\| \leqslant \int_{2x}^\infty |F(u+2h) - F(u)|\,du \to 0,$$

когда $h \to 0$, то с помощью очевидного равенства

$$(\mathbf{E} + \mathbf{F}_{x+h})^{-1} - (\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1} = \\ = \{[\mathbf{E} + (\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1}(\mathbf{F}_{x+h} - \mathbf{F}_x)]^{-1} - \mathbf{E}\}(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1}$$

находим, что

$$\|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_{x+h})^{-1} - (\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1}\| \to 0 \tag{6.18}$$

при $h \to 0$.

Эти результаты совместно с равенством (6.17) позволяют доказать, что $\frac{\Delta_x A(x,\ \eta)}{h}$ сходится при $h \to 0$ в метрике $\mathbf{L}_n(0,\ \infty)$ по переменной η к $(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1}[\Phi_0(x,\ \eta)]$. Действительно,

$$\|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_{x+h})^{-1}[\Phi_h(x,\ \eta)] - (\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1}[\Phi_0(x,\ \eta)]\|^{(0)} \leqslant \\ \leqslant \|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_{x+h})^{-1} - (\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1}\| \cdot \|\Phi_h\|^{(0)} + \|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1}\| \cdot \|\Phi_h - \Phi_0\|^{(0)} \to 0$$

при $h \to 0$.

Обращаясь теперь к исходному уравнению (6.16), видим, что три последних члена в его левой части имеют обычные пределы при $h \to 0$. Поэтому существует

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_x A(x,\ \eta)}{h} = A'_x(x,\ \eta) \qquad (x > 0,\ \eta \geqslant 0)$$

и, в силу ранее доказанного,

$$A'_x(x,\ \eta) = (\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1}[\Phi_0(x,\ \eta)],$$

что равносильно равенству (6.15).

Замечание 1. Так как $A(x,\ 0) = K(x,\ x)$, то нами доказано, что при условиях леммы 6.1 существует $\frac{d}{dx}K(x,\ x)$; из равенства (6.15) при $\eta = 0$ получаем $(x > 0)$:

$$\frac{d}{dx}K(x,\ x) = -2F'(2x) - 2\int_0^\infty A(x,\ \xi)F'(2x+\xi)\,d\xi - \\ - \int_0^\infty A'_x(x,\ \xi)F(2x+\xi)\,d\xi. \tag{6.19}$$

Замечание 2. Из доказательства леммы 6.2 следует, что при любом фиксированном $x > 0$ и $h \to 0$ $\Delta_x A(x, \eta)$ стремится к нулю в метрике пространства $\mathbf{L}_n(0, \infty)$. Используя этот факт, неравенство $|F(u)| \leq \tau(u)$ и оценку (6.11), легко находим из уравнения (6.14), что матрица $A(x, \eta)$ непрерывна по совокупности переменных при $x > 0$, $\eta \geq 0$. Так как

$$K(x, y) = A(x, y - x),$$

то $K(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных (x, y) при $0 < x \leq y$.

Обращаясь теперь к равенству (6.12), заключаем из него, что матрица $K'_y(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных (x, y) при $0 < x \leq y$.

Лемма 6.3. *При условиях предыдущей леммы для каждого $x > 0$ и $y \geq x$ существует непрерывная по совокупности переменных производная $K'_x(x, y)$ и справедливо равенство*

$$K'_x(x, y) = -F'(x + y) + K(x, x) F(x + y) - \int_x^\infty K'_x(x, t) F(t + y)\, dt, \tag{6.20}$$

которое получается из (6.2) *дифференцированием по x.*

Доказательство. Заметим, что (см. (6, 7))

$$\frac{\Delta_x A(x, \eta)}{h} = \frac{K(x + h, x + \eta + h) - K(x, x + \eta)}{h} =$$

$$= \frac{K(x + h, x + \eta + h) - K(x + h, x + \eta)}{h} + \frac{K(x + h, x + \eta) - K(x, x + \eta)}{h} =$$

$$= K'_y(x + h, x + \eta + \theta h) + \frac{K(x + h, x + \eta) - K(x, x + \eta)}{h}.$$

Используя существование $A'_x(x, \eta)$ и непрерывность $K'_y(x, y)$, заключаем из этого равенства, что существует $(x > 0, \eta \geq 0)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{K(x + h, x + \eta) - K(x, x + \eta)}{h} = K'_x(x, y)\,|_{y = x + \eta}$$

и

$$K'_x(x, y)\,|_{y = x + \eta} = A'_x(x, \eta) - K'_y(x, y)\,|_{y = x + \eta} \tag{6.21'}$$

Из последнего равенства следует также, что

$$A_x(x, \eta)\,|_{\eta = y - x} = K'_x(x, y) + K'_y(x, y) \qquad (0 < x \leq y). \tag{6.21''}$$

Полагая теперь в уравнении (6.15) $\eta = y - x$ и используя формулы (6.7) и (6.21″), после несложных преобразований получим:

$$K'_x(x, y) + K'_y(x, y) = -2F'(x + y) + K(x, x) F(x + y) -$$

$$- \int_x^\infty K(x, t) F'(t + y)\, dt - \int_x^\infty K'_x(x, t) F(t + y)\, dt,$$

откуда, в силу (6.12), следует искомое равенство (6.20).

Производя в (6.20) замену $t = x + \xi$, $y = x + \eta$ и полагая

$$K'_x(x, y)\,|_{y = x + \eta} = B(x, \eta),$$

$$-F'(2x + \eta) + K(x, x) F(2x + \eta) = \Psi(x, \eta),$$

преобразуем это уравнение к виду

$$B(x, \eta) + \int_0^\infty B(x, \xi) F(2x + \xi + \eta)\, d\xi = \Psi(x, \eta), \tag{6.22}$$

откуда следует, что

$$B(x, \eta) = (\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1} [\Psi(x, \eta)]. \tag{6.23}$$

Заметим, что матрица $\Psi(x, \eta)$ непрерывна в обычном смысле по совокупности переменных $x > 0$, $\eta \geq 0$ и непрерывно зависит от параметра $x > 0$ в метрике пространства $\mathbf{L}_n(0, \infty)$. Так как оператор $(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1}$ также непрерывно зависит от $x > 0$ (см. (6.18)), то из (6.23) следует непрерывность $B(x, \eta)$ по параметру $x > 0$ в метрике $\mathbf{L}_n(0, \infty)$, откуда, согласно (6.22), вытекает непрерывность матрицы $B(x, \eta)$ в обычном смысле по совокупности переменных $x > 0$, $\eta \geq 0$. Следовательно, $K_x'(x, y) = B(x, y - x)$ непрерывна при $0 < x \leq y$ и $K_x'(x, y) \in \mathbf{L}_n(x, \infty)$.

Замечание. Предположим дополнительно, что матрица $F(u)$ имеет при всех $u > 0$ непрерывную вторую производную и что

$$\int_x^\infty u\, |F''(u)|\, du < \infty \text{ при всех } x > 0.$$

Тогда при всех $x > 0$ и $y \geq x$ существует непрерывная по совокупности переменных производная $K_{xx}''(x, y)$, удовлетворяющая уравнению

$$K_{xx}''(x, y) = -F''(x + y) + \frac{dK(x, x)}{dx} F(x + y) + K(x, x) F'(x + y) +$$
$$+ K_x'(x, t)|_{t=x} F(x + y) - \int_x^\infty K_{xx}''(x, t) F(t + y)\, dt, \tag{6.24}$$

которое получается из (6.20) дифференцированием по x.

Это доказывается так же, как и существование $K_x'(x, y)$, ибо уравнение (6.20) отличается от (6.2) только свободным членом

$$-F'(x + y) + K(x, x) \cdot F(x + y)$$

(вместо $-F(x + y)$) и этот свободный член при сделанных нами предположениях ведет себя в смысле дифференцируемости и сходимости в метрике $\mathbf{L}_n(x, \infty)$ по переменной y аналогично свободному члену уравнения (6.2).

Заметим еще, что в рассматриваемом случае при каждом фиксированном $x > 0$ $K_{xx}''(x, y) \in \mathbf{L}_n(x, \infty)$.

Лемма 6.4. *При условиях леммы* 6.2, *каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *справедливо неравенство*

$$\left| \frac{d}{dx} K(x, x) + 2 F'(2x) \right| \leq k(\varepsilon)\, \tau^2(2x) \quad \textit{для всех } x \geq \varepsilon, \tag{6.25}$$

где $k(\varepsilon)$ — *постоянная, зависящая от* ε, *и, следовательно,*

$$\int_\varepsilon^\infty x \left| \frac{d}{dx} K(x, x) \right| dx < \infty \textit{ при любом } \varepsilon > 0. \tag{6.26}$$

Доказательство. Воспользуемся уравнением (6.15), из которого следует, что

$$A_x'(x, \eta) = (\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1} [\Phi_0(x, \eta)], \tag{6.27}$$

где

$$\Phi_0(x, \eta) = -2 F'(2x + \eta) - 2 \int_0^\infty A(x, \xi) F'(2x + \xi + \eta)\, d\xi.$$

Так как при любом $x \geqslant \varepsilon$

$$\int_0^\infty |F'(2x+\eta)|\,d\eta = \int_{2x}^\infty |F'(s)|\,ds = \tau(2x),$$

$$\int_0^\infty \Big|\int_0^\infty A(x,\xi)F'(2x+\xi+\eta)\,d\xi\Big|\,d\eta \leqslant \int_0^\infty |A(x,\xi)|\,d\xi \int_{2x+\xi}^\infty |F'(s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty |A(x,\xi)|\,d\xi \int_{2x}^\infty |F'(s)|\,ds \leqslant c(\varepsilon)\,\tau_1(2x)\,\tau(2x) \leqslant c(\varepsilon)\,\tau_1(2\varepsilon)\,\tau(2x)$$

(см. (6,9)), то

$$\int_0^\infty |\Phi_0(x,\eta)|\,d\eta \leqslant [2+2c(\varepsilon)\,\tau_1(2\varepsilon)]\,\tau(2x) = k_1(\varepsilon)\,\tau(2x)$$

и, в силу леммы 5.I, из (6,27) получаем:

$$\int_0^\infty |A'_x(x,\eta)|\,d\eta \leqslant c(\varepsilon)\,k_1(\varepsilon)\,\tau(2x) \qquad (x \geqslant \varepsilon).$$

Используя эту оценку, а также неравенство (6.11), из уравнения (6.19) находим:

$$\Big|\frac{d}{dx}K(x,x) + 2F'(2x)\Big| \leqslant 2\int_0^\infty |A(x,\xi)|\,|F'(2x+\xi)|\,d\xi +$$

$$+\int_0^\infty |A'_x(x,\xi)|\,|F(2x+\xi)|\,d\xi \leqslant 2c_1(\varepsilon)\,\tau(2x)\int_0^\infty |F'(2x+\xi)|\,d\xi +$$

$$+\tau(2x)\int_0^\infty |A'_x(x,\xi)|\,d\xi \leqslant [2c_1(\varepsilon) + c(\varepsilon)\,k_1(\varepsilon)]\,\tau^2(2x) = k(\varepsilon)\,\tau^2(2x),$$

и справедливость неравенства (6.25), таким образом, доказана.

Для доказательства неравенства (6.26) достаточно, очевидно, установить, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^\infty x\tau^2(x)\,dx < \infty.$$

Но

$$x\tau(x) = x\int_x^\infty |F'(u)|\,du \leqslant \int_x^\infty u\,|F'(u)|\,du = \tau_1(x),$$

и потому

$$\int_\varepsilon^\infty x\,\tau^2(x)\,dx \leqslant \int_\varepsilon^\infty \tau_1(x)\,\tau(x)\,dx \leqslant \tau_1(\xi)\int_\varepsilon^\infty \tau(x)\,dx \leqslant \tau_1^2(\varepsilon).$$

Замечание. Если матрица $F(u)$ удовлетворяет условиям (A_0) и (B_0), так что выполнены неравенства (5.12′) и (6.11′), то вместо (6.25) и (6.26) будем иметь:

$$\Big|\frac{d}{dx}K(x,x) + 2F'(2x)\Big| \leqslant k\,\tau^2(2x) \text{ при всех } x > 0, \qquad (6.25')$$

где k — постоянная, и

$$\int_0^\infty x\,\Big|\frac{d}{dx}K(x,x)\Big|\,dx < \infty. \qquad (6.26')$$

3. Вывод дифференциального уравнения для матрицы $U(x, \lambda)$

Теорема 6. I. *Если матрица $F(u)$ удовлетворяет условиям (A_ε) и (B_ε), то матрица*

$$\mathscr{E}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} I + \int_x^\infty K(x, t) e^{-i\lambda t} dt \qquad (\operatorname{Im} \lambda \leqslant 0) \tag{6.1}$$

является решением дифференциального уравнения

$$Y'' + \lambda^2 Y = V(x) Y, \quad 0 < x < \infty, \tag{6.3}$$

где

$$V(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x) \tag{6.4}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $F(u)$, удовлетворяя условиям (A_ε) и (B_ε), имеет также при всяком $u > 0$ непрерывную вторую производную и что

$$\int_\varepsilon^\infty u \,|F''(u)|\, du < \infty \text{ при всяком } \varepsilon > 0. \tag{6.28}$$

На основании замечания 2 к лемме 6.1 и замечания к лемме 6.3 в этом случае существуют $K''_{xx}(x, y)$ и $K''_{yy}(x, y)$, которые непрерывны по совокупности переменных при $0 < x \leqslant y$, при каждом $x > 0$ принадлежат $\mathbf{L}_n(x, \infty)$ по переменной y и удовлетворяют соответственно равенствам (6.24) и (6.13).

Преобразуя равенство (6.13) путем интегрирования по частям, получим

$$K''_{yy}(x, y) + F''(x + y) - K(x, x) F'(x + y) +$$
$$+ K'_t(x, t)|_{t=x} F(x + y) + \int_x^\infty K''_{tt}(x, t) F(t + y) dt = 0.$$

Вычитая это равенство из равенства (6.24) и используя формулу (6.4), будем иметь:

$$K''_{xx}(x, y) - K''_{yy}(x, y) + V(x) F(x + y) + \int_x^\infty [K''_{xx}(x, t) - K''_{tt}(x, t)] F(t + y) dt = 0,$$

а отсюда, заменяя $V(x) F(x + y)$ с помощью равенства (6.2), окончательно получим:

$$K''_{xx}(x, y) - K''_{yy}(x, y) - V(x) K(x, y) +$$
$$+ \int_x^\infty [K''_{xx}(x, t) - K''_{tt}(x, t) - V(t) K(x, t)] F(t + y) dt = 0. \tag{6.29}$$

Так как матрица $K''_{xx}(x, y) - K''_{yy}(x, y) - V(x) K(x, y)$ при каждом фиксированном $x > 0$ принадлежит $\mathbf{L}_n(x, \infty)$, то, в силу свойства (B_ε), из (6.29) следует, что

$$K''_{xx}(x, y) - K''_{yy}(x, y) - V(x) K(x, y) = 0. \tag{6.30}$$

Из формулы (6.4) следует, что матрица $V(x)$ непрерывна при всех $x > 0$ и удовлетворяет условию

$$\int_\varepsilon^\infty x \,|V(x)|\, dx < \infty \text{ при любом } \varepsilon > 0 \quad (\text{см. } (6.26)). \tag{6.5}$$

При сделанных нами предположениях выполняются также соотношения

$$\lim_{x+y \to \infty} K'_x(x, y) = \lim_{x+y \to \infty} K'_y(x, y) = 0, \tag{6.31}$$

которые легко получаются из равенств (6.12) и (6.20).

Итак, матрица $K(x, y)$ удовлетворяет уравнению (6.30) и условиям (6.4) и (6.31), причем для $V(x)$ выполнено неравенство (6.5). Но тогда, согласно теореме I.I и замечаниям к ней, матрица $\mathscr{E}(x, \lambda)$, определяемая формулой (6.1), является решением уравнения (6.3).

Пусть теперь $F(u)$ удовлетворяет только условиям (A_ε) и (B_ε). Мы можем, очевидно, в этом случае найти последовательность матриц-функций $\{F_m(u)\}$, обладающих следующими свойствами:

1) $F_m(u)$ дважды непрерывно дифференцируемы при $u > 0$ и при каждом $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^\infty u\,|F_m'(u)|\,du < \infty, \quad \int_\varepsilon^\infty u\,|F_m''(u)|\,du < \infty \quad (m = 1, 2, \ldots);$$

2) $F_m(u) \to F(u)$ при $m \to \infty$ равномерно в каждом сегменте $[a, b]$, где $a > 0$;

3) При каждом $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^\infty u\,|F_m'(u) - F'(u)|\,du \to 0, \text{ когда } m \to \infty.$$

Из свойства 3) следует также, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$\|F_m - F\|^{(\varepsilon)} = \int_\varepsilon^\infty |F_m(u) - F(u)|\,du \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Рассматривая в $\mathbf{L}_n(0, \infty)$ операторы $\mathbf{F}_x^{(m)}$, определенные формулой

$$\mathbf{F}_x^{(m)}[\Phi] = \int_0^\infty \Phi(t)\,F_m(2x + t + y)\,dt, \quad \Phi(t) \in \mathbf{L}_n(0, \infty),$$

будем иметь (сравни (5.10))

$$\|\mathbf{F}_x^{(m)} - \mathbf{F}_x\| \leqslant \int_{2x}^\infty |F_m(u) - F(u)|\,du$$

и значит, каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$\|\mathbf{F}_x^{(m)} - \mathbf{F}_x\| \to 0 \text{ при } m \to \infty \tag{6.32}$$

равномерно относительно x, $x \geqslant \varepsilon$.

Отсюда следует, что при любом $x \geqslant \varepsilon$ и достаточно большом m существуют ограниченные в $\mathbf{L}_n(0, \infty)$ операторы $(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x^{(m)})^{-1}$; мы будем считать, что это имеет место для всех m.

Используя далее соотношение (6.32), находим, что равномерно относительно x, $x \geqslant \varepsilon$

$$\|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x^{(m)})^{-1}\| \to \|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x)^{-1}\| \quad \text{при } m \to \infty.$$

Поэтому, согласно лемме 5.1,

$$\|(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x^{(m)})^{-1}\| \leqslant c(\varepsilon) + 1 \quad \text{для всех } x \geqslant \varepsilon, \tag{6.33}$$

если m достаточно велико.

Из существования оператора $(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x^{(m)})^{-1}$ следует, в частности, что уравнение, которое получается из (6.2) заменой $F(u)$ на $F_m(u)$ имеет в $\mathbf{L}_n(x, \infty)$ единственное решение. Обозначим это решение через $K_m(x, y)$ и положим

$$V_m(x) = -2\frac{d}{dx}K_m(x, x),$$

$$\mathscr{E}_m(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} I + \int_x^\infty K_m(x, t)\,e^{-i\lambda t}\,dt.$$

Тогда, в силу ранее доказанного, $\mathcal{E}_m(x, \lambda)$ удовлетворяет равенству

$$\mathcal{E}_m''(x, \lambda) + \lambda^2 \mathcal{E}_m(x, \lambda) = V_m(x)\, \mathcal{E}_m(x, \lambda). \tag{6.34}$$

Покажем, что для всякого $\varepsilon > 0$

$$\int_x^\infty | K_m(x, y) - K(x, y) |\, dy \to 0 \quad \text{при } m \to \infty \tag{6.35}$$

равномерно относительно $x, x \geqslant \varepsilon$.

Действительно. Из уравнения (6.2) и аналогичного уравнения для $K_m(x, y)$ находим:

$$K_m(x, y) - K(x, y) + \int_x^\infty [K_m(x, t) - K(x, t)]\, F_m(t + y)\, dt =$$

$$= [F(x + y) - F_m(x + y)] + \int_x^\infty K(x, t)\, [F(t + y) - F_m(t + y)]\, dt. \tag{6.36}$$

Производя здесь замену $t = x + \xi$, $y = x + \eta$, получаем

$$A_m(x, \eta) - A(x, \eta) + \int_0^\infty [A_m(x, \xi) - A(x, \xi)]\, F_m(2x + \xi + \eta)\, d\xi = Q_m(x, \eta),$$

где

$$A(x, \eta) = K(x, x + \eta), \quad A_m(x, \eta) = K_m(x, x + \eta),$$
$$Q_m(x, \eta) = [F(2x + \eta) - F_m(2x + \eta)] +$$
$$+ \int_0^\infty A(x, \xi)\, [F(2x + \xi + \eta) - F_m(2x + \xi + \eta)]\, d\xi,$$

или в символическом виде

$$(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x^{(m)})\, [A_m(x, \eta) - A(x, \eta)] = Q_m(x, \eta).$$

Отсюда для любого заданного $\varepsilon > 0$ и $x \geqslant \varepsilon$

$$\| A_m(x, \eta) - A(x, \eta) \|_\eta^{(0)} \leqslant \| (\mathbf{E} + \mathbf{F}_x^{(m)})^{-1} \| \cdot \| Q_m(x, \eta) \|_\eta^{(0)}.$$

Легко проверить, что матрицы $Q_m(x, \eta)$ при $m \to \infty$ сходятся к нулю в метрике $\mathbf{L}_n(0, \infty)$ равномерно относительно $x \geqslant \varepsilon$. Так как, согласно (6.33), нормы операторов $(\mathbf{E} + \mathbf{F}_x^{(m)})^{-1}$ ограничены равномерно относительно всех m и $x \geqslant \varepsilon$, то из последнего неравенства следует, очевидно, что

$$\lim_{m \to \infty} \| A_m(x, \eta) - A(x, \eta) \|_\eta^{(0)} = 0$$

равномерно относительно $x \geqslant \varepsilon$, а это равносильно (6.35).

Используя (6.35), находим из равенства (6.36), что

$$\lim_{m \to \infty} K_m(x, y) = K(x, y)$$

равномерно в каждой конечной области вида $0 < \varepsilon \leqslant x \leqslant y \leqslant a$.

Рассматривая уравнение (6.15) и аналогичное ему уравнение для $\frac{\partial A_m(x, \eta)}{\partial x}$, точно так же докажем, что при любом $\eta \geqslant 0$ $\frac{\partial A_m(x, \eta)}{\partial x} \to \frac{\partial A(x, \eta)}{\partial x}$ при $m \to \infty$ равномерно относительно x в каждом сегменте $[\varepsilon, a]$, где $\varepsilon > 0$. Отсюда, в частности, следует (при $\eta = 0$), что

$$V_m(x) \to V(x) \quad \text{при } m \to \infty$$

равномерно в каждом сегменте $0 < \varepsilon \leqslant x \leqslant a$.

Используя (6.35), находим далее, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{E}_m(x,\lambda) \to \mathcal{E}(x,\lambda) \text{ при } m \to \infty \qquad (\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0)$$

равномерно относительно x, $x \geqslant \varepsilon$.

Из равенства (6.34) заключаем теперь, что и $\mathcal{E}''_m(x,\lambda)$ сходятся равномерно в каждом сегменте $0 < \varepsilon \leqslant x \leqslant a$, а значит при всех $x > 0$ существует $\mathcal{E}''(x,\lambda)$ и

$$\mathcal{E}''(x,\lambda) + \lambda^2 \mathcal{E}(x,\lambda) = V(x)\,\mathcal{E}(x,\lambda).$$

Ясно, что этому же уравнению удовлетворяют и матрицы $U(x,\lambda)$.

Замечание. Если матрица $F(u)$ удовлетворяет условиям (A_0) и (B_0), то, согласно замечанию к лемме 6.4, матрица $V(x)$, определяемая формулой (6.4), удовлетворяет неравенству

$$\int_0^\infty x\,|V(x)|\,dx < \infty. \qquad (6,5')$$

Покажем еще, что если матрица $F(u)$ эрмитова, то этим свойством обладает также матрица $V(x)$. Для этого достаточно доказать эрмитовость матрицы $K(x,x)$. Но

$$K(x,x) = -F(2x) - \int_x^\infty K(x,t)\,F(t+x)\,dt,$$

$$K^*(x,x) = -F(2x) - \int_x^\infty F(t+x)\,K^*(x,t)\,dt$$

и наше утверждение будет, таким образом, вытекать из совпадения интегралов в правых частях этих равенств. Чтобы доказать равенство этих интегралов, воспользуемся снова основным уравнением (6.2). Имеем:

$$F(t+x) = -K(x,t) - \int_x^\infty K(x,u)\,F(t+u)\,du =$$

$$= -K^*(x,t) - \int_x^\infty F(t+u)\,K^*(x,u)\,du$$

и потому

$$\int_x^\infty K(x,t)\,F(t+x)\,dt = -\int_x^\infty K(x,t)\,K^*(x,t)\,dt - \int_x^\infty\!\!\int_x^\infty K(x,t)\,F(t+u)\,K^*(x,u)\,du\,dt,$$

$$\int_x^\infty F(t+x)\,K^*(x,t)\,dt = -\int_x^\infty K(x,t)\,K^*(x,t)\,dt - \int_x^\infty\!\!\int_x^\infty K(x,u)F(t+u)K^*(x,t)\,du\,dt,$$

откуда следует искомое равенство.

§ 7. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА. ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ

1. Вывод граничного условия

Как и в § 5, будем считать заданными унитарную матрицу $S(\lambda)$, эрмитовы матрицы M_ν и числа $\mu_\nu > 0$, $\nu = 1, 2, \ldots p$. Мы предположим, что эти исходные данные обладают свойствами I_s и IV, так что построенное по ним основное уравнение (5.3), т. е. уравнение

$$F(x+y) + K(x,y) + \int_x^\infty K(x,t)\,F(t+y)\,dt = 0$$

будет однозначно разрешимо в $\mathbf{L}_n(x, \infty)$ при каждом фиксированном $x \geqslant 0$. Напомним, что

$$F(u) = \sum_{\nu=1}^{p} M_\nu^2 e^{-\mu_\nu u} + F_1(u), \tag{7.1}$$

где

$$F_1(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [I - S(\lambda)] e^{i\lambda u} d\lambda.$$

С помощью матрицы $K(x, y)$, найденной из основного уравнения (5.3), мы в параграфе 5 построили систему матриц-функций

$$U(x, \lambda) = \mathscr{E}(x, -\lambda) - \mathscr{E}(x, \lambda) S(-\lambda) =$$

$$= e^{i\lambda x} I - e^{-i\lambda x} S(-\lambda) + \int_x^\infty K(x, t)[e^{i\lambda t} I - e^{-i\lambda t} S(-\lambda)] dt,$$

$$U(x, \lambda_\nu) = \mathscr{E}(x, \lambda_\nu) M_\nu = [e^{-\mu_\nu x} I + \int_x^\infty K(x, t) e^{-\mu_\nu t} dt] M_\nu$$

$$(\nu = 1, 2, \dots p)$$

$(\lambda_\nu = -i\mu_\nu)$ и доказали, что эта система матриц-функций полна. Из результатов § 6 следует также, что если $S(\lambda)$ обладает не только свойством I_s, но и свойством III_s, то матрицы-функции $U(x, \lambda)$ и $U(x, \lambda_\nu)$ являются решениями дифференциального уравнения

$$Y'' + \lambda^2 Y = V(x) Y,$$

где

$$V(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x).$$

Однако, даже в этом случае матрицы $U(x, \lambda)$ и $U(x, \lambda_\nu)$ не будут, вообще говоря, удовлетворять граничному условию, т. е. могут не обращаться в нуль при $x = 0$.

В этом параграфе мы займемся выяснением тех свойств исходных данных, которые обеспечивают выполнение указанного граничного условия.

Итак, пусть исходные данные обладают свойствами I_s и IV. Тогда основное уравнение (5.3) при $x = 0$, т. е. уравнение

$$F(t) + K(0, t) + \int_0^\infty K(0, \xi) F(t + \xi) d\xi = 0$$

имеет единственное решение $K(0, t) \in \mathbf{L}_n(0, \infty)$.

Подставляя вместо $F(t)$ его выражение (7.1), получим

$$\sum_{\nu=1}^{p} M_\nu^2 e^{-\mu_\nu t} + F_1(t) + K(0, t) + \sum_{\nu=1}^{p} \int_0^\infty K(0, \xi) e^{-\mu_\nu \xi} d\xi \cdot M_\nu^2 e^{-\mu_\nu t} +$$

$$+ \int_0^\infty K(0, \xi) F_1(t + \xi) d\xi = 0$$

или

$$\begin{gathered} \sum_{\nu=1}^{p} \left\{ I + \int_0^\infty K(0, \xi) e^{-\mu_\nu \xi} d\xi \right\} \cdot M_\nu^2 e^{-\mu_\nu t} + \\ + F_1(t) + K(0, t) + \int_0^\infty K(0, \xi) F_1(t + \xi) d\xi = 0. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Лемма 7. 1. *Если* $x(t) \in L_n^1(0, \infty)$ *решение уравнения*

$$x(t) + \int_0^\infty x(\xi) F_1(t+\xi)\, d\xi = 0, \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{7.3}$$

то

$$\int_0^\infty x(t) F_1(t)\, dt = 0.$$

Доказательство. Так как $F_1(t) \in \mathbf{L}_n(0, \infty)$, то, согласно следствию леммы 4.2, $x(t)$ принадлежит также $L_n^\infty(0, \infty)$ и $L_n^2(0, \infty)$. В силу леммы 4.3, имеем поэтому

$$x(t) + \int_0^\infty x(\xi) F_1(t+\xi)\, d\xi = x(-t), \quad -\infty < t < \infty. \tag{7.4}$$

Используя свойства $x(t)$ и $F_1(t)$, легко обнаруживаем, что вектор-функция

$$\int_0^\infty x(\xi) F_1(t+\xi)\, d\xi$$

непрерывна при всех вещественных t. Но тогда, в силу (7.4), вектор-функция

$$x(t) - x(-t)$$

также непрерывна, а так как она нечетна, то $x(+0) - x(-0) = 0$.

Устремляя теперь в (7.4) $t \to 0$, получим

$$\int_0^\infty x(\xi) F_1(\xi)\, d\xi = 0,$$

что и требовалось доказать.

Перейдем теперь в равенстве (7.2) к эрмитово-сопряженным матрицам, умножим затем обе его части слева на любое вектор-решение $x(t)$ уравнения (7.3) и проинтегрируем по t в промежутке $(0, \infty)$. Получим

$$\sum_{\nu=1}^{p} \tilde{x}(-i\mu_\nu) M_\nu^2 \left\{ I + \int_0^\infty K^*(0, \xi) e^{-\mu_\nu \xi}\, d\xi \right\} + \int_0^\infty x(t) F_1(t)\, dt +$$

$$+ \int_0^\infty \left\{ x(t) + \int_0^\infty x(\xi) F_1(t+\xi)\, d\xi \right\} K^*(0, t)\, dt = 0,$$

где

$$\tilde{x}(\lambda) = \int_0^\infty x(t) e^{-i\lambda t}\, dt,$$

а отсюда, в силу леммы 7.1, имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{p} \tilde{x}(-i\mu_\nu) M_\nu^2 \left\{ I + \int_0^\infty K^*(0, \xi) e^{-\mu_\nu \xi}\, d\xi \right\} = 0 \tag{7.5}$$

для любого решения $x(t)$ уравнения (7.3).

Теорема 7.1. *Если произвольно заданные унитарная матрица* $S(\lambda)$, *эрмитовы матрицы* M_ν *и числа* $\mu_\nu > 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots p)$ *обладают свойствами* I_s, IV и V (*см.* п. I § 5), *то*

$$U(0, \lambda_\nu) = \left\{ I + \int_0^\infty K(0, \xi) e^{-\mu_\nu \xi}\, d\xi \right\} M_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots p) \tag{7.6}$$

и

$$F_1(t) + K(0, t) + \int_0^\infty K(0, \xi) F_1(t+\xi)\, d\xi = 0. \tag{7.7}$$

Доказательство. Пусть

$$x_1(t),\ x_2(t), \dots x_r(t)$$

полный набор линейно независимых решений уравнения (7.3), так что любое решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=1}^{r} \gamma_k x_k(t).$$

Рассмотрим систему уравнений относительно γ_k:

$$\sum_{k=1}^{r} \gamma_k \tilde{x}_k(-i\mu_\nu) M_\nu = 0 \qquad (\nu = 1,2, \dots p). \tag{7.8}$$

В силу следствия леммы 4.3, отсутствие нетривиальных решений этой системы эквивалентно отсутствию нетривиальных решений уравнения

$$x(t) + \int_0^\infty x(\xi) F(t+\xi)\, d\xi = 0, \quad 0 \leqslant t < \infty,$$

т. е. эквивалентно свойству IV.

Так как по условию доказываемой теоремы свойство IV выполнено, то система (7.8) не имеет ненулевых решений и, следовательно, ранг матрицы ее коэффициентов равен числу неизвестных, то есть равен r.

Далее, ранг расширенной матрицы неоднородной системы

$$\sum_{k=1}^{r} \gamma_k \tilde{x}_k(-i\mu_\nu) M_\nu = a_\nu M_\nu \qquad (\nu = 1,2, \dots p), \tag{7.8'}$$

где a_ν — произвольно заданные векторы, очевидно, не превышает суммы рангов матриц M_ν, которая согласно свойству V равна r. Так как ранг матрицы коэффициентов и число неизвестных в системе (7.8') равны r, то отсюда следует, что система (7.8') имеет единственное решение. Следовательно, каковы бы ни были векторы a_ν, найдутся такие числа γ_k, что решение уравнения (7.3)

$$x(t) = \sum_{k=1}^{r} \gamma_k x_k(t)$$

будет удовлетворять равенствам

$$\tilde{x}(-i\mu_\nu) M_\nu = a_\nu M_\nu \qquad (\nu = 1,2, \dots p).$$

Отсюда и из формулы (7.5) следует, что

$$\sum_{\nu=1}^{p} a_\nu M_\nu^2 \left\{ I + \int_0^\infty K^*(0, \xi) e^{-\mu_\nu \xi}\, d\xi \right\} = 0,$$

каковы бы ни были векторы a_ν. В частности,

$$a M_\nu^2 \left\{ I + \int_0^\infty K^*(0, \xi) e^{-\mu_\nu \xi}\, d\xi \right\} = 0 \quad (\nu = 1,2, \dots p),$$

каков бы ни был вектор a.

Введя обозначение (см. (5.4))

$$I + \int_0^\infty K(0, \xi) e^{-\mu_\nu \xi} d\xi = \mathcal{E}(-i\mu_\nu),$$

можем записать последнее равенство в виде:

$$a M_\nu^2 \mathcal{E}^*(-i\mu_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p).$$

Отсюда находим, что для любых векторов a и b

$$(a M_\nu^2 \mathcal{E}^*(-i\mu_\nu), b) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p)$$

и, значит,

$$(a M_\nu, b\mathcal{E}(-i\mu_\nu) M_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p).$$

Полагая $a = b\mathcal{E}(-i\mu_\nu)$, имеем

$$(b\mathcal{E}(-i\mu_\nu) M_\nu, \ b\mathcal{E}(-i\mu_\nu) M_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p).$$

Следовательно, $b\mathcal{E}(-i\mu_\nu) M_\nu = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots p$, а отсюда, в силу произвольности вектора b,

$$\mathcal{E}(-i\mu_\nu) M_\nu = \left\{ I + \int_0^\infty K(0, \xi) e^{-\mu_\nu \xi} d\xi \right\} M_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p).$$

Равенство (7.7) следует теперь непосредственно из (7.2) и (7.6).

Теорема 7.2. *Если произвольно заданные унитарная матрица* $S(\lambda)$, *эрмитовы матрицы* M_ν *и числа* $\mu_\nu > 0$, $\nu = 1, 2, \ldots p$, *обладают свойствами* I_s, II_s. IV и V, *то справедливо не только* (7.6), *но и равенство*

$$U(0, \lambda) = I - S(-\lambda) + \int_0^\infty K(0, t) [e^{i\lambda t} I - e^{-i\lambda t} S(-\lambda)] dt = 0.$$

Доказательство. Положим

$$\Phi(t) = F_1(t) + K(0, t) - K(0, -t) + \int_0^\infty K(0, \xi) F_1(t + \xi) d\xi. \tag{7.9}$$

Помня, что $K(x, y) = 0$ при $x > y$, находим из самого определения $\Phi(t)$ и равенства (7.7), что

$$\Phi(t) = 0 \qquad \text{при } 0 < t < \infty.$$

Из вида матрицы $\Phi(t)$ заключаем далее, что ее строки принадлежат $\mathfrak{M}_n(-\infty, \infty)$.

Умножая справа обе части (7.9) на $F_1(t + x)$ и интегрируя по t, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \Phi(t) F_1(t + x) dt &= \int_{-\infty}^\infty F_1(t) F_1(t + x) dt + \int_0^\infty K(0, t) F_1(t + x) dt - \\ &- \int_{-\infty}^0 K(0, -t) F_1(t + x) dt + \int_0^\infty K(0, \xi) d\xi \int_{-\infty}^\infty F_1(t + \xi) F_1(t + x) dt. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Так как

$$F_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty [I - S(\lambda)] e^{i\lambda t} d\lambda,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(t) F_1(t+x)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [I - S(-\lambda)][I - S(\lambda)]\, e^{i\lambda x}\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [I - S(-\lambda) - S(\lambda) + S(-\lambda) S(\lambda)]\, e^{i\lambda x}\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [I - S(-\lambda) - S(\lambda) + I]\, e^{i\lambda x}\,d\lambda$$

и, значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(t) F_1(t+x)\,dt = F_1(-x) + F_1(x). \tag{7.11}$$

Аналогично находим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(t+\xi) F_1(t+x)\,dt = F_1(x-\xi) + F_1(\xi - x)$$

и, следовательно,

$$\int_{0}^{\infty} K(0,\xi)\,d\xi \int_{-\infty}^{\infty} F_1(t+\xi) F_1(t+x)\,dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} K(0,\xi) F_1(x-\xi)\,d\xi + \int_{0}^{\infty} K(0,\xi) F_1(\xi - x)\,d\xi = \tag{7.12}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} K(0,-t) F_1(x+t)\,dt + \Phi(-x) + K(0,x) - K(0,-x) - F_1(-x)$$

(см. (7.9)).

Наконец, в силу (7.9),

$$\int_{0}^{\infty} K(0,t) F_1(t+x)\,dt = \Phi(x) + K(0,-x) - K(0,x) - F_1(x). \tag{7.13}$$

Подставляя (7.11), (7.12) и (7.13) в (7.10), получим

$$\int_{-\infty}^{0} \Phi(t) F_1(t+x)\,dt = \Phi(-x) + \Phi(x)$$

и, значит, при $x < 0$

$$-\Phi(x) + \int_{-\infty}^{0} \Phi(t) F_1(t+x)\,dt = 0, \qquad -\infty < x < 0.$$

Отсюда, согласно условию доказываемой теоремы (свойство II_s), следует, что $\Phi(x) \equiv 0$, т. е.

$$F_1(t) + K(0,t) - K(0,-t) + \int_{0}^{\infty} K(0,\xi) F_1(t+\xi)\,d\xi \equiv 0.$$

Переходя к преобразованиям Фурье и обозначая через $\widetilde{K}(\lambda)$ преобразование Фурье матрицы-функции $K(0,t)$, имеем

$$I - S(\lambda) + \widetilde{K}(\lambda) - \widetilde{K}(-\lambda) + \widetilde{K}(-\lambda)[I - S(\lambda)] \equiv 0$$

или

$$I+\tilde{K}(\lambda)-[I+\tilde{K}(-\lambda)]\,S(\lambda)\equiv 0,$$

а отсюда после умножения справа на $-S(-\lambda)$

$$I+\tilde{K}(-\lambda)-[I+\tilde{K}(\lambda)]\,S(-\lambda)\equiv 0,$$

т. е.

$$I-S(-\lambda)+\int_0^\infty K(0,t)\,[e^{i\lambda t}I-e^{-i\lambda t}S(-\lambda)]\,dt\equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

2. Характеристические свойства данных рассеяния и матрицы рассеяния

Из теорем 6.1, 7.1, 7.2 и замечания к теореме 6.1 непосредственно вытекает тот основной результат, который был сформулирован в п. 1 § 5. Именно: условия I_s, II_s, III_s, IV и V необходимы и достаточны для того, чтобы заданные унитарная матрица $S(\lambda)$, эрмитовы матрицы M_ν и числа $-\mu_\nu^2$, $\mu_\nu>0$, являлись соответственно матрицей рассеяния, нормировочными матрицами и собственными значениями некоторой (однозначно ими определяемой) граничной задачи (2.1) с эрмитовой потенциальной матрицей, удовлетворяющей условию (1.4).

Для того, чтобы фактически восстановить потенциальную матрицу по данным рассеяния, нужно построить согласно формулам (5.1)—(5.2) матрицу $F(u)$, по ней составить основное уравнение (5.3), и, наконец, найдя из уравнения (5.3) матрицу $K(x,y)$, воспользоваться формулой (6.4).

Пусть теперь задана только унитарная матрица $S(\lambda)$. Будет ли $S(\lambda)$ матрицей рассеяния некоторой граничной задачи рассматриваемого нами вида, если она обладает свойствами I_s, II_s и III_s?

Ответ на этот вопрос почти непосредственно вытекает из следующей леммы.

Лемма 7.2. *Для любого конечномерного подпространства $L_n^2(0,\infty)$ размерности r можно указать такие эрмитовы матрицы M_ν и числа $\mu_\nu>0$, $\nu=1,2,\dots r$, что*

1) *если $x(t)$ какой-нибудь вектор данного подпространства и $\int_0^\infty x(t)\,e^{-\mu_\nu t}\,dt\cdot M_\nu=0$, $\nu=1,2,\dots r$, то $x(\overset{\circ}{t})=0$;*

2) *сумма рангов матриц M_ν, $\nu=1,2,\dots r$, равна r.*

Доказательство. Возьмем какой-нибудь вектор $x_1(t)\neq 0$ данного подпространства и выберем $\mu_1>0$ так, чтобы

$$\int_0^\infty x_1(t)\,e^{-\mu_1 t}\,dt\neq 0$$

(это, очевидно, можно сделать). Пусть при этом

$$x_1(t)=\left\{x_1^{(1)}(t),\,x_1^{(2)}(t),\,\dots\,x_1^{(n)}(t)\right\}$$

и

$$\int_0^\infty x_1^{(i_1)}(t)\,e^{-\mu_1 t}\,dt\neq 0.$$

Обозначая через m_1 вектор, у которого i_1-я компонента равна 1, а остальные компоненты равны нулю, будем иметь

$$\int_0^\infty (x_1(t), m_1 e^{-\mu_1 t})\, dt = \int_0^\infty x_1^{(i_1)}(t)\, e^{-\mu_1 t}\, dt \neq 0.$$

Векторы данного подпространства, удовлетворяющие условию

$$\int_0^\infty (x(t),\ m_1 e^{-\mu_1 t})dt = 0$$

образуют, очевидно, уже $(r-1)$-мерное подпространство. Повторяя для этого подпространства приведенное выше рассуждение, мы выделим в нем вектор $x_2(t) \neq 0$, найдем число $\mu_2 > \mu_1$ и построим вектор m_2, у которого одна i_2-я компонента равна 1 и остальные компоненты равны нулю, так, что

$$\int_0^\infty (x_2(t),\ m_2 e^{-\mu_2 t})\, dt \neq 0.$$

Продолжая этот процесс, мы получим окончательно векторы $x_1(t)$, $x_2(t), \dots x_r(t)$ из данного подпространства, числа $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_r$ и векторы m_ν, $\nu = 1,2, \dots r$, каждый из которых имеет одну i_ν-ю компоненту, равную 1, и остальные компоненты, равные нулю, причем

$$\int_0^\infty (x_i(t),\ m_\nu e^{-\mu_\nu t})\, dt \begin{cases} = 0, & \text{если } i > \nu \\ \neq 0, & \text{если } i = \nu \end{cases} \quad (i, \nu = 1,2, \dots r). \tag{7.14}$$

Векторы $x_1(t)$, $x_2(t), \dots x_r(t)$, очевидно, линейно независимы и потому образуют базис данного подпространства.

Далее, если $x(t) = \sum_{i=1}^{r} c_i x_i(t)$ и $\int_0^\infty (x(t),\ m_\nu e^{-\mu_\nu t})dt = 0$, $\nu = 1,2, \dots r$, то, в силу (7.14), все $c_i = 0$ и, следовательно, $x(t) = 0$.

Обозначим теперь через M_ν, $\nu = 1,2, \dots r$, матрицу, у которой один элемент на пересечении i_ν-ой строки и i_ν-го столбца равен 1, а остальные элементы равны нулю. Эрмитовы матрицы M_ν, как легко видеть, обладают свойствами 1) и 2) доказываемой леммы. Действительно, если

$$\int_0^\infty x(t)\, e^{-\mu_\nu t}\, dt \cdot M_\nu = 0, \quad \nu = 1,2, \dots r, \text{ то, очевидно, и } \int_0^\infty (x(t), m_\nu e^{-\mu_\nu t})\, dt = 0,$$

$\nu = 1,2, \dots r$, а потому $x(t) = 0$. Далее, ранг каждой из матриц M_ν равен единице и, следовательно, сумма их рангов равна r.

Лемма доказана.

Следствие. Если унитарная матрица $S(\lambda)$ обладает свойством I_s, то всегда можно найти эрмитовы матрицы M_ν и числа $\mu_\nu > 0$ так, чтобы выполнялись еще условия IV и V.

Действительно, пусть уравнение

$$x(t) + \int_0^\infty x(\xi)\, F_1(t+\xi)\, d\xi = 0,$$

где $F_1(u)$ определено по $S(\lambda)$ формулой (5.1), имеет r линейно независимых решений в $L_n^1(0, \infty)$. Согласно следствию леммы 4.2, эти решения принадлежат также $L_n^2(0, \infty)$ и образуют там r-мерное подпространство. В силу леммы 7.2, мы можем для этого подпространства найти эрмитовы матрицы M_ν и числа $\mu_\nu > 0$, $\nu = 1, 2, \ldots r$, так, чтобы выполнялись условия 1) и 2). Но условие 2) в данном случае совпадает с условием V, а из условия 1), в силу следствия леммы 4.3, вытекает, что уравнение

$$x(t) + \int_0^\infty x(\xi) F(t+\xi)\, d\xi = 0,$$

где $F(u) = \sum_{\nu=1}^r M_\nu^2 e^{-\mu_\nu u} + F_1(u)$, не имеет ненулевых решений в $\mathfrak{M}_n(0, \infty)$

и, значит, соблюдено условие IV.

В частности, таким образом, доказана

Теорема 7.3. *Свойства* I_s, II_s *и* III_s *необходимы и достаточны для того, чтобы унитарная матрица* $S(\lambda)$ *являлась матрицей рассеяния некоторой граничной задачи* (2.1) *с эрмитовой потенциальной матрицей, удовлетворяющей условию* (1.4).

§ 8. ПРИМЕРЫ

Целью настоящего параграфа является не только иллюстрация на простейших примерах предложенного метода восстановления потенциала по данным рассеяния, но и доказательство независимости найденных нами характеристических свойств этих данных. Точнее говоря, мы приведем примеры, в которых не будет выполнено только одно из свойств — II, IV или V.

Пример 1. Пусть

$$S(\lambda) = \frac{(\lambda + i)(\lambda + 2i)}{(\lambda - i)(\lambda - 2i)}, \quad \lambda_1^2 = -1; \quad M_1 = 6$$

(рассматриваем скалярный случай ($n = 1$)). Тогда

$$1 - S(\lambda) = -\frac{6\, i\lambda}{(\lambda - i)(\lambda - 2i)} = -\frac{6}{i\lambda + 1} + \frac{12}{i\lambda + 2}$$

и, значит,

$$F_1(u) = \begin{cases} -6\, e^{-u} + 12\, e^{-2u}, & u > 0 \\ \quad 0, & u < 0, \end{cases}$$

$$F(u) = 12\, e^{-2u} \quad (u > 0).$$

Легко проверить, что в этом случае выполнены все пять условий и, следовательно, заданные величины являются данными рассеяния некоторой скалярной граничной задачи рассматриваемого нами вида. Найдем соответствующий потенциал и нормированные собственные функции.

Решая основное уравнение

$$12\, e^{-2(x+y)} + K(x, y) + 12\, e^{-2y} \int_x^\infty K(x, t)\, e^{-2t}\, dt = 0,$$

находим, что

$$K(x, y) = \frac{-12\, e^{-2(x+y)}}{1 + 3\, e^{-4x}}$$

и, значит,

$$V(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{24\, e^{-4x}}{1 + 3\, e^{-4x}}\right),$$

а

$$\mathcal{E}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} - \frac{12\, e^{-2x}}{1 + 3e^{-4x}} \int_x^\infty e^{-2t}\, e^{-i\lambda t}\, dt = e^{-i\lambda x}\left[1 - \frac{12\, e^{-4x}}{(2 + i\lambda)(1 + 3e^{-4x})}\right].$$

Нормированные собственные функции имеют вид:

$$U(x,\lambda) = \mathscr{E}(x,-\lambda) - \mathscr{E}(x,\lambda)\,S(-\lambda) = e^{i\lambda x}\left[1 - \frac{12\,e^{-4x}}{(2-i\lambda)(1+3e^{-4x})}\right] - \qquad (\lambda > 0)$$

$$- e^{-i\lambda x}\left[1 - \frac{12\,e^{-4x}}{(2+i\lambda)(1+3e^{-4x})}\right]\cdot\frac{(\lambda-i)(\lambda-2i)}{(\lambda+i)(\lambda+2i)};$$

$$U(x,\lambda_1) = U(x,-i) = \mathscr{E}(x,-i)\cdot M_1 =$$

$$= 6e^{-x}\left[1 - \frac{12\,e^{-4x}}{3(1+3e^{-4x})}\right] = \frac{6e^{-x}(1-e^{-4x})}{1+3e^{-4x}}.$$

Из этих формул следует, что

$$U(0,\lambda) = 0, \quad U(0,\lambda_1) = 0.$$

Пример 2. Пусть задана только унитарная матрица

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^2 \end{pmatrix}$$

(точечный спектр отсутствует). Имеем

$$I - S(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\,i\lambda}{(\lambda+i)^2} \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$F(u) = F_1(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(u) \end{pmatrix},$$

где

$$f(u) = \begin{cases} 0, & u > 0 \\ 4(1+u)\,e^{u}, & u < 0. \end{cases}$$

Ясно, что свойства I_s, III_s, IV и V здесь заведомо имеют место. В то же время свойство II_s не выполнено, так как уравнение

$$-x(t) + \int_{-\infty}^{0} x(\xi)\,F_1(t+\xi)\,d\xi = 0$$

имеет ненулевое вектор-решение

$$x(t) = \{\,0,\,(1+t)\,e^{t}\,\} \qquad (t < 0),$$

в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Так как $F(u) = 0$ при $u > 0$, то в данном случае

$$K(x,y) \equiv 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant y)$$

и потому

$$V(x) \equiv 0,$$

$$\mathscr{E}(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} I = e^{-i\lambda x}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы

$$U(x,\lambda) = \mathscr{E}(x,-\lambda) - \mathscr{E}(x,\lambda)\,S(-\lambda) = e^{i\lambda x} I - e^{-i\lambda x} S(-\lambda), \qquad (\lambda > 0)$$

являясь решениями соответствующего дифференциального уравнения, очевидно, не удовлетворяют граничному условию при $x = 0$, то-есть $U(0,\lambda) \neq 0$.

Пример 3. Пусть

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{(\lambda+i)(\lambda+2i)}{(\lambda-i)(\lambda-2i)} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^2 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1^2 = -1; \; M_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$I - S(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{-6i\lambda}{(\lambda-i)(\lambda-2i)} & 0 \\ 0 & \frac{4\,i\lambda}{(\lambda+i)^2} \end{pmatrix},$$

$$F_1(u) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -6e^{-u} + 12e^{-2u} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & u > 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4(1+u)e^{u} \end{pmatrix}, & u < 0, \end{cases}$$

$$F(u) = \begin{pmatrix} 12e^{-2u} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (u > 0).$$

Как и в предыдущем примере, здесь не выполнено только одно свойство II_s (см. примеры 1 и 2).

Из основного уравнения получаем

$$K(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-12e^{-2(x+y)}}{1+3e^{-4x}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

так что

$$V(x) = -2\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \dfrac{-12e^{-2x}}{1+3e^{-4x}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{E}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} \cdot I + \int_x^\infty K(x, t)\, e^{-i\lambda t}\, dt =$$

$$= e^{-i\lambda x}\begin{pmatrix} 1 - \dfrac{12e^{-4x}}{(2+i\lambda)(1+3e^{-4x})} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что матрицы

$$U(x, \lambda) = \mathscr{E}(x, -\lambda) - \mathscr{E}(x, \lambda)\, S(-\lambda) \qquad (\lambda > 0)$$

в данном случае не обращаются в нуль при $x = 0$. В то же время на дискретном спектре граничное условие здесь выполняется. Действительно,

$$U(x, \lambda_1) = U(x, -i) = \mathscr{E}(x, -i)\, M_1 =$$

$$= e^{-x}\begin{pmatrix} \dfrac{1-e^{-4x}}{1+3e^{-4x}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{6e^{-x}(1-e^{-4x})}{1+3e^{-4x}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, значит,

$$U(0, \lambda_1) = 0.$$

Это обстоятельство связано с отсутствием одного только свойства II_s и иллюстрирует результаты § 7 (теоремы 7.1 и 7.2).

Пример 4. Пусть заданы

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\lambda+i}{\lambda-i}\right)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1^2 = -1; \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$I - S(\lambda) = \begin{pmatrix} -\dfrac{4i\lambda}{(\lambda-i)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_1(u) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 4(1-u)e^{-u} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{если } u > 0 \\ 0, & \text{если } u < 0, \end{cases}$$

$$F(u) = \begin{pmatrix} 4(1-u)e^{-u} & 0 \\ 0 & e^{-u} \end{pmatrix} \qquad (u > 0),$$

так что свойства I_s, II_s и III_s заведомо имеют место. Выполнено также и свойство V, ибо уравнение

$$x(t) + \int_0^\infty x(\xi)\, F_1(t+\xi)\, d\xi = 0,$$

как легко видеть, имеет единственное (с точностью до постоянного множителя) вектор-решение

$$x(t) = \{\, te^{-t}, \quad 0 \} \qquad (t > 0).$$

Но эта же вектор-функция удовлетворяет и уравнению

$$x(t) + \int_0^\infty x(\xi) F(t+\xi)\, d\xi = 0,$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой, и значит, свойство IV здесь не соблюдено.

Решением основного уравнения в данном случае является матрица

$$K(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{4(x+y-1)\, e^{-(x+y)} + 4(x-y+1)\, e^{-3x-y}}{1 - 4xe^{-2x} - e^{-4x}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2\, e^{-(x+y)}}{2 + e^{-2x}} \end{pmatrix},$$

откуда

$$V(x) = -2 \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \dfrac{4(2x-1)\, e^{-2x} + 4e^{-4x}}{1 - 4xe^{-2x} - e^{-4x}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2\, e^{-2x}}{2 + e^{-2x}} \end{pmatrix}.$$

Матрица $V(x)$ имеет в точке $x = 0$ «сильную» особенность, так как ее элемент $v_{11}(x)$ равен

$$v_{11}(x) = -2 \frac{d}{dx} \left(\frac{4(2x-1)\, e^{-2x} + 4e^{-4x}}{1 - 4xe^{-2x} - e^{-4x}} \right) = \frac{2 \cdot 3}{x^2} + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x = 0$.

Таким образом, неравенство

$$\int_\varepsilon^\infty x\, |V(x)|\, dx < \infty$$

имеет здесь место при всяком $\varepsilon > 0$, но перестает быть верным при $\varepsilon = 0$. Это иллюстрирует результаты § 6 и связано с отсутствием свойства IV.

Пример 5. Пусть

$$S(\lambda) = 1; \quad \lambda_1^2 = -1; \quad M_1 = 1,$$

так что

$$F_1(u) \equiv 0; \quad F(u) = e^{-u} \quad (u > 0).$$

Здесь, как легко видеть, выполнены все свойства, кроме V.

Из основного уравнения

$$e^{-(x+y)} + K(x, y) + \int_x^\infty K(x, t)\, e^{-(t+y)}\, dt = 0$$

имеем

$$K(x, y) = -\frac{2\, e^{-(x+y)}}{2 + e^{-2x}},$$

откуда

$$V(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x) = -\frac{16\, e^{-2x}}{(2 + e^{-2x})^2},$$

$$\mathscr{E}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty K(x, t)\, e^{-i\lambda t}\, dt =$$

$$= e^{-i\lambda x} \left[1 - \frac{2e^{-2x}}{(1 + i\lambda)(2 + e^{-2x})} \right].$$

Далее находим

$$U(x, \lambda) = \mathscr{E}(x, -\lambda) - \mathscr{E}(x, \lambda)\, S(-\lambda) = \qquad (\lambda > 0)$$

$$= 2i \sin \lambda x - \frac{2e^{-2x}}{2 + e^{-2x}} \cdot \frac{2i(\sin \lambda x + \lambda \cos \lambda x)}{1 + \lambda^2};$$

$$U(x, \lambda_1) = U(x, -i) = \mathscr{E}(x, -i)\, M_1 = \frac{2e^{-x}}{2 + e^{-2x}}.$$

Эти функции удовлетворяют соответствующему дифференциальному уравнению, но не обращаются в нуль при $x=0$. Действительно,

$$U(0, \lambda) = -\frac{4 i\lambda}{3(1+\lambda^2)} \qquad (\lambda > 0),$$

$$U(0, \lambda_1) = \frac{2}{3}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧЕЧНОГО СПЕКТРА

Мы приведем здесь доказательство тех предложений о точечном спектре граничной задачи (2.1) и свойствах матрицы-функции $\mathcal{E}^{-1}(\lambda)$, которые сформулированы в п. 3 § 2 и использованы в дальнейших параграфах.

Теорема 1. *Граничная задача* (2.1) *с эрмитовой потенциальной матрицей* $V(x)$, *удовлетворяющей условию* (1.4), *имеет конечное число собственных значений (отрицательных).*

*Доказательство**. Обозначим через $L_n^2(a, b)$ гильбертово пространство вектор-функций $f(x) = \{f_i(x)\}_1^n$ с суммируемыми в промежутке (a, b) квадратами всех компонент, в котором скалярное произведение, как обычно, определено формулой

$$(f, g)_{<a, b>} = \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(x) \overline{g_i(x)}\, dx.$$

Полагая

$$l[y] = -y'' + V(x) y,$$

где $y = \{y_i(x)\}_1^n$ столбцевой вектор, имеющий абсолютно непрерывную первую производную, рассмотрим самосопряженный оператор L, порождаемый в $L_n^2(0, \infty)$ операцией $l[y]$ и граничным условием $y(0) = 0$. Область определения оператора L, которую мы обозначим через D_L, состоит из всех вектор-функций $y(x) \in L_n^2(0, \infty)$, удовлетворяющих условиям:

1) $y'(x)$ существует и абсолютно непрерывна в каждом конечном промежутке $[0, a]$,
2) $l[y] \in L_n^2(0, \infty)$,
3) $y(0) = 0$,

причем для всех $y(x) \in D_L$

$$Ly = l[y].$$

Граничная задача (2.1), очевидно, равносильна операторному уравнению

$$Ly = \lambda^2 y,$$

и нам надлежит доказать, что оператор L имеет конечное число собственных значений.

С этой целью возьмем число $a > 0$ и введем в рассмотрение еще два оператора (самосопряженных):

L_1 — оператор, порождаемый в пространстве $L_n^2(0, a)$ операцией $l[y]$ и граничными условиями $y(0) = 0$, $y(a) = 0$;

L_2 — оператор, порождаемый в пространстве $L_n^2(a, \infty)$ операцией $l[y]$ и граничным условием $y(a) = 0$.

* В основе этого доказательства лежит метод расщепления операторов, принадлежащий И. М. Глазману [7].

Области определения этих операторов D_{L_1} и D_{L_2} строятся аналогично D_L и для всех $y(x) \in D_{Li}$

$$L_i y = l[y] \qquad (i = 1,2).$$

Покажем, что при достаточно большом $a > 0$ оператор L_2 не имеет вовсе собственных значений. С помощью тех же рассуждений, что и в п. 3 § 2, находим, прежде всего, что все собственные значения оператора L_2 являются квадратами нулей функции $\det \mathscr{E}(a, \lambda)$, причем все эти нули, если они существуют, имеют вид $\lambda = -i\mu$, $\mu > 0$. Но

$$\mathscr{E}(a, -i\mu) = e^{-\mu a} I + \int_a^\infty K(a, t)\, e^{-\mu t} dt$$

и

$$\left|\int_a^\infty K(a, t)\, e^{-\mu t}\, dt\right| \leq e^{-\mu a} \int_a^\infty |K(a, t)|\, dt = e^{-\mu a} \cdot o(1)$$

при $a \to \infty$, так как (см. (1.17))

$$\int_a^\infty |K(a, t)|\, dt \leq C \int_a^\infty \sigma\left(\frac{a+t}{2}\right) dt \leq C \int_a^\infty \sigma\left(\frac{t}{2}\right) dt \to 0$$

при $a \to \infty$. Отсюда следует, что при достаточно большом $a > 0$ функция $\det \mathscr{E}(a, -i\mu)$, $\mu > 0$, нулей не имеет.

Выберем и зафиксируем число $a > 0$ так, чтобы это условие выполнялось и, следовательно, у оператора L_2 отсутствовал точечный спектр. Так как, кроме того, в силу условия (1.4), непрерывный спектр оператора L_2 сосредоточен весь на положительной полуоси, то оператор L_2 неотрицателен, т. е. для любой вектор-функции $y(x) \in D_{L_2}$

$$(L_2 y, y) = (l[y], y)_{\langle a, \infty\rangle} \geq 0.$$

Рассмотрим теперь оператор L_1 и покажем, что он имеет конечное число отрицательных собственных значений. Действительно, собственные значения этого оператора, как легко видеть, являются квадратами нулей $\det G(a, \lambda)$, а так как все эти собственные значения вещественны, то отрицательные из них имеют вид $-\mu^2$, где число $\mu > 0$ удовлетворяет равенству

$$\det G(a, -i\mu) = 0.$$

Но, полагая в (2.9) $\lambda = -i\mu$, $x = a$, находим, что

$$|\mu e^{-\mu a} G(a, -i\mu) - \operatorname{sh} \mu a \cdot e^{-\mu a} I| \to 0$$

при $\mu \to +\infty$. Это соотношение показывает, что нули (четной относительно λ) функции $\det G(a, \lambda)$, лежащие на мнимой оси, образуют ограниченное в λ-плоскости множество, а так как $\det G(a, \lambda)$ целая функция, то это множество нулей конечно.

Обозначим через m сумму размерностей собственных подпространств, соответствующих всем отрицательным собственным значениям оператора L_1.

Мы докажем, что число собственных значений оператора L, которое обозначим через k, удовлетворяет неравенству

$$k \leq m + n. \tag{1}$$

Предположим противное, т. е. что $k > m + n$ и, значит, существуют по крайней мере $(m + n + 1)$ линейно независимых собственных вектор-функций оператора L, отвечающих этим собственным значениям:

$$y^{(1)}(x),\ y^{(2)}(x),\ \ldots\ y^{(m+n+1)}(x). \tag{2}$$

Из этих вектор-функций можно, очевидно, образовать $(m+1)$ линейно независимых линейных комбинаций

$$z^{(1)}(x),\ z^{(2)}(x),\ \ldots\ z^{(m+1)}(x),$$

обращающихся в нуль при $x=a$. Таким образом, вектор-функции $z^{(i)}(x)$, $i=1,\ 2,\ \ldots\ ,\ m+1$, удовлетворяют условиям

$$z^{(i)}(0)=0,\ z^{(i)}(a)=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots\ m+1)$$

и потому принадлежат D_{L_1} и D_{L_2}.

Из вектор-функций $z^{(i)}(x)$ мы теперь можем построить нетривиальную линейную комбинацию

$$u(x)=\sum_{i=1}^{m+1} c_i z^{(i)}(x),$$

ортогональную в метрике $L_n^2(0,\ a)$ всем собственным подпространствам оператора L_1, которые соответствуют его отрицательным собственным значениям.

Тогда

$$(L_1 u,\ u)=(l[u],\ u)_{<0,\ a>}\geqslant 0 \tag{3}$$

и поскольку $u(x)\in D_{L_2}$, то, в силу неотрицательности оператора L_2, имеем также

$$(L_2 u,\ u)=(l[u],\ u)_{<a,\ \infty>}\geqslant 0. \tag{4}$$

Так как, кроме того, $u(x)$ является линейной комбинацией вектор-функций (2) и все собственные значения оператора L отрицательны, то

$$(Lu,\ u)=(l[u],\ u)_{<0,\ \infty>}<0. \tag{5}$$

Заметим, наконец, что

$$(l[u],\ u)_{<0,\ \infty>}=(l[u],\ u)_{<0,\ a>}+(l[u],\ u)_{<a,\ \infty>},$$

а это равенство вместе с (3), (4) и (5) приводит нас к противоречию.

Замечание. Положим

$$V_b(x)=\begin{cases} V(x), & 0<x<b \\ 0 & x\geqslant b\end{cases}$$

и рассмотрим граничную задачу, которая получается из (2.1) путем замены $V(x)$ на $V_b(x)$. Из доказательства теоремы легко усматриваем, что если $b\geqslant a$, то для числа собственных значений этой новой граничной задачи (с потенциальной матрицей $V_b(x)$) будет справедлива та же самая оценка (1). Иными словами, количество собственных значений граничной задачи, получающейся из (2.1) путем замены $V(x)$ на $V_b(x)$, равномерно ограничено при всех достаточно больших b $(b\geqslant a)$.

Для доказательства следующей теоремы нам понадобятся два вспомогательных предложения.

Условимся обозначать точкой сверху дифференцирование по параметру λ.

Лемма 1. *При всяком* λ *из полуплоскости* $\operatorname{Im}\lambda<0$ *имеет место равенство*

$$\lim_{x\to 0} x\,\dot{\mathscr{E}}'(x,\ \lambda)=0. \tag{6}$$

Доказательство. Дифференцируя формально равенство (1.6), получаем:

$$\dot{\mathscr{E}}'(x,\ \lambda)=-ie^{-i\lambda x}I-\lambda xe^{-i\lambda x}I+ixe^{-i\lambda x}K(x,\ x)-$$
$$-i\int_x^\infty tK'_x(x,\ t)\,e^{-i\lambda t}dt. \tag{7}$$

Покажем, что эта формула справедлива при $x>0$ и $\operatorname{Im}\lambda<0$. Действительно, для любых x и λ из области

$$0<\varepsilon\leqslant x, \qquad \operatorname{Im}\lambda\leqslant-\delta<0 \tag{8}$$

имеем (см. (1.20)):

$$\left|\int_N^\infty t K_x'(x, t)\, e^{-i\lambda t}dt\right|\leqslant\int_N^\infty t\,|K_x'(x, t)|\,e^{-\delta t}dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{e^{-\delta N}}{4}\int_N^\infty t\left|V\left(\frac{x+t}{2}\right)\right|dt+C\sigma(x)\int_N^\infty t\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{-\delta t}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{e^{-\delta N}}{2}\int_{\frac{x+N}{2}}^\infty(2u-x)\,|V(u)|\,du+C\sigma(x)\int_N^\infty t\sigma\left(\frac{t}{2}\right)e^{-\delta t}dt\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\delta N}\int_{\frac{N}{2}}^\infty u\,|V(u)|\,du+C\sigma(\varepsilon)\,\sigma\left(\frac{N}{2}\right)\int_N^\infty te^{-\delta t}dt.$$

Эта оценка показывает, что интеграл в правой части (7) сходится равномерно относительно x и λ в области (8) при любых положительных ε и δ, а отсюда вытекает справедливость формулы (7) при $x>0$ и $\operatorname{Im}\lambda<0$.

Полагая в равенстве (7) $\operatorname{Im}\lambda=-\mu$, $\mu>0$, и используя оценки (1.17) и (1.20), получаем:

$$|\dot{\mathscr{E}}'(x,\lambda)|\leqslant 1+x\,|\lambda|+C\,x\sigma(x)+\frac{1}{4}\int_x^\infty t\left|V\left(\frac{x+t}{2}\right)\right|dt+$$

$$+C\sigma(x)\int_x^\infty t\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{-\mu t}dt\leqslant$$

$$\leqslant 1+x\,|\lambda|+Cx\sigma(x)+\int_x^\infty u\,|V(u)|\,du+C\sigma(x)\int_x^\infty t\sigma\left(\frac{t}{2}\right)e^{-\mu t}dt\leqslant$$

$$\leqslant 1+x\,|\lambda|+Cx\sigma(x)+\sigma_1(x)+\frac{2C}{\mu}\,\sigma_1(0)\,\sigma(x),$$

ибо

$$t\sigma\left(\frac{t}{2}\right)=t\int_{\frac{t}{2}}^\infty|V(s)|\,ds\leqslant 2\int_{\frac{t}{2}}^\infty s\,|V(s)|\,ds\leqslant 2\sigma_1(0).$$

Так как при $0<x<1$

$$x\sigma(x)=x\int_x^\infty|V(s)|\,ds=x\left\{\int_x^{\sqrt{x}}+\int_{\sqrt{x}}^\infty|V(s)|\,ds\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\int_x^{\sqrt{x}}s\,|V(s)|\,ds+\sqrt{x}\int_{\sqrt{x}}^\infty s\,|V(s)|\,ds\to 0,$$

когда $x\to 0$, то равенство (6) непосредственно следует из оценки для $\dot{\mathscr{E}}'(x,\lambda)$.

Лемма 2*. *Пусть $M(z)$ квадратная матрица, регулярная в круге $|z|<1$ и такая, что $\det M(0)=0$, $\det M(z)\neq 0$ при $0<|z|<1$.*

Обратная матрица $M^{-1}(z)$ имеет в точке $z=0$ простой полюс в том и только в том случае, если из равенств

$$\left.\begin{array}{l} M(0)\,a=0 \\ M(0)\,b+M'(0)\,a=0 \end{array}\right\}, \tag{9}$$

где a и b — постоянные векторы, следует $a=0$.

Доказательство. Ясно, что $M^{-1}(z)$ регулярна всюду в круге $|z|<1$, кроме точки $z=0$, где имеет полюс некоторого порядка m. Имеем

$$M^{-1}(z)=z^{-m}N_{-m}+z^{-m+1}N_{-m+1}+\ldots,$$
$$M(z)=M_0+zM_1+\ldots,$$

где

$$M_0=M(0),\ M_1=M'(0),\ \ldots$$

Матрицы N_k должны, очевидно, удовлетворять следующим равенствам:

$$\sum_{i=0}^{k}M_iN_{-i+k-m}=\sum_{i=0}^{k}N_{-i+k-m}M_i=\delta_{km}I \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{10}$$

Предполагая, что $m=1$, т. е. что $M^{-1}(z)$ имеет в точке $z=0$ простой полюс, из (10) получим:

$$\left.\begin{array}{c} M_0N_{-1}=N_{-1}M_0=0, \\ M_0N_0+M_1N_{-1}=N_0M_0+N_{-1}M_1=I \end{array}\right\}, \tag{11}$$

где матрица $N_{-1}\neq 0$.

Умножая второе из равенств (11) справа на вектор a и используя первое равенство (9), получаем

$$a=N_{-1}M_1a;$$

в силу второго из равенств (9), отсюда находим

$$a=-N_{-1}M_0b,$$

что равно нулю на основании (11).

Необходимость критерия, таким образом, доказана.

Предположим теперь, что из равенств (9) следует $a=0$. Используя это обстоятельство, из (10) последовательно находим $N_{-m}=0$, затем $N_{-m+1}=0$ и т. д., пока не придем к равенствам (11). Таким образом, $M^{-1}(z)$ может иметь в точке $z=0$ только простой полюс, и тем самым доказана достаточность критерия.

Теорема 2. *Все особые точки матрицы-функции $\mathscr{E}^{-1}(\lambda)$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda<0$ являются простыми полюсами.*

Доказательство. Воспользуемся равенством

$$\mathscr{E}''(x,\ \lambda)+\lambda^2\mathscr{E}(x,\ \lambda)=V(x)\,\mathscr{E}(x,\ \lambda) \qquad (\operatorname{Im}\lambda<0). \tag{12}$$

Дифференцируя (12) по λ, затем последовательно транспонируя, умножая справа на $\mathscr{E}(x,\ \lambda)$ и вычитая найденный результат из равенства, которое получится после умножения (12) слева на $\dot{\mathscr{E}}_t(x,\ \lambda)$, получим:

$$\dot{\mathscr{E}}_t(x,\ \lambda)\,\mathscr{E}''(x,\ \lambda)-\dot{\mathscr{E}}_t''(x,\ \lambda)\,\mathscr{E}(x,\ \lambda)=2\lambda\mathscr{E}_t(x,\ \lambda)\,\mathscr{E}(x,\ \lambda).$$

* Эта лемма и ее доказательство, а также доказательство следующей далее теоремы 2, взяты нами из статьи R. G. Newton'a и R. Jost'a [2].

Интегрируя последнее равенство в пределах от x до ∞ и учитывая при этом поведение $\mathscr{E}(x, \lambda)$ при $x \to \infty$, находим ($\operatorname{Im}\lambda < 0$):

$$\dot{\mathscr{E}}_t(x, \lambda)\,\mathscr{E}'(x, \lambda) - \dot{\mathscr{E}}_t'(x, \lambda)\,\mathscr{E}(x, \lambda) = -2\lambda \int_x^\infty \mathscr{E}_t(u, \lambda)\,\mathscr{E}(u, \lambda)\,du. \quad (13)$$

Пусть $\lambda_\nu = -i\mu_\nu$, $\mu_\nu > 0$, полюс матрицы-функции $\mathscr{E}^{-1}(\lambda)$, т. е. $\det \mathscr{E}(\lambda_\nu) = 0$ и, значит, существует вектор $a \neq 0$ такой, что

$$\mathscr{E}(\lambda_\nu)\,a = 0. \quad (14)$$

Так как $\mathscr{E}(\lambda_\nu) = \mathscr{E}(-i\mu_\nu)$ вещественная матрица, то и вектор a можно считать вещественным.

Заметим, что из (14) следует равенство

$$\mathscr{E}(x, \lambda_\nu)\,a = G(x, \lambda_\nu)\,\widetilde{a},$$

где $\widetilde{a}$ — некоторый вектор, и потому существует

$$\lim_{x\to 0} \mathscr{E}'(x, \lambda_\nu)\,a = \mathscr{E}'(\lambda_\nu)\,a \quad (15)$$

(правая часть этого равенства служит кратким обозначением левой части).

Используя это равенство и лемму 1, имеем далее:

$$\lim_{x\to 0}\{a_t\dot{\mathscr{E}}_t'(x, \lambda_\nu)\,\mathscr{E}(x, \lambda_\nu)\,a\} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\left[a_t x\dot{\mathscr{E}}_t'(x, \lambda_\nu)\right]\left[\frac{1}{x}\,\mathscr{E}(x, \lambda_\nu)\,a\right]\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\{[a_t x\dot{\mathscr{E}}_t'(x, \lambda_\nu)]\,[\mathscr{E}'(\theta x, \lambda_\nu)\,a]\} = 0.$$

В силу этого, если мы в равенстве (13) положим $\lambda = \lambda_\nu$, умножим его слева на a_t, справа на a и затем устремим x к нулю, то найдем, что

$$a_t\dot{\mathscr{E}}_t(\lambda_\nu)\,\mathscr{E}'(\lambda_\nu)\,a = -2\lambda_\nu \int_0^\infty [\mathscr{E}(u, \lambda_\nu)\,a]_t\,\mathscr{E}(u, \lambda_\nu)\,a\,du \neq 0. \quad (16)$$

Предположим теперь, что существует вектор a, удовлетворяющий не только условию (14), но еще и равенству

$$\mathscr{E}(\lambda_\nu)\,b + \dot{\mathscr{E}}(\lambda_\nu)\,a = 0, \quad (17)$$

где b — некоторый другой вектор.

Транспонируя левую часть этого равенства и умножая его после этого справа на $\mathscr{E}'(\lambda_\nu)\,a$, получим

$$b_t\mathscr{E}_t(\lambda_\nu)\,\mathscr{E}'(\lambda_\nu)\,a + a_t\dot{\mathscr{E}}_t(\lambda_\nu)\,\mathscr{E}'(\lambda_\nu)\,a = 0.$$

Но, в силу (1.29) и (14),

$$b_t\mathscr{E}_t(\lambda_\nu)\,\mathscr{E}'(\lambda_\nu)\,a = b_t\mathscr{E}_t'(\lambda_\nu)\,\mathscr{E}(\lambda_\nu)\,a = 0$$

и, следовательно,

$$a_t\dot{\mathscr{E}}_t(\lambda_\nu)\,\mathscr{E}'(\lambda_\nu)\,a = 0,$$

что противоречит (16).

Это доказывает, что не существует вектора $a \neq 0$, который удовлетворял бы одновременно условиям (14) и (17). Но тогда, в силу леммы 2, матрица-функция $\mathscr{E}^{-1}(\lambda)$ имеет в точке $\lambda = \lambda_\nu$ простой полюс, и теорема, таким образом, доказана.

Лемма 3. *Матрица-функция* $\lambda\mathscr{E}^{-1}(\lambda)$, $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$, *ограничена вблизи точки* $\lambda = 0$.

Доказательство. Пусть

$$V_b(x) = \begin{cases} V(x), & 0 < x < b \\ 0, & x \geqslant b \end{cases} \tag{18}$$

Через $\mathscr{E}_b(x, \lambda)$ и $G_b(x, \lambda)$ обозначим решения уравнения

$$Y'' + \lambda^2 Y = V_b(x)\,Y,$$

аналогичные соответственно решениям $\mathscr{E}(x, \lambda)$ и $G(x, \lambda)$ уравнения (1.2).

Из (2.3) и аналогичного ему равенства для $G_b(x, \lambda)$ усматриваем, что

$$G_b(x, \lambda) = G(x, \lambda) \text{ при } 0 \leqslant x < b. \tag{19}$$

Далее имеем по определению

$$\mathscr{E}_b(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} I + \int_x^\infty K_b(x, t)\, e^{-i\lambda t}\, dt, \tag{20}$$

где матрица-функция $K_b(x, t)$ удовлетворяет уравнению, получающемуся из (1.14) заменой $V(x)$ на $V_b(x)$.

Пользуясь этим уравнением и уравнением (1.14) легко показать, что

$$\int_x^\infty |K(x, t) - K_b(x, t)|\, dt \to 0 \text{ при } b \to \infty$$

равномерно относительно $x \geqslant 0$, а в силу этого, из (20) и (1.6) следует, что равномерно относительно $x \geqslant 0$ и λ в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$

$$\mathscr{E}_b(x, \lambda) \to \mathscr{E}(x, \lambda) \text{ при } b \to \infty. \tag{21}$$

Из уравнения для $K_b(x, t)$ усматриваем также, что $K_b(x, t) = 0$, если $\frac{x+t}{2} > b$, и следовательно, при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ интеграл в правой части (20) берется по конечному промежутку. Это показывает, что при каждом $x \geqslant 0$ $\mathscr{E}_b(x, \lambda)$ является целой функцией от λ.

В силу теорем 1 и 2, а также замечания к теореме 1, матрица-функция $\mathscr{E}_b^{-1}(\lambda) = \mathscr{E}_b^{-1}(0, \lambda)$ регулярна всюду в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda < 0$, кроме конечного числа точек на мнимой оси, где она имеет простые полюсы, причем для всех достаточно больших b количество этих полюсов ограничено одним и тем же числом N. В дальнейшем будем брать только такие достаточно большие значения b, не оговаривая этого каждый раз особо. На основании леммы 2.2 (очевидно справедливой и для $\mathscr{E}_b(x, \lambda)$) матрица $\mathscr{E}_b^{-1}(\lambda)$ сохраняет регулярность и при всех вещественных $\lambda \neq 0$.

Возьмем теперь произвольно $x_0 \geqslant 0$ и, считая $b > x_0$, рассмотрим равенство, аналогичное (2.15), которое в силу (19) можно записать в виде:

$$\Phi_b(\lambda) = 2i\lambda\, G(x_0, \lambda)\, [\mathscr{E}_b^{-1}(\lambda)]_t = \mathscr{E}_b(x_0, -\lambda) - \mathscr{E}_b(x_0, \lambda)\, S_b(-\lambda). \tag{22}$$

$$(\operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \neq 0)$$

Так как $S_b(-\lambda)$ — унитарная матрица, а $\mathscr{E}_b(x_0, \lambda)$ равномерно ограничена при всех $b > 0$ и $-\infty < \lambda < \infty$ *, то при всех вещественных $\lambda \neq 0$

$$|\mathscr{E}_b(x_0, -\lambda) - \mathscr{E}_b(x_0, \lambda)\, S_b(-\lambda)| < k,$$

где k — постоянная, не зависящая ни от b, ни от λ.

---

* Это следует непосредственно из (20), так как для $K_b(x, t)$ при любом $b > 0$ справедлива оценка (1.17).

Заметим теперь, что матрицы $G(x_0, \lambda)$ и $\mathscr{E}_b(\lambda)$ являются целыми функциями от λ, и поэтому левая часть равенства (22) либо регулярна в точке $\lambda = 0$, либо имеет там полюс. Но так как, согласно равенству (22), эта матрица-функция остается ограниченной, когда $\lambda \to 0$ вдоль вещественной оси, то при $\lambda = 0$ она полюса иметь не может и, следовательно, при всех вещественных λ справедлива оценка:

$$|\Phi_b(\lambda)| = |2i\lambda G(x_0, \lambda)[\mathscr{E}_b^{-1}(\lambda)]_t| \leqslant k \qquad (-\infty < \lambda < \infty). \tag{23}$$

Так как при всех вещественных $\lambda \neq 0$ $\mathscr{E}_b^{-1}(\lambda) \to \mathscr{E}^{-1}(\lambda)$, когда $b \to \infty$ (см. (21) и лемму 2.2), то из последнего неравенства получаем:

$$|\Phi(\lambda)| = |2i\lambda G(x_0, \lambda)\mathscr{E}_t^{-1}(\lambda)| \leqslant k \quad (\operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \neq 0). \tag{24}$$

Мы можем, далее, найти $r > 0$ такое, что $\mathscr{E}^{-1}(\lambda)$ не будет иметь особенностей на полуокружности

$$|\lambda| = r, \ \operatorname{Im}\lambda < 0, \tag{25}$$

а также внутри области D, ограниченной этой полуокружностью и отрезком вещественной оси $[-r, r]$. Но тогда $\Phi(\lambda)$ ограничена на полуокружности (25), т. е.

$$|\Phi(\lambda)| = |2i\lambda G(x_0, \lambda)\mathscr{E}_t^{-1}(\lambda)| \leqslant k \qquad (|\lambda| = r,\ \operatorname{Im}\lambda < 0), \tag{26}$$

где постоянная k может быть, очевидно, взята такой же, как и в неравенстве (24).

Так как в каждой точке полуокружности (25) $\mathscr{E}_b^{-1}(\lambda) \to \mathscr{E}^{-1}(\lambda)$ при $b \to \infty$, то при всех достаточно больших $b \geqslant b_0$ матрица-функция $\Phi_b(\lambda)$ также не будет иметь особенностей на этой полуокружности и будет удовлетворять неравенству

$$|\Phi_b(\lambda)| \leqslant k \qquad (|\lambda| = r, \quad \operatorname{Im}\lambda < 0). \tag{27}$$

Пусть теперь в области D имеется $N_b \leqslant N$ полюсов (простых) матрицы-функции $\mathscr{E}_b^{-1}(\lambda)$. Обозначим эти полюсы через

$$a_i^{(b)} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots\ N_b)$$

и положим

$$p_b(\lambda) = \prod_{i=1}^{N_b}(\lambda - a_i^{(b)}),$$

так что матрица-функция $p_b(\lambda)\Phi_b(\lambda)$ будет регулярна всюду в области D и на ее границе.

Считая $r \leqslant \frac{1}{2}$, что не ограничивает общности наших рассуждений, будет иметь

$$|p_b(\lambda)| = \prod_{i=1}^{N_b}|\lambda - a_i^{(b)}| \leqslant (2r)^{N_b} \leqslant 1.$$

Но тогда, в силу (23), (27) и принципа максимума модуля,

$$|p_b(\lambda)\Phi_b(\lambda)| \leqslant k \qquad (\lambda \in \overline{D}),$$

т. е.

$$|\Phi_b(\lambda)| \leqslant \frac{k}{|p_b(\lambda)|} \qquad (\lambda \in \overline{D}) \tag{28}$$

при всех $b \geqslant b_0$.

Заметим, далее, что при $b \to \infty$ точки $a_i^{(b)} \to 0$ и $\Phi_b(\lambda) \to \Phi(\lambda)$ в каждой точке области D. В силу этого, из неравенства (28) получаем * при $b \to \infty$

$$|\Phi(\lambda)| \leqslant \frac{k}{|\lambda|^N} \qquad (\lambda \in D). \tag{29}$$

Используя теперь принцип Фрагмена—Линделефа **, находим из (24), (26) и (29), что

$$|\Phi(\lambda)| = |2i\lambda G(x_0, \lambda)\mathcal{E}_t^{-1}(\lambda)| \leqslant k \qquad (\lambda \in D). \tag{30}$$

Воспользуемся, наконец, тем, что (см. (2.4) и (2.5))

$$G(x, \lambda) = xe^{i\lambda x} Z(x, \lambda),$$

где

$$Z(x, \lambda) \to I \quad \text{при} \quad x \to 0$$

равномерно относительно $\lambda \in \overline{D}$. Поэтому найдется такое $x_0 > 0$, что $|\det Z(x_0, \lambda)| > \frac{1}{2}$ и, следовательно, $|\det G(x_0, \lambda)| > \frac{1}{2} x_0^n$ при всех $\lambda \in \overline{D}$. Но тогда при всех $\lambda \in \overline{D}$ существует $G^{-1}(x_0, \lambda)$ и

$$|G^{-1}(x_0, \lambda)| < k_1 \qquad (\lambda \in \overline{D}), \tag{31}$$

где k_1 — некоторая постоянная.

Из (30) и (31) получаем, таким образом,

$$|\lambda \mathcal{E}_t^{-1}(\lambda)| \leqslant \frac{1}{2} |\Phi(\lambda)| \, |G^{-1}(x_0, \lambda)| < \frac{k \cdot k_1}{2} \quad (\lambda \in D),$$

и лемма доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ

Данные рассеяния граничной задачи рассмотренного нами вида характеризуются пятью свойствами, сформулированными в начале п. 1 § 5, причем из примеров § 8 следует, что эти свойства независимы между собою. Их можно, однако, заменить другой системой характеристических свойств. Соответствующий результат составляет содержание заключительной теоремы 2 настоящего приложения.

1. Факторизация унитарной матрицы

Лемма 1. *Если $S(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, унитарная матрица, обладающая свойством I_s, то и матрица*

$$S_a(\lambda) = S(\lambda) \cdot \frac{\lambda + ia}{\lambda - ia}$$

при любом $a > 0$ обладает свойством I_s.

Если, кроме того, $S(\lambda)$ обладает свойством III_s, то и $S_a(\lambda)$ обладает этим свойством.

---

* Берем в знаменателе правой части наибольшую из возможных степеней $|\lambda|$, так как в области D $|\lambda| \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$.

** Предварительно отображаем область D на верхнюю полуплоскость так, чтобы точка $\lambda = 0$ перешла в бесконечно удаленную точку.

Доказательство. Очевидно, что $S_a(\lambda)$, $-\infty<\lambda<\infty$, унитарна одновременно с $S(\lambda)$. Так как

$$I-S_a(\lambda)=I-S(\lambda)+\frac{2a}{i\lambda+a}I-\frac{2a}{i\lambda+a}[I-S(\lambda)]$$

и

$$\int_0^\infty e^{-at}e^{-i\lambda t}\,dt=\frac{1}{i\lambda+a},$$

то с помощью теорем о свертке находим, что $I-S_a(\lambda)$ есть преобразование Фурье матрицы

$$F_a(t)=\begin{cases}F_1(t)+2ae^{-at}I-2a\,\Phi(t) & \text{при } t>0\\ F_1(t)-2a\,\Phi(t) & \text{при } t<0,\end{cases}$$

где $F_1(t)$ — матрица, преобразованием Фурье которой является $I-S(\lambda)$, а

$$\Phi(t)=\int_0^\infty F_1(t-\xi)e^{-a\xi}\,d\xi=e^{-at}\int_{-\infty}^t F_1(u)e^{au}\,du. \qquad (1)$$

Ясно, что матрица $F_a(u)$ эрмитова одновременно с $F_1(u)$. Для доказательства первой части леммы осталось еще показать, что строки матрицы $\Phi(t)$ принадлежат одновременно $\mathfrak{M}_n(-\infty,\infty)$ и $L_n^1(0,\infty)$, если этим свойством обладают строки матрицы $F_1(t)$.

Но принадлежность строк матрицы $\Phi(t)$ к $\mathfrak{M}_n(-\infty,\infty)$ следует непосредственно из формулы (1) и теорем о свертке. Далее имеем

$$\int_0^\infty|\Phi(t)|\,dt\leqslant\int_0^\infty e^{-at}\,dt\int_{-\infty}^t|F_1(u)|e^{au}\,du=\int_{-\infty}^0|F_1(u)|e^{au}\,du\int_0^\infty e^{-at}\,dt+$$
$$+\int_0^\infty|F_1(u)|e^{au}\,du\int_u^\infty e^{-at}\,dt=\frac{1}{a}\left\{\int_{-\infty}^0|F_1(u)|e^{au}\,du+\int_0^\infty|F_1(u)|\,du\right\},$$

откуда, в силу свойств матрицы $F_1(t)$, следует, что

$$\int_0^\infty|\Phi(t)|\,dt<\infty.$$

Пусть теперь матрица $S(\lambda)$ обладает не только свойством I_s, но и свойством III_s. Покажем, что и матрица $S_a(\lambda)$ обладает свойством III_s, т. е. что при всех $t>0$ существует $F_a'(t)$ и

$$\int_0^\infty t\,|F_a'(t)|\,dt<\infty.$$

Достаточно, очевидно, доказать аналогичное утверждение для матрицы $\Phi(t)$.

Из формулы (1) находим при $t>0$:

$$\Phi'(t)=-ae^{-at}\int_{-\infty}^t F_1(u)e^{au}\,du+F_1(t)=$$
$$=-ae^{-at}A-e^{-at}\left[F_1(u)e^{au}\Big|_1^t-\int_1^t F_1'(u)e^{au}\,du\right]+F_1(t)=$$
$$=-ae^{-at}A+e^{a(1-t)}F_1(1)+e^{-at}\int_1^t F_1'(u)e^{au}\,du,$$

где $A = \int\limits_{-\infty}^{1} F_1(u)\, e^{au}\, du$. Отсюда усматриваем, что неравенство

$$\int\limits_0^\infty t\, |\Phi'(t)|\, dt < \infty$$

будет следовать из аналогичного неравенства для матрицы $e^{-at} \int\limits_1^t F_1'(u)\, e^{au}\, du$. Но

$$\int\limits_1^\infty t e^{-at}\, dt \int\limits_1^t | F_1'(u) |\, e^{au}\, du = \int\limits_1^\infty | F_1'(u) |\, e^{au}\, du \int\limits_u^\infty t e^{-at}\, dt =$$

$$= \int\limits_1^\infty | F_1'(u) |\, e^{au} \left(\frac{1}{a} u e^{-au} + \frac{1}{a^2} e^{-au} \right) du < \infty,$$

так как $\int\limits_0^\infty u\, | F_1'(u) |\, du < \infty$, и аналогично

$$\int\limits_0^1 t e^{-at}\, dt \int\limits_t^1 |F_1'(u)|\, e^{au}\, du < \infty.$$

Таким образом, лемма доказана полностью.

Следствие. Путем многократного применения доказанной леммы заключаем, что одновременно с унитарной матрицей $S(\lambda)$ свойствами I_s и III_s обладает матрица

$$\mathbf{S}(\lambda) = S(\lambda) \cdot \left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i} \right)^{2m} \tag{2}$$

при любом натуральном m.

Замечание. Аналогично доказывается, что если матрица

$$F_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [I - S(\lambda)]\, e^{i\lambda t}\, d\lambda \tag{3}$$

удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^\infty t^2\, | F_1'(t) |\, dt < \infty, \tag{4}$$

то этому же условию удовлетворяет и матрица $\mathbf{F}_1(t)$, имеющая своим преобразованием Фурье матрицу $I - \mathbf{S}(\lambda)$.

Лемма 2. *Пусть унитарная матрица $S(\lambda)$ непрерывна на всей вещественной оси, стремится к I при $\lambda \to \pm\infty$ и обладает свойством I_s. Если уравнение*

$$-x(t) + \int\limits_{-\infty}^{0} x(\xi)\, F_1(t + \xi)\, d\xi = 0, \quad -\infty < t \leqslant 0, \tag{5}$$

где матрица $F_1(t)$ определена формулой (3), имеет r линейно независимых решений в $L_n^2(-\infty, 0)$, то при $m \geqslant r$ матрица $\mathbf{S}(\lambda)$, определяемая формулой (2), обладает свойствами I_s и II_s.*

---

* Из условий, которым подчинена $S(\lambda)$ следует, что матрица $F_1(t)$ удовлетворяет всем требованиям леммы 4.4, и потому оператор

$$\mathbf{F}_1[x] = \int\limits_{-\infty}^{0} x(\xi)\, F_1(t + \xi)\, d\xi$$

вполне непрерывен в $L_n^2(-\infty, 0)$.

Если $S(\lambda)$ *обладает, кроме того, свойством* III_s, *то этим свойством обладает и* $\mathbf{S}(\lambda)$.

Доказательство. Согласно следствию леммы 1, нам нужно только доказать, что при $m \geqslant r$ матрица $\mathbf{S}(\lambda)$ обладает свойством II_s. Обозначая через $\mathbf{F}_1(t)$ матрицу, имеющую своим преобразованием Фурье $I - S(\lambda)$, мы должны, таким образом, доказать, что уравнение

$$-y(t) + \int_{-\infty}^{0} y(\xi)\mathbf{F}_1(t+\xi)\,d\xi = 0, \quad -\infty < t \leqslant 0,$$

не имеет ненулевых решений в $L_n^2(-\infty, 0)$.

Пусть $y(t) \in L_n^2(-\infty, 0)$ решение этого уравнения. Тогда, согласно лемме 4.3, справедливо равенство

$$\tilde{y}(\lambda) + \tilde{y}(-\lambda)\mathbf{S}(\lambda) = 0,$$

где

$$\tilde{y}(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} y(t) e^{-i\lambda t}\,dt.$$

Используя формулу (2) для $\mathbf{S}(\lambda)$, находим отсюда, что вектор-функция

$$\tilde{x}(\lambda) = \tilde{y}(\lambda)\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^m$$

удовлетворяет равенству

$$\tilde{x}(\lambda) + \tilde{x}(-\lambda) S(\lambda) = 0.$$

Кроме того, вектор-функция $\tilde{x}(\lambda)$ регулярна в верхней полуплоскости и суммируема с квадратом на вещественной оси, ибо этими свойствами обладает $\tilde{y}(\lambda)$. Так как $\tilde{x}(\lambda)$ имеет в точке $\lambda = i$ нуль m-го порядка, то вектор-функции

$$\tilde{x}^{(k)}(\lambda) = \frac{\tilde{x}(\lambda)}{(\lambda^2+1)^k} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots m)$$

тоже регулярны в верхней полуплоскости, суммируемы с квадратом на вещественной оси и, очевидно, удовлетворяют равенствам

$$\tilde{x}^{(k)}(\lambda) + \tilde{x}^{(k)}(-\lambda) S(\lambda) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \dots m).$$

Поэтому вектор-функции

$$x^{(k)}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}^{(k)}(\lambda) e^{i\lambda t}\,d\lambda \qquad (k = 0, 1, 2, \dots m)$$

равны нулю при $t > 0$, принадлежат $L_n^2(-\infty, 0)$ и, согласно лемме 4.3, удовлетворяют уравнению (5).

Остается теперь лишь заметить, что если $\tilde{x}(\lambda) \not\equiv 0$, то вектор-функции $\tilde{x}^{(k)}(\lambda)$, а значит и $x^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \dots m$, линейно независимы, следовательно, уравнение (5) имеет по крайней мере $m + 1 > r$ линейно независимых решений в $L_n^2(-\infty, 0)$, а это противоречит условию леммы.

Итак, $\tilde{x}(\lambda) \equiv 0$, откуда $\tilde{y}(\lambda) \equiv 0$ и, значит, $y(t) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Следствие. Если матрица $S(\lambda)$ удовлетворяет всем условиям леммы 2, то она представима в виде

$$S(\lambda) = \mathcal{E}^{-1}(-\lambda)\,\mathcal{E}(\lambda)\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{2m}; \tag{6}$$

здесь m — достаточно большое натуральное число, а матрица $\mathcal{E}(\lambda) = \mathcal{E}(0,\lambda)$, где $\mathcal{E}(x,\lambda)$ специальное решение некоторого уравнения вида (1.2) с эрмитовым потенциалом, удовлетворяющим условию (1.4) (см. теорему 1.1).

Действительно, при указанных условиях матрица $\mathbf{S}(\lambda)$, определяемая формулой (2) с достаточно большим натуральным m, обладает свойствами I_s, II_s, III_s и потому, согласно теореме 7.3, является матрицей рассеяния некоторой граничной задачи (2.1) с эрмитовым потенциалом $V(x)$, удовлетворяющим неравенству (1.4). Но тогда, согласно результатам § 2, матрица $\mathbf{S}(\lambda)$ представима в виде

$$\mathbf{S}(\lambda) = \mathcal{E}^{-1}(-\lambda)\,\mathcal{E}(\lambda) = \mathcal{E}^{*}(-\lambda)\,[\mathcal{E}^{*}(\lambda)]^{-1},$$

где $\mathcal{E}(\lambda)$ имеет указанный выше смысл. Отсюда и из (2) получаем равенство (6).

Замечание. Если, кроме условий леммы 2, выполнено неравенство (4), то $\mathbf{S}(\lambda)$ является матрицей рассеяния граничной задачи (2.1) с эрмитовым потенциалом $V(x)$, удовлетворяющим одновременно условиям (1.4) и

$$\int_0^\infty x^2\,|V(x)|\,dx < \infty. \tag{7}$$

Это следует непосредственно из замечания к лемме 1 и неравенства (6.25′) (см. замечание к лемме 6.4). Обратно, если потенциал граничной задачи (2.1) удовлетворяет условиям (1.4) и (7), то соответствующая матрица рассеяния удовлетворяет всем условиям леммы 2 и неравенству (4).

2. Индексы матрицы $S(\lambda)$

Предполагая в дальнейшем, что унитарная матрица $S(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, удовлетворяет всем условиям леммы 2, мы рассмотрим уравнение

$$\tilde{x}(\lambda) = \tilde{x}(-\lambda)\,S(\lambda), \quad -\infty < \lambda < \infty \tag{8}$$

и будет отыскивать те векторы-решения $\tilde{x}(\lambda)$ этого уравнения, которые регулярны в нижней полуплоскости и имеют конечный порядок на бесконечности. Последнее означает, что отношение $\tilde{x}(\lambda)$ к $|\lambda|^r$, где r — некоторая постоянная, стремится к нулю при $\lambda \to \infty$, $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$. Для краткости такие решения будем называть *правильными*.

Лемма 3. *Всякое правильное решение уравнения* (8) *имеет вид*

$$\tilde{x}(\lambda) = (\lambda - i)^{2m}\left[\sum_{\nu=1}^{p}\frac{-2i\,\mu_\nu\,c^{(\nu)}\,N^{(\nu)}}{\lambda^2 + \mu_\nu^2} + p(\lambda^2)\right]\cdot\mathcal{E}(\lambda), \tag{9}$$

где $-i\mu_\nu$ $(\nu = 1,2,\ldots p)$ — *полюсы матрицы* $\mathcal{E}^{-1}(\lambda)$, $c^{(\nu)} = (\lambda - i)^{-2m}\times\tilde{x}(\lambda)\,|_{\lambda=-i\mu_\nu}$, $N^{(\nu)}$ — *вычет* $\mathcal{E}^{-1}(\lambda)$ *относительно полюса* $-i\mu_\nu$, *а* $p(\lambda)$ — *вектор, компоненты которого являются многочленами от* λ.

Доказательство. Используя представление (6) для $S(\lambda)$, получаем из уравнения (8):

$$(\lambda - i)^{-2m}\,\tilde{x}(\lambda)\,\mathcal{E}^{-1}(\lambda) = (\lambda + i)^{-2m}\,\tilde{x}(-\lambda)\,\mathcal{E}^{-1}(-\lambda) \quad (\operatorname{Im}\lambda = 0). \tag{10}$$

Положим

$$\varphi(\lambda)=\begin{cases}(\lambda-i)^{-2m}\tilde{x}(\lambda)\,\mathscr{E}^{-1}(\lambda), & \text{если } \operatorname{Im}\lambda<0\\ (\lambda+i)^{-2m}\tilde{x}(-\lambda)\,\mathscr{E}^{-1}(-\lambda), & \text{если } \operatorname{Im}\lambda>0.\end{cases}$$

Из свойств матрицы $\mathscr{E}(\lambda)$ (см. приложение 1) следует, что вектор-функция $\lambda\varphi(\lambda)$ мероморфна во всей плоскости, имеет конечное число простых полюсов в точках $\pm i\mu_\nu$ $(\nu=1,2,\dots p)$ и, согласно (10), нечетна на вещественной оси. Поэтому

$$\lambda\varphi(\lambda)=\lambda\sum_{\nu=1}^{p}\frac{-2i\mu_\nu c^{(\nu)}N^{(\nu)}}{\lambda^2+\mu_\nu^2}+\psi(\lambda),$$

где $c^{(\nu)}=(\lambda-i)^{-2m}\tilde{x}(\lambda)\,|_{\lambda=-i\mu_\nu}$, $N^{(\nu)}$ — вычет матрицы $\mathscr{E}^{-1}(\lambda)$ относительно полюса $-i\mu_{(\nu)}$, $\psi(\lambda)$ — целая нечетная функция. Заметим еще, что так как $\mathscr{E}(\lambda)\to I$ при $\lambda\to\infty$, $\operatorname{Im}(\lambda)\leqslant 0$, то $\varphi(\lambda)$, а значит и $\psi(\lambda)$ имеет конечный порядок на бесконечности. Но в таком случае $\frac{1}{\lambda}\psi(\lambda)=p(\lambda^2)$, где $p(\lambda)$ — вектор, компоненты которого являются многочленами, и потому

$$\varphi(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{p}\frac{-2i\mu_\nu c^{(\nu)}N^{(\nu)}}{\lambda^2+\mu_\nu^2}+p(\lambda^2),$$

что равносильно равенству (9).

З а м е ч а н и е. Так как $\mathscr{E}(\lambda)\to I$ при $\lambda\to\infty$, $\operatorname{Im}\lambda\leqslant 0$, то формула (9) показывает, что при $\lambda\to\infty$, $\operatorname{Im}\lambda\leqslant 0$, каждая из компонент $\tilde{x}_\alpha(\lambda)$ правильного решения $\tilde{x}(\lambda)$ уравнения (8) асимптотически равна

$$\tilde{x}_\alpha(\lambda)\sim c_\alpha\lambda^{2r_\alpha},$$

где c_α — постоянная, r_α — целое число. Показатель $2r_\alpha$ в этом асимптотическом равенстве называется *порядком на бесконечности* компоненты $\tilde{x}_\alpha(\lambda)$, а наибольший из порядков компонент вектора $\tilde{x}(\lambda)$ называют *порядком на бесконечности* этого вектора. Очевидно, что порядок на бесконечности любого правильного решения уравнения (8) есть число четное.

Записав теперь равенство (6) в виде

$$(\lambda-i)^{2m}\mathscr{E}(\lambda)=(\lambda+i)^{2m}\mathscr{E}(-\lambda)\,S(\lambda),$$

усматриваем из него, что строки матрицы $(\lambda-i)^{2m}\mathscr{E}(\lambda)$ являются решениями уравнения (8). Эти векторы, которые мы обозначим через

$$e^{(1)}(\lambda),\quad e^{(2)}(\lambda),\quad \dots e^{(n)}(\lambda), \tag{11}$$

очевидно, линейно независимы, регулярны в нижней полуплоскости и имеют на бесконечности один и тот же порядок $2m$. Заметим также, что векторы (11) не связаны никаким соотношением

$$\sum_{i=1}^{n}p_i(\lambda)\,e^{(i)}(\lambda)\equiv 0,$$

где $p_i(\lambda)$ многочлены, не равные одновременно тождественно нулю.

Далее будем поступать в существенном так же, как и при решении задачи Гильберта методом Племеля, следуя изложению этого вопроса в книге Н. И. Мусхелишвили «Сингулярные интегральные уравнения» (Гостехиздат, 1946 г., § 127, стр. 401 — 413).

Из формулы (9) заключаем, что среди правильных решений уравнения (8) существуют такие, которые имеют наиболее низкий из возможных порядок на бесконечности. Обозначим через $(-2\varkappa_1)$ этот наинизший возможный порядок, через $x^{(1)}(\lambda)$ — одно из решений уравнения (8), имеющих этот порядок на бесконечности.

Пусть теперь $(-2\varkappa_2)$ наинизший возможный порядок на бесконечности тех правильных решений уравнения (8), которые не получаются из $x^{(1)}(\lambda)$ умножением на многочлен. Ясно, что $\varkappa_2 \leqslant \varkappa_1$. Обозначим через $x^{(2)}(\lambda)$ одно из решений уравнения (8), имеющих порядок $(-2\varkappa_2)$. Обозначим далее через $(-2\varkappa_3)$ наинизший возможный порядок тех правильных решений уравнения (8), которые не могут быть представлены в виде

$$p_1(\lambda)\, x^{(1)}(\lambda) + p_2(\lambda)\, x^{(2)}(\lambda),$$

где $p_1(\lambda)$ и $p_2(\lambda)$ — многочлены, и пусть $x^{(3)}(\lambda)$ одно из решений, имеющих порядок $(-2\varkappa_3)$.

Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока не получим n решений уравнения (8),

$$x^{(1)}(\lambda),\ x^{(2)}(\lambda),\ \ldots x^{(n)}(\lambda), \tag{12}$$

имеющих на бесконечности, соответственно, порядки $-2\varkappa_1$, $-2\varkappa_2$, ... $-2\varkappa_n$, где

$$\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_n.$$

Действительно, пусть указанным путем построены решения $x^{(1)}(\lambda)$, $x^{(2)}(\lambda)$, ... $x^{(s)}(\lambda)$ и $s < n$. Тогда среди векторов (11) существуют такие, которые не представимы в виде $\sum_{i=1}^{s} p_i(\lambda)\, x^{(i)}(\lambda)$, где $p_i(\lambda)$ — многочлены. В противном случае, как легко видеть, имело бы место равенство $\sum_{i=1}^{n} q_i(\lambda)\, e^{(i)}(\lambda) \equiv 0$, где $q_i(\lambda)$ — многочлены, не равные одновременно тождественно нулю, а это невозможно.

Согласно лемме 3, каждое из решений (12) имеет вид

$$x^{(i)}(\lambda) = u^{(i)}(\lambda)\, \mathcal{E}(\lambda) \qquad (i = 1,2, \ldots n), \tag{13}$$

где $u^{(i)}(\lambda)$ — вектор, компоненты которого являются рациональными функциями от λ. Положим еще

$$w^{(i)}(\lambda) = \lambda^{2\varkappa_i}\, x^{(i)}(\lambda) \qquad (i = 1,2, \ldots n). \tag{14}$$

Используя свойства вектор-функций (12), вытекающие непосредственно из способа их построения, формулы (9), (13), (14) и само уравнение (8), можно доказать справедливость следующих утверждений.

Свойство 1°. Определитель

$$\Delta(\lambda) = \det \| x_j^{(i)}(\lambda) \|_1^n,$$

где $x^{(i)}(\lambda) = \left\{ x_1^{(i)}(\lambda),\ x_2^{(i)}(\lambda), \ldots x_n^{(i)}(\lambda) \right\}$, не обращается в нуль при всех конечных $\lambda \neq 0$, $\operatorname{Im} \lambda \leqslant 0$.

Свойство 2°. Определитель

$$\Delta_0(\lambda) = \det \| u_j^{(i)}(\lambda) \|_1^n,$$

где $u^{(i)}(\lambda) = \{u_1^{(i)}(\lambda), \ldots u_n^{(i)}(\lambda)\}$, не обращается в нуль ни при каком λ из полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$.

Свойство 3°. Определитель

$$\Delta_\infty(\lambda) = \det \| w_j^{(i)}(\lambda) \|_1^n,$$

где $w^{(i)}(\lambda) = \{w_1^{(i)}(\lambda), \ldots w_n^{(i)}(\lambda)\}$, имеет при $\lambda \to \infty$, $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$, конечное значение, отличное от нуля.

Мы опускаем доказательство этих свойств, так как оно в основном повторяет рассуждения, приведенные в упомянутой выше книге Мусхелишвили.

Из свойства 3° вытекает почти очевидное

Следствие: сумма

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(\lambda)\, x^{(i)}(\lambda),$$

где $p_i(\lambda)$ $(i = 1,2, \ldots n)$ — многочлены, имеет на бесконечности порядок, равный наивысшему из порядков отдельных ее слагаемых.

Условимся называть *канонической системой решений* уравнения (8) всякие n вектор-решений этого уравнения, обладающих свойствами 1°, 2° и 3°, а матрицу, строки которой состоят из отдельных решений канонической системы, назовем *канонической матрицей* уравнения (8). Так как, в частности, вектор-функции (12) образуют каноническую систему решений уравнения (8), то матрица

$$X(\lambda) = \| x_j^{(i)}(\lambda) \|_1^n$$

является канонической матрицей этого уравнения.

Матрица $X(\lambda)$ регулярна в нижней полуплоскости и непрерывна там вплоть до вещественной оси (см. формулу (9)). Из свойств 1° и 2° следует, что обратная матрица $X^{-1}(\lambda)$ также регулярна в нижней полуплоскости, непрерывна вплоть до вещественной оси, кроме, возможно, точки $\lambda = 0$, вблизи которой ведет себя как матрица $\mathcal{E}^{-1}(\lambda)$. Так как строки $X(\lambda)$ удовлетворяют уравнению (8), то

$$X(\lambda) = X(-\lambda)\, S(\lambda) \tag{15}$$

и, значит, при любом конечном вещественном $\lambda \neq 0$

$$S(\lambda) = X^{-1}(-\lambda)\, X(\lambda). \tag{16}$$

Заметим еще, что, в силу формулы (13),

$$X(\lambda) = U(\lambda)\, \mathcal{E}(\lambda), \tag{17}$$

где

$$U(\lambda) = \| u_j^{(i)}(\lambda) \|_1^n.$$

С помощью равенств (16) и (17) может быть доказана следующая

Лемма 4. *Все правильные решения уравнения* (8) *даются формулой*

$$\tilde{x}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} p_i(\lambda^2)\, x^{(i)}(\lambda),$$

где $p_{(i)}(\lambda)$ — *многочлены, а* $x^{(i)}(\lambda)$ $(i = 1,2, \ldots n)$ *каноническая система решений* (12).

Доказательство этой леммы проводится так же, как и доказательство аналогичного предложения в книге Мусхелишвили, и мы его опускаем.

Замечание. На основании этой леммы и следствия из свойства 3°, сформулированного выше, ясно, что все правильные решения $\widetilde{x}(\lambda)$ уравнения (8), имеющие на бесконечности порядок, не превосходящий заданного четного числа $2k$, имеют вид

$$\widetilde{x}(\lambda)=\sum_{i=1}^{n} p_{k+\varkappa_i}(\lambda)\, x^{(i)}(\lambda),$$

где $p_{k+\varkappa_i}(\lambda)$ — многочлен степени не выше $k+\varkappa_i$.

Пользуясь этим замечанием, посчитаем количество линейно независимых правильных решений уравнения (8), исчезающих на бесконечности. Пусть

$$\varkappa_1\geqslant\varkappa_2\geqslant\ldots\geqslant\varkappa_m\geqslant 0>\varkappa_{m+1}\geqslant\ldots\geqslant\varkappa_n. \tag{18}$$

Всякое правильное решение уравнения (8), исчезающее на бесконечности (т. е. порядка не выше $2k=-2$), имеет вид

$$\widetilde{x}(\lambda)=\sum_{i=1}^{m} p_{\varkappa_i-1}(\lambda^2)\;x^{(i)}(\lambda),$$

где $p_{k_i-1}(\lambda)$ — многочлен степени не выше $\varkappa_{i-1}$, причем $p_{\varkappa_i-1}(\lambda)\equiv 0$, если $\varkappa_{i-1}<0$. Это выражение содержит, очевидно,

$$\alpha=\varkappa_1+\varkappa_2+\ldots+\varkappa_m \tag{19}$$

произвольных постоянных — коэффициентов многочленов $p_{\varkappa_i-1}(\lambda)$, и такого же, как легко видеть, число линейно независимых правильных решений уравнения (8), исчезающих на бесконечности.

Из равенства (15) путем транспонирования, перехода к обратным матрицам и умножения на λ получаем

$$\lambda\, X_t^{-1}(\lambda)=\lambda\, X_t^{-1}(-\lambda)\, S_t^{-1}(\lambda)=\lambda\, X_t^{-1}(-\lambda)\, S_t(-\lambda),$$

а это означает, что строки матрицы

$$Y(\lambda)=\lambda\, X_t^{-1}(\lambda) \tag{20}$$

являются решениями (как легко видеть, правильными) уравнения

$$\widetilde{y}(\lambda)=-\widetilde{y}(-\lambda)\, S_t(-\lambda). \tag{21}$$

Непосредственно из формулы (20) следует, очевидно, что при всяком конечном $\lambda\neq 0$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda\leqslant 0$

$$\det Y(\lambda)\neq 0.$$

Полагая, далее,

$$Y(\lambda)=\| y_j^{(i)}(\lambda)\|_1^n,$$

имеем, согласно (20),

$$y_j^{(i)}(\lambda)=\frac{\lambda\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

где $\Delta_{ij}(\lambda)$ алгебраическое дополнение элемента $x_j^{(i)}(\lambda)$ в определителе $\Delta(\lambda)=\det X(\lambda)$, или, в силу (14),

$$y_j^{(i)}(\lambda)=\frac{\lambda\Delta_{ij}^{\infty}(\lambda)}{\Delta_\infty(\lambda)}\lambda^{2\varkappa_i},$$

где $\Delta_{ij}^{\infty}(\lambda)$ алгебраическое дополнение элемента $w_j^{(i)}(\lambda)$ в определителе $\Delta_{\infty}(\lambda)$. Отсюда следует, что порядок на бесконечности решения $y^{(i)}(\lambda) = \{y_1^{(i)}(\lambda), \dots y_n^{(i)}(\lambda)\}$ уравнения (21) равен точно $2\varkappa_i + 1$ и что

$$\det \| \lambda^{-(2\varkappa_i+1)} y_j^{(i)} \lambda \|_1^n = \frac{1}{\Delta_{\infty}(\lambda)}$$

не обращается в нуль на бесконечности.

Таким образом, матрица $Y(\lambda)$, определяемая формулой (20), обладает свойствами 1° и 3° канонической матрицы. Справедлива также

Лемма 5. *Все правильные решения уравнения* (21) *даются формулой*

$$\tilde{y}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} p_i(\lambda^2) y^{(i)}(\lambda),$$

где $p_i(\lambda)$ — *многочлены, а* $y^{(i)}(\lambda)$ — *строки матрицы* $Y(\lambda)$.

Используя эти результаты, можем теперь, как и выше, доказать, что все правильные решения уравнения (21), исчезающие на бесконечности, имеют вид (см. (18))

$$\tilde{y}(\lambda) = \sum_{i=m+1}^{n} p_{|\varkappa_i|-1}(\lambda^2) y^{(i)}(\lambda),$$

где $p_{|\varkappa_i|-1}(\lambda)$ — многочлен степени не выше $(|\varkappa_i| - 1)$ с произвольными коэффициентами. Количество этих коэффициентов равно

$$\beta = -\varkappa_{m+1} - \dots - \varkappa_n \tag{22}$$

и таково же число линейно независимых правильных решений уравнения (21), исчезающих на бесконечности.

Обозначая через m_+ и m_-, соответственно, число линейно независимых правильных решений уравнений (8) и (21), исчезающих на бесконечности, из формул (19), (22) получим:

$$m_+ - m_- = \alpha - \beta = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \dots + \varkappa_n = \varkappa.$$

Числа $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_n$ будем называть *частными индексами*, а их сумму $\varkappa$ *суммарным индексом* матрицы $S(\lambda)$.

Заметим, далее, что, согласно лемме 4. 3, число m_+ равно количеству линейно независимых решений $x(t) \in L_n^2(0, \infty)$ уравнения

$$x(t) + \int_0^{\infty} x(\xi) F_1(t+\xi)\, d\xi = 0, \tag{23}$$

а число m_- — количеству линейно независимых решений $y(t) \in L_n^2(0, \infty)$ уравнения

$$-y(t) + \int_0^{\infty} y(\xi) [F_1(-t-\xi)]_t\, d\xi = 0$$

или, что все равно, количеству линейно независимых решений $z(t) \in L_n^2(-\infty, 0)$ уравнения

$$-z(t) + \int_{-\infty}^{0} z(\xi) F_1(t+\xi)\, d\xi = 0, \tag{24}$$

где $F_1(t)$ матрица, определяемая формулой (3).

Итак, нами доказана следующая

Теорема 1. *Пусть унитарная матрица $S(\lambda)$, $-\infty<\lambda<\infty$, удовлетворяет всем условиям леммы 2 и матрица $F_1(t)$ имеет своим преобразованием Фурье $I-S(\lambda)$. Тогда*

$$m_+ - m_- = \varkappa,$$

где m_+ — число линейно независимых решений уравнения (23) в пространстве $L_n^2(0,\infty)$, m_- — число линейно независимых решений уравнения (24) в пространстве $L_n^2(-\infty,0)$, $\varkappa$ — суммарный индекс матрицы $S(\lambda)$.

3. Вычисление суммарного индекса

Займемся теперь вычислением суммарного индекса $\varkappa$ матрицы $S(\lambda)$. Мы будем при этом предполагать, что выполнены не только все условия леммы 2, но и неравенство (4).

Используя замечание к лемме 2, формулы (1.6), (2.12) и неравенство (1.17), легко находим, что при сделанных нами предположениях матрица $\mathscr{E}(\lambda)$, фигурирующая в равенстве (6), имеет непрерывную производную $\dot{\mathscr{E}}(\lambda)$ при всех λ, $\operatorname{Im}\lambda\leqslant 0$, и следовательно,

$$\mathscr{E}(\lambda)=\mathscr{E}(0)+\lambda\dot{\mathscr{E}}(0)+R_1(\lambda), \tag{25}$$

где $R_1(\lambda)=o(|\lambda|)$ при $\lambda\to 0$, $\operatorname{Im}\lambda\leqslant 0$.

С помощью рассуждений, аналогичных доказательству теоремы 2 приложения I, можно, далее, показать, что если в рассматриваемом нами случае $\det\mathscr{E}(0)=0$, то матрица, обратная к

$$\mathscr{E}_0(\lambda)=\mathscr{E}(0)+\lambda\dot{\mathscr{E}}(0),$$

имеет в точке $\lambda=0$ простой полюс, т. е.

$$\mathscr{E}_0^{-1}(\lambda)=\frac{N}{\lambda}+N_0+\ldots \tag{26}$$

Полагая

$$R(\lambda)=\mathscr{E}^{-1}(\lambda)-\mathscr{E}_0^{-1}(\lambda), \tag{27}$$

легко находим, что

$$R(\lambda)=-\mathscr{E}_0^{-1}(\lambda)\{[I+R_1(\lambda)\mathscr{E}_0^{-1}(\lambda)]^{-1}R_1(\lambda)\mathscr{E}_0^{-1}(\lambda)\},$$

и так как $R_1(\lambda)\mathscr{E}_0^{-1}(\lambda)=o(1)$ при $\lambda\to 0$, то

$$R(\lambda)=o\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\quad\text{при } \lambda\to 0. \tag{28}$$

Из (26), (27) и (28) следует, что

$$\mathscr{E}^{-1}(\lambda)=\frac{N}{\lambda}+R_2(\lambda), \tag{29}$$

где $R_2(\lambda)=o\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$ при $\lambda\to 0$.

Согласно (25) и (29) имеем, далее:

$$\begin{gathered}\mathscr{E}(0)N=N\mathscr{E}(0)=0,\\ \mathscr{E}(0)R_2(0)+\dot{\mathscr{E}}(0)N=R_2(0)\mathscr{E}(0)+N\dot{\mathscr{E}}(0)=I,\end{gathered} \tag{30}$$

где

$$R_2(0)\mathscr{E}(0)=\lim_{\lambda\to 0}R_2(\lambda)\mathscr{E}(0),$$

причем этот предел, очевидно, существует (хотя $R_2(0)$ может и не существовать). Используя те же формулы (25), (29), выражение (6) для $S(\lambda)$ и равенства (30), заключаем, что существует $S(0)$, причем

$$S(0)=R_2(0)\mathscr{E}(0)-N\dot{\mathscr{E}}(0)=I-2N\dot{\mathscr{E}}(0). \tag{31}$$

Покажем теперь, что матрица $P_0 = N\dot{\mathscr{E}}(0)$ проектирует на ядро матрицы $\mathscr{E}(0)$. Действительно, в силу первого из равенств (30),

$$\mathscr{E}(0) N\dot{\mathscr{E}}(0) a = 0,$$

каков бы ни был вектор a. С другой стороны, если вектор a принадлежит ядру матрицы $\mathscr{E}(0)$, то, согласно второму из равенств (30),

$$N\dot{\mathscr{E}}(0) a = a.$$

Из равенства (31) находим, что

$$P_0 = N\dot{\mathscr{E}}(0) = \frac{1}{2}[I - S(0)]. \tag{32}$$

Лемма 6. *Вблизи точки* $\lambda = 0$, $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$, *имеем*

$$\det \mathscr{E}(\lambda) = \lambda^q \{c_0 + o(1)\}, \ c_0 \neq 0,$$

где q — ранг матрицы $I - S(0)$, равный, в силу (32), размерности ядра матрицы $\mathscr{E}(0)$).

Доказательство. Достаточно, очевидно, рассмотреть случай $\det \mathscr{E}(0) = 0$. Положим

$$Q(\lambda) = I - \frac{i}{\lambda} P_0 = I - \frac{i}{\lambda} N\dot{\mathscr{E}}(0) \tag{33}$$

и покажем, что матрица

$$\mathscr{E}_1(\lambda) = \mathscr{E}(\lambda) Q(\lambda) \tag{34}$$

при $\lambda = 0$ является неособенной. Действительно, на основании равенств (25), (33) и (34) имеем

$$\mathscr{E}_1(0) = \mathscr{E}(0) - i\dot{\mathscr{E}}(0) N\dot{\mathscr{E}}(0).$$

Пусть теперь для некоторого вектора a

$$\mathscr{E}_1(0) a = 0. \tag{35}$$

Полагая

$$-iN\dot{\mathscr{E}}(0) a = b, \tag{36}$$

можем записать (35) в виде

$$\mathscr{E}(0) a + \dot{\mathscr{E}}(0) b = 0,$$

а в силу первой из формул (30) имеем

$$\mathscr{E}(0) b = 0.$$

Согласно лемме 2 приложения I, из последних двух равенств следует, что вектор $b = 0$, так как матрица обратная к $\mathscr{E}(0) + \lambda\dot{\mathscr{E}}(0)$ имеет в точке $\lambda = 0$ простой полюс (см. (26)). Но тогда первое из этих равенств дает

$$\mathscr{E}(0) a = 0$$

и, значит,

$$a = P_0 a = N\dot{\mathscr{E}}(0) a,$$

откуда, в силу (36), $a = 0$.

Из равенства (34) находим, что

$$\det \mathscr{E}(\lambda) = \det Q^{-1}(\lambda) \cdot \det \mathscr{E}_1(\lambda),$$

где, согласно (33),

$$Q^{-1}(\lambda) = I + \frac{i}{\lambda - i} P_0.$$

Заметим, что согласно (32), ранг матрицы P_0 равен q и что в надлежащим образом выбранной координатной системе матрица P_0 имеет диагональный вид, причем q ее диагональных элементов единицы, а остальные — нули. Поэтому

$$\det \mathcal{E}(\lambda) = \left(1 + \frac{i}{\lambda - i}\right)^q \det \mathcal{E}_1(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i}\right)^q \det \mathcal{E}_1(\lambda),$$

что и доказывает справедливость леммы, ибо $\det \mathcal{E}_1(0) \neq 0$.

Обратимся теперь к равенству (15). Из него получаем:

$$\ln \det X(\lambda) = \ln \det X(-\lambda) + \ln \det S(\lambda). \tag{37}$$

Заметив, что $|\det S(\lambda)| = 1$, и обозначая

$$\eta(\lambda) = \arg \det S(\lambda) = -i \ln \det S(\lambda), \tag{38}$$

находим, что при любых заданных $R > \varepsilon > 0$

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R} d(\ln \det S(\lambda)) = i[\eta(R) - \eta(\varepsilon) + \eta(-\varepsilon) - \eta(-R)]. \tag{39}$$

В силу свойств канонической матрицы $X(\lambda)$, вычисление аналогичного интеграла от $\ln \det X(\lambda)$ можно произвести с помощью контурного интегрирования. Именно, если L_R и l_ε полуокружности в нижней полуплоскости с центрами в начале координат, соответственно, радиусов R и ε, причем на L_R задано направление по часовой стрелке, а на l_ε — против часовой стрелки, то

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R} d(\ln \det X(\lambda)) = -\int_{LR} - \int_{l_\varepsilon} d(\ln \det X(\lambda)).$$

Так как, в силу свойства 3° канонической матрицы $X(\lambda)$, при $\lambda \to \infty$, $\operatorname{Im} \lambda \leqslant 0$,

$$\det X(\lambda) \sim \frac{c}{\lambda^{2\varkappa}},$$

где $c \neq 0$ постоянная, то

$$\lim_{R \to \infty} \int_{L_R} d(\ln \det X(\lambda)) = 2\pi i \varkappa.$$

Воспользуемся, далее, равенством (17), в силу которого

$$\ln \det X(\lambda) = \ln \det U(\lambda) + \ln \det \mathcal{E}(\lambda).$$

Имея в виду лемму 6 и то, что $\det U(0) \neq 0$, находим отсюда:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{l_\varepsilon} d(\ln \det X(\lambda)) = \pi i q.$$

Итак,

$$\lim_{\substack{R \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \left\{ \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R} d(\ln \det X(\lambda)) \right\} = -2\pi i \varkappa - \pi i q. \tag{40}$$

Аналогично доказываем (путем контурного интегрирования в верхней полуплоскости), что

$$\lim_{\substack{R \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \left\{ \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R} d(\ln \det X(-\lambda)) \right\} = 2\pi i \varkappa + \pi i q. \tag{41}$$

Из (37), (39), (40) и (41), таким образом, получаем

$$\eta(\infty)-\eta(+0)+\eta(-0)-\eta(-\infty)=-2\pi(2\varkappa+q). \tag{42}$$

Так как $S(\lambda)S(-\lambda)=I$ для всех вещественных $\lambda\neq 0$, то

$$\eta(\lambda)+\eta(-\lambda)=2\pi m, \tag{43}$$

где m — целое число. Мы можем также считать $\eta(\lambda)$ непрерывной функцией, так как функция $\det S(\lambda)$ непрерывна и не обращается в нуль. Поэтому если мы к (42) прибавим равенство (43) при $\lambda\to\infty$, затем из полученного результата вычтем равенство (43) при $\lambda=0$, то получим

$$\eta(\infty)-\eta(0)=-\pi(2\varkappa+q),$$

откуда

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi}[\eta(0)-\eta(\infty)]-\frac{1}{2}q. \tag{44}$$

4. Новая характеристика данных рассеяния

Полученные результаты позволяют видоизменить систему характеристических свойств данных рассеяния граничной задачи (2.1) рассмотренного нами вида.

Заметим прежде всего, что, в силу свойств II_s и V, сумма рангов нормировочных матриц M_ν ($\nu=1, 2, \ldots p$), согласно теореме I, равна суммарному индексу матрицы рассеяния $S(\lambda)$ (если $S(\lambda)$ непрерывна), причем, если потенциал $V(x)$ удовлетворяет, кроме условия (1.4), еще неравенству (7), то этот суммарный индекс $\varkappa$ вычисляется по формуле (44).

Пусть теперь заданы непрерывная унитарная матрица $S(\lambda)$, $S(\lambda)\to I$ при $\lambda\to\pm\infty$, эрмитовы матрицы M_ν и числа $\mu_\nu>0$ ($\nu=1, 2, \ldots p$), удовлетворяющие условиям I_s, III_s, IV. Предположим еще, что сумма рангов матриц M_ν ($\nu=1, 2, \ldots p$) равна суммарному индексу $\varkappa$ матрицы $S(\lambda)$. Мы покажем, что в этом случае будут выполнены также свойства II_s и V.

На основании теоремы 1, m_+, т. е. число линейно независимых решений уравнения (23) из $L_n^2(0, \infty)$ не меньше $\varkappa$. Это число не может быть и больше $\varkappa$. Действительно, если

$$x^{(1)}(t) \quad x^{(2)}(t), \ldots x^{(r)}(t)$$

линейно независимые решения уравнения (23) и $r>\varkappa$, то существует нетривиальная линейная комбинация этих решений

$$x(t)=\sum_{k=1}^{r}\gamma_k x^{(k)}(t),$$

удовлетворяющая условиям *

$$\widetilde{x}(-i\mu_\nu)M_\nu=0 \qquad (\nu=1, 2, \ldots p),$$

ибо ранг системы уравнений (с неизвестными γ_k)

$$\sum_{k=1}^{r}\gamma_k\widetilde{x}^{(k)}(-i\mu_\nu)M_\nu=0 \qquad (\nu=1, 2, \ldots p)$$

не превышает $\varkappa$ (суммы рангов матриц M_ν). Но тогда, согласно следствию леммы 4.3, не было бы соблюдено свойство IV.

---

* Через $\widetilde{x}(\lambda)$, как и ранее, обозначаем преобразование Фурье вектор-функции $x(t)$.

Итак, $m_+ = \varkappa$, а так как $\varkappa$ равно сумме рангов матриц M_ν, то выполнено свойство V. Учитывая этот результат, непосредственно из теоремы 1 находим, что $m_- = 0$, т. е. выполнено свойство II_s.

В частности, справедлива

Теорема 2. *Для того, чтобы унитарная матрица $S(\lambda)$, эрмитовы матрицы M_ν и числа $\mu_\nu > 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots p)$ являлись данными рассеяния некоторой граничной задачи* (2.1) *с эрмитовым потенциалом $V(x)$, удовлетворяющим неравенствам*

$$\int_0^\infty x\,|V(x)|\,dx < \infty, \quad \int_0^\infty x^2\,|V(x)|\,dx < \infty,$$

необходимы и достаточны следующие условия.

a) *Матрица $I - S(\lambda)$ равномерно непрерывна на всей вещественной оси и является преобразованием Фурье эрмитовой матрицы $F_1(t)$ со строками из $\mathfrak{M}_n$ $(-\infty, \infty)$.*

b) *При всех $t > 0$ существует производная $F_1'(t)$ и*

$$\int_0^\infty t\,|F_1'(t)|\,dt < \infty, \quad \int_0^\infty t^2\,|F_1'(t)|\,dt < \infty.$$

c) *Уравнение*

$$x(t) + \int_0^\infty x(\xi)\,F(t+\xi)\,d\xi = 0,$$

где

$$F(t) = \sum_{\nu=1}^p M_\nu^2 e^{-\mu_\nu t} + F_1(t),$$

не имеет ненулевых решений в $L_n^1(0, \infty)$.

d) *Сумма рангов r матриц M_ν $(\nu = 1, 2, \ldots p)$ равна*

$$r = \frac{1}{2\pi}[\eta(0) - \eta(+\infty)] - \frac{1}{2}q,$$

где $i\eta(\lambda) = \ln\det S(\lambda)$, q — ранг матрицы $I - S(0)$.

В заключение заметим, что при отсутствии виртуального уровня $(S(0) = I)$ аналогичная (и, притом, более простая) система характеристических свойств данных рассеяния может быть получена для граничной задачи (2.1) с эрмитовым потенциалом, удовлетворяющим только условию (1.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович и В. А. Марченко. Восстановление потенциала по матрице рассеяния для системы дифференциальных уравнений, ДАН СССР, т. 113, № 5 (1957), 951—954.

2. Newton R. G., Jost R. The Construction of Potentials from the S—Matrix for Systems of Differential Equations, Il Nuovo Cimento, vol. 1, № 4 (1955), 590—622.

3. И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв. АН СССР, сер. математ., т. 15, № 4 (1951), 309—360.

4. М. Г. Крейн. Об определении потенциала частицы по ее S-функции, ДАН СССР, т. 105, № 3 (1955), 433—436.

5. В. А. Марченко. Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн, ДАН СССР, т. 104, № 5 (1955), 695—698.

6. Б. Я. Левин. Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка, ДАН СССР, т. 106, № 2 (1956), 187—190.

7. И. М. Глазман. О спектре линейных дифференциальных операторов, ДАН СССР, т. LXXX, № 2 (1951), 153—156.