ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIX. Серия 4 1968

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

И. В. Ушакова

В этой работе* изучаются субгармонические функции в единичном круге. Мы показываем, как по заданной оценке субгармонической функции сверху можно получить ее асимптотическую (при $|z| \to 1$) оценку снизу вне некоторых «малых» множеств, которые будем называть исключительными.

Оценкам субгармонических функций снизу посвящены важные исследования Альфорса, Гейнса и Хеймана. Некоторые результаты данной статьи непосредственно связаны с результатами этих авторов. Эту связь мы подробнее осветим ниже, когда будут доказаны основные теоремы нашей работы.

§ I. В этом параграфе введем некоторые понятия, относящиеся к субгармоническим функциям, и установим вспомогательные факты, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть $U(z)$ — субгармоническая функция в круге $|z| < 1$. Напомним, что функция $U(z)$ называется субгармонической в области D, если она удовлетворяет следующим условиям (см. [1], стр. 35):

а) $U(z)$ полунепрерывна сверху в области D и конечна на всюду плотном множестве;

б) для каждой точки z_0 области D и всех достаточно малых ρ справедливо неравенство

$$U(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta.$$

Положим

$$U^+(z) = \begin{cases} U(z), & \text{если } U(z) \leqslant 0, \\ 0 & \text{если } U(z) < 0, \end{cases}$$

и рассмотрим функцию

$$\varphi(r, U) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U^+(re^{i\theta})\, d\theta,$$

которую будем называть характеристикой субгармонической функции $U(z)$. Эта функция является непрерывной монотонно возрастающей функцией от r ([1], стр. 171).

Гармоническая функция $v(z)$ называется гармонической мажорантой субгармонической функции $U(z)$ в области D, если всюду в этой области

$$U(z) \leqslant v(z).$$

Наилучшей гармонической мажорантой субгармонической функции $U(z)$ называют наименьшую из ее гармонических мажорант. В любом внутреннем круге $|z| \leqslant \rho < 1$ она строится с помощью интеграла Пуассона

---

* Основные результаты настоящей работы были изложены без доказательства в заметке [5].

$$V(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - |z|^2}{\rho^2 + |z|^2 - 2\rho|z|\cos(\psi-\theta)} U(\rho e^{i\theta})\, d\theta \ (z = |z|e^{i\psi}). \tag{1}$$

Исходным пунктом наших дальнейших рассмотрений будет установленное Ф. Риссом [2] интегральное представление субгармонических функций. Применительно к функциям в круге теорема Ф. Рисса формулируется следующим образом.

Теорема. *Каждой функции $U(z)$, субгармонической в круге $|z| < 1$, однозначно соответствует некоторое положительное распределение масс $dm(z)$ в этом круге, обладающее тем свойством, что для всякого внутреннего круга $|z| \leqslant \rho < 1$ функция $U(z)$ может быть записана в виде*

$$U(z) = \iint\limits_{|\varsigma|\leqslant\rho} \ln\left|\frac{\rho(\varsigma - z)}{\rho^2 - \bar{z}\varsigma}\right| dm(\varsigma) + h_\rho(z), \tag{2}$$

где $h_\rho(z)$ — наилучшая гармоническая мажоранта функции $U(z)$ в круге $|z| \leqslant \rho$.

Введем функцию

$$n(t) = \iint\limits_{|\varsigma|\leqslant t} dm(\varsigma),$$

аналог интеграла, представляющего число корней голоморфной функции в круге $|z| \leqslant t$.

Поскольку нас интересует асимптотическое поведение функции $U(z)$ при $|z| \to 1$, то в некотором круге $|z| \leqslant \eta$ мы можем функцию сгладить, взяв вместо нее в этом круге ее наилучшую гармоническую мажоранту. Для новой функции $n(0) = 0$ при $t \leqslant \eta$. После этого мы можем нормировать функцию $U(z)$, вычитая ее значение в нуле, и считать в дальнейшем, что $U(0) = 0$. Тогда по обобщенной теореме Иенсена ([1], стр. 167) для видоизмененной функции $U(z)$ будет справедливо соотношение

$$N(r, U) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} U(re^{i\theta})\, d\theta, \tag{3}$$

где величина $N(r, U)$ выражает «плотность» распределения масс, порождаемых функцией $U(z)$:

$$N(r, U) = \int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt.$$

Введем вспомогательные функции, характеризующие рост субгармонической функции $U(z)$. Пусть $\sigma(r)$ — непрерывная положительная функция, которая «гасит» рост $\varphi(r)$ в том смысле, что

$$\int\limits_0^1 \varphi(r)\,\sigma(r)\, dr < M. \tag{4}$$

Введем монотонно убывающие функции $\chi(r)$, $\mu(r)$, которые связаны с $\sigma(r)$ соотношениями

$$\chi(r) = \int\limits_r^1 \sigma(t)\, dt, \quad \mu(r) = \int\limits_r^1 \chi(t)\, dt \tag{5}$$

Теорема I. Если $U(z)$ — произвольная субгармоническая функция в единичном круге и $dm(z)$ — положительное распределение масс, которое она порождает, а функции $\sigma(r)$, $\chi(r)$ и $\mu(r)$ найдены в соотношении с (4) и (5), то

$$\int_0^1 \mu(t)\, dn(t) < \infty \quad \left(\iint_{|\varsigma|<1} \mu(|\varsigma|)\, dm(\varsigma) < \infty\right) \tag{6}$$

Доказательство. Интегрированием по частям легко установить равенство

$$\int_0^r \mu(t)\, dn(t) = \mu(r)\, n(r) + \chi(r) \int_0^r n(t)\, dt + \int_0^r \sigma(t) \left(\int_0^t n(\tau)\, d\tau\right) dt.$$

Из (3) следует, что

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt \leqslant \varphi(r)$$

и, значит,

$$\int_0^r n(t)\, dt < \varphi(r).$$

Поэтому

$$\chi(r) \int_0^r n(t)\, dt \leqslant \varphi(r)\chi(r) \leqslant \int_r^1 \varphi(r)\, \sigma(r)\, dr.$$

В силу этого неравенства

$$\int_0^r \mu(t)\, dn(t) \leqslant \mu(r)\, n(r) + 2\int_0^1 \sigma(t)\, \varphi(t)\, dt \leqslant \mu(r)\, n(r) + 2M.$$

Остается оценить $\mu(r)\, n(r)$:

$$\mu(r)\, n(r) = n(r) \int_r^1 \chi(t)\, dt \leqslant \int_r^1 n(t)\, \chi(t)\, dt =$$

$$= \int_r^1 \sigma(t)\, dt \int_r^t n(u)\, du \leqslant \int_r^1 \varphi(t)\, \sigma(t)\, dt < M.$$

Итак, теорема доказана.

Замечания. I^0. Из неравенства

$$\mu(r)\, n(r) \leqslant \int_r^1 \varphi(t)\, \sigma(t)\, dt,$$

полученного выше, следует, что

$$\lim_{r\to 1} \mu(r)\, n(r) = 0.$$

2^0. Из неравенства

$$\mu(r)\, \varphi(r) = \varphi(r) \int_r^1 \chi(r)\, dr \leqslant \varphi(r)\, \chi(r)(1-r) \leqslant (1-r) \int_r^1 \varphi(r)\, \sigma(r)\, dr$$

следует, что

$$\lim_{r\to 1} \frac{\mu(r)\, \varphi(r)}{1-r} = 0.$$

Введем теперь понятие ε — нормальной точки * относительно некоторого положительного распределения $dm_1(z)$ конечной массы в круге $|z| < 1$. Назовем точку z единичного круга ε-нормальной, если для произвольного

* Идея введения ε-нормальных точек принадлежит Хейману [3]. Следуя этой идее, мы, однако, даем новое определение ε-нормальной точки, существенно отличное от определения Хеймана.

неэвклидова кружка K_z, имеющего неэвклидов центр в точке z и «не слишком большой» неэвклидов радиус r_{K_z} (можно потребовать, например, чтобы $r_{K_z} \leqslant \ln 3$), справедливо соотношение

$$\iint\limits_{K_z} dm_1(\varsigma) \leqslant \varepsilon r_{K_z}.$$

Лемма 1. Точки z единичного круга, которые не ε-нормальны относительно данного положительного распределения конечной массы, можно заключить в систему кружков, сумма неэвклидовых радиусов которых конечна.

Доказательство. Рассмотрим множество не ε-нормальных точек в круге $|z| < 1$. Обозначим это множество C. Пусть z_j — некоторая точка, принадлежащая C. Тогда, по определению, найдется неэвклидов кружок K_{z_j} такой, что

$$\iint\limits_{K_{z_j}} dm_1(\varsigma) > \varepsilon r_{K_{z_j}}.$$

Таким образом, множество C оказывается покрытым некоторой системой неэвклидовых кружков. Эти кружки могут, пересекаясь, образовывать некоторые области G_j. Проведем неэвклидов диаметр каждой такой области и спроектируем кружки, составляющие область, на этот диаметр. Мы получим на диаметре систему интервалов. Отбросим те из них, которые входят в сумму остальных. Тогда мы получим систему интервалов, покрывающих каждую точку диаметра не более, чем дважды. Такую систему можно разбить на две подсистемы, в каждой из которых интервалы уже не пересекаются. Непересекающимся интервалам соответствуют непересекающиеся кружки. Следовательно, мы получим в каждой области G_j две системы кружков, в каждой из которых кружки не пересекаются. Перенумеруем кружки одной системы четными номерами, другой — нечетными:

$$K_1^j,\ K_3^j,\ \ldots,\ K_{2n+1}^j,\ \ldots$$
$$K_2^j,\ K_4^j,\ \ldots,\ K_{2n}^j,\ \ldots$$

Так как кружки одной системы не пересекаются, то

$$\iint\limits_{|\varsigma|<1} dm_1(\varsigma) \geqslant \sum_{j,i} \iint\limits_{K_{2i+1}^j} dm_1(\varsigma) \geqslant \varepsilon \sum_{j,i} r_{K_{2i+1}^j}$$

и

$$\iint\limits_{|\varsigma|<1} dm_1(\varsigma) \geqslant \sum_{j,i} \iint\limits_{K_{2i}^j} dm_1(\varsigma) \geqslant \varepsilon \sum_{j,i} r_{K_{2i}^j}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j,i} r_{K_i^j} \leqslant \frac{2}{\varepsilon} \iint\limits_{|\varsigma|<1} dm_1(\varsigma).$$

Так как удвоенная сумма неэвклидовых радиусов таких кружков больше или равна сумме неэвклидовых длин d_j диаметров областей G_j, то сумма неэвклидовых диаметров d_j также конечна.

Построим теперь новые кружки с неэвклидовыми радиусами d_j так, чтобы они содержали области G_j. Тогда мы получим систему кружков C_j с конечной суммой неэвклидовых радиусов, которые содержат все не ε-нормальные точки.

Таким образом, лемма доказана.

В лемме 1 мы обозначили через C множество всех не ε-нормальных точек единичного круга. В дальнейшем буквой C мы будем обозначать и другие множества в круге, которые можно покрыть системой кружков с конечной суммой неэвклидовых радиусов.

§ 2. В этом параграфе мы дадим общую оценку субгармонических функций в круге $|z| < 1$, а также ее асимптотику при $|z| \to 1$.

Теорема 2. Пусть $U(z)$ — субгармоническая функция в единичном круге и $\mu(r)$ построена по характеристике $\varphi(r)$ в соответствии с (5). Тогда во всем круге $|z| < 1$ после исключения некоторого множества C выполняется неравенство

$$U(z) > -\frac{N_\theta}{\mu(|z| + \theta(1 - |z|))}, \tag{7}$$

где $0 < \theta < 1$, а N_θ — некоторая зависящая от θ постоянная.

Доказательство. Функция $U(z)$, субгармоническая в круге $|z| < 1$, обладает, согласно теореме Рисса, в этом круге положительным распределением масс $dm(\zeta)$. Как было показано выше, положительное распределение $dm_1(\zeta) = \mu(\zeta)\, dm(\zeta)$ имеет конечную полную массу

$$\iint\limits_{|\zeta| \leqslant 1} dm_1(\zeta) < \infty.$$

Поэтому, в силу леммы 1, для любого $\varepsilon > 0$

$$\iint\limits_{K_z} dm_1(\zeta) < \varepsilon r_{K_z} \tag{8}$$

всюду внутри круга $|z| < 1$, за исключением, быть может, некоторого множества C, зависящего от ε.

Докажем, что вне этого множества имеет место оценка (7). Для доказательства возьмем произвольную точку z внутри единичного круга. Не нарушая общности, можно предполагать, что $|z| \geqslant \frac{1}{2}$, а доказательство провести для случая, когда точка z лежит на положительном луче. Зададим $\varepsilon > 0$ и допустим, что взятая точка z ε-нормальна, то есть, что $z \overline{\in} C$. Зададимся числом $\theta\,(0 < \theta < 1)$ и по данному z найдем ρ из формулы $\rho = z + \theta(1 - z)$. При этом ρ рассмотрим интегральное представление Рисса (2).

Займемся сначала оценкой логарифмического потенциала, который обозначим $V_\rho(z)$:

$$V_\rho(z) = \iint\limits_{|\zeta| \leqslant \rho} \ln\left|\frac{\rho(\zeta - z)}{\rho^2 - z\zeta}\right| dm(\zeta) = \iint\limits_{|\zeta| \leqslant \rho} \ln\frac{\rho}{z}\left|\frac{\zeta - z}{\frac{\rho^2}{z} - \zeta}\right| dm(\zeta) =$$

$$= n(\rho)\ln\frac{\rho}{z} + \iint\limits_{|\zeta| \leqslant \rho} \ln\left|\frac{\zeta - z}{\frac{\rho^2}{z} - \zeta}\right| dm(\zeta).$$

При любых ζ и $z > 0$, лежащих в круге $|\zeta| \leqslant \rho$, имеет место неравенство

$$\left|\frac{\zeta - z}{\frac{\rho^2}{z} - \zeta}\right| \geqslant \left|\frac{\zeta - z}{\frac{1}{z} - \zeta}\right| = z\left|\frac{\zeta - z}{1 - \zeta z}\right|.$$

С помощью этого неравенства находим, что

$$V_\rho(z) \geqslant n(\rho)\ln\frac{\rho}{z} + n(\rho)\ln z + \iint\limits_{|\zeta| \leqslant \rho} \ln\left|\frac{\zeta - z}{1 - z\zeta}\right| dm(\zeta) =$$

$$= n(\rho)\ln\rho + \iint\limits_{|\zeta| \leqslant \rho} \ln\left|\frac{\zeta - z}{1 - z\zeta}\right| dm(\zeta). \tag{9}$$

Рассмотрим неэвклидов кружок K_z с неэвклидовым центром в точке z:

$$K_z\left\{\left|\frac{\zeta-z}{1-z\zeta}\right|\leqslant\lambda\right\}.$$

Подберем λ так, чтобы окружность K_z проходила через точку $\zeta_0=z+ +\frac{1}{2}(1-z)$. Тогда при любом z из единичного круга величина λ удовлетворяет неравенству $\frac{1}{3}<\lambda\leqslant\frac{1}{2}$.

Рассмотрим пересечение L_ρ круга $|\zeta|\leqslant\rho$, который мы теперь обозначим G_ρ, с кружком $K_z:L_\rho=G_\rho\cap K_z$. Тогда

$$\iint\limits_{G_\rho}\ln\left|\frac{\zeta-z}{1-z\zeta}\right|dm(\zeta)=\iint\limits_{L_\rho}+\iint\limits_{G_\rho-L_\rho}.$$

Поскольку вне кружка K_z справедливо неравенство

$$\left|\frac{\zeta-z}{1-z\zeta}\right|\geqslant\lambda,$$

то из (9) легко вывести соотношение

$$V_\rho(z)\geqslant n(\rho)\ln\rho+n(\rho)\ln\lambda+\iint\limits_{L_\rho}\ln\left|\frac{\zeta-z}{1-z\zeta}\right|dm(\zeta).$$

Основная трудность доказательства теоремы в получении оценки интеграла по L_ρ. Именно здесь нам понадобится предположение, что точка z ε-нормальная.

Разобьем кружок K_z на систему неэвклидовых колец

$$K_z^n\left\{2^{-n-1}\lambda\leqslant\left|\frac{\zeta-z}{1-z\zeta}\right|\leqslant2^{-n}\lambda\right\}\ (n=0,1,2,\ \ldots)$$

и рассмотрим пересечения $L_\rho^n=G_\rho\cap K_z^n$. В таком случае

$$\iint\limits_{L_\rho}\ln\left|\frac{\zeta-z}{1-z\zeta}\right|dm(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\iint\limits_{L_\rho^n}\ln\left|\frac{\zeta-z}{1-z\zeta}\right|dm(\zeta)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}\ln\lambda2^{-n-1}\iint\limits_{L_\rho^n}dm(\zeta)\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln\lambda2^{-n-1}}{\mu(\rho)}\iint\limits_{L_\rho^n}\mu(|\zeta|)\,dm(\zeta)>$$

$$>\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln\lambda2^{-n-1}}{\mu(\rho)}\iint\limits_{K_z^n}dm_1(\zeta).$$

Воспользовавшись оценкой (8), имеющей место для любой ε-нормальной точки z, получим

$$\iint\limits_{L_\rho}\ln\left|\frac{\zeta-z}{1-z\zeta}\right|dm(\zeta)>\frac{\varepsilon}{\mu(\rho)}\sum_{n=0}^{\infty}\ln(\lambda2^{-n-1})\,r_{k_z^n}\tag{9'}$$

где $r_{k_z^n}$ — неэвклидов радиус кружка $\left|\frac{\zeta-z}{1-\zeta z}\right|\leqslant\lambda2^{-n}$, то есть

$$r_{k_z^n}=\ln\frac{1+\lambda2^{-n}}{1-2\lambda^{-n}}<4\lambda2^{-n}.$$

Итак,

$$V_\rho(z) > 2n(\rho)\ln a + \frac{4\varepsilon}{\mu(\rho)}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda 2^{-n}\ln(\lambda 2^{-n-1}) =$$

$$= \frac{2\ln\lambda n(\rho)\mu(\rho)}{\mu(\rho)} + \frac{8\varepsilon\{\ln\lambda - 2\ln\lambda\}}{\mu(\rho)} > -\frac{K_1\delta(\rho)+K_2\varepsilon}{\mu(\rho)}, \tag{10}$$

где произведение $\delta(\rho)=\mu(\rho)n(\rho)$, как было выше замечено, стремится к нулю при $\rho\to 1$, а K_1, K_2 — некоторые абсолютные положительные константы.

Переходим к оценке гармонической функции $h_\rho(z)$, которую можно представить в форме (1).

Ядро Пауссона

$$\frac{\rho^2-|z|^2}{\rho^2+|z|^2-2\rho|z|\cos(\psi-\theta)} \quad (z=|z|e^{i\psi})$$

при любом z из единичного круга удовлетворяет неравенству

$$\frac{\rho-|z|}{\rho+|z|} \leqslant \frac{\rho^2-|z|^2}{\rho^2+|z|^2-2\rho|z|\cos(\psi-\theta)} \leqslant \frac{\rho+|z|}{\rho-|z|}.$$

Следовательно,

$$h_\rho(z) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-|z|^2}{\rho^2+|z|^2-2\rho|z|\cos(\psi-\theta)}U^-(\rho e^{i\theta})\,d\theta \geqq$$

$$\geqslant \frac{\rho+|z|}{\rho-|z|}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U^-(\rho e^{i\theta})\,d\theta = \frac{\rho+|z|}{\rho-|z|}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[U(\rho e^{i\theta})-U^+(\rho e^{i\theta})]\,d\theta =$$

$$= \frac{\rho+|z|}{\rho-|z|}[N(\rho,U)-\varphi(\rho)] \geqslant -\frac{\rho+|z|}{\rho-|z|}\varphi(\rho) =$$

$$= -\frac{\rho+|z|}{\rho-|z|}\,\frac{1-\rho}{\mu(\rho)}\cdot\frac{\varphi(\rho)\mu(\rho)}{1-\rho}.$$

Учитывая наш выбор величины ρ, находим, что

$$h_\rho(z) \geqslant -\frac{2(1-\theta)\delta_1(\rho)}{\theta\mu(\rho)}, \tag{11}$$

где функция

$$\delta_1(\rho) = \frac{\varphi(\rho)\mu(\rho)}{1-\rho},$$

как выше было замечено, стремится к нулю при $\rho\to 1$. Объединяя (10) и (11), мы получим следующую оценку снизу для нашей субгармонической функции $U(z)$ во всякой ε-нормальной точке z единичного круга

$$U(z) > -\left(\frac{2(1-\theta)}{\theta}\delta_1(\rho) + K_1\delta(\rho) + K_2\varepsilon\right)\frac{1}{\mu(|z|+\theta(1-|z|))}, \tag{12}$$

Тем самым теорема доказана.

Выведем теперь асимптотическое соотношение для функции $U(z)$.

Теорема 3. Пусть θ $(0<\theta<1)$ зафиксировано. Тогда точечное множество C можно выбрать так, что

$$\lim_{\substack{|z|\to 1\\ z\overline{\in} C}} \mu(|z|+\theta(1-|z|))\,U(z) = 0.$$

Доказательство. При выводе неравенства (12) ε считалось фиксированным положительным числом. Покажем, что можно так построить исключительное множество C, что неравенство (12) будет выполняться при произвольном $\varepsilon>0$ и некотором ρ_ε $(0<\rho_\varepsilon<1)$ для всех z из кольца $\rho_\varepsilon<|z|<1$, лежащих вне C. В самом деле, пусть C_ε — множество точек, которые не ε-нормальны при данном ε, а σ_ε — сумма неэвклидовых радиусов кружков, в которые можно заключить C_ε. Рассмотрим $C_{\varepsilon\rho}$ — множество не ε-нормальных точек в кольце, $\rho \leqslant |\varsigma| < 1$ и, соответственно, сумму $\sigma_{\varepsilon\rho}$ неэвклидовых радиусов кружков, заключающих $C_{\varepsilon,\,\rho}$. Поскольку σ_ε конечна, то для заданного положительного η можно выбрать так $\rho_\eta < 1$, чтобы

$$\sigma_{\rho_\eta,\,\varepsilon} < \eta.$$

Возьмем последовательность $\{\varepsilon_n\}$, где $\varepsilon_n \to 0$, и найдем ρ_n так, чтобы

$$\sigma_{\rho_n,\,\varepsilon_n} < 2^{-n}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{\rho_n,\,\varepsilon_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1. \tag{13}$$

Построим множество

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} C_{\varepsilon_n \rho_n}.$$

В силу (13) множество C является множеством точек единичного круга, которое можно заключить в систему кружков, имеющих сумму неэвклидовых радиусов $\leqslant 1$.

Допустим, что точка $z \overline{\in} C$ и $|z| \geqslant \rho_n$. Тогда в оценке (12) ε можно заменить на ε_n. Поэтому из неравенства (12) следует, что

$$\varliminf_{\substack{|z|\to 1\\ z\overline{\in} C}} U(z)\,\mu(|z| + \theta(1 - |z|)) \geqslant 0. \tag{14}$$

Покажем теперь, что

$$\varlimsup_{|z|\to 1} \mu(|z| + \theta(1 - |z|))\,U(z) \leqslant 0. \tag{15}$$

Для этого возьмем интегральное представление Рисса в круге $|z| \leqslant \rho$

$$U(z) = v_\rho(z) + h_\rho(z).$$

Из него следует, что

$$U(z) \leqslant h_\rho(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - |z|^2}{\rho^2 + |z|^2 - 2\rho|z|\cos(r - \theta)}\,U(\rho e^{i\theta})\,d\theta$$

и, значит,

$$U(z) \leqslant \frac{1}{2\pi}\,\frac{\rho + |z|}{\rho - |z|}\int_0^{2\pi} U^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = \frac{\rho + |z|}{\rho - |z|}\,\varphi(\rho).$$

Если снова обозначить $\delta_1(\rho) = \varphi(\rho)\,\mu(\rho)$, то мы и получим (15). Из (14) и (15) вытекает утверждение теоремы.

§ 3. Оценки снизу, полученные в предыдущем параграфе, могут быть существенно улучшены для субгармонических функций с ограниченной характеристикой и тем более для просто ограниченных субгармонических функций. Здесь оказывается возможным положить $\mu(t) = 1 - t$ и получить более точный результат.

Теорема 4. Пусть $U(z)$ — субгармоническая функция с ограниченной характеристикой в круге $|z| < 1$. Тогда имеет место следующая оценка снизу:

$$U(z) > -\frac{N}{1 - |z|} \quad (z \overline{\in} C), \tag{16}$$

где N — постоянная, зависящая от функции $U(z)$.

Доказательство. Покажем, что если $U(z)$ имеет ограниченную характеристику, то *

$$\int_0^1 (1-t)\,dn(t) < \infty. \tag{17}$$

В самом деле

$$\int_0^r (1-t)\,dn(t) = (1-r)\,n(r) + \int_0^r n(t)\,dt.$$

Из теоремы Иенсена (3) следует, что при $\varphi(r) < M$

$$\int_0^r n(t)\,dt < M.$$

Кроме того,

$$\int_r^{r+\frac{1}{2}(1-r)} \frac{n(t)}{t}\,dt \leqslant \varphi\left(r + \frac{1}{2}(1-r)\right) < M.$$

Поэтому

$$n(r) < \frac{4M}{1-r}.$$

Из приведенных выражений можно легко получить (17). Тем самым доказано, что мы можем в оценке (12) положить $\mu(t) = 1-t$, а значит оценка (16) верна.

Полученная оценка (16) является точной в классе всевозможных субгармонических функций, имеющих ограниченную характеристику $\varphi(r)$. Это следует из простого примера

$$U(z) = -\mathrm{Re}\,\frac{1}{1-z}.$$

Однако, если ограничиться отрицательными субгармоническими функциями, удовлетворяющими определенному граничному условию в точке $z=1$, то постоянную N в оценке (16) оказывается возможным заменить произвольным $\varepsilon > 0$ при $|z| > \rho(\varepsilon)$. Докажем следующую лемму.

Лемма 2. Пусть $dm(\varsigma)$ — положительное распределение масс в единичном круге и притом такое, что логарифмический потенциал

$$V(z) = \iint\limits_{|\varsigma|<1} \ln\left|\frac{\varsigma - z}{1-\bar{z}\varsigma}\right| dm(\varsigma) \tag{18}$$

не равен тождественно $-\infty$. Тогда имеет место равенство

$$\lim_{\substack{|z|\to 1\\ z\in C}} (1-|z|)\,V(z) = 0.$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что из сходимости интеграла (18) хотя бы в одной внутренней точке z_0 следует

$$\iint\limits_{|\varsigma|<1} (1-|\varsigma|)\,dm(|\varsigma|) = \int_0^1 (1-t)\,dn(t) < \infty. \tag{19}$$

* Этот факт является для субгармонических функций аналогом известной теоремы Бляшке о нулях ограниченных голоморфных функций в круге $|z|<1$: ряд $\sum_k (1-|z_k|)$, где z_k — корни функции, обязательно сходится, если функция не есть тождественный нуль.

Для этого воспользуемся разложением

$$\ln\left|\frac{\varsigma - z}{1-\bar{z}\varsigma}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{(1-|\varsigma|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{z}\varsigma|^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{(1-|\varsigma|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{z}\varsigma|^2} + + o(1-|\varsigma|). \tag{20}$$

Отсюда можно заключить, что при любом ς в единичном круге

$$\ln\left|\frac{\varsigma - z_0}{1-\bar{z}_0\varsigma}\right| < -M(z_0)(1-|\varsigma|), \tag{21}$$

где $M(z_0)$ — положительная величина, зависящая только от z_0. Интегрируя (21) с весом $dm(\varsigma)$ получим нужный результат.

Зададим произвольно малое положительное ε. По ε найдем $\rho(\varepsilon) < 1$ так, чтобы

$$\iint\limits_{|\varsigma| \geqslant \rho(\varepsilon)} (1-|\varsigma|)\,dm(\varsigma) < \varepsilon. \tag{22}$$

Это возможно в силу отношения (19). Выберем точку z в единичном круге так, чтобы всюду в круге $|\varsigma| < \rho(\varepsilon)$ имело место неравенство

$$\left|\ln\left|\frac{\varsigma - z}{1-\bar{z}\varsigma}\right|\right| < \varepsilon. \tag{23}$$

Для этого нужно только, чтобы $|z| \geqslant \rho_1(\varepsilon) > \rho(\varepsilon)$.

Так как распределение $dm_1(\varsigma) = (1-|\varsigma|)\,dm(\varsigma)$ обладает конечной массой, то мы можем ввести понятие ε-нормальной точки относительно этого распределения. Предположим, что z есть ε-нормальная точка. Заключим ее в кружок K_z, имеющий неэвклидов центр в точке z,

$$K_z : \left|\frac{\varsigma - z}{1-\bar{z}\varsigma}\right| \leqslant \lambda,$$

причем λ подберем так, чтобы окружность K_z касалась круга

$$|\varsigma| \leqslant |z| + \frac{1}{2}(1-|z|).$$

Тогда величина λ при любом рассматриваемом z удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{3} < \lambda \leqslant \frac{1}{2}.$$

Теперь воспользуемся оценкой (9′), выведенной при доказательстве теоремы 2, и с ее помощью установим, что

$$\iint\limits_{K_z} \ln\left|\frac{\varsigma - z}{1-\bar{z}\varsigma}\right| dm(\varsigma) \geqslant \frac{16\varepsilon\lambda\,[\ln\lambda - 2\ln 2]}{1-|z|}. \tag{24}$$

Как было показано при доказательстве теоремы 3, наше ε может быть сколь угодно малым положительным числом при условии, что $|z| \geqslant \rho(\varepsilon)$ и $z \,\bar{\in}\, C$.

Обозначим через C_z часть кольца

$$\rho(\varepsilon) < |\varsigma| \leqslant 1 - \frac{1}{2}(1-|z|),$$

дополнительную к K_z, и оценим интеграл по C_z, учитывая выбор $\rho(\varepsilon)$ (22). Так как вне K_z выполнено неравенство

$$\ln\left|\frac{\varsigma - z}{1-\bar{z}\varsigma}\right| > -\ln 3,$$

то

$$\iint\limits_{C_z} > -\ln 3 \iint\limits_{C_z} dm(\varsigma) > -\frac{2\ln 3}{1-|z|}\iint\limits_{C_z}(1-|\varsigma|)\,dm(\varsigma) \geqslant -\frac{2\varepsilon\ln 3}{1-|z|}. \tag{25}$$

Рассмотрим теперь интеграл по кольцу

$$1-\frac{1}{2}(1-|z|)\leqslant|\varsigma|<1.$$

В этом кольце мы можем воспользоваться разложением (20). Тогда

$$\iint\limits_{1-\frac{1-|z|}{2}\leqslant|\varsigma|<1}\ln\left|\frac{\varsigma-z}{1-\bar{z}\varsigma}\right|dm(\varsigma)>-\frac{M}{1-|z|}\iint\limits_{1-\frac{1-|z|}{2}\leqslant|\varsigma|<1}(1-|\varsigma|)\,dm(\varsigma)>-\frac{M\varepsilon}{1-|z|},\tag{26}$$

где M — некоторая постоянная.

Остается оценить интеграл по кругу $|\varsigma|<\rho(\varepsilon)$. Это не трудно, так как там мы имеем оценку (23). В соответствии с этой оценкой

$$\iint\limits_{|\varsigma|\leqslant\rho(\varepsilon)}\ln\left|\frac{\varsigma-z}{1-\bar{z}\varsigma}\right|dm(\varsigma)>-\varepsilon\iint\limits_{|\varsigma|\leqslant\rho(\varepsilon)}dm(\varsigma)\geqslant-\frac{M_1\varepsilon}{1-|z|},\tag{27}$$

где M_1 — некоторая постоянная.

Соединяя полученные оценки (24), (25), (26) и (27) воедино, находим, что

$$V(z)>-\frac{\varepsilon N}{1-|z|}\quad(z\,\bar{\in}\,C),$$

где N — некоторая положительная постоянная. Отсюда

$$\varliminf_{\substack{|z|\to1\\ z\bar{\in}C}}(1-|z|)V(z)=0.$$

А так как всюду

$$\varlimsup_{|z|\to1}(1-|z|)V(z)\leqslant0,$$

утверждение нашей леммы доказано.

Теорема 5. Пусть $U(z)$ — субгармоническая функция в единичном круге, удовлетворяющая условиям

$$\varlimsup_{r\to1}U(re^{i\theta})\leqslant0\tag{28}$$

и

$$\varlimsup_{r\to1}(1-r)U(r)=0.\tag{29}$$

Тогда

$$\lim_{re^{i\theta}\to1}(1-r)U(re^{i\theta})=0\quad(re^{i\theta}\,\bar{\in}\,C).\tag{30}$$

Доказательство. Воспользуемся интегральным представлением Рисса функции $U(z)$ во всем единичном круге. Тогда,

$$U(z)=\iint\limits_{|\varsigma|\leqslant1}\ln\left|\frac{\varsigma-z}{1-\bar{z}\varsigma}\right|dm(\varsigma)+h(z),$$

где $h(z)$ — наилучшая гармоническая мажоранта функции $U(z)$. Так как для логарифмического потенциала $V(z)$ соотношение (30) имеет место в силу только что доказанной леммы, то доказательство достаточно провести только для гармонического слагаемого $h(z)$. Функцию $-h(z)$ можно представить интегралом Пуассона-Стильтьеса с положительным весом $d\sigma(\psi)$

$$-h(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\psi-\theta)}\,d\sigma(\psi).$$

В силу условия (29) нашей теоремы и леммы 2 легко вывести, что

$$\lim_{r\to 1}(1-r)\,h(r)=0. \tag{31}$$

С другой стороны,

$$(1-r)\,h(r)=-\frac{1-r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\psi}\,d\sigma_1(\psi)-\frac{\eta}{2\pi}(1+r), \tag{32}$$

где $\eta=\sigma(+0)-\sigma(-0)$, а функция $\sigma_1(\psi)$ уже не имеет скачка при $\psi=0$. Из (32) следует, что для любого r

$$(1-r)\,h(r)\leqslant-\frac{\eta}{2\pi}(1+r).$$

Отсюда нетрудно вывести, пользуясь (31), что

$$0\leqslant\frac{-\eta}{\pi},$$

а это неравенство возможно только при $\eta=0$. Итак, функция $\sigma(\psi)$ не может иметь скачка в точке $\psi=0$.

Покажем теперь, что

$$\lim_{re^{i\theta}\to 1}(1-r)\,h(re^{i\theta})=0.$$

Имеем

$$(1-r)\,h(re^{i\theta})=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r)^2(1+r)}{1+r^2-2r\cos(\psi-\theta)}\,d\sigma(\psi)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}+\int_{-\pi}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\pi}\right]=-\frac{1}{2\pi}[I_1+I_2+I_3]. \tag{33}$$

Поскольку $re^{i\theta}\to 1$, то, начиная с некоторого момента, угол θ будет сколь угодно мал. Поэтому в I_2 и I_3 будем иметь неравенство

$$\psi-\theta\geqslant\delta(\varepsilon)>0$$

и, значит,

$$\lim_{r\to 1}I_2=0\qquad\lim_{r\to 1}I_3=0. \tag{34}$$

Кроме того,

$$I_1\leqslant 2\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}d\sigma(\psi)=2[\sigma(\varepsilon)-\sigma(-\varepsilon)].$$

На основании (34) и (35) из (33) следует, что

$$\varliminf_{r\to 1}(1-r)\,h(re^{i\theta})\geqslant-\frac{1}{\pi}[\sigma(\varepsilon)-\sigma(-\varepsilon)].$$

Левая часть этого неравенства не зависит от ε. Значит, возможен предельный переход при условии, что $\varepsilon\to 0$. Так как функция $\sigma(\psi)$ не имеет скачка при $\psi=0$, то мы находим, что

$$\varliminf_{r\to 1}(1-r)\,h(re^{i\theta})\geqslant 0.$$

Окончание доказательства очевидно.

§ 4. Наши оценки субгармонических функций в единичном круге дают возможность установить некоторые оценки в полуплоскости. Для этого достаточно воспользоваться конформным отображением. Мы приведем здесь только теорему, соответствующую теореме 5, относящейся к субгармоническим функциям с ограниченной характеристикой.

Теорема 6. Если $V(w)$ — отрицательная субгармоническая функция в полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$, удовлетворяющая условию

$$\varlimsup_{y \to \infty} \frac{V(iy)}{y} = 0 \quad (w = x + iy = Re^{i\theta}), \tag{35}$$

то равенство

$$\lim_{R \to \infty} \frac{V(Re^{i\theta})}{R} = 0 \quad (\delta \leqslant \theta \leqslant \pi - \delta, \ \delta > 0) \tag{36}$$

имеет место всюду, за исключением некоторого множества точек $Re^{i\theta}$, которое можно покрыть системой кружков с конечной суммой логарифмических длин радиусов *.

Доказательство. Пусть функция $U(z)$, субгармоническая в круге $|z| < 1$, удовлетворяет условиям (28), (29). Положим

$$z = \frac{w - i}{w + i}.$$

Тогда

$$U(z) = V(w),$$

где $V(w)$ — отрицательная субгармоническая функция в полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$.

Нетрудно видеть, что условие (29) преобразуется при переходе к полуплоскости в условие (35). Действительно,

$$r = \frac{y-1}{y+1}, \ 1 - r \sim \frac{2}{y} \ (r \to 1, \ y \to \infty).$$

Далее, условие (30) переходит в (36). В самом деле,

$$1 - |z| \geqslant \frac{1}{2}(1 - |z|^2) = \frac{2 \operatorname{Im} w}{|w + i|^2}$$

Пусть $w = Rl^{i\theta}$ и $\delta \leqslant \theta \leqslant \pi - \delta$ $(\delta > 0)$. Тогда

$$\frac{\operatorname{Im} w}{|w + i|^2} \sim \frac{\sin \theta}{R} \ (R \to \infty).$$

Поэтому (30) дает нам следующее равенство:

$$\lim_{R \to \infty} \frac{\sin \theta \, U_1(Re^{i\theta})}{R} = 0 \qquad (Re^{i\theta} \overline{\in} C_1), \tag{37}$$

где C_1 означает множество точек полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$, в которое перейдет C при конформном отображении. Поскольку

$$\sin \theta \geqslant \sin \delta,$$

то (37) и (36) эквивалентны.

Система кружков $\{C_j\}$ внутри единичного круга, покрывающая множество C, перейдет при конформном отображении круга на полуплоскость в некоторую систему кружков $\{C_j^1\}$, сумма неэвклидовых радиусов которых конечна **.

---

* Логарифмической длиной радиуса кружка называется величина $l = \int\limits_{R}^{R+r} \frac{dx}{x}$, где R — модуль центра кружка, а r — радиус.

** Как известно, неэвклидова длина l дуги L в верхней полуплоскости выражается формулой $l = \int\limits_{(L)} \frac{ds}{y}$.

Поэтому

$$\sum_j \int_{R_j^1}^{R_j^1+r_j} \frac{dr}{r} < \infty,$$

где R_j^1 — модуль центра кружка C_j^1, а r_j — радиус C_j^1. Отсюда следует, что сумма логарифмических длин радиусов системы $\{C_j^1\}$ конечна.

Итак, наша теорема доказана.

Сравним эту теорему с известными результатами Альфорса, Гейнса (4) и Хеймана (3).

Альфорсу и Гейнсу принадлежит следующая теорема: Пусть субгармоническая функция в полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$ удовлетворяет условию

$$\sup_{y>0} \frac{V(x+iy)}{y} = 0 \quad (w = x + iy = Re^{i\theta}).$$

Тогда для $\theta_0 > 0$ существует множество конечной логарифмической длины Δ_0 такое, что

$$\lim_{R\to\infty} \frac{V(Re^{i\theta})}{R} = 0 \quad (\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi - \theta_0,\ R \overline{\in} \Delta_0).$$

Результат Альфорса и Гейнса был распространен Хейманом [3] на случай «полной» полуплоскости, то есть на случай, когда $\theta_0 = 0$.

Наша теорема, очевидно, усиливает теорему Альфорса и Гейнса (4). Действительно, в этих теоремах устанавливается одно и то же соотношение (36) для одного и того же класса субгармонических функций в полуплоскости. Однако в нашей теореме исключительное множество существенно уже, чем исключительное множество в теореме Альфорса — Гейнса, которое образовано концентрическими полукольцами, пересекающими действительную ось по множеству конечной логарифмической длины.

Что касается теоремы Хеймана (3), то она также имеет более широкое исключительное множество, чем у нас. Однако результат Хеймана устанавливает оценку, справедливую вплоть до границы полуплоскости, и в этом отношении имеет существенное преимущество.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность проф. Б. Я. Левину за указание темы и руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Привалов. Субгармонические функции. М., 1937.
2. F. Riesz. Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport á la theorie du potentiel. Acta Mat, 48, 329—343 (1926); 54, 321—360 (1930).
3. W. K. Haymann. Questions of regularity connected with the Phragmen-Lindelöf principle. J. math. pures et appl., 35, 115—126 (1956).
4. L. Ahlfors and M. Heins. Questions of regularity connected with the Phragmen-Lindelöf principle. Ann. math., 50, 341—346 (1949).
5. И. В. Ушакова. Некоторые теоремы единственности для функций субгармонических и мероморфных в единичном круге. «Докл. АН СССР», 137, 1319—1322 (1961).