Приложенiе.

ОТЧЕТЪ

О ЗАНЯТIЯХЪ ВЪ ЛЕЙПЦИГѢ,

КОМАНДИРОВАННАГО ЗА ГРАНИЦУ СЪ УЧЕНОЮ ЦѢЛЬЮ,

ДОЦЕНТА ИМПЕРАТОРСКАГО ХАРЬКОВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА

Матвѣя Тихомандрицкаго.

Отправляясь за границу съ цѣлью ознакомленія съ тѣмъ состояніемъ, въ которомъ находится тамъ въ настоящее время ученіе о функціяхъ вообще и Абелевыхъ въ-особенности, и главнымъ образомъ съ Вейерштрассовскою теоріей послѣднихъ, я избралъ Лейпцигъ первымъ пунктомъ своего пребыванія за границей вслѣдствіе того, что въ лѣтвій семестръ Вейерштрассъ долженъ былъ читать не Абелевы интегралы, а варіаціонное исчисленіе; въ Лейпцигѣ же проф. Клейнъ читалъ въ это время вторую часть теоріи эллиптическихъ функцій, и мнѣ, какъ занимающемуся этимъ предметомъ, интересно было познакомиться съ преподаваніемъ его такимъ ученымъ, какъ Клейнъ. Но еще болѣе меня привлекало въ Лейпцигъ то обстоятельство, что Клейнъ занимался и Римановою теоріей алгебраическихъ функцій и ихъ интеграловъ; слѣдовательно, я могъ получить отъ него разъясненіе многихъ неясныхъ пунктовъ этой теоріи, а также вопроса о томъ, какъ подошелъ Риманъ къ своей теоріи; объ этомъ же какъ-разъ Клейнъ издалъ брошюру, о которой рѣчь будетъ ниже.

Въ Лейпцигъ я пріѣхалъ $\frac{22 \text{ мая}}{3 \text{ іюня}}$ сего года, на другой день Тройцына дня, когда начинаются здѣсь каникулы Pfingstferien, длящіяся недѣлю. Эту недѣлю я употребилъ на ознакомленіе съ мѣстоположеніемъ университетскихъ зданій, а также на просмотръ купленныхъ мною у Тэйбнера книгъ.

Математическія лекціи читаются главнымъ образомъ въ особомъ зданіи — Чермакскомъ институтѣ, который находится въ 15-минутномъ разстояніи отъ университета въ юго-восточной части города, между зданіями зоологическаго и сельско-хозяйственнаго институтовъ, на Teich-Str. Это небольшое зданіе, полукруглое спереди, гдѣ аудиторія, выстроенная амфитеатромъ, первоначально, должно полагать, предназначалось для преподаванія естественныхъ наукъ; тѣмъ не менѣе оно весьма удобно и для лекцій по математикѣ; слышно въ аудиторіи съ послѣдней скамьи также хорошо какъ и съ первой и, благодаря освѣщенію сверху, доска никогда не отсвѣчиваетъ. Доска состоитъ изъ двухъ частей, соединенныхъ перекинутыми чрезъ блоки веревками: исписанная половина, если нужно сохранить формулы, поднимается, и пишутъ на другой, спущенной на высоту удобную для профессора. Позади аудиторіи находится комната съ гипсовыми моделями разныхъ кривыхъ поверхностей, другая комната — чертежная и третья — Sprechzimmer des Docenten, гдѣ профессоръ по окончаніи лекціи даетъ желающимъ объясненія. Прежде въ этомъ зданіи помѣщался и математическій семинаръ (Königliches mathematisches Seminar der Universität), нынѣ же онъ помѣщается на Ritterstrasse № 14. Квартира семинара состоитъ изъ двухъ Sprechzimmer des Docenten, аудиторіи, въ которой происходятъ разъ въ недѣлю чтенія сообщеній семинаристовъ и профессоровъ, а также занимаются черченіемъ; библіотеки, читальни, гдѣ лежатъ вновь выходящія періодическія изданія и книги, и двухъ Arbeitszimmer. Открытъ семинаръ лѣтомъ съ 7-ми часовъ утра до 8-ми вечера. Прислуги въ квартирѣ семинара нѣтъ; поэтому каждому семинаристу дается ключъ отъ дверей того отдѣленія, гдѣ библіотека и кабинеты, а также другой отъ ящика въ столѣ, гдѣ онъ можетъ хранить свои вещи; приходя въ удобное для него время, онъ можетъ заниматься такъ, какъ у себя въ кабинетѣ, доставая самъ изъ библіотеки все, что ему нужно; на-домъ брать ничего не дозволяется. Такъ-какъ семинаръ существуетъ всего три года, на скромныя средства, то понятно, что библіотека еще не можетъ быть богатою: она еще формируется; но уже и теперь она содержитъ много полезнаго: журналъ Crell'я съ 50-го тома, Mathematische Annalen съ основанія; записки берлинской, вѣнской, парижской академій и другія математическія періодическія изданія, въ томъ числѣ и американскій математическій журналъ, основанный Сильвестромъ (вернувшимся теперь въ Оксфордъ), за послѣдніе годы, также сочиненія Абеля, Якоби, Гаусса, Римана, Штейнера, Плюкера, Эйзенштейна, Шаля, Ли (всѣ статьи о частныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ собраны въ одинъ томъ), Неймана; Коши, Лагранжа, Лапласа новыя изданія также пріобрѣтаются; кромѣ того, тамъ имѣются рукописныя лекціи Клейна, Майера, Дика, Вейерштрасса, Кронекера, что для меня было весьма важно. Каждый семинаристъ вноситъ 10 марокъ за семестръ. Большею частію они доктора или докторанты; былъ между ними и приватъ-доцентъ изъ Праги. Въ семинарѣ кромѣ проф. Клейна, который состоитъ директоромъ семинара, занимается и проф. Майеръ; также приватъ-доцентъ Шуръ. Занятія семинаристовъ состоятъ обыкновенно въ самостоятельной разработкѣ разныхъ частныхъ вопросовъ изъ области преподаваемаго на лекціяхъ. Разъ въ недѣлю, по понедѣльникамъ, происходятъ собранія, на которыхъ, послѣ прочтенія протокола предыдущаго засѣданія, одинъ изъ семинаристовъ читаетъ свою работу, во время чего, если нужно, проф. Клейнъ дѣлаетъ замѣчанія или возраженія, а по окончаніи иногда резюмируетъ, или дополняетъ, или ставитъ новый вопросъ. Большая часть рефератовъ, мною слышанныхъ, были спеціальнаго характера, относясь къ частнымъ вопросамъ дѣленія и преобразованія эллиптическихъ функцій — о чемъ въ то время читалъ проф. Клейнъ, и только мое сообщеніе «объ обращеніи эллиптическихъ интеграловъ» (которое г. Клейнъ хотѣлъ напечатать въ Mathem. Annalen* и русскій переводъ котораго мною представленъ въ математическое общество при Императорскомъ харьковскомъ университетѣ**) имѣло уклоняющійся характеръ. Засѣданія семинара мнѣ напомнили нѣсколько засѣданія нашего математическаго общества.

Математическій семинаръ навѣщается обыкновенно всѣми заѣзжающими въ Лейпцигъ математиками; здѣсь я встрѣтилъ, между прочими, профессора дерптскаго университета Линдштедта, Шуберта изъ Гамбурга, извѣстнаго проф. Вебера изъ Берлина (теперь перешелъ въ марбургскій университетъ), котораго солидными работами многое разъяснено въ теоріи Абелевыхъ интеграловъ.

Я позволилъ себѣ распространиться о математическомъ семинарѣ, доступъ въ который мнѣ любезно открылъ проф. Клейнъ даже и на каникулярное время (августъ, сентябрь), не только потому, что, благодаря этому учрежденію, я получилъ возможность въ короткое время пріобрѣсти общее знакомство съ литературою занимающаго меня предмета и такимъ образомъ подготовиться къ дальнѣйшимъ моимъ занятіямъ, но также и потому, что я признаю пользу такого института не только для начинающихъ ученыхъ, которымъ онъ доставляетъ много удобствъ для занятій и руководство опытныхъ ученыхъ, но также и для самихъ руководителей, которымъ онъ доставляетъ сотрудниковъ; много частныхъ вопросовъ и задачъ, представляющихся при круп-

* Напечатано въ XXV т.

** См. III книжку «Сообщеній» за 1884 г.

номъ научномъ изслѣдованіи, нетребующихъ особенной подготовки, но много времени, весьма полезно — въ видахъ сбереженія своего времени и силъ для преодолѣнія болѣе существенныхъ трудностей главнаго вопроса — предоставлять своимъ ученикамъ, которые болѣе пользы извлекутъ какъ для своего развитія, такъ и для науки, трудясь надъ рѣшеніемъ вопросовъ и задачъ непридуманныхъ нарочно какъ примѣры для упражненія, но выдвинутыхъ на очередь ходомъ развитія науки, и потому всегда, какъ все живое, болѣе способныхъ вызвать интересъ къ себѣ и побудить къ труду. Много изслѣдованій, напечатанныхъ въ Mathem. An., журналѣ Schlömilch'а, а также нѣкоторыя изъ помѣщенныхъ въ итальянскихъ журналахъ и др., получили свое начало въ семинарѣ Клейна (въ которомъ всегда бываетъ нѣсколько иностранцевъ). Въ семинарѣ молодые люди, занимаясь въ одно время родственными вопросами, легче могутъ вступать въ обмѣнъ мыслей между собою и такимъ образомъ поддерживать другъ друга въ научной работѣ. Постояннымъ обмѣномъ мыслей Клебша съ товарищами по наукѣ и учениками объясняютъ его біографы его чрезвычайную научную продуктивность.

Проф. Клейнъ, ученикъ Плюкера и Клебша, отчасти Кронекера и Вейерштрасса, принадлежитъ къ той школѣ математиковъ, наиболѣе, какъ кажется, въ настоящее время распространенной въ Германіи, которые не полагаютъ рѣзкаго разграниченія между чистымъ анализомъ и геометріей и не только анализъ примѣняютъ къ геометріи, но и геометрію къ анализу. Въ университетѣ занимаетъ онъ каѳедру геометріи, и нынѣшній зимній семестръ будетъ читать элементарный курсъ проективной геометріи (въ семинарѣ же будутъ продолжаться занятія эллиптическими функціями), но въ различное время читалъ и разные другіе курсы. Такъ, я видѣлъ въ семинарѣ его лекціи о рѣшеніи уравненія 5-й степени. Изъ этого курса, вновь переработаннаго, вышла только-что изданная имъ книга подъ заглавіемъ: «Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade». Leipz. B. G. Teubner. 1884. Этотъ курсъ большой и трудный, а потому при всемъ интересѣ, который онъ возбуждалъ во мнѣ, я въ виду большой затраты времени, которой потребовало бы основательное изученіе его, долженъ былъ воздержаться отъ этого уклоненія отъ прямой моей задачи, тѣмъ болѣе, что ожидался выходъ только-что названной книги. Изъ курсовъ проф. Клейна я познакомился съ двумя: съ курсомъ теоріи эллиптическихъ функцій, читаннымъ въ зимній и лѣтній семестры нынѣшняго года, и курсомъ «Functionentheorie in geometrischer Behandlungsweise» — въ зимній и лѣтній семестры 1880—1881 г. Курсъ теоріи эллиптическихъ функцій состоитъ изъ двухъ частей: въ первой, прочитанной въ зимній семестръ $18^{83}/_{84}$ года, разсматриваются эллиптическіе интегралы и функціи въ обыкновенномъ смыслѣ, во второй, читанной въ лѣтній семестръ, разсматриваются эллиптическіе Modulfunctionen, т. е. въ зависимости не только отъ аргумента, но и отъ обоихъ періодовъ. Въ первой части показывается выводъ эллиптическихъ интеграловъ трехъ родовъ по Клебшу въ зависимости отъ плоской кривой третьяго порядка перваго рода, а также отъ кривой 4 порядка, происходящей отъ пересѣченія двухъ цилиндровъ второго порядка; разсматриваются и сравниваются между собою различныя каноническія формы эллиптическихъ интеграловъ: Лежандровская, Римановская и Вейерштрассовская. Послѣдняя получается такимъ образомъ, что сперва находятся «ирраціональные инваріанты» полинома 4. степени, т. е. функціи корней его; потомъ изъ нихъ составляются такіе инваріанты, которые выражаются раціонально чрезъ коэффиціенты полинома. Затѣмъ показывается изображеніе одной плоскости на другой съ помощію эллиптич. интеграловъ. Періодичность выводится по Риману. За основную эллиптическую функцію берется не sinam u, а Вейерштрассовская $p(u)$. Въ заключеніе показывается разложеніе эллиптич. функцій въ ряды и безконечныя произведенія и вводится функція $\sigma(u)$ Вейерштрасса, которая сравнивается съ Якобіевскими Θ-функціями. Изъ второй части курса я прослушалъ только вторую половину, посвященную умноженію, преобразованію и дѣленію эллиптическихъ функцій, которая существенно новаго для меня ничего не представляла кромѣ того, что вмѣсто $\sin\operatorname{am} u$ и $\Theta(u)$ фигурировали $p(u)$ и $\sigma(u)$, благодаря чему дѣло представлялось проще, и это потому, что функція $p(u)$, зависящая по своему опредѣленію отъ инваріантовъ, не измѣняется отъ линейныхъ преобразованій періодовъ съ опредѣлителемъ $=1$, тогда какъ Лежандровскій модуль k^2 принимаетъ вслѣдствіе этого 6 формъ. Въ пропущенной мною части, которая была подготовительною къ этой, эллиптическія функціи разсматривались какъ функціи періодовъ. Хотя листы лекцій Клейна появлялись въ семинарѣ обыкновенно чрезъ недѣлю по прочтеніи лекціи, тѣмъ не менѣе мнѣ не удалось прочитать этой части его курса, такъ-какъ она постоянно находилась въ употребленіи у его слушателей; на каникулы же, уѣзжая изъ Лейпцига, Клейнъ взялъ ихъ съ собою, чтобы пересмотрѣть. Судя по предисловію къ вышеупомянутой книгѣ его, можно полагать, что онъ приготовляетъ другое сочиненіе: Die Lehre von den elliptischen Modulfunctionen, изъ котораго можно будетъ познакомиться и съ этою частію курса. На лекціяхъ пр. Клейнъ вычисленій обыкновенно не производитъ, ограничиваясь большею частію указаніемъ пріемовъ и сообщеніемъ результатовъ. Это имѣетъ для развитыхъ слушателей то преимущество, что процесъ вычисленія не отвлекаетъ ихъ отъ хода идей. Вообще курсы Клейна разсчитаны на хорошо подготовленныхъ слушателей.

Я не буду подробно описывать другаго курса пр. Клейна, котораго заглавіе достаточно показываетъ, что въ этомъ курсѣ, изслѣдуя фукціи, начиная съ элементарныхъ и до Абелевыхъ интеграловъ, онъ также придерживается методовъ Клебша и Римана; но отмѣчу только то, что показалось мнѣ новымъ въ этомъ курсѣ. Первое — это переходъ отъ алгебраической кривой въ пространствѣ n измѣреній, отъ которой зависитъ Абелевъ интегралъ по Клебшу (распространеніе на n измѣреній принадлежитъ его ученикамъ Клейну и Нётеру) къ Римановой поверхности чрезъ постепенное проэктированіе въ пространство непосредственно низшаго числа измѣреній изъ центра, взятаго на кривой. Объ этомъ лучше всего дастъ понятіе слѣдующій примѣръ, взятый изъ курса Клейна: пусть дана кривая четвертаго порядка въ пространствѣ трехъ измѣреній: взявъ за центръ проэкцій точку на кривой, проводимъ изъ нея прямыя чрезъ всѣ точки данной кривой до пересѣченія съ какою-нибудь плоскостью, непроходящею чрезъ центръ проэкцій: въ пересѣченіи получимъ рядъ точекъ, образующихъ кривую третьяго порядка (дѣйствительно, если мы пересѣчемъ полученную кривую какою-нибудь прямою въ плоскости проэкцій и чрезъ эту прямую и центръ проэкцій проведемъ новую плоскость, то эта послѣдняя пересѣчетъ данную кривую 4-го порядка еще только въ трехъ точкахъ, и если мы эти точки соединимъ съ центромъ проэкцій прямыми, то эти послѣднія опредѣлятъ точки пересѣченія кривой проэкціи съ сѣкущею прямою, которыхъ будетъ такимъ образомъ три, откуда и слѣдуетъ сказанное). Если теперь возьмемъ точку на этой кривой 3. порядка и будемъ проводить изъ нея прямыя къ прочимъ точкамъ кривой и опредѣлимъ точки ихъ пересѣченія съ какою-либо прямою въ той-же плоскости, не проходящею чрезъ этотъ второй центръ проэкцій, то будемъ имѣть точки этой прямой, соотвѣтственныя въ силу обоихъ проэктированій точками данной кривой 4. порядка въ пространствѣ трехъ измѣреній. При этомъ каждой точкѣ кривой 4. порядка будетъ въ силу обоихъ проэктированій отвѣчать одна точка прямой, но, наоборотъ, каждой точкѣ этой прямой линіи будутъ отвѣчать уже двѣ точки кривой третьяго порядка (а слѣд. и данной четвертаго), потому что каждая прямая, соединяющая точку прямой со вторымъ центромъ проэкцій, встрѣтитъ кривую 3. порядка еще въ двухъ точкахъ; такъ что прямыя соединяющія точки кривой 3. порядка съ центромъ проэкціи будутъ совпадать по двѣ, откуда и слѣдуетъ сказанное. Функція отъ координатъ точекъ данной кривой въ каждой точкѣ послѣдней прямой будетъ имѣть, слѣдовательно, по два значенія, которыя сдѣлаются равными только въ точкахъ, отвѣчающихъ касательнымъ изъ центра проэкцій къ точкамъ кривой 3. порядка. Такъ какъ изъ точки на кривой 3. порядка можно провести четыре касательныя къ ней-же, то мы будемъ имѣть на нашей дважды покрытой значеніями функціи прямой четыре точки развѣтвленія функціи. Если теперь перестанемъ ограничиваться вещественными значеніями, а примемъ въ разсмотрѣніе комплексныя, то наша дважды покрытая значеніями функціи прямая обратится въ двулиственную Риманову плоскость съ четырьмя винтовыми точками (Windungspunkte), которую Риманъ построилъ для однозначнаго представленія функцій, зависящихъ отъ квадратнаго корня изъ полинома четвертой степени. Еще Нейманъ показалъ — въ своихъ «Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale». Leipzig. Teubner. 1865,—что чрезъ непрерывное измѣненіе можно сей-часъ упомянутую Риманову поверхность, послѣ предварительнаго обращенія въ двулиственную сферу, превратить въ кольцевую поверхность. Другой пунктъ въ разсматриваемомъ курсѣ Клейна, который я желаю отмѣтить, это есть именно распространеніе этого результата на какую угодно Риманову поверхность, чрезъ что получается *нормальная* Риманова поверхность, имѣющая видъ шара съ ручками (наподобіе ручекъ торговыхъ вѣсовыхъ гирь). Всякая функція принимающая одно только значеніе въ каждой точкѣ такой поверхности будетъ на ней однозначною. На такой поверхности (если ручекъ p) можно провести $2p$ системъ кривыхъ, которыя нельзя стянуть въ одну точку: однѣ образуютъ меридіаны ручки (соотвѣтственно меридіанамъ кольца), другія — параллели. Всякій другой путь изъ одной точки въ другую можетъ быть чрезъ непрерывное измѣненіе приведенъ къ пути по кратчайшей на поверхности линіи + рядъ полныхъ путей вокругъ меридіановъ и параллелей ручекъ. Интегралъ отъ однозначной и конечной функціи на такой поверхности будетъ нуль по пути, который можно стянуть въ одну точку, и будетъ отличенъ отъ нуля по пути, который нельзя стянуть въ одну точку. Такимъ образомъ меридіанъ каждой ручки H_i даетъ интегралъ A_i, параллель другой B_i, которыя будутъ періодами интеграла, такъ какъ всѣ интегралы, взятые по различнымъ путямъ изъ одной точки въ другую, будутъ различаться на линейныя функціи съ цѣлыми коэффиціентами отъ этихъ величинъ A_i и B_i.

Третій пунктъ, который я желаю отмѣтить, заключаетъ въ себѣ отвѣтъ на вопросъ: какимъ образомъ Риманъ пришелъ къ своей теоріи алгебраическихъ функцій и ихъ интеграловъ. Клейнъ полагаетъ, что онъ былъ приведенъ къ ней чрезъ разсмотрѣніе физическихъ вопросовъ, именно *установившихся теченій на плоскости* (Stationäre Strömungen in der Ebene). Изъ этой части курса пр. Клейна вышла его брошюра: «Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen». Leipzig. Teubner. 1882.

Хотя такимъ образомъ чрезъ отчетъ объ этомъ курсѣ пр. Клейна я подошелъ къ главному предмету моихъ занятій, именно Абелевымъ интеграламъ, я позволю себѣ еще одно отступленіе, чтобы покончить съ предметами, имѣвшими для меня второстепенное значеніе. Въ семинарѣ я бѣгло ознакомился также и съ лекціями Вейерштрасса по теоріи эллиптическихъ функцій. Въ нихъ самое интересное — это подходъ къ эллиптическимъ функціямъ. Вейерштрассъ къ нимъ приходитъ чрезъ рѣшеніе такой задачи:

найти всѣ однозначныя функціи одной независимой перемѣнной, для которыхъ имѣетъ мѣсто теорема сложенія; потомъ онъ показываетъ, что функція $p(u)$, къ которой приводитъ разсмотрѣніе интеграловъ отъ раціональной функціи отъ квадратнаго корня изъ полинома 4 степени, есть та-же самая, которая рѣшаетъ его задачу. Приведеніе интеграловъ къ его, Вейерштрасса, канонической формѣ я нашелъ во второй части его курса, посвященной приложенію эллиптическихъ функцій. Это приведеніе изложено въ брошюрѣ Миттагъ-Леффлера, цитированной мною въ вышеприведенной статьѣ моей, посланной въ математическое общество. Къ сожалѣнію, эта брошюра написана на шведскомъ языкѣ и, безъ знанія этого языка, только съ большимъ трудомъ одолѣвается при помощи лексикона. Къ этимъ лекціямъ Вейерштрасса я еще разъ надѣюсь вернуться въ Берлинѣ. — Перехожу теперь къ Абелевымъ интеграламъ.

Теорія Абелевыхъ интеграловъ началась съ знаменитой теоремы Абеля. Первымъ, кто послѣ Абеля приступилъ къ ея разработкѣ, былъ Якоби, сосредоточившій свое вниманіе на спеціальномъ классѣ Абелевыхъ интеграловъ, нынѣ называемыхъ ультра- или гиперэллиптическими, которыя зависятъ отъ квадратнаго корня изъ полинома какой угодно степени. Онъ подробно изслѣдовалъ Абелеву теорему для этихъ интеграловъ всѣхъ трехъ родовъ, теорему о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ для интеграловъ 3-го рода; показалъ многопеnecessary періодичность этихъ интеграловъ и первый правильнымъ образомъ поставилъ вопросъ объ обращеніи Абелевыхъ интеграловъ, отчего эта задача объ обращеніи Абелевыхъ интеграловъ и называется теперь Якобіевою.

Якоби однако не рѣшилъ этой задачи: первое рѣшеніе ея принадлежитъ Göpel'ю и Rosenhain'у, которые получили его чрезъ обобщеніе Якобіевской функціи $\vartheta(u)$: Якоби показалъ — какимъ образомъ изъ свойствъ ея можно вывести дифференціальное уравненіе эллиптическихъ функцій, которыя представляются частнымъ двухъ различныхъ $\vartheta(u)$. Göpel и Rosenhain, принявъ въ разсмотрѣніе ряды $\vartheta(u, v)$, составленные по тому-же закону, но уже двойные и зависящіе отъ двухъ аргументовъ — u и v, вывели изъ ихъ свойствъ частныя дифференціальныя уравненія для функцій, представляемыхъ частнымъ двухъ такихъ $\vartheta(u, v)$, и такимъ образомъ пришли къ дифференціальнымъ уравненіямъ Якобіевой задачи (Методъ Rosenhain'а весьма хорошо очерченъ въ докторской диссертаціи К. А. Поссе подъ заглавіемъ — «О функціяхъ ϑ отъ двухъ перемѣнныхъ и о задачѣ Якоби.» Спб. 1882). Съ-тѣхъ-поръ и понынѣ теорія ϑ-функцій многихъ перемѣнныхъ продолжаетъ разрабатываться главнымъ образомъ въ Германіи, и хотя трудами Римана, Фукса, Томэ, Прима, Крацера, Вебера, Нőтера, Вейерштрасса и Шотки много подвинута впередъ, однако все-таки съ этой стороны подойдти къ рѣшенію Якобіевой задачи до-сихъ-поръ удалось только для непосредственно слѣдующаго за рангомъ 2 (по Вейерштрассу; Geschlecht Клебша) которымъ ограничились Göpel и Rosenhain, именно Веберу въ его «Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlecht 3. Berlin, 1876, и Шотки (Schottky) въ его — «Abriss einer Theorie der Abelschen Functionen von drei Variabeln.» Leipzig. 1880, для ранга 3. Трудности такого рѣшенія Якобіевской задачи, какъ намъ теперь кажется — послѣ предстоящаго мнѣ болѣе глубокаго изученія этого способа можетъ быть взглядъ мой и измѣнится, — не принципіальнаго свойства, а такъ-сказать — количественнаго; вслѣдствіе того, что съ увеличеніемъ ранга увеличивается гораздо быстрѣе число самихъ ϑ, различающихся характеристиками, и число соотношеній между ними, увеличивается и монотонная работа разбора этихъ отношеній такъ, что остается только подождать, чтобы явился ученый, у котораго хватило бы мужества приняться за эту скучную работу и умѣнья представить результаты ея въ удобообозримой формѣ. Это было бы весьма желательно — хотя такой способъ рѣшенія задачи Якоби, какъ непрямой, намъ и кажется менѣе естественнымъ, чѣмъ переходъ отъ интеграловъ къ θ,—потому что, когда въ наукѣ будутъ существовать оба способа рѣшенія задачи Якоби—прямой и обратный, то эта фундаментальная часть теоріи Абелевыхъ интеграловъ получитъ округленность, причемъ лучше обнаружится внутренняя глубокая связь между обѣими трансцендентными, подобно тому, что мы имѣемъ теперь въ теоріи эллиптическихъ функцій.

Первое прямое рѣшеніе Якобіевской задачи принадлежитъ Вейерштрассу, но тѣ результаты, которые онъ сообщилъ безъ доказательствъ въ 47 т., а также и тотъ неоконченный мемуаръ, который помѣщенъ въ 52 т. журнала Креля, способны больше возбудить интересъ къ его теоріи, чѣмъ дать о ней удовлетворительное понятіе; поэтому его теорія только медленно распространялась болѣе чрезъ его учениковъ, и неудивительно, если появившаяся въ томъ-же журналѣ 54 т. Риманова «Theorie der Abelschen Functionen» выдвинулась болѣе впередъ, отодвинувъ Вейерштрассовскую теорію на второй планъ. Риманова теорія нашла многихъ адептовъ и вызвала много работъ, предпринятыхъ или въ видахъ примѣненія его теоріи къ частнымъ случаямъ (Примъ, Нейманъ къ гиперэллиптическимъ, Томэ къ интеграламъ, зависящимъ отъ кубич. корня) или къ разъясненію или дополненію того или другаго пункта теоріи (Рохъ, Веберъ, Нётеръ, Клейнъ). Принципъ Дирихле, на которомъ Риманъ основалъ свою теорію, былъ подвергнутъ сомнѣнію и вызвалъ рядъ изслѣдованій—(Нейманъ, Шварцъ, Веберъ). Что же касается до задачи обращенія Абелевыхъ интеграловъ, то оно въ сущности эмпирическое,—употребляя выраженіе Клейна; Риманъ беретъ Θ-функцію готовою и изъ нея строитъ функціи, которыя были бы однозначны на подлежащей многосвязной поверхности, получившей названіе отъ его имени, и слѣд. алгебраическія, развѣтвленіе которыхъ опредѣляется этою поверхностію.

Это тотъ пунктъ Римановой теоріи, который не удовлетворилъ ни Неймана, прекрасно въ своихъ «Vorlesungen über Riemmann's

Theorie der Abelsch. Integr.» Leipzig. 1865 — популяризировавшаго Риманову теорію, ни Клебша.

Клебша не удовлетворялъ, какъ видно изъ его предисловія къ его и Гордана книгѣ — «Theorie der Abelschen Integrale.» Leipzig, Teubner. 1866, также и синтетическій характеръ построенія функцій, благодаря именно которому, по его мнѣнію, Риманова теорія распространялась лишь въ тѣсномъ кругу — скажу — отборныхъ математиковъ, представляя громадныя трудности для уразумѣнія. Этого мнѣнія нельзя не раздѣлять: дѣйствительно, лишь когда читатель Римана уже знакомъ изъ другихъ источниковъ съ Абелевыми интегралами, тогда только понятны для него raison d'être тѣхъ условій, которыми опредѣляетъ функцію Риманъ на основаніи принципа Дирихле. Не менѣе поражаетъ сперва и то, что въ его «Theorie der Abelschen Integrale» появляются прежде интегралы отъ алгебраическихъ функцій, а потомъ сами алгебраическія функціи. Теперь, послѣ выхода упомянутой мною выше книги Клейна, мы имѣемъ объясненіе весьма правдоподобное сформированія Римановой теоріи; но все же и послѣ этого кто же можетъ считать такой путь естественнымъ?.. Риманова теорія Абелевыхъ интеграловъ навсегда останется блестящимъ памятникомъ его геніальности, но должна современемъ уступить господство въ наукѣ другой болѣе простой, естественной, и, кто знаетъ, можетъ быть той самой, которую она сперва какъ-бы оттѣснила на второй планъ, — Вейерштрассовской, на-встрѣчу которой, въ лицѣ Нöтера, идетъ теперь и третья школа — Клебшевская (первою я считаю — Гöпель-Розенгайновскую, второю Риманову, четвертою же Вейерштрассовскую). Клебшъ и Горданъ, вслѣдствіе сказанной причины, предпочли основать теорію Абелевыхъ интеграловъ на другихъ началахъ: они, какъ извѣстно, связали теорію Абелевыхъ интеграловъ съ геометріей, толкуя, какъ уравненіе плоской кривой, уравненіе, опредѣляющее ирраціональность, входящую въ интегралъ. Такое соединеніе было плодотворно для обѣихъ наукъ: Абелевы интегралы каждаго изъ трехъ родовъ получили отчетливое опредѣленіе, теорема Абеля и предложеніе о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ интегралахъ 3. рода ясное выраженіе; послѣ чего Клебшъ и Горданъ могли основать свою теорію функцій $T_{\xi\eta}(x)$, зависящей отъ интеграловъ 3. рода и функцій U и V, зависящихъ отъ этой функціи $T_{\xi\eta}(x)$, которыя служатъ, такъ-сказать, мостомъ, по которому совершается переходъ отъ Абелевыхъ интеграловъ къ Θ-функціямъ, а чрезъ посредство Абелевой теоремы они составляютъ и уравненіе, рѣшающее задачу Якоби, — уравненіе, котораго коэффиціенты зависятъ отъ $T_{\xi\eta}(x)$ и слѣд. отъ Θ.

Глава, посвященная теоріи функціи $T_{\xi\eta}(x)$, самая трудная въ книгѣ Клебша и Гордана, но въ то-же время и самая важная: она даетъ то, чего не доставало Риману. Тѣмъ не менѣе, по причинѣ сложности теоріи этихъ функцій, какъ Бріо въ своей «Théorie de fonctions Abeliennes.» Paris. 1879, такъ и Линдеманъ въ своей обработкѣ лекцій Клебша по геометріи предпочли слѣдовать, съ этого пункта начиная, Риману.

Я сказалъ, что установленная Клебшемъ и Горданомъ связь Абелевыхъ интеграловъ съ геометріей была полезна для обѣихъ наукъ: геометріи она дала понятіе о родѣ (дефектъ—по Cayley) плоскихъ кривыхъ, рядъ предложеній касательно пересѣченія кривыхъ между собою (Schnittpunkt-Sätze), понятіе о сопряженныхъ кривыхъ (adjungirte Curven), теорію преобразованія кривыхъ. Изъ числа относящихся сюда работъ я отмѣчу рядъ работъ Нётера, начатыхъ совмѣстно съ Брилемъ и продолжаемыхъ теперь имъ однимъ; помѣщены онѣ въ Mathematische Annalen и въ «Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen». Въ этихъ работахъ онъ стремится къ тому, чтобы дать предложеніямъ, открытымъ съ помощію теоріи Абелевыхъ интеграловъ, но алгебраическаго характера, и доказательства алгебраическія — стремленіе, заслуживающее полной симпатіи, — и приходитъ къ весьма замѣчательному результату (въ 23 т. Mathem. An.), именно — къ раціональному опредѣленію, т. е. при помощи раціональныхъ дѣйствій, такихъ фундаментальныхъ вещей для теоріи Абелевыхъ интеграловъ, какъ рангъ ихъ* и сопряженныя функціи φ (геометрически adjungirte Curven n-3 порядка, если n степень уравненія основной кривой), которыя фигурируютъ въ числителяхъ дифференціаловъ Абелевыхъ интеграловъ перваго рода. Раньше найденъ былъ имъ другой замѣчательный результатъ въ статьѣ «Invariante Darstellung der algebraischen Functionen.» Math. An. Bd. 17, на который указываетъ самое заглавіе: въ этой статьѣ онъ показываетъ — какимъ образомъ можно разныя алгебраическія функціи выразить чрезъ функціи φ, частное которыхъ не измѣняется, какъ показали еще Клебшъ и Горданъ, отъ раціональныхъ преобразованій, т. е. при раціональномъ преобразованіи уравненія, опредѣляющаго ирраціональность, входящую въ Абелевъ интегралъ, переходитъ въ частное такихъ-же функцій, примѣнительно къ преобразованному уравненію. Яснѣе всего важное значеніе этихъ функцій φ для теоріи Абелевыхъ интеграловъ отмѣтилъ Веберъ въ своей Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlechte 3. Berlin. 1876. Впрочемъ, это видно уже и изъ работы Римана о томъ-же предметѣ, появившейся въ первый разъ уже послѣ его смерти въ собраніи его сочиненій, изданныхъ подъ редакціей того-же Вебера. Возвращаясь къ Нётеру, должны замѣтить, что онъ принадлежитъ къ той школѣ математиковъ, о которой я упоминалъ выше, которые не отдѣляютъ алгебры отъ геометріи; вслѣдствіе этого у него не только форма предложеній геометрическая, но часто и доказательства; это дѣлаетъ изученіе работъ его затруднительнымъ для тѣхъ, кто не слѣ-

* Другой способъ раціональнаго опредѣленія ранга предложенъ Raffy въ томъ-же томѣ Mathem. An.

дилъ за нѣмецкою литературою съ самаго того момента, когда этими вопросами начали заниматься въ Германіи: приходится изучать массу работъ, неимѣющихъ прямого отношенія къ занимающему вопросу, для того, чтобы понять то подъ-часъ немногое, что собственно интересуетъ. По этой причинѣ желательно было бы тѣхъ-же результатовъ добиться чисто алгебраическими средствами: это навѣрно возможно, потому что въ основѣ всѣхъ этихъ предложеній лежитъ опредѣленіе кривыхъ уравненіями; играетъ роль число коэффиціентовъ въ этомъ уравненіи. Касательно работы, помѣщенной въ 23 т. Annal. о раціональномъ опредѣленіи рода кривыхъ и сопряженныхъ кривыхъ, можно замѣтить, что желательно было бы при опредѣленіи рода кривыхъ и сопряженныхъ кривыхъ обходиться безъ раціональнаго преобразованія данной кривой въ другую, которое употребляетъ Нётеръ въ случаѣ, когда въ кратной точкѣ нѣкоторыя изъ вѣтвей кривой касаются одна другой; это вноситъ усложненіе въ рѣшеніе, заставляя опредѣленіе особенныхъ точекъ зависѣть отъ преобразованія, въ которомъ эти самыя точки принимаются за фундаментальныя. Это, какъ намъ кажется, тоже возможно.—Въ трехъ послѣднихъ своихъ замѣткахъ, помѣщенныхъ въ отчетахъ эрлангенскаго физико-медицинскаго общества за 1883 и 1884 годы, онъ переходитъ уже прямо къ самимъ Абелевымъ интеграламъ и показываетъ въ первой — какимъ образомъ, оставаясь, такъ-сказать, на почвѣ Клебша и Гордана, выполняется приведеніе дифференціальныхъ выраженій къ нормальной формѣ, въ послѣднихъ двухъ — какимъ образомъ, опять таки не покидая той-же почвы, можно получить то дифференціальное тождество, которое по интегрированіи даетъ и теорему о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ интегралѣ третьяго рода, интегралъ второго рода обращающійся въ какой-либо точкѣ въ ∞^1 приводитъ къ алгебраической функціи, обращающейся въ ∞^1 въ той-же точкѣ + линейная функція отъ интеграловъ второго рода, обращающихся въ ∞^1 въ опредѣленныхъ, разъ навсегда выбранныхъ, точкахъ; чрезъ посредство Абелевой теоремы наконецъ приводитъ къ функціямъ $Al\,(u_1\, u_2 \ldots u_\rho)$ Вейерштрасса, и упрощаетъ теорію самихъ Клебшевскихъ функцій, о которыхъ упоминалось выше. То обстоятельсто, что Нётеръ такъ просто и естественно, безъ всякаго tour de force, оставаясь вѣрнымъ аналитико-геометрическимъ пріемамъ Клебша и Гордана, приходитъ къ результатамъ Вейерштрасса, подготовляющимъ обращеніе Абелевыхъ интеграловъ, фактъ въ высшей степени знаменательный, подтверждающій мое мнѣніе, что Вейерштрассовскій путь отъ Абелевыхъ интеграловъ къ Θ-функціи и есть настоящій, что его теорія окончательно сдѣлается господствующею.

Говоря это, я имѣю въ-виду самую теорію, а не его способы доказательствъ. Мнѣ не разъ случалось замѣчать, что, говоря про теорію Абелевыхъ интеграловъ Вейерштрасса, въ своемъ представленіи не отдѣляютъ теоріи отъ методы, — отчего сущность теоріи представляется смутною, между тѣмъ какъ въ дѣйствительности въ существенныхъ пунктахъ своихъ его теорія, какъ мы видимъ теперь послѣ работъ Нётера, о которыхъ только-что была рѣчь, можетъ быть выведена и другими способами. Въ то время какъ Коши и особенно Риманъ опредѣляли функцію признаками разрыва и непрерывности, а не возможностью быть представленной тѣмъ или другимъ аналитическимъ выраженіемъ, выдвинувъ, напротивъ, зависимость послѣдняго отъ перваго, — Вейерштрассъ аналитическую функцію опредѣляетъ какъ такую, которая способна разлагаться въ рядъ по степенямъ независимой перемѣнной, сходящійся въ извѣстной области ея значенія, и это опредѣленіе, равно какъ вытекающій изъ него пріемъ характеризовать функцію въ смежности различныхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ формою ея разложенія въ рядъ, и на этомъ основанные способы доказательствъ различныхъ предложеній проходятъ чрезъ весь циклъ читаемыхъ проф. Вейерштрассомъ курсовъ, а именно: введеніе въ общую теорію аналитическихъ функцій, теорія эллиптическихъ функцій, теорія гиперэллиптическихъ интеграловъ, Абелевыхъ интеграловъ и варіаціонное исчисленіе. Такъ, въ курсахъ гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ интеграловъ онъ постоянно, вмѣсто перемѣнныхъ x и y, связанныхъ алгебраическимъ уравненіемъ, опредѣляющимъ ирраціональность интеграловъ, употребляетъ безконечные ряды, которыми выражается эта пара перемѣнныхъ чрезъ третью вспомогательную перемѣнную t, ряды различные, разумѣется, для различныхъ областей. Теорія Абелевыхъ интеграловъ представляетъ обобщеніе его теоріи гиперэллиптическихъ, составляющихъ лишь частный случай первыхъ, къ которому относятся первыя работы Вейерштрасса (помѣщенныя: первая, подъ заглавіемъ — «Beitrag zur Theorie der Abelschen Integrale» въ Braunsberger-Program 1843; другія двѣ — «Zur Theorie der Abelschen Functionen» въ 47 т. журнала Крелля, и «Theorie der Abelschen Functionen» въ 52 т.); поэтому достаточно, такъ-какъ и безъ того мой отчетъ вопреки желанію вышелъ длиннымъ, ограничиться указаніемъ существенныхъ пунктовъ одного изъ нихъ, и я останавливаю свой выборъ на теоріи Абелевыхъ интеграловъ, какъ болѣе общей и въ которой впервые встрѣчается понятіе ранга (Rang). Понятіе это Вейерштрассъ опредѣляетъ такою теоремою: всякому неприводимому алгебраическому уравненію $f(x, y) = 0$ принадлежитъ совершенно опредѣленное цѣлое число ϱ, положительное или равное нулю, такого свойства, что всегда возможно составить раціональную функцію $F(xy; x'y')$ четырехъ величинъ $x, y; x', y'$; которая, разсматриваемая какъ функція (xy), обращается въ ∞^1 въ $(x'y')$ и кромѣ того еще только въ ϱ другихъ, различныхъ между собою и неизмѣнныхъ мѣстахъ $a_1 b_1, a_2 b_2 \ldots a_\varrho b_\varrho$, тогда какъ такой функціи, которая обращалась бы въ ∞^1 только въ этихъ послѣднихъ мѣстахъ, не существуетъ. Отсюда, какъ слѣдствіе, вытекаетъ неизмѣнность этого числа для всѣхъ алгебраическихъ уравненій, составляющихъ классъ, т. е. получаемыхъ одно изъ другого чрезъ раціональное преобразованіе. Функція, упомянутая въ этой теоремѣ, опредѣленная дополнительными условіями обращаться въ нуль въ $(x_0\, y_0)$ и имѣть при $(x-x')^{-1}$ въ разложеніи по степенямъ $(x-x')$ коэффиціентомъ единицу, называется имъ «главною» по той роли, которую она играетъ въ его теоріи. Это интеграндъ 3. рода; изъ этой функціи при помощи разложенія въ ряды по степенямъ вспомогательной перемѣнной t онъ получаетъ интегранды 1. и 2. рода и опредѣляетъ ихъ свойства. Изъ этой же функціи, дифференцируя ее по x и вычитая результатъ получаемый отсюда чрезъ перемѣну ролей xy и $x'y'$, получаетъ дифференціальное тождество, черезъ интегрированіе котораго по x, или x', или по обоимъ, получается рядъ важныхъ результатовъ: отсюда онъ получаетъ прежде всего періодичность интеграловъ и соотношенія между періодами интеграловъ перваго и второго рода; выраженіе интеграла второго рода, обращающагося въ ∞^1 въ $x'y'$, чрезъ алгебраическія функціи и интегралы, обращающіеся въ ∞^1 въ неизмѣнныхъ точкахъ $a_1\, b_1 \ldots a_p\, b_p$; предложеніе о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ интегралахъ 3. рода, выраженіе интеграловъ всѣхъ трехъ родовъ чрезъ такъ-называемыя имъ Primfunctionen (по аналогіи съ первыми числами въ ариѳметикѣ), чрезъ которыя могутъ быть выражены также и всѣ раціональныя функціи отъ x и y, связанныхъ уравненіемъ, опредѣляющимъ ирраціональность, входящую въ разсматриваемые Абелевы интегралы,— откуда сейчасъ слѣдуетъ Абелева теорема. Эти Primfunctionen особенныя трансцендентныя двухъ родовъ: одни никогда не обращаются въ нуль; другія обращаются только въ одной точкѣ въ нуль перваго порядка и въ другой въ ∞^1; но кромѣ того какъ тѣ, такъ и другія имѣютъ «существенно особенныя точки» въ вышеупомянутыхъ мѣстахъ $a_1 b_1 \ldots a_p b_p$. Интегралы третьяго рода по сомкнутой для первыхъ и изъ одной точки въ другую для послѣднихъ, разсматриваемые какъ функціи параметра, суть логариѳмы этихъ Primfunctionen. Изъ нихъ же при помощи Абелевой теоремы Вейерштрассъ составляетъ функціи, частныя производныя которыхъ по перемѣннымъ независимымъ Якобіевой задачи выражаются чрезъ нѣкоторые интегралы второго рода. Отсюда выводится функціональное уравненіе обобщенной Θ-функціи, и такимъ образомъ съ этого пункта начинается уже теорія Θ-функцій. Въ силу связи примфункцій съ одной стороны съ интегралами, съ другой — съ Θ, получаются легко выраженія чрезъ послѣднія какъ интеграловъ 2. и 3. рода, такъ и раціональныхъ симметрическихъ функцій отъ паръ x_α, y_α — верхнихъ предѣловъ интеграловъ перваго рода Якобіевой задачи, т. е. такъ-называемыхъ Абелевыхъ функцій.

Было у меня сперва намѣреніе слушать также лекціи Майера по интегрированію уравненій съ частными производными, но занятія мои въ библіотекѣ семинара поглотили все время, такъ что я отъ этого намѣренія отказался; впослѣдствіи же узналъ, что самый курсъ не состоялся по недостатку слушателей.

На зимній семестръ объявленные въ Лейпцигѣ курсы мнѣ не были нужны. Чтенія по гиперэллиптическимъ и Абелевымъ интеграламъ на настоящій зимній семестръ объявлены слѣдующія:

Jena. Pr. *Frege.* Abelsche Integrale. 3 Vorl.

Königsberg. Pr. *Lindemann.* Theorie der Abelschen Functionen. 4 Vorles.

Rostock. Pr. *D. Krause.* Einleitung in die Theorie d. hyperelliptischen Functionen. 2 Vorl.

Strasburg. Pr. *Cristoffel.* Theorie d. Abelschen Functionen. 4 Vorlesungen.

Наконецъ, какъ я слышалъ отъ приватъ-доцента берлинскаго университета д-ра Рунге, только-что вернувшагося изъ Стокгольма, съ февраля мѣсяца начнетъ читать объ Абелевыхъ интегралахъ (по Вейерштрассу, конечно) приватъ-доцентъ тамошняго университета д-ръ С. Ковалевская, теперь съ успѣхомъ тамъ читающая дифференціальное и интегральное исчисленіе.

Программъ здѣсь не объявляютъ, а потому о томъ — каковъ будетъ курсъ, судить можно только по прежнимъ работамъ объявившихъ чтенія; такія данныя имѣются у меня только относительно пр. Линдемана, принадлежащаго къ Клебшевской школѣ; должно полагать, что его курсъ будетъ въ родѣ того, что представляетъ отдѣлъ объ Абелевыхъ интегралахъ въ изданной имъ обработкѣ лекцій Клебша.

Такъ-какъ меня въ настоящее время занимаетъ болѣе всего Вейерштрассовская теорія, то я предпочелъ по пріѣздѣ (31-го сент. н. стиля) въ Берлинъ остаться здѣсь, чтобы въ случаѣ надобности обратиться за разъясненіями и указаніями къ самому Вейерштрассу или его ученикамъ, которыхъ здѣсь много; кромѣ того здѣсь скорѣе можно получить и разныя диссертаціи учениковъ его, въ которыхъ разрабатывались разные частные вопросы изъ теоріи Абелевыхъ интеграловъ, которымъ не было мѣста въ его лекціяхъ. Что-же касается лекцій, то я намѣревался слушать лекціи Кронекера по высшей алгебрѣ, Вейерштрасса по введенію въ общую теорію аналитическихъ функцій и Фукса (перешелъ изъ Гейдельберга; избранъ также въ академію) объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій. Однако эти курсы пока очень элементарны; теорію же свою дифференціальныхъ уравненій пр. Фуксъ будетъ излагать въ лѣтній семестръ. Занятія въ семинарѣ еще не начались; заниматься будутъ пр. Вейерштрассъ, Кронекеръ и Фуксъ. Поэтому занятія мои здѣсь будутъ состоять главнымъ образомъ въ разработкѣ и уясненіи разныхъ частностей теоріи Абелевыхъ интеграловъ.

Берлинъ.

$\frac{6}{18}$ ноября 1884 г.