

Істиність, підмножини, обмежені квантори.

Курінний Григорій Чарльзович, Невмержицька Олена Миколаївна

Вересень 2014 року

Зміст

1	Істиність складних висловлень	2
1.1	Особливість вживання сполучника "і" (Істиність кон'юнкції)	2
1.2	Особливість вживання сполучника "або" (Істиність диз'юнкції)	3
1.3	Особливість вживання складного сполучника "якщо ..., то" (Істиність імплікації)	4
1.4	Закон контрапозиції	4
1.5	Закон подвійного заперечення	5
1.6	Рівносильні висловлення	5
1.7	Істиність предикатів	6
2	Підмножини	8
2.1	Три теореми, що стосуються порожньої множини	8
2.2	Круги Ойлера та діаграми Вена	9
3	Операції над підмножинами	11
3.1	Об'єднання підмножин	11
3.2	Перетин підмножин	13
3.3	Різниця та симетрична різниця підмножин . . .	15
3.4	Доповнення	18
3.5	Теоретико-множинні тотожності та їх доведення.	18

1 Істиність складних висловлень

Оцінка істиності сказаного досить складний процес. Людина має дуже багато мірил достовірності знань чи повідомлень - критеріїв істиності почутого. Частина мірил сильніша, частина слабша, частина використовується свідомо, частина неусвідомлено, підсвідомо. Поширена думка, що словами людина передає менше десятої частини повідомлення. Решта повідомлення (інформації) передається так званими метакомунікативними символами — обставинами, звучанням голосу, поставою тіла, рухами кінцівок та м'язів обличчя, та іншим. Математики нехтують всіма цими обставинами як несуттєвими. Відмітимо основні особливості оцінки математиком правильності сказаного в складному реченні.

1.1 Особливість вживання сполучника "і" (Істиність кон'юнкції)

Якщо два висловлення з'єднані сполучником "і" то нове складне речення є висловленням і воно істинне в єдиному випадку, коли обидва складові висловлення істинні.

Отже, коли ми знаємо, що сказане в двох реченнях "число n ділиться на 3" і "це ж число ділиться на 5" відповідає дійсності (істинне), то гарантовано істинними будуть речення "Число n ділиться на 3, і число n ділиться на 5", "Число n ділиться на 5, і число n ділиться на 3". Також буде істинним речення "Число n ділиться на 3, і число n ділиться на 3". Щоб підкреслити, що така оцінка сказаного в складному реченні не є загальною нормою, а є особливістю математичного вжитку, наведемо приклади.

Нехай точно відомо, що Мері народила дитину, і відомо також, що Мері вийшла заміж. Речення “Мері вийшла заміж і народила дитину”, та речення “Мері народила дитину і вийшла заміж” передають досить різну інформацію. Друге може її ганьбити, тому що в ньому є натяк на те, що Мері спочатку народила дитину, а вже потім вийшла заміж. Речення “Мене вилаяли і я пішов додому”, та “Я пішов додому і мене вилаяли” можуть бути неправильними, незважаючи на правильність простих речень, з яких воно утворене, тому що в складному реченні неявно вказується на причинний зв’язок — вилаяли за те, що пішов додому, або пішов додому через те, що вилаяли.

Якщо в живому спілкуванні одне й те ж речення повторити тричі, з’єднуючи прості речення сполучником “і”, то така промова може взагалі розцінюватися як жарт і не підлягати перевірці на відповідність дійсності. Тому в позаматематичному спілкуванні істинність сказаного в реченні “Число n ділиться на 3, і число n ділиться на 3” з’ясовується після того, як перевірили, чи не припустилися помилки в записі.

1.2 Особливість вживання сполучника "або" (Істинність диз’юнкції)

Якщо два висловлення з’єднані сполучником "або" то нове складне речення є висловленням і воно хибне в єдиному випадку, — коли обидва складові висловлення хибні.

Отже, коли ми знаємо, що “Число n ділиться на 3” і “Це ж число ділиться на 5”, то обидва речення “Число n ділиться на 3, або число n ділиться на 5”, “Число n ділиться на 5, або воно ділиться на 7” є істинними. Також буде істинним речення “Число n ділиться на 3, або число n ділиться на 3”. В позаматематичному спілкуванні не з’єднують сполучником “або” змістовно не пов’язані речі. Так речення “Весна несе тепло, або

кури несуть яйця, або хтось несе нісенітницю“ є або жартом, або дурницею.

1.3 Особливість вживання складного сполучника “якщо ..., то ...” (Істинність імплікації)

Якщо два висловлення з’єднані сполучником “якщо ..., то ...”, то нове складне речення є висловленням і воно хибне в єдиному випадку, — коли припущення істинне, а висновок хибний.

Отже, коли ми знаємо, що “число n ділиться на 3” і “це ж число ділиться на 5”, то істинними будуть обидва речення — “Якщо число n ділиться на 3, то число n ділиться на 5”, “Якщо число n ділиться на 5, то число n ділиться на 3”. Також буде істинним буде речення “Якщо число n ділиться на 7, то число n ділиться на 3”.

Звернемо особливу увагу на те, що із хибного припущення дозволяється робити будь-який висновок. А із істинного припущення правильне міркування може одержати лише істинний висновок.

1.4 Закон контрапозиції

Оцінка істинності імплікації дозволяє стверджувати, що коли A і B два висловлення, то складні висловлення “Якщо A , то B ” і “Якщо неправда, що B , то неправда, що A ” при різних оцінках правильності сказаного в A та B , однаково правильні чи хибні. Сказане є сутністю прийнятого математиками закону контрапозиції. Символьно закон контрапозиції записують наступним чином: для будь-яких висловлень A і B

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

За законом контрапозиції сказане в двох висловленнях

- 1) “Якщо катран риба, то катран живе у воді”
- 2) “Якщо неправда, що катран живе у воді, то неправдою також є те, що катран — риба”

в один і той же час або відповідає дійсності, або не відповідає дійсності

Закон контрапозиції на повну потужність використовується в доведеннях методом “від протилежного”. доведенню методом від протилежного присвяtimo окрему розмову.

1.5 Закон подвійного заперечення

Вжиток заперечувального звороту “неправда, що” підкоряється закону подвійного заперечення, який полягає в тому, що висловлення p і “неправда, що сказане в p не відповідає дійсності” означають одне і те ж. Згідно цього закону у висловленнях “Йде дощ” та “Неправда, що дощу немає” означає одне і те ж.

Символьно закон подвійного заперечення можна записати наступним чином

$$p \Leftrightarrow \neg\neg p.$$

1.6 Рівносильні висловлення

Два висловлення, які в один і той же час обидва істинні або обидва хибні, називають рівносильними.

Сформульовані домовленості про вживання сполучників дозволяють переформульовувати висловлення, записувати їх в більш зручному вигляді — переходити до рівносильних висловлень. Якщо висловлення записані символьно, то рівносильні записи з’єднують знаком $=$.

Випишемо (символьно) основні рівносильності (через a , b позначені висловлення)

$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b, \quad (1)$$

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b, \quad (2)$$

$$\neg\neg a = a, \quad (3)$$

$$a \Rightarrow b = \neg a \vee b = \neg b \Rightarrow \neg a. \quad (4)$$

1.7 Істиність предикатів

Унарний предикат стає висловленням лише в двох випадках

- коли замість змінної ставлять елемент універсальної множини (в такому мовному оточенні універсальну множину називають також предметною областю);
- коли застосовується операція навішування квантора.

Звернемо увагу на те, як обґрунтовується висловлення, яке одержане із одномісного предиката навішуванням квантора. Якщо $A(x)$ - - одномісний предикат, то висловлення “для всіх x із універсальної множини $A(x)$ ” (позначимо його B) розуміється буквально. Отже, коли для деякого елемента a універсальної множини висловлення $A(a)$ хибне, то і все висловлення B хибне. В звичайному позаматематичному житті правила не такі строгі — ми можемо в один і той же час вважати, що всі люди добрі, а такий-то і такий-то злий.

Є ще одна особливість вжитку квантора загальності— висловлення “всі елементи мають властивість $A(x)$ ” і “кожен елемент має властивість $A(x)$ ” означають одне і те ж. А у позаматематичному спілкуванні можна сказати “Кожен студент групи може залізти в мій автомобіль, а всі залізти не можуть.”

Пряме доведення висловлення $\forall x A(x)$ здійснюється трьома способами

- повною індукцією - перебір всіх можливостей;

- повною математичною індукцією;
- трансфінітною індукцією.

Для прикладу, нехай потрібно довести, що всі корені рівняння

$$x^2 - 17x + 30 = 0$$

додатні. Пряме доведення полягає в тому, що ми знаходимо ці корені, тобто 2 і 15, і переконуємося, що кожен з них додатний. Доведення того ж самого, але за допомогою теореми Вієта — це вже не пряме доведення.

Повна математична ідукція і трансфінітна індукція будуть розглянуті в наступних лекціях.

Пряме обґрунтування (доведення істиності) висловлення $\exists x A(x)$ полягає в знаходженні такого елемента a в універсальній множині, для якого висловлення $A(a)$ істинне. Для прикладу, для того, щоб довести, що існує день тижня, назва якого починається із букви п, досить вказати на понеділок.

Висловлення $\exists x A(x)$ хибне тоді і тільки тоді, коли висловлення $\forall x \neg A(x)$ істинне. Так, щоб довести хибність висловлення “Існує день тижня, назва якого починається із букви ю” досить довести, що назва кожного дня тижня не починається з букви ю — а це робиться перебором усіх можливостей (понеділок — п, вівторок — в, середа — с, четвер — ч, п’ятниця — п, субота — с, неділя — н).

Сказане вище дозволяє символічно записати можливі (допустимі) переформулювання висловлень, що одержані із одномісних предикатів навішуванням кванторів:

$$\neg \forall x A(x) = \exists x \neg A(x), \quad \neg \exists x A(x) = \forall x \neg A(x). \quad (5)$$

В наведеному символічному записі $A(x)$ означає одномісний предикат. Правила (5) називають законами перевертання квантрів.

2 Підмножини

2.1 Три теореми, що стосуються порожньої множини

Теорема 2.1 *Якщо універсальна множина порожня, то для будь-якого одномісного предиката $A(x)$ висловлення $\forall x A(x)$ істинне.*

Інше формулювання цієї теореми — всі елементи порожньої множини мають всі властивості.

Доведення. Доведення будемо проводити методом від протилежного, тобто з використанням закону контрапозиції. Згідно цього закону, теорема буде доведена, коли ми доведемо, що коли висловлювання $\forall x A(x)$ хибне, тоді універсальна множина не порожня. Дійсно, коли висловлювання $\forall x A(x)$ хибне, тоді істинне висловлення $\exists x \neg A(x)$. Істинність останнього висловлення можливе лише коли універсальна множина не порожня. Нагадаємо, що за визначенням порожньої множини, висловлення $\exists x B(x)$ є хибним для будь-якого предиката $B(x)$. Доведення теореми завершено. ■

Згідно цієї теореми всі парні числа, які є непарними, діляться на 16. А згідно здорового глузду всі парні числа, які є непарними — просто дурниця.

Теорема 2.2 *Порожня множина єдина, тобто будь-які дві порожні множини збігаються.*

Доведення. Нехай M, N дві порожні множини. Потрібно довести, що $M = N$. Доводимо методом від протилежного, тобто з використанням закону контрапозиції. Таким чином, припускаємо, що $M \neq N$ і доводимо, що одна з множин M, N не порожня. Нерівність $M \neq N$ означає, що існує елемент, що лежить в одній множині, але не лежить в іншій. От ця

множина, в якій є елемент, і буде не порожньою. Доведення теореми завершене. ■

Згідно цієї теореми всі натуральні числа, які менше 3 утворюють ту ж множину, що і яблука вагою 100 кг. А множина розв'язків рівняння $x^2 + x + 7 = 0$ збігається із множиною розв'язків рівняння $x^4 + x^2 + 7 = 0$.

Теорема 2.3 *Порожня множина є підмножиною будь-якої множини.*

Доведення. Ми знаємо, що всі елементи порожньої множини мають всі властивості. Отже для будь-якої множини A всі елементи x порожньої множини мають властивість $x \in A$. А це і означає, що порожня множина є підмножиною множини A . ■

Згідно цієї теореми множина розв'язків рівняння $2x^2 + 9 = 0$ є підмножиною множини розв'язків рівняння $x^2 - 9 = 0$.

2.2 Круги Ойлера та діаграми Вена

Щоб зробити міркування, що стосуються множин, більш наочними, множини зображаються у вигляді областей, що обмежені замкненими лініями. Таке зображення називають діаграмою Ойлера - Вена. Найбільш звичайним є зображення множин у вигляді кругів. Тоді кажуть про круги Ойлера. Але зображають множини також сплоснутими кругами (овалами), трикутниками і просто областями, що обмежені хвилястою лінією, тоді кажуть про діаграми Вена.

Випадкові зображення множин трикутниками зустрічаються у філософів уже в XIII столітті.

Послідовно для ілюстративної мети використав зображення множин у вигляді кругів Ойлер (XVIII століття), послідовно для доведень використав зображення множин у вигляді



Рис. 1: Множини A, B задані кругами Ойлера. Через U позначена універсальна множина

областей Джон Вен у ХІХ столітті. Зауважимо, що Леонард Ойлер — німець, який багато працював в Росії в Петербурзі. Німецькою мовою його прізвище пишеться Euler і, відповідно, читається як Ойлер. Російськомовна література використовує написання Эйлер, яке, відповідно, читається як Ейлер. Україномовна література використовує два написання прізвища — Ейлер і Ойлер. Тут зупинимося на варіанті Ойлер.

На рис.1 зображені множини A, B у вигляді кругів, а на рис. 2 множина A зображена у вигляді області, що обмежена замкненою лінією. Спільні елементи множин, які зображаються, позначаються точками, що одночасно лежать у відповідних областях.

Рис. 2: Множина A задана діаграмою Вена. Через U позначена універсальна множина

Коли в міркуваннях зустрічається універсальна множина, то її зображають у вигляді прямокутника, всередині якого розташовують круги чи інші геометричні фігури, що зображають решту множин. Якщо одна множина є підмножиною другої, то область, що зображає першу множину, повинна розташовуватися всередині області, що зображає другу. На відміну від геометричних креслень, які не приймаються в якості доведення, міркування з використанням кругів Ейлера чи діаграм Вена вважаються переконливими.

3 Операції над підмножинами

Найбільш важливі дії над множинами — це їх перетин (позначається знаком $\cap$), об'єднання (позначається через $\cup$), різниця (позначається знаком $\setminus$) та симетрична різниця $\dot{-}$. Для симетричної різниці вживається також позначення Δ .

3.1 Об'єднання підмножин

Об'єднанням $A \cup B$ множини A та множини B називається множина

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Тобто в об'єднанні двох множин лежать ті і тільки ті елементи універсальної множини, які належать або першій множині або другій.

Рис. 3: Заштриховано об'єднання $A \cup B$ множин A та B

Знак $\cup$ - це стилізована латинська буква U, що є першою буквою латинського слова “unio”, що означає “з’єднувати”. Так, якщо $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, то $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

Щоб одержати розв’язки рівняння

$$f(x) \cdot g(x) = 0,$$

розв’язують два рівняння

$$f(x) = 0, \quad g(x) = 0,$$

одержують дві множини розв’язків, беруть об’єднання одержаних множин і це буде відповіддю. Так для розв’язування рівняння $\sin x \cdot \cos x = 0$ виписуємо два рівняння і виписуємо множини їх розв’язків:

$$\sin x = 0, \quad A = \{x | x = \pi k, k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\cos x = 0, \quad B = \{x | x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Кінцева відповідь одержується як об’єднання одержаних множин розв’язків

$$A \cup B = \{x | x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

3.2 Перетин підмножин

Перетином $A \cap B$ множини A та множини B називається множина

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Знак $\cap$ — це перевернутий знак $\cup$. Якщо

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4\},$$

то

$$A \cap B = \{2, 3\}.$$

Якщо A - це множина книжок, що лежать на столі, а B - множина підручників, то $A \cap B$ це множина підручників, що лежать на столі.

Розв'язком системи рівнянь є перетин множин розв'язків окремих рівнянь. Для прикладу візьмемо систему

$$\begin{cases} 2x - y = 7, \\ 5x + y = 21 \end{cases}$$

Множина розв'язків першого рівняння складається із усіх точок прямої, що має рівняння $y = 2x - 7$. Множина розв'язків другого рівняння складається із усіх точок прямої, що має рівняння $y = -5x + 21$. Перетином цих двох прямих є точка з координатами $(4,1)$. Отже розв'язком системи буде $x = 4, y = 1$.

Також множина розв'язків системи нерівностей є перетином множин розв'язків окремих нерівностей, що входять у систему.

Областю визначення суми двох функцій є перетин областей визначення доданків. Оскільки функція $\ln x$ визначена при додатних значеннях x , а функція $\arcsin x$ визначена при $-1 \leq x \leq 1$, то областю визначення функції

$$f(x) = \ln x + \arcsin x$$

буде множина $0 < x \leq 1$.

Якщо $A \subseteq B$, то спільними для A і B будуть елементи із A і тільки вони. Тому $A \cap B = A$. Оскільки елементів із A , що не лежать в B немає, то $A \cup B = B$. За допомогою логічної символіки сказане можна записати так:

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A,$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B.$$

Зворотні імплікації

$$A \subseteq B \Leftarrow A \cap B = A,$$

Рис. 4: Заштриховано перетин $A \cup B$ множин A та B

Рис. 5: Заштрихована різниця $A \setminus B$ множин A і B .

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

також правильні.

Із визначення операцій перетину та об'єднання видно, що

$$\emptyset \cap A = \emptyset, \quad \emptyset \cup A = A.$$

для будь-якої множини A , і

$$U \cap A = A, \quad U \cup A = U$$

для будь-якої множини A і універсальної множини U .

Оскільки кожен елемент, що лежить в $A \cap B$, одночасно лежить і в A і в B , то

$$A \cap B \subseteq A, \quad A \cap B \subseteq B.$$

Також правильними є включення

$$A \cup B \supseteq A, \quad A \cup B \supseteq B.$$

3.3 Різниця та симетрична різниця підмножин

Наступні дії це різниця, симетрична різниця двох множин та доповнення.

Різницею $A \setminus B$ множини A і множини B (читається як A без B) називається множина

$$A \setminus B = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Наприклад, коли $A = \{1, 2, 3\}$, а $B = \{2, 3, 4\}$, то

$$A \setminus B = \{1\}$$

Рис. 6: Заштрихована симетрична різниця $A \dot{-} B$ множин A і B .

і

$$B \setminus A = \{4\}.$$

Коли $A \subseteq B$, тоді елементів, для яких $x \in A$ і $x \notin B$, не існує, тому $A \setminus B = \emptyset$. Логічною символікою сказане можна записати так:

$$A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset.$$

Зворотна імплікація

$$A \subseteq B \Leftarrow A \setminus B = \emptyset$$

також правильна, тому що вона означає наступне: “коли елементів, які лежать в A і не лежать в B немає, тоді всі елементи із A лежать в B ”.

Множини $A \setminus B$ і $B \setminus A$ співпадають лише в одному випадку - коли співпадають самі множини A і B , - в цьому випадку

$$A \setminus B = B \setminus A = \emptyset.$$

Симетричною різницею $A \dot{-} B$ множин A та B називається множина

$$A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Ця множина складається з тих елементів першої множини, що не лежать в другій, і тих елементів другої множини, що не лежать в першій. Таким чином, викинувши із об'єднання $A \cup B$ множин A і B спільні для A і B елементи ми одержимо симетричну різницю, тобто можна написати

$$A \dot{-} B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Наведемо приклад. Для

$$A = \{n \in \mathbb{N} | n < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$B = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ просте число, } 1 < n < 20\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
буде

$$A \setminus B = \{1, 4, 6, 8, 9\}$$

і

$$B \setminus A = \{11, 13, 17, 19\}.$$

Тому

$$A \dot{-} B = \{1, 4, 6, 8, 9\} \cup \{11, 13, 17, 19\} = \{1, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 17, 19\}.$$

У визначенні симетричної різниці множини A та B рівноправні, не має значення, яка з них розглядається першою, а яка другою. Тому

$$A \dot{-} B = B \dot{-} A$$

для будь-яких множин A і B .

Якщо $A \dot{-} B = \emptyset$, то порожньою є і множина $A \setminus B$ і множина $B \setminus A$. Це можливо лише за умови, що кожен елемент множини A є елементом множини B і кожен елемент множини B є елементом множини A , тобто коли $A = B$. Символьно сказане записується так:

$$A \dot{-} B = \emptyset \Leftrightarrow A = B.$$

3.4 Доповнення

Різниця $U \setminus A$ між універсальною множиною U і заданою множиною A називається доповненням A і позначається через $\bar{A}$.

Інколи доповнення множини A позначається $\bar{A}$ або $C(A)$.

Коли є сумнів щодо універсальної множини (нагадаємо, що універсальна множина частіше всього вгадується із оточуючих

Рис. 7: Заштрихована доповнення множини A .

міркувань, із контексту), тоді потрібно вказати, з яких елементів складається множина U , і говорити про доповнення A до U .

Наведемо приклади.

Якщо універсальна множина – це множина книжок, а A – це множина підручників, то $-A$ – це множина книжок, що не є підручниками.

Якщо U – це множина цілих чисел від 1 до 10, і $A = \{2, 3, 5, 6\}$, то $-A = \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$.

Область визначення функції часто задають як доповнення тієї множини чисел, на яких функція не визначена. Для прикладу, для знаходження області визначення функції $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^{-1}$ ми знаходимо розв'язки рівняння $x^2 - x + 2 = 0$, (ними є $x = 1, x = 2$), і потім область A визначення функції $f(x)$ задаємо як доповнення множини $B = \{1, 2\}$:

$$A = -B = \{x | x \neq 1 \text{ і } x \neq 2\}.$$

3.5 Теоретико-множинні тотожності та їх доведення.

Випишемо основні тотожності, які виконуються для теоретико-множинних операцій.

$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$ – закони ідемпотентності для об'єднання та перетину.

$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$ – закони комутативності для об'єднання та перетину.

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – закони асоціативності для об'єднання та перетину.

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$ – два дистрибутивні закони для об'єднання та перетину.

$A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$ — закони поглинання.
 $A \cup U = U$, $A \cap U = A$ — властивість універсальної множини.

$A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$ властивість порожньої множини.

Доведення цих тотожностей проводиться або з допомогою кругів Ейлера, або з вказівкою на особливості вжитку математиками сполучників, особливості оцінки математиками правильності сказаного в складних реченнях. Так, закон ідемпотентності для об'єднання $A \cup A = A$ обґрунтовується специфікою розуміння математиками сполучника “і”: сказане в складному реченні “Елемент x належить множині A і елемент x належить множині A ” правильне тоді і тільки тоді, коли правильне просте речення “Елемент x належить множині A ”.

Закони дистрибутивності простіше доводити за допомогою кругів Ейлера.

Вкажемо декілька тотожностей, що стосуються різниці, симетричної різниці та доповнення.

1. $A \setminus \emptyset = A$, $U \setminus A = -A$, $A \setminus A = \emptyset$.
2. $-(A \cap B) = (-A) \cup (-B)$, $-(\cup B) = (-A) \cap (-B)$ — ці дві тотожності часто використовуються і мають спеціальну назву - закони де Моргана.
3. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
4. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$, $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
5. $A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$, $A \cap (B \dot{-} C) = (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$.
6. $A \dot{-} (A \dot{-} B) = A \cap B$.

В геометрії часто універсальною множиною є множина точок, прямих і площин в тривимірному просторі. Таким чином деякі елементи універсальної множини можуть відрізнятися

один від одного вельми суттєво. В такому випадку вижавають термін “багатосортна множина”. Отже,

багатосортна множина є об’єднанням певних підмножин, що не мають спільних елементів.

4 Обмежені квантори

В міркуваннях, що стосуються багатосортних множин, загальні квантори практично не використовуються — використовуються так звані обмежені квантори.

Такі словосполучення як “існує елемент в множині” та “для всіх елементів множини” називають обмеженими кванторами.

Таким чином

- $\forall x \in A$ - це обмежений квантор, який розуміється як “для всіх елементів множини A ”.
- $\exists x \in A$ — це обмежений квантор, який розуміється як “існує елемент x в множині A ”.

Якщо $P(x)$ предикат і A - множина, то із збереженням змісту можна замінити

$$\forall x \in A P(x) \text{ на } \forall x(x \in A \Rightarrow P(x));$$

$$\exists x \in A P(x) \text{ на } \exists x((x \in A) \wedge P(x)).$$

Отже, наступні два записи

$$\forall x \in \mathbb{Q}(x \in \mathbb{R}), \quad \forall x(x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{R})$$

означають одне і те ж.

Показчик

- діаграма
 - Вена, 9
- доповнення, 20
- доведення
 - методом від протилежного, 8
- індукція
 - повна, 6
 - повна математична, 7
 - трансфінітна, 7
- істиність
 - диз'юнкції, 3
 - імплікації, 4
 - кон'юнкції, 2
- круги
 - Ойлера, 9
- квантор
 - загальності, 6
- квантори
 - обмежені, 23
- множин
 - об'єднання, 11
 - перетин, 13
 - різниця, 17
 - симетрична різниця, 18
- множина
 - багатосортна, 23
 - порожня, 8
- область
 - предметна, 6
- операція
 - навішування квантора, 6
- підмножина, 8
- порожня, 8
- предикат
 - одномісний, 6
 - унарний, 6
- рівносильності
 - основні, 6
- тотожності
 - теоретико-множинні, 21
- висловлення, 2
 - рівносильні, 5
- закон
 - контрапозиції, 5
 - перевертання кванторів, 8
 - подвійного заперечення, 5
- закони
 - асоціативності, 22
 - де Моргана, 22
 - дистрибутивності, 22
 - ідемпотентності, 21
 - комутативності, 21
 - поглинання, 22