УДК 517.9

Д. Ш. ЛУНДИНА

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА ДЕ-ФРИЗА

Известные методы нахождения решений нелинейных эволюционных уравнений не всегда позволяют установить, к какому классу принадлежат получающиеся решения.

Нами рассмотрен один частный случай реализации метода, принадлежащего В. А. Марченко [1]. Показано, что получающиеся в этом случае решения ограничены, но отличны от быстроубывающих и конечнозонных.

Введем следующие обозначения: Ω— компакт вещественной оси; Ω^*— зеркальное отражение компакта Ω относительно начала координат; $d\rho(\lambda)$ — борелевская мера на R^1, сосредоточенная на компакте Ω, $L_2(\rho)$ — гильбертово пространство функций $f(\lambda)$ со скалярным произведением $(f, g)_\rho = \int f(\lambda)\overline{g(\lambda)}d\rho(\lambda)$.

Везде в дальнейшем предполагается, что компакты Ω, Ω^* не пересекаются, откуда следует, что $\operatorname{dist}(\Omega, \Omega^*) = d > 0$ и при всех λ, $\mu \in \Omega$ выполняется неравенство $|\lambda + \mu| \geqslant d > 0$ **(1)**. Рассмотрим действующий в пространстве $L^2(\rho)$ интегральный оператор

$$Af = \int \frac{e^{(\lambda+\mu)x}\varphi(\mu)}{\lambda+\mu} f(\mu)\, d\rho(\mu), \tag{2}$$

где $\varphi(\mu) = \frac{\mu}{|\mu|}$. Из неравенства (1) следует, что ядро этого оператора

$$A(\lambda, \mu) = \frac{e^{(\lambda+\mu)x}\varphi(\mu)}{\lambda+\mu}$$

ограничено и непрерывно на множестве $\Omega \times \Omega$. Поэтому оператор A ограничен, его вещественная и мнимая части

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*),\ A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*),\ A = A_1 + iA_2 \tag{3}$$

являются ограниченными самосопряженными операторами со следующими ядрами:

$$A_1(\lambda, \mu) = \frac{\varphi(\lambda) + \varphi(\mu)}{2(\lambda+\mu)} e^{(\lambda+\mu)x},\ A_2(\lambda, \mu) = \frac{\varphi(\mu) - \varphi(\lambda)}{2i(\lambda+\mu)} e^{(\lambda+\mu)x}.$$

Лемма 1. *Оператор A_1 положительный.*

Так как

$$\frac{1}{2}[\varphi(\mu) + \varphi(\lambda)] = \begin{cases} 1 & \lambda > 0,\ \mu > 0; \\ 0 & \lambda\mu < 0; \\ -1 & \lambda < 0,\ \mu < 0, \end{cases}$$

то согласно (3)

$$(A_1 f, f)_\rho = \iint A_1(\lambda, \mu) f(\mu)\overline{f(\lambda)}\, d\rho(\mu)\, d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{(\lambda+\mu)x}}{\lambda+\mu} f(\mu)\overline{f(\lambda)}\, d\rho(\mu)\, d\rho(\lambda) - \int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^0 \frac{e^{(\lambda+\mu)x}}{\lambda+\mu} f(\mu)\overline{f(\lambda)}\, d\rho(\mu)\, d\rho(\lambda).$$

Далее, из равенств

$$\frac{1}{\lambda+\mu} = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)t}dt & \lambda > 0,\ \mu > 0; \\ -\int_0^\infty e^{(\lambda+\mu)t}dt & \lambda < 0,\ \mu < 0 \end{cases}$$

следует, что

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{(\lambda+\mu)x}}{\lambda+\mu} f(\mu)\overline{f(\lambda)}\,d\rho(\mu)\,d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_0^\infty dt\left(\int_0^\infty\int_0^\infty e^{(\lambda+\mu)(x-t)} f(\mu)\overline{f(\lambda)}\,d\rho(\mu)\,d\rho(\lambda)\right),$$

$$-\int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^0 \frac{e^{(\lambda+\mu)x}}{\lambda+\mu} f(\mu)\overline{f(\lambda)}\,d\rho(\mu)\,d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_0^\infty dt\left(\int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^0 e^{(\lambda+\mu)(x+t)} f(\mu)\overline{f(\lambda)}\,d\rho(\mu)\,d\rho(\lambda)\right).$$

Поэтому

$$(A_1 f,\ f)_\rho = \int_0^\infty g^+(x-t)\overline{g^+(x-t)}\,dt + \int_0^\infty g^-(x+t)\overline{g^-(x+t)}\,dt \geqslant 0,$$

где $g^+(y) = \int_0^\infty e^{\lambda y} f(\lambda)\,d\rho(\lambda)$, $g^-(y) = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda y} f(\lambda)\,d\rho(\lambda)$.

Лемма 2. *Оператор $I + A$ обратим, причем* $\|(I+A)^{-1}\| \leqslant 1$. Так как $I + A = I + A_1 + iA_2$ и по лемме 1 оператор $I + A_1$ положителен, и следовательно, $I + A_1 = C^2$, где $C \geqslant I$ — положительный обратимый оператор, $\|C^{-1}\| \leqslant 1$, то $I + A = C^2 + iA_2 = C(I + iC^{-1} \times \times A_2 C^{-1})C$, где $C^{-1}A_2C^{-1}$ — ограниченный самосопряженный оператор. Оператор $I + iC^{-1}A_2C^{-1}$ тем самым обратим и $\|(I + iC^{-1}A_2C^{-1})^{-1}\| \leqslant 1$. Отсюда следует обратимость оператора $I + A: (I+A)^{-1} = C^{-1}(I + + iC^{-1}A_2C^{-1})^{-1}C^{-1}$ и неравенство $\|(I+A)^{-1} \leqslant \|C^{-1}\|\cdot\|(I + iC^{-1}A_2C^{-1})^{-1}\| \times \times \|C^{-1}\| \leqslant 1$.

Лемма 3. *Интегральное уравнение*

$$y(\lambda,\ x) + \int \frac{e^{(\lambda+\mu)x}\varphi(\mu)}{\lambda+\mu} y(\mu,\ x)\,d\rho(\mu) = e^{\lambda x} \tag{4}$$

однозначно разрешимо в пространстве $L_2(\rho)$ при всех $x \in (-\infty,\ \infty)$, его решение $y(\lambda,\ x)$ бесконечно дифференцируемо по x и

$$\|y(\lambda,\ x)\|_\rho \leqslant \|e^{\lambda x}\|_\rho, \tag{5}$$

$$\|y_x(\lambda,\ x)\|_\rho \leqslant \|e^{\lambda x}\|_\rho\left(|\Omega| + \|e^{\lambda x}\|_\rho^2\right), \tag{6}$$

где

$$\|e^{\lambda x}\|_\rho = \left[\int e^{2\lambda x} d\rho(\lambda)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant e^{|\Omega| x}\rho(\Omega)^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Действительно, уравнение (4) можно записать в виде $(I + A)y(\lambda, x) = e^{\lambda x}$, откуда по лемме 3 следует его однозначная разрешимость и неравенство $\|y(\lambda,\ x)\|_\rho \leqslant \|(I + A)^{-1}\| \cdot \|e^{\lambda x}\|_\rho \leqslant \|e^{\lambda x}\|_\rho$. Дифференцируя это уравнение по x, находим, что

$$y_x(\lambda,\ x) + e^{\lambda x}\int e^{\mu x}\varphi(\mu)\,y(\mu,\ x)\,d\rho(\mu) +$$

$$+ \int \frac{e^{(\lambda+\mu)x}\varphi(\mu)}{\lambda+\mu} y_x(\mu,\ x)\,d\rho(\mu) = \lambda e^{\lambda x},$$

т. е. $(I + A)\, y_x(\mu, x) = e^{\lambda x}(\lambda + Q(x))$, где $Q(x) = -\int e^{\mu x}\varphi(\mu)\, y(\mu, x)\, d\rho(\mu)$. Следовательно, $\|y_x(\lambda, x)\|_\rho \leqslant \|e^{\lambda x}\|_\rho(|\Omega| + |Q(x)|)$, и так как согласно (5) и неравенству Коши — Буняковского справедливо неравенство

$$|Q(x)| \leqslant \int e^{\mu x}|y(\mu, x)|\, d\rho(\mu) \leqslant \|e^{\mu x}\|_\rho \cdot \|y(\mu, x)\|_\rho \leqslant \|e^{\mu x}\|^2_\rho,$$

то $\|y_x(\mu, x)\|_\rho \leqslant \|e^{\mu x}\|_\rho(|\Omega| + \|e^{\mu x}\|^2_\rho)$.

Рассмотрим функцию

$$\psi(z, x) = e^{zx}\left[1 - \int \frac{e^{\mu x}\varphi(\mu)}{z+\mu}\, y(\mu, x)\, d\rho(\mu)\right], \tag{8}$$

определенную этим равенством при всех комплексных $z \notin \Omega^*$. Функция $\psi(z, x)$ голоморфна в области $C \setminus \Omega^*$ и совпадает с решением уравнения (4) на множестве Ω.

Лемма 4. *При всех $z \in C \setminus \Omega^*$ и $x \in (-\infty, \infty)$ функция удовлетворяет уравнению Штурма — Лиувилля $-\psi_{xx}(z, x) + q(x)\psi(z, x) + z^2\psi(z, x) = 0$ с потенциалом*

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}Q(x) = -2\frac{d}{dx}\int e^{\mu x}\varphi(\mu)\, y(\mu, x)\, d\rho(\mu).$$

Для доказательства продифференцируем (8) два раза по x:

$$\psi_{xx}(z, x) = z^2\psi(z, x) - e^{zx}\int \frac{\varphi(\mu)\, e^{\mu x}}{z+\mu}\{2z(\mu y(\mu, x) + y_x(\mu, x)) + \mu^2 y(\mu, x) + 2\mu y_x(\mu, x) + y_{xx}(\mu, x)\}\, d\rho(\mu).$$

Замечая, что $2z(\mu y(\mu, x) + y_x(\mu, x)) + \mu^2 y(\mu, x) + 2\mu y_x(\mu, x) + y_{xx}(\mu, x) \equiv y_{xx}(\mu, x) - \mu^2 y(\mu, x) + 2(z+\mu)(\mu y(\mu, x) + y_x(\mu, x))$, перепишем последнее равенство в виде

$$\psi_{xx}(z, x) - z^2\psi(z, x) + \int \frac{e^{(z+\mu)x}\varphi(\mu)}{z+\mu}[y_{xx}(\mu, x) - \mu^2 y(\mu, x)]\, d\rho(\mu) =$$
$$= -2e^{zx}\int e^{\mu x}\varphi(\mu)[\mu y(\mu, x) + y_x(\mu, x)]\, d\rho(\mu) =$$
$$= e^{zx}\left(-2\frac{d}{dx}\int e^{\mu x}\varphi(\mu)\, y(\mu, x)\, d\rho(\mu)\right) = e^{zx}q(x). \tag{9}$$

Так как на множестве Ω функции $\psi(z, x)$ и $y(z, x)$ совпадают, то из равенства (9) при $z = \lambda \in \Omega$ вытекает такое уравнение для функции $y_{xx}(\lambda, x) - \lambda^2 y(\lambda, x)$: $(I + A)(y_{xx}(\lambda, x) - \lambda^2 y(\lambda, x)) = e^{\lambda x}q(x)$, так что $y_{xx}(\lambda, x) - \lambda^2 y(\lambda, x) = q(x)(I + A)^{-1}e^{\lambda x} = q(x)\, y(\lambda, x)$. Отсюда согласно (9)

$$\psi_{xx}(z, x) - z^2\psi(z, x) + e^{zx}\left[\int \frac{e^{\mu x}\varphi(\mu)}{z+\mu}\, y(\mu, x)\, d\rho(\mu) - 1\right] q(x) = 0$$

и в силу определения (8) функции $\psi(z, x)$ имеем $\psi_{xx}(z, x) - z^2\psi(z, x) - q(x)\psi(z, x) = 0$.

Рассмотрим функцию $u(z, x) = e^{-zx}\psi(z, x)$, бесконечно дифференцируемую по x и голоморфную по z в области $C \setminus \Omega^*$.

Лемма 5. *При всех* $x \in (-\infty, \infty)$ и $z \in C \setminus \Omega^*$ *выполняются неравенства*

$$|u(z, x)| \leqslant 1 + d(z)^{-1} \| e^{\mu x} \|_\rho^2, \tag{10}$$

$$|u_x(z, x)| \leqslant d(z)^{-1} \| e^{\mu x} \|_\rho^2 (2|\Omega| + \| e^{\mu x} \|_\rho^2), \tag{11}$$

$$\left| \frac{d}{dz} u(z, x) \right| \leqslant 2d(z)^{-1} [1 + 2d(z)^{-1} \| e^{\mu x} \|_\rho^2], \tag{12}$$

$$\left| \frac{d}{dz} u_x(z, x) \right| \leqslant 4d(z)^{-2} \| e^{\mu x} \|_\rho^2 (2|\Omega| + \| e^{\mu x} \|_\rho^2), \tag{13}$$

где $d(z)$ — расстояние от точки z до множества Ω^*: $d(z) = \inf\limits_{\lambda \in \Omega} |z + \lambda|$.

Из формулы (8) оценок (5), (6) и неравенства Коши — Буняковского следует, что верны неравенства (10), (11): $|u(z, x)| \leqslant 1 + d(z)^{-1} \| e^{\mu x} \|_\rho^2$; $|u_x(z, x)| \leqslant d(z)^{-1} \| e^{\mu x} \|_\rho (\| \mu y(\mu, x \|_\rho + \| y_x(\mu, x) \|_\rho) \leqslant d(z)^{-1} \| e^{\mu x} \|_\rho^2 (2|\Omega| + \| e^{\mu x} \|_\rho^2)$.

Далее, так как функции $u(z, x)$, $u_x(z, x)$ голоморфны в области $C \setminus \Omega^*$, то по формуле Коши

$$u(z, x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{u(\xi, x)}{\xi - z} d\xi, \quad u_x(z, x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{u_x(\xi, x)}{\xi - z} d\xi,$$

$$\frac{d}{dz} u(z, x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{u(\xi, x)}{(\xi - z)^2} d\xi, \quad \frac{d}{dz} u_x(z, x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{u_x(\xi, x)}{(\xi - z)^2} d\xi,$$

где C — окружность радиуса $\frac{1}{2} d(z)$ с центром в точке z.

Поэтому

$$\left| \frac{d}{dz} u(z, x) \right| \leqslant 2d(z)^{-1} \max_{\xi \in C} |u(\xi, x)|,$$

$$\left| \frac{d}{dz} u_x(z, x) \right| \leqslant 2d(z)^{-1} \max_{\xi \in C} |u_x(\xi, x)|,$$

и согласно уже доказанным неравенствам (10), (11) и неравенству $d(\xi) \geqslant \frac{1}{2} d(z)$

$$\max_{\xi \in C} |u(\xi, x)| \leqslant 1 + 2d(z)^{-1} \| e^{\mu x} \|_\rho^2,$$

$$\max_{\xi \in C} |u_x(\xi, x)| \leqslant 2d(z)^{-1} \| e^{\mu x} \|_\rho^2 (2|\Omega| + \| e^{\mu x} \|_\rho^2),$$

откуда следует справедливость оценок (12), (13).

Рассмотрим множество всевозможных мер $d\rho_\alpha(\lambda)$ с носителями Ω_α, удовлетворяющих условиям $\Omega_\alpha \subset \Omega$, $\rho_\alpha(\Omega_\alpha) \leqslant \rho(\Omega)$, и обозначим $u^\alpha(z, x)$ соответствующие этим мерам функции $u^\alpha(z, x) = e^{-zx} y^\alpha(z, x)$, а через D — множество всех точек комплексной плоскости, отстоящих от множества Ω^* на расстояние, превосходящее $\frac{d}{2}$. Из оценок, полученных в лемме 5, вытекает

Следствие 1. *Существует такая константа C, что при всех $x\in(-\infty,\ \infty)$, $z\in D$ равномерно по всем мерам $d\rho_\alpha(\lambda)$ выполняются неравенства*

$$|u^\alpha(z,\ x)|,\quad \left|\frac{d}{dz}u^\alpha(z,\ x)\right|,\quad |u_x^\alpha(z,\ x)|,\ \left|\frac{d}{dz}u_x^\alpha(z,\ x)\right| \leqslant Ce^{C|x|}.$$

Разобьем вещественную ось λ на полуоткрытые сегменты $\Delta_k(N) = \left[\frac{d}{4N}k,\ \frac{d}{4N}(k+1)\right)$, где N — произвольное целое число, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ d=\operatorname{dist}(\Omega,\ \Omega^*)$, и обозначим через $k(N)$ множество тех значений k, при которых сегменты $\Delta_k(N)$ имеют непустое пересечение с носителем Ω меры $d\rho(\lambda)$.

Так как множество $k(N)$, очевидно, конечно, то множество $\Delta(N) = \bigcup\limits_{k\in k(N)}\Delta_k(N)$ является объединением конечного числа непересекающихся сегментов. Выберем в каждом множестве $\Delta_k(N)\cap\Omega$ произвольную точку λ_k и построим дискретную меру $d\rho_N(\lambda)$, сосредоточенную в этих точках, полагая $\rho_N(\lambda_k)=\rho(\Delta_k(N))$, $(k\in k(N))$. Ясно, что носитель Ω_N этой меры состоит из конечного числа точек, причем

$$\Delta(N)\supset\Omega\supset\Omega_N,\ \ \rho_N(\Omega_N)=\rho(\Omega),\ \ \operatorname{dist}(\Omega_N,\ \Omega_N^*)\geqslant d. \tag{14}$$

Обозначим через $y^N(\lambda,\ x)$ решения уравнений

$$y^N(\lambda,\ x)+\int\frac{e^{(\lambda+\mu)x}\varphi(\mu)}{\lambda+\mu}y^N(\mu,\ x)\,d\rho_N(\mu)=e^{\lambda x} \tag{15}$$

и через $\psi^N(z,\ x)\,(z\in C\setminus\Omega^*)$ функции

$$\psi^N(z,\ x)=e^{zx}\left[1-\int\frac{e^{\mu x}\varphi(\mu)}{z+\mu}y^N(\mu,\ x)\,d\rho_N(\mu)\right],$$

которые согласно лемме 4 удовлетворяют уравнениям Штурма — Лиувилля $-\psi_{xx}^N(z,\ x)+q_N(x)\psi^N(z,\ x)+z^2\psi^N(z,\ x)=0$ с потенциалами

$$q_N(x)=-2\frac{d}{dx}\int e^{\mu x}\varphi(\mu)\,y^N(\mu,\ x)\,d\rho_N(\mu).$$

Мы покажем, что при $N\to\infty$ потенциалы $q_N(x)$ сходятся к потенциалу $q(x)$ равномерно на каждом конечном множестве оси x.

Заметим прежде всего, что все точки множества $\Delta(N)$ отстоят от множества Ω на расстояние, не превышающее $\frac{d}{4N}$. Поэтому $\operatorname{dist}(\Delta(N),\ \Omega^*)\geqslant d-\frac{1}{2N}d\geqslant\frac{d}{2}$, и в силу следствия 1 существует такая константа C, не зависящая от N, что модули всех функций $u^N(\lambda,\ x)=e^{-\lambda x}y^N(\lambda,\ x)$, $u_x^N(\lambda,\ x)$ и их производных по λ на множестве $\Delta(N)$ мажорируются функцией $Ce^{C|x|}$.

Лемма 6. *Если вещественная функция $f(\lambda)$ непрерывно дифференцируема на множестве $\Delta(N)$ и $\sup|f'(\lambda)| \leqslant C$, то*

$$\left|\int f(\lambda)\, d\rho(\lambda) - \int f(\lambda)\, d\rho_N(\lambda)\right| \leqslant \frac{Cd}{4N}\rho(\Omega) = \frac{C_1}{N}, \tag{16}$$

где константа C_1 не зависит от N.

Действительно, по теореме о среднем значении

$$\int f(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \sum_{k\in k(N)} \int_{\Delta_k(N)} f(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \sum_{k\in k(N)} f(\nu_k)\, \rho(\Delta_k(N)),$$

где $\nu_k \in \Delta_k(N)$, и из определения меры $d\rho_N(\lambda)$ следует, что $\int f(\lambda) \times \times d\rho_N(\lambda) = \sum f(\lambda_k)\, \rho(\Delta_k(N))$. Поэтому

$$\left|\int f(\lambda)\, d\rho(\lambda) - \int f(\lambda)\, d\rho_N(\lambda)\right| \leqslant \sum_{k\in k(N)} |f(\nu_k) - f(\lambda_k)|\, \rho(\Delta_k(N)),$$

а так как $\nu_k,\ \lambda_k \in \Delta_k(N)$, то $|\nu_k - \lambda_k| \leqslant \frac{d}{4N}$ и по теореме о конечных приращениях $|f(\nu_k) - f(\lambda_k)| \leqslant |f'(\mu_k)| \cdot |\nu_k - \lambda_k| \leqslant \frac{Cd}{4N}$, откуда следует неравенство (16).

Лемма 7. *Существует не зависящая от N константа C такая, что*

$$\|y(\lambda, x) - y^N(\lambda, x)\|_\rho \leqslant \frac{Ce^{C|x|}}{N}, \quad \|y_x(\lambda, x) - y_x^N(\lambda, x)\|_\rho \leqslant \frac{Ce^{C|x|}}{N}.$$

Из определения функций $y(\lambda, x)$, $y^N(\lambda, x)$ вытекает, что

$$y(\lambda, x) - y^N(\lambda, x) = e^{\lambda x}\left[-\int \frac{e^{\mu x}\varphi(\mu)}{\lambda+\mu} y(\mu, x)\, d\rho(\mu) + \right.$$
$$\left. + \int \frac{e^{\mu x}\varphi(\mu)}{\lambda+\mu} y^N(\mu, x)\, d\rho_N(\mu)\right] = -e^{\lambda x}\int \frac{e^{\mu x}\varphi(\mu)}{\lambda+\mu} \times$$
$$\times [y(\mu, x) - y^N(\mu, x)]\, d\rho(\mu) + g(\lambda, x)\, e^{\lambda x}, \tag{17}$$

где $g(\lambda, x) = \int \frac{e^{\mu x}\varphi(\mu)}{\lambda+\mu} y^N(\mu, x)\, d[\rho_N(\mu) - \rho(\lambda)] = \int \frac{e^{2\mu x}\varphi(\mu)}{\lambda+\mu} u^N(\mu, x)\, d[\rho_N(\mu) - \rho(\mu)]$. Согласно сделанному выше замечанию, $\sup\limits_{\mu\in\Delta(N)} |u^N(\mu, x)| \leqslant Ce^{C|x|}$, $\sup\limits_{\mu\in\Delta(N)} |u_x^N(\mu, x)| \leqslant Ce^{C|x|}$, откуда следует, что равномерно по $\mu \in \Delta(N)$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{d}{d\mu}\, \frac{e^{2\mu x}\varphi(\mu)\, u^N(\mu, x)}{\lambda+\mu}\right| \leqslant C_1 e^{C_1|x|}$$

с константой C_1, не зависящей от N. Поэтому согласно лемме 6 $\sup\limits_{\lambda\in\Delta(N)} |g(\lambda, x)| \leqslant C_2 e^{C_2|x|}/N$, а, значит, и $\|e^{\lambda x} g(\lambda, x)\|_\rho \leqslant C_3 e^{C_3|x|}/N$.

3 7—3??

Отсюда, замечая, что в силу (17) $(I+A)[y(\lambda, x)-y^N(\lambda, x)]= = g(\lambda, x)e^{\lambda x}$, будем иметь $\|y(\lambda, x)-y^N(\lambda, x)\|_\rho \leqslant C_3 e^{C_3|x|}/N$, где константа C_3 не зависит от N.

Второе неравенство доказывается аналогично.

Лемма 8. *Существует такая не зависящая от N константа C, что*

$$|q(x)-q_N(x)| \leqslant Ce^{C|x|}/N, \tag{18}$$

т. е. в каждом конечном интервале последовательность $q_N(x)$ при $N\to\infty$ равномерно сходится к $q(x)$.

Из равенств, определяющих $q(x)$, $q_N(x)$, следует, что

$$q(x)-q_N(x) = 2\int e^{\mu x}\varphi(\mu)\{\mu(y^N(\mu, x)-y(\mu, x)) + \\ + y_x^N(\mu, x)-y_x(\mu, x)\}\,d\rho(\mu) + 2\int e^{2\mu x}\varphi(\mu)[2\mu u^N(\mu, x) + \\ + u_x^N(\mu, x)]\,d(\rho_N(\mu)-\rho(\mu)).$$

Лемма 7 позволяет заключить, что

$$\Big|2\int e^{\mu x}\varphi(\mu)\{\mu(y^N(\mu, x)-y(\mu, x)) + y_x^N(\mu, x) - \\ - y_x(\mu, x)\}\,d\rho(\mu) \leqslant 2\|e^{\mu x}\|_\rho [|\Omega|\cdot\|y^N(\mu, x)-y(\mu, x)\|_\rho + \\ + \|y_x^N(\mu, x)-y_x(\mu, x)\|_\rho \leqslant C_1 e^{C_1|x|}/N,$$

где константа C_1 не зависит от N.

Далее, из полученных ранее оценок для $|u^N(\mu, x)|$, $|u_x^N(\mu, x)|$, $\left|\frac{d}{d\mu}u^N(\mu, x)\right|$, $\left|\frac{d}{d\mu}u_x^N(\mu, x)\right|$ вытекает, что модуль производной по μ от подынтегральной функции во втором слагаемом правой части последнего равенства мажорируется функцией $C_2e^{C_2|x|}$, откуда по лемме 6 следует, что модуль второго слагаемого мажорируется функцией $C_3e^{C_3|x|}/N$ с константой C_3, не зависящей от N.

Таким образом, показано, что

$$|q(x)-q_N(x)| \leqslant Ce^{C|x|}/N,$$

где постоянная C не зависит от N.

Остается выяснить, что представляют собой потенциалы, аппроксимирующие $q^N(x)$.

Поскольку мера $d\rho_N(\lambda)$ сосредоточена в конечном числе точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m_N}$, то уравнение (15) сводится к конечной системе линейных алгебраических уравнений

$$y^N(\lambda_k, x) + \sum_1^{m_N} \frac{e^{(\lambda_k+\lambda_j)x}\varphi(\lambda_j)}{\lambda_k+\lambda_j}\, y^N(\lambda_j, x)\,\rho_N(\lambda_j) = e^{\lambda_k x}.$$

а функции $\psi^N(z,\ x)$, $u^N(z,\ x)$ имеют вид

$$\psi^N(z,\ x) = e^{zx}\left\{1 - \sum_1^{m_N} \frac{e^{\lambda_j x}\varphi(\lambda_j)}{z+\lambda_j} y^N(\lambda_j,\ \ x)\rho_N(\lambda_j)\right\},$$

$$u^N(z,\ x) = 1 - \sum_1^{m_N} \frac{e^{2\lambda_j x}\varphi(\lambda_j)}{z+\lambda_j} u^N(\lambda_j,\ x)\rho_N(\lambda_j).$$

Числа λ_j могут быть как положительными, так и отрицательными. Обозначим их модули через $\varkappa_j : \varkappa_j = |\lambda_j|$, а множество j, при которых $\lambda_j > 0$ ($\lambda_j < 0$), через $\Lambda^+(\Lambda^-)$. В этих обозначениях последняя формула запишется так:

$$u^N(z,\ x) = 1 - \sum_{j\in\Lambda^+} \frac{e^{2\varkappa_j x}}{z+\varkappa_j} u^N(\varkappa_j,\ x)\rho_N(\lambda_j) + \\ + \sum_{j\in\Lambda^-} \frac{e^{-2\varkappa_j x}}{z-\varkappa_j} u^N(-\varkappa_j,\ x)\rho_N(\lambda_j), \tag{19}$$

откуда следует, что функция

$$v^N(z,\ x) = u^N(z,\ x)\prod_{s\in\Lambda^-}\frac{z-\varkappa_s}{z+\varkappa_s} \tag{20}$$

мероморфна по z, имеет простые полюсы в точках $-\varkappa_j$ и стремится к 1 при $z\to\infty$. Поэтому ее разложение на простые дроби имеет вид

$$v^N(z,\ x) = 1 + \sum_1^{m_N}\frac{C_k(x)}{z+\varkappa_k}, \tag{21}$$

где $C_k(x) = \lim\limits_{z\to-\varkappa_k}(z+\varkappa_k)v^N(z,\ x)$. Если $k\in\Lambda^+$, то из формул (19), (20) следует, что

$$C_k(x) = \prod_{s\in\Lambda^-}\frac{\varkappa_k+\varkappa_s}{\varkappa_k-\varkappa_s}\lim_{z\to-\varkappa_k}(z+\varkappa_k)u^N(z,\ x) =$$

$$= -\prod_{s\in\Lambda^-}\frac{\varkappa_k+\varkappa_s}{\varkappa_k-\varkappa_s}e^{2\varkappa_k x}u^N(\varkappa_k,\ x)\rho_N(\lambda_k) = -e^{2\varkappa_k x}v^N(\varkappa_k,\ x)\times$$

$$\times\rho_N(\lambda_k)\prod_{s\in\Lambda^-}\left(\frac{\varkappa_k+\varkappa_s}{\varkappa_k-\varkappa_s}\right)^2\ (k\in\Lambda^+).$$

Если же $k\in\Lambda^-$, то согласно (20) имеем

$$C_k(x) = u^N(-\varkappa_k,\ x)(-2\varkappa_k)\prod_{\substack{s\in\Lambda^-\\ s\neq k}}\frac{\varkappa_k+\varkappa_s}{\varkappa_k-\varkappa_s}.$$

В то же время из (19) заключаем, что

$$\lim_{z\to\varkappa_k}(z-\varkappa_k)\,u^N(z,\ x)=e^{-2\varkappa_k x}u^N(-\varkappa_k,\ x)\,\rho_N(\lambda_k),$$

и так как в силу (20) $\lim\limits_{z\to\varkappa_k}(z-\varkappa_k)\,u^N(z,\ x)=\lim\limits_{z\to\varkappa_k}\Big\{v^N(z,x)(z+\varkappa_k)\times$ $\times\prod\limits_{\substack{s\in\Lambda^-\\ s\neq k}}\dfrac{z+\varkappa_s}{z-\varkappa_s}\Big\}=v^N(\varkappa_k,\ x)\cdot 2\varkappa_k\prod\limits_{\substack{s\in\Lambda^-\\ s\neq k}}\dfrac{\varkappa_k+\varkappa_s}{\varkappa_k-\varkappa_s}$, то $u^N(-\varkappa_k,\ x)=e^{2\varkappa_k x}\times$ $\times\, v^N(\varkappa_k,\ x)\cdot 2\varkappa_k\prod\limits_{\substack{s\in\Lambda^-\\ s\neq k}}\dfrac{\varkappa_k+\varkappa_s}{\varkappa_k-\varkappa_s}\rho_N(\lambda_k)^{-1}$ и

$$C_k(x)=-e^{2\varkappa_k x}v^N(\varkappa_k,\ x)\Big[2\varkappa_k\prod_{\substack{s\in\Lambda^-\\ s\neq k}}\frac{\varkappa_k+\varkappa_s}{\varkappa_k-\varkappa_s}\Big]^2\rho_N(\lambda_k)^{-1}\ \ (k\in\Lambda^-).$$

Следовательно, при всех $1\leqslant k\leqslant m_N$

$$C_k(x)=-e^{2\varkappa_k x}v^N(\varkappa_k,\ x)\,m_k^{-2}, \tag{22}$$

где положительные числа m_k^{-2} вычисляются по формулам

$$m_k^{-2}=\begin{cases}\rho_N(\lambda_k)\prod\limits_{s\in\Lambda^-}\Big(\dfrac{\varkappa_k+\varkappa_s}{\varkappa_k-\varkappa_s}\Big)^2(k\in\Lambda^+),\\ \rho_N(\lambda_k)^{-1}\cdot 4\varkappa_k^2\prod\limits_{\substack{s\in\Lambda^-\\ s\neq k}}\Big(\dfrac{\varkappa_k+\varkappa_s}{\varkappa_k-\varkappa_s}\Big)^2(k\in\Lambda^-).\end{cases} \tag{23}$$

Подставляя найденные значения для $C_k(x)$ в формулу (21), получим

$$v^N(z,\ x)=1-\sum_{1}^{m_N}\frac{e^{2\varkappa_k x}v^N(\varkappa_k,\ x)}{z+\varkappa_k}m_k^{-2},$$

откуда следует система линейных уравнений для функций

$$e^N(z,\ x)=e^{zx}v^N(z,\ x)=\psi^N(z,\ x)\prod_{s\in\Lambda^-}\frac{z-\varkappa_s}{z+\varkappa_s};$$

$$e^N(\varkappa_j,\ x)+\sum_{k=1}^{m_N}\frac{e^{(\varkappa_j+\varkappa_k)x}}{\varkappa_j+\varkappa_k}e^N(\varkappa_k,\ x)\,m_k^{-2}=e^{\varkappa_j x}.$$

Полученная система уравнений в точности совпадает с основным уравнением обратной задачи рассеяния для безотражательного потенциала с такими левыми данными рассеяния:

$$\{\varkappa_1,\ \ldots,\ \varkappa_{m_N};\ m_1^{-2},\ \ldots,\ m_{m_N}^{-2};\ r^-(\lambda)=0\}. \tag{22'}$$

Так как функции $e^N(z, x)$, $\psi^N(z, x)$ отличаются не зависящим от x множителем, то они удовлетворяют одному и тому же уравнению Штурма — Лиувилля с потенциалом $q_N(x)$, данные рассеяния которого (22).

Наконец, так как при всех N $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m_N} \varkappa_j \leqslant |\Omega|$, то согласно результатам работы [2] $0 \geqslant q_N(x) \geqslant -2|\Omega|^2$, $|q_N^{(k)}(x)| \leqslant C_k|\Omega|^{2+k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Итак, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть борелевская мера $d\rho(\lambda)$ сосредоточена на компакте Ω вещественной оси, причем*

$$\inf_{\lambda,\ \mu\in\Omega} |\lambda + \mu| = d > 0, \quad \max_{\lambda\in\Omega} |\lambda| = |\Omega|.$$

Тогда интегральное уравнение

$$y(\lambda, x) + \int \frac{e^{(\lambda+\mu)x}\varphi(\mu)}{\lambda+\mu} y(\mu, x)\, d\rho(\mu) = e^{\lambda x} \left(\varphi(\mu) = \frac{\mu}{|\mu|}\right)$$

однозначно разрешимо в пространстве $L^2(\rho)$ при всех $x \in (-\infty, \infty)$, функции

$$\psi(z, x) = e^{zx}\left[1 - \int \frac{e^{\mu x}\varphi(\mu)}{z+\mu} y(\mu, x)\, d\rho(\mu)\right]$$

удовлетворяют уравнению Штурма — Лиувилля $-\psi_{xx}(z, x) + q(x)\psi(z, x) + z^2\psi(z, x) = 0$ с вещественным бесконечно дифференцируемым потенциалом

$q(x) = -2\frac{d}{dx}\int e^{\mu x}\varphi(\mu)\, y(\mu, x)\, d\rho(\mu)$, который оценивается неравенствами $0 \geqslant q(x) \geqslant -2|\Omega|^2$, $|q^{(k)}(x)| \leqslant C_k|\Omega|^{2+k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где C_k — абсолютные константы.

Хорошо известно [3], что если начальные данные задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза $\dot u = 6uu_x - u_{xxx}$, $u|_{t=0} = q(x)$ задаются безотражательным потенциалом $q(x)$ с левыми данными рассеяния $\{\varkappa_i, m_i^{-2}, r^-(\lambda) = 0\}$; то решение задачи Коши находится по формуле $u(x, t) = q(x, t)$, где $q(x, t)$ — потенциал, восстанавливаемый по левым данным рассеяния $\{\varkappa_i, m_i^{-2}e^{-8\varkappa_i^3 t}; r^-(\lambda) = 0\}$. Поэтому если в (23) положить $m_i^{-2}(t) = m_i^{-2}e^{-8\varkappa_i^3 t}$, то, как легко видеть, мера $\rho_N(\lambda_i)$ в уравнении (15) переходит в меру $\rho_N(\lambda_i, t) = e^{-8\lambda_i^3 t}\rho_N(\lambda_i)$, а в уравнении (4) следует ввести меру $d\rho(\mu, t) = e^{-8\mu^3 t}d\rho(\mu)$.

Из всего сказанного выше следует

Теорема 2. *Пусть борелевская мера $d\rho(\lambda)$ сосредоточена на компакте Ω вещественной оси и* $\operatorname{dist}(\Omega, \Omega^*) = d > 0$, $|\Omega| = \max\limits_{\lambda\in\Omega}|\lambda|$.

Тогда интегральное уравнение

$$y(\lambda, x, t) + \int \frac{e^{(\lambda+\mu)x - 8\mu^3 t}\varphi(\mu)}{\lambda+\mu} y(\mu, x, t)\, d\rho(\mu) = e^{\lambda x}\left(\varphi(\mu) = \frac{\mu}{|\mu|}\right)$$

однозначно разрешимо в $L^2(\rho)$ *при всех* $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (-\infty, \infty)$, *а функция*

$$u(x, t) = -2\frac{d}{dx}\int e^{\mu x - 8\mu^3 t}\varphi(\mu)\, y(\mu, x, t)\, d\rho(\mu) \qquad (24)$$

является решением уравнения Кортевега-де Фриза, ограниченным вместе со всеми своими производными: $|u^{(k)}(x, t)| \leqslant C_k |\Omega|^{2+k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $0 \geqslant u(x, t) \geqslant -2|\Omega|^2$. Это решение есть равномерный предел в каждой конечной области изменения переменных x, t N-солитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза.

Следствие. Если компакт Ω имеет хотя бы одну предельную точку на положительной (отрицательной) полуоси, то решение $u(x, t)$ уравнения Кортевега-де Фриза, определяемое формулой (24), не может быть убывающим на $+\infty$ $(-\infty)$.

Список литературы: 1. *Марченко В. А.* Нелинейные уравнения и операторные алгебры.— К., 1986.— 180 с. 2. *Лундина Д. Ш.* Компактность множества безотражательных потенциалов // Теория функций, функц. анализ и их прил.— 1985.— Вып. 44.— С. 57—67. 3. Теория солитонов: метод обратной задачи/ В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.— М., 1980.— 230 с.

Поступила в редколлегию 21.05.86