ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVI. Серия 4 1960

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

Ю. И. Любич

(Харьков)

ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через $V_n\,(n \geqslant 0)$ класс функций* $\alpha(\lambda)$ ограниченной вариации в любом конечном интервале, удовлетворяющих условию

$$\alpha_n^*(\lambda) \equiv \overline{\lim_{|a|\to\infty}}\, |a|^{-n} \operatorname*{Var}_{a}^{a+r} \{\alpha(\mu)\} < \infty .$$

Необходимые для дальнейшего свойства функций класса V_n изложены в приложении 1.

Обозначим далее через $F_h^{(\infty)}\,(h>0)$ совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций, равных нулю при $|x| \geqslant h$.

В работах Б. М. Левитана [1—3] и В. А. Марченко [4] по спектральной теории дифференциальных операторов 2-го порядка возник следующий вопрос.

Пусть для функции $\alpha(\lambda)$, принадлежащей некоторому классу V_n, существует такое $h>0$, такая суммируемая функция $G(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ и такое число $m\,(0 \leqslant m \leqslant n)$, что на всех функциях $f(x) \in F_h^{(\infty)}$ имеет место тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\alpha(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(x)\, G(-x)\, dx, \tag{1}$$

где** $E_f(\lambda)$ — *преобразование Фурье функции $f(x)$.*

Требуется исследовать асимптотическое поведение функции $\alpha(\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$.

Прежде всего согласимся для краткости называть условие, которому удовлетворяет функция $\alpha(\lambda)$ в сформулированном вопросе, условием $C(h;\, n,\, m)$.

Исследуя асимптотику функции $\alpha(\lambda)$, приходится по существу рассматривать интеграл

$$\int_{-N}^{N} d\alpha(\lambda) \tag{2}$$

* Все рассматриваемые в работе функции считаются, вообще говоря, комплексно-значными.

** Интегралы по бесконечному интервалу мы будем понимать, как пределы в обычном смысле интегралов по конечному интервалу, а эти последние, если не оговорено противное,— как интегралы Лебега или Лебега — Стилтьеса.

при $N \to \infty$. Вообще говоря, этот интеграл предела не имеет, ввиду чего целесообразно заменить интеграл (2) более общим выражением

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) \tag{3}$$

с некоторым ядром $T(N, \lambda)$ (N — параметр, $N > 0$) и затем исследовать поведение интеграла (3) при $N \to \infty$. Ядро можно взять, например, равным $\left(1 - \frac{\lambda^2}{N^2}\right)^k$ ($k \geqslant 0$) при $|\lambda| < N$ и равным нулю при $|\lambda| \geqslant N$.

Если $G(x) \equiv 0$, то, как показал Б. М. Левитан [3], при* $N \to \infty$

$$\int_{-N}^{N} \left(1 - \frac{\lambda^2}{N^2}\right)^k d\alpha(\lambda) = O(N^{n-k}). \tag{4}$$

Следовательно, в случае $k > n$ существует предел** интеграла (4) при $N \to \infty$, что, вообще говоря, не имеет места, если $k < n$. В этом смысле значение $k = n$ можно назвать критическим. Критическое значение характеризует скорость роста интеграла (2) в терминах методов суммирования, и с этой точки зрения отыскание критического значения представляет определенный интерес.

Возникает вопрос, нельзя ли для ядер $T(N, \lambda)$ общего вида ввести параметр, по отношению к которому имело бы смысл говорить о критическом значении.

Если порядок роста n — целый, то, как следует из работы В. А. Марченко [4], требуемым параметром служит максимальный порядок k производных от ядра по λ, последняя из которых имеет ограниченную вариацию, и критическим значением по-прежнему будет*** $k = n$. Поэтому, переходя к нецелому n, естественно начать учитывать производные нецелого порядка от ядра. Одновременно приходится считать нецелым и число m, фигурирующее в тождестве (1).

Результаты настоящей работы являются обобщением теорем В. А. Марченко [4] на случай нецелых n, m, k. Возникающие здесь трудности обусловлены нелокальным характером операции дифференцирования нецелого порядка и ее несимметрией относительно перемены знака аргумента.

Для того, чтобы лучше понять постановку задачи, введем формально преобразование Фурье-Стилтьеса функции $\alpha(\lambda)$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\alpha(\lambda) \tag{5}$$

и запишем левую часть тождества (1) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, E(-x)\, dx.$$

Выполняя теперь формально интегрирование по частям в правой стороне того же тождества, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, E(-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, G^{(m)}(-x)\, dx. \tag{6}$$

* В дальнейшем, рассматривая оценки по N, мы всегда считаем, что $N \to \infty$, не оговаривая этого каждый раз.

** Равенство этого предела нулю здесь несущественно.

*** По крайней мере, для ядер, зависящих только от отношения λ к N.

Так как $f(x)$ — любая функция из $F_h^{(\infty)}$, то из (6) вытекает:

$$E(x) = G^{(m)}(x) \quad (|x| \leqslant h). \tag{7}$$

Следовательно, вопрос по сути состоит в исследовании функции $\alpha(\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$ при условии, что известно ее преобразование Фурье-Стилтьеса в некоторой окрестности нуля.

Однако, так как интеграл (5) в общем случае расходится, то функцию $E(x)$ нужно вводить, применяя к этому интегралу некоторый метод суммирования. Например, можно определить $E(x)$, как производную некоторого порядка от преобразования Бохнера-Стилтьеса функции $\alpha(\lambda)$ того же порядка. Отсюда ясен тауберов характер рассматриваемого вопроса.

Между прочим, формальные соотношения (5), (7) позволяют в общих чертах описать ответ на вопрос, которому посвящена настоящая работа. А именно, из этих соотношений при $x = 0$ следует:

$$\alpha(\infty) - \alpha(-\infty) = G^{(m)}(0). \tag{8}$$

Однако в общем случае обе части равенства (8), (а, значит, и само равенство) смысла не имеют, и вместо левой части нужно рассматривать при $N \to \infty$ интеграл (3), а вместо правой части,— величину

$$Z(N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)(i\lambda)^m E_G(\lambda)\, d\lambda.$$

Само же равенство (8) нужно понимать *, как некоторую асимптотическую оценку разности

$$R(N) = \int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) - Z(N).$$

Условимся называть величину $Z(N)$ главным членом, а величину $R(N)$ — остаточным членом асимптотики интеграла (3).

В связи с предстоящим использованием производных дробного порядка, сформулируем относящиеся сюда основные определения **. Что касается необходимых нам свойств производных дробного порядка, то они излагаются в приложении 2.

Интегралом порядка α $(\alpha > 0)$ *от функции* $f(x)$ $(-\infty < x \leqslant a \leqslant \infty)$, *суммируемой в каждом конечном интервале промежутка* $(-\infty, a)$ *называется функция*

$$f_{(\alpha)}(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt. \tag{9}$$

Производной порядка α (α — нецелое, $\alpha > 0$) *от функции* $f(x)$ $(-\infty < x \leqslant a \leqslant \infty)$ *называется функция* ***

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{d^{[\alpha+1]}}{dx^{[\alpha+1]}} f_{([\alpha+1]-\alpha)}(x). \tag{10}$$

Формулы (9), (10) задают функции $f_{(\alpha)}(x)$, $f^{(\alpha)}(x)$ вместе с их областями определения.

Условимся, кроме того, полагать

$$f_{(0)}(x) = f(x); \qquad f^{(-\alpha)}(x) = f_{(\alpha)}(x) \qquad (\alpha \geqslant 0).$$

---

* См. по этому поводу теорему 4.1 [4] и теорему 2 настоящей статьи.

** См., например, [5], стр. 221—223.

*** Символ $[\omega]$ означает целую часть числа ω.

Будем далее говорить, что *функция* $f(x)$, *суммируемая в конечном интервале* $[a, b]$, *принадлежит классу* $D_\alpha(a, b)$ $(0 \leq \alpha < 1)$, *если интеграл порядка* $1-\alpha$ *от функции, совпадающей с* $f(x)$ *в* $[a, b]$ *и равной нулю вне* $[a, b]$, абсолютно непрерывен *.

При $\alpha \geq 1$ *класс* $D_\alpha(a, b)$ *по определению состоит из таких функций* $f(x)$, *которые имеют в* $[a, b]$ *абсолютно непрерывную производную порядка* $[\alpha-1]$ *и для которых* $f^{([\alpha])}(x) \in D_{\alpha-[\alpha]}(a, b)$.

Пусть $f(x) \in D_\alpha(a, b)$. *Суммируемую функцию, равную*

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma([\alpha+1]-\alpha)}\int_a^{\min(x,\,b)}(x-t)^{[\alpha]-\alpha}f^{([\alpha])}(t)\,dt$$

при $x > a$ *и равную нулю при* $x \leq a$, *мы будем называть производной порядка* α *от функции* $f(x)$ *в классе* $D_\alpha(a, b)$ *и будем обозначать* $f^{(\alpha)}_{[a,\,b]}(x)$.

Отметим еще, что оба интеграла, входящие в тождество (1), сходятся, какова бы ни была функция $f(x) \in F^{(\infty)}_h$. В этом смысле условие $C(h;\, n, m)$ сформулировано корректно.

§ 1. Локализационный характер условия $C(h;\, n,\, m)$

Основное тождество (1) определяет преобразование Фурье-Стилтьеса функции $\alpha(\lambda)$,

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}d\alpha(\lambda), \tag{1.1}$$

при $|x| \leq h$. Однако ввиду расходимости интеграла (1.1) естественно вместо него рассматривать преобразование Бохнера-Стилтьеса порядка $[n+2]$

$$E_{[n+2]}(x;\, \alpha) = \int_{|\lambda|>1}\frac{e^{i\lambda x}d\alpha(\lambda)}{(i\lambda)^{[n+2]}} + \int_{|\lambda|\leq 1}\frac{e^{ix\lambda}-\sum\limits_{\nu=0}^{[n+1]}\frac{(i\lambda x)^\nu}{\nu!}}{(i\lambda)^{[n+2]}}\,d\alpha(\lambda),$$

которое уже представляется абсолютно сходящимся интегралом. Очевидно, формально

$$E(x) = E^{[(n+2])}_{[n+2]}(x;\, \alpha). \tag{1.2}$$

Если функция $\alpha(\lambda)$ является ступенчатой со скачками в целых точках, стремящимися к нулю при $|\lambda| \to \infty$, то интеграл (1.1) превращается в тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю. При этом формула (1.2) с $n = 0$ определяет сумму $E(x)$ ряда (1.1) в смысле Римана, и задача сводится к исследованию поведения частичных сумм ряда в точке $x = 0$ при условии, что функция $E(x)$ задана в окрестности этой точки. Решение этой задачи для случая $E(x) = 0$ $(|x| \leq h)$ хорошо известно и выражается в принципе локализации Римана [5, стр. 275].

Теперь мы покажем, что и в самом общем случае изучаемый вопрос эквивалентен некоторой проблеме локализации.

Теорема 1. *Для того, чтобы функция* $\alpha(\lambda) \in V_n$ *удовлетворяла условию* $C(h;\, n,\, m)$, *необходимо и достаточно, чтобы ее преобразование Бохнера-Стилтьеса порядка* $[n+2]$ *принадлежало классу* $D_{[n+2]-m}(-h, h)$.

---

* Из одной теоремы Харди-Литтльвуда [12] (см. также [5], стр. 223—225) легко следует, что если $f(x) \in \mathrm{Lip}_\beta(a, b)$ $(\beta > \alpha)$, то $f(x) \in D_\alpha(a, b)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\int_{-h}^{h} f^{([n+2])}(x)\, E_{[n+2]}(-x;\ \alpha)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\alpha(\lambda) \tag{1.3}$$

для любой функции $f(x) \in F_h^{(\infty)}$, ибо

$$\int_{-h}^{h} x^{\nu} f^{([n+2])}(x)\, dx = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, [n+1]).$$

Поэтому, если функция $\alpha(\lambda)$ удовлетворяет условию $C(h;\ n,\ m)$, то

$$\int_{-h}^{h} f^{([n+2])}(x)\, E_{[n+2]}(-x;\ \alpha)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(x)\, G(-x)\, dx =$$

$$= \int_{-h}^{h} f^{([n+2])}(x) \left\{\frac{1}{([n]-[m]+1)!} \int_{-h}^{-x} (-x-t)^{[n]-[m]} G_{([m+1]-m)}(t)\, dt\right\} dx.$$

Следовательно,

$$E_{[n+2]}(x;\ \alpha) = \frac{1}{([n]-[m]+1)!} \int_{-h}^{x} (x-t)^{[n]-[m]} G_{([m+1]-m)}(t)\, dt + P(x),$$

где $P(x)$ — полином степени не выше $[n+1]$. Но правая часть последнего равенства принадлежит $D_{[n+2]-m}(-h,\ h)$.

Наоборот, пусть функция $E_{[n+2]}(x;\ \alpha)$ принадлежит классу $D_{[n+2]-m}(-h,\ h)$. Тогда она представима в виде

$$E_{[n+2]}(x;\ \alpha) = \frac{1}{\Gamma([n+2]-m)} \int_{-h}^{x} (x-t)^{[n+1]-m} G(t)\, dt + Q(x) \quad (|x| \leq h),$$

где $G(x)$ — есть производная порядка $[n+2]-m$ от функции $E_{[n+2]}(x;\ \alpha)$ в классе $D_{[n+2]-m}(-h,\ h)$, $Q(x)$ — полином, степени не выше $[n+1]+[-m]$. Поэтому, какова бы ни была функция $f(x) \in F_h^{(\infty)}$, полагая $f^{([n+2])}(x) = \psi(x)$, будем иметь:

$$\int_{-h}^{h} f^{([n+2])}(x)\, E_{[n+2]}(-x;\ \alpha)\, dx = \int_{-h}^{h} \psi_{([n+2]-m)}(x)\, G(-x)\, dx =$$

$$= \int_{-h}^{h} f^{(m)}(x)\, G(-x)\, dx.$$

Опять учитывая (1.3), получаем для функции $\alpha(\lambda)$ тождество (1). Теорема доказана.

Теорема 1 означает, что изучаемый вопрос состоит в исследовании асимптотики при $|\lambda| \to \infty$ функции $\alpha(\lambda)$ при условии, что в некоторой окрестности нуля известны дифференциальные свойства преобразования Бохнера-Стилтьеса порядка $[n+2]$ функции $\alpha(\lambda)$.

§ 2. Оценка остаточного члена

Нам предстоит, исходя из условия $C(h;\ n,\ m)$ изучить асимптотическое поведение при $N \to \infty$ интеграла (3) с известным ядром $T(N,\ \lambda)$ $(N > 0;\ -\infty < \lambda < \infty)$.

Прежде чем формулировать ограничения, налагаемые на ядро $T(N,\ \lambda)$, определим некоторый вспомогательный класс функций Σ следующим образом. Функция $S(\lambda)$ $(\lambda \leq 0)$ принадлежит классу Σ, если а) эта функция имеет ограниченную вариацию и обладает всюду производной некоторого порядка $k-1$ $(k \geqslant 0)$, представимой в виде

$$S^{(k-1)}(\lambda) = S^{(k-1)}(0) + \int_0^{\lambda} S^{(k)}(\mu)\, d\mu,$$

где $S^{(k)}(\lambda)$ — также функция ограниченной вариации, которую мы будем считать всегда нормированной так, что

$$S^{(k)}(\lambda) = \frac{S^{(k)}(\lambda-0) + S^{(k)}(\lambda+0)}{2} \ (\lambda < 0), \ S^{(k)}(0) = S^{(k)}(-0);$$

в случае $k > 0$ функция $S^{(k)}(\lambda)$ непрерывна;

b) $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} S(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to -\infty} S^{(k)}(\lambda) = 0;$

c) для некоторых n, m, l $(0 \leqslant m \leqslant n,\ l > n+1)$

$$\int_{-\infty}^{0} |\lambda|^n \,|dS^{(k)}(\lambda)| < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{0} |\lambda|^{m+k+1} \,|dS^{(k)}(\lambda)| < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{0} |\lambda|^{l} \,|S(\lambda)|\, d\lambda < \infty.$$

Назовем теперь ядро $T(N, \lambda)$, не равное тождественно нулю ни при одном значении N, ядром типа* M, если при каждом фиксированном N

A) на полуоси $\lambda \leqslant 0$ функции $T(N, \lambda)$ и $T(N, -\lambda)$ принадлежат классу Σ,

B) в точке $\lambda = 0$ функция $T(N, \lambda)$ непрерывна и $[k]$ раз дифференцируема**, и если

C) каково бы ни было число $a < 0$,

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\int_a^0 (1 + |\lambda|^n)\left(|dT^{(k)}(N, \lambda)| + |d_\lambda \{T(N, -\lambda)\}^{(k)}|\right)}{M_{n,k}(N)} = 0, \tag{2.1}$$

где***

$$M_{n,k}(N) = \int_{-\infty}^{0} (1 + |\lambda|^n)\left(|dT^{(k)}(N, \lambda)| + |d_\lambda \{T(N, -\lambda)\}^{(k)}|\right). \tag{2.2}$$

Если значения h, m, входящие в определение ядра типа M, соответственно равны значениям h, m, фигурирующим в условии $C(h;\ n,\ m)$, то мы будем называть это ядро *соответствующим условию* $C(h;\ n,\ m)$.

Подчеркнем, что, в отличие от случая целого k, мы требуем определенных дифференциальных свойств от ядра $T(N, \lambda)$ не на всей оси, а на отрицательной полуоси, и тем же требованиям подчиняем функцию $T(N, -\lambda)$. Такая формулировка оказывается существенно менее ограничительной во многих приложениях. Например, производная порядка $\varkappa$ ($\varkappa$ — нецелое, $\varkappa > 0$) от ядра

$$T(N, \lambda) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\lambda^2}{N^2}\right)^{\varkappa} & (|\lambda| < N) \\ 0 & (|\lambda| \geqslant N) \end{cases} \tag{2.3}$$

---

* Свойства ядер типа M являются обобщением свойств ядер, введенных В. А. Марченко [4].

** Здесь и в дальнейшем дифференцирование ядер производится только по аргументу λ.

*** Легко видеть, что $M_{n,k}(N) > 0$.

имеет ограниченную вариацию в любом интервале $(-\infty, N-\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ и неограниченно возрастает при $\lambda \to N$, несмотря на четность самого ядра. Поэтому если бы в данном случае нужно было предполагать ограниченность вариации производной порядка k на всей оси, то пришлось бы брать $k < \varkappa$, что привело бы к снижению точности оценок (см. ниже, в частности, (2.5), (2.7).

Отметим, что часто употребляемое ядро вида

$$T(N, \lambda) = T\left(\frac{\lambda}{N}\right) \tag{2.4}$$

является ядром типа M, если при $\lambda \leqslant 0$ функции $T(\lambda)$ и $T(-\lambda)$ принадлежат классу Σ и если функция $T \neq 0$ непрерывна и $[k]$ раз дифференцируема в точке $\lambda = 0$. В этом случае

$$\lim_{N \to \infty} N^{k-n} M_{n, k}(N) = V_{n, k}, \tag{2.5}$$

где

$$V_{n, k} = v_n \int_{-\infty}^{0} |\lambda|^n (|dT^{(k)}(\lambda)| + |d_\lambda \{T(-\lambda)\}^{(k)}|), \tag{2.6}$$

v_n — коэффициент, равный 1 при $n > 0$ и равный 2 при $n = 0$.

Важным примером ядра вида (2.4) является ядро (2.3) с любым $\varkappa \geqslant 0$, а также ядро Рисса

$$T(N, \lambda) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|\lambda|}{N}\right)^{\varkappa} & (|\lambda| < N) \\ 0 & (|\lambda| \geqslant N), \end{cases}$$

где $0 \leqslant \varkappa < 1$. Это — ядра типа M с $k = \varkappa$.

Центральным результатом в рассматриваемом круге вопросов является

Теорема 2. *Для любого ядра $T(N, \lambda)$ типа M и для любой функции $\alpha(\lambda) \in V_n$, интеграл (3) сходится. Если функция $\alpha(\lambda)$ удовлетворяет условию $C(h; n, m)$, а $T(N, \lambda)$ — соответствующее условию ядро, то*

$$\varlimsup_{N \to \infty} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda) (i\lambda)^m E_G(\lambda)\, d\lambda \right|}{M_{n, k}(N)} \leqslant$$

$$\leqslant C(1+k)^5 h^{-k} \alpha_n^*\left(\frac{1}{h}\right), \tag{2.7}$$

где величина $M_{n, k}(N)$ определена формулой (2.2), C — абсолютная константа.

Доказательству этой теоремы мы предпошлем одно элементарное вспомогательное предложение, часто применяемое в дальнейшем.

Лемма 2.1. Если $T(N, \lambda)$ — ядро типа M, а функция $p(\lambda)$ $(\lambda \leqslant 0)$ такова, что

$$p(\lambda) = O(1 + |\lambda|^n),$$

то величины

$$\varlimsup_{N \to \infty} \frac{\left| \int_{-\infty}^{0} p(\lambda)\, dT^{(k)}(N, \lambda) \right|}{M_{n, k}(N)}, \quad \varlimsup_{N \to \infty} \frac{\left| \int_{-\infty}^{0} p(\lambda)\, d_\lambda \{T(N, -\lambda)\}^{(k)} \right|}{M_{n, k}(N)} \tag{2.8}$$

не превосходят $\varlimsup\limits_{\lambda \to -\infty} \frac{|p(\lambda)|}{1 + |\lambda|^n}$.

Доказательство. Положим

$$p=\overline{\lim_{\lambda\to-\infty}}\frac{|p(\lambda)|}{1+|\lambda|^n},\quad P=\sup_{\lambda\leqslant 0}\frac{|p(\lambda)|}{1+|\lambda|^n}.$$

Зададим любое $\varepsilon>0$ и выберем $a<0$ таким, чтобы при $\lambda<a$ выполнялось неравенство

$$\frac{|p(\lambda)|}{1+|\lambda|^n}\leqslant p+\varepsilon.$$

Тогда

$$\left|\int_{-\infty}^{0}p(\lambda)\,dT^{(k)}(N,\ \lambda)\right|\leqslant(p+\varepsilon)\,M_{n,\,k}(N)+$$
$$+P\int_{a}^{0}(1+|\lambda|^n)\,(|dT^{(k)}(N,\ \lambda)|+|d_\lambda\{T(N,\ -\lambda)\}^{(k)}|).$$

Деля обе части неравенства на $M_{n,\,k}(N)$ и переходя к пределу при $N\to\infty$, получим, в силу (2.1);

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{\left|\int_{-\infty}^{0}p(\lambda)dT^{(k)}(N,\ \lambda)\right|}{M_{n,\,k}(N)}\leqslant p+\varepsilon.$$

Точно такая же оценка, очевидно, имеет место для второй из величин (2.8). Ввиду произвольности ε лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Для любой функции $f(x)\in F_h^{(\infty)}$

$$f^{(m)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E_f(\lambda)\,(i\lambda)^m e^{i\lambda x}d\lambda,$$

а так как функция $G(x)$ суммируема, то тождеству (1) можно придать такой вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty}E_f(\lambda)\,d\alpha(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E_f(\lambda)\,(i\lambda)^m\,E_G(\lambda)\,d\lambda.$$

Если $f(x)$ пробегает класс $F_h^{(\infty)}$, то, в силу известной теоремы Винера-Пэйли, $E_f(\lambda)$ пробегает класс $\widetilde{F_h^{(\infty)}}$ целых функций конечной степени не выше h, стремящихся к нулю при $\lambda\to\pm\infty$ быстрее любой степени $|\lambda|$. Следовательно, для всех функций $E(\lambda)\in\widetilde{F_h^{(\infty)}}$ выполняется тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty}E(\lambda)\,d\alpha(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E(\lambda)\,(i\lambda)^m\,E_G(\lambda)\,d\lambda.\tag{2.9}$$

Если бы данное ядро $T(N,\ \lambda)$ как функция λ принадлежало классу $\widetilde{F_h^{(\infty)}}$, то вопрос был бы исчерпан. Поэтому целесообразно перейти от ядра $T(N,\ \lambda)$ к некоторому другому ядру $T_1(N,\ \lambda)$, которое можно подставить в (2.9), вместо $E(\lambda)$. Тогда задача сведется к асимптотической оценке образовавшейся погрешности.

В связи с изложенными соображениями желательно по возможности расширить совокупность функций $E(\lambda)$, допускающих подстановку в равенство (2.9). Покажем, что (2.9) справедливо для всех целых функций $E(\lambda)$ конечной степени не выше h, удовлетворяющих условию

$$E(\lambda)=O\left(\frac{1}{1+|\lambda|^{l_1}}\right)$$

при каком-нибудь $l_1 > n + 1$. С этой целью введем вспомогательную функцию $K(\lambda) \in \widetilde{F_h^{(\infty)}}$, $K(0) = 1$, и положим

$$Q_\varepsilon(\lambda) = E(\{1 - \varepsilon\}\lambda) K(\varepsilon\lambda).$$

Так как $Q_\varepsilon(\lambda) \in \widetilde{F_h^{(\infty)}}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_\varepsilon(\lambda)\, d\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_\varepsilon(\lambda)(i\lambda)^m E_G(\lambda)\, d\lambda.$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ следует (2.9), ибо

$$Q_\varepsilon(\lambda) = O\left(\frac{1}{1 + |\lambda|^{l_1}}\right).$$

Перейдем к построению упомянутого выше ядра $T_1(N, \lambda)$. Обозначим через $\omega(x)$ бесконечно дифференцируемую функцию, равную нулю вне интервала $(0,1)$ и нормированную так, что

$$\int_0^1 \omega(x)\, dx = 1.$$

Очевидно, функция

$$\varphi_\delta(x) = \frac{1}{1-\delta} \int_{-\infty}^{x} \left\{\omega\left(\frac{t+\delta}{\delta - 1}\right) - \omega\left(\frac{t - \delta}{1 - \delta}\right)\right\} dt \qquad (0 < \delta < 1)$$

принадлежит классу $\widetilde{F_1^{(\infty)}}$, четна и

$$\varphi_\delta(x) = 1 \qquad (|x| \leqslant \delta).$$

Обозначим далее через $f(N, x)$ обратное преобразование Фурье ядра $T(N, \lambda)$,

$$f(N, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda,$$

и сгладим его, полагая

$$f_1(N, x) = f(N, x)\, \varphi_\delta\left(\frac{x}{h}\right).$$

Теперь следуя В. А. Марченко, определим ядро $T_1(N, \lambda)$, как преобразование Фурье функции $f_1(N, x)$:

$$T_1(N, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(N, x)\, e^{-i\lambda x} dx.$$

Функция $T_1(N, \lambda)$ относительно λ — целая, конечной степени не выше h, и при каждом N

$$T_1(N, \lambda) = O\left(\frac{1}{1 + |\lambda|^l}\right), \tag{2.10}$$

где l — число, фигурирующее в определении ядра типа M.

Для доказательства оценки (2.10) представим $T_1(N, \lambda)$ по теореме о свертке в виде

$$T_1(N, \lambda) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(N, \mu)\, E_{\varphi_\delta}(h\lambda - h\mu)\, d\mu.$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^l |T_1(N, \lambda)| \, d\lambda \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |T(N, \mu)| \, d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\zeta}{h} + \mu \right|^l |E_{\varphi_\delta}(\zeta)| \, d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{l-1}}{\pi} \left(\frac{1}{h^l} \int_{-\infty}^{\infty} |T(N, \mu)| \, d\mu \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta^l| E_{\varphi_\delta}(\zeta) | \, d\zeta + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} |\mu|^l |T(N, \mu)| \, d\mu \int_{-\infty}^{\infty} |E_{\varphi_\delta}(\zeta)| \, d\zeta \right) < \infty.$$

Поэтому функция $f_1(N, x)$ обладает непрерывной производной порядка l. Так как $f_1(N, x)$ финитна, то функция $f_1^{(l)}(N, x)$ стремится к нулю при $|x| \to \infty$ и суммируема.

Следовательно,

$$T_1(N, \lambda) = (i\lambda)^{-l} E_{f_1^{(l)}}(\lambda),$$

откуда непосредственно вытекает (2.10).

Из свойств ядра $T_1(N, \lambda)$ следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_1(N, \lambda) \, d\alpha(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_1(N, \lambda) (i\lambda)^m E_G(\lambda) \, d\lambda = 0. \tag{2.11}$$

Для перехода к ядру $T(N, \lambda)$ надлежит ввести разность

$$T_2(N, \lambda) = T(N, \lambda) - T_1(N, \lambda) \tag{2.12}$$

и, установив сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_2(N, \lambda) \, d\alpha(\lambda) \tag{2.13}$$

(а тем самым — и сходимость интеграла (3)) на любой функции $\alpha(\lambda) \in V_n$, оценить его при больших N.

Используя формулу обращения Фурье, находим

$$T_2(N, \lambda) = \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} f(N, x) \left\{ 1 - \varphi_\delta\left(\frac{x}{h}\right) \right\} e^{-i\lambda x} dx. \tag{2.14}$$

Но

$$f(N, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} \{ T(N, \lambda) e^{i\lambda x} + T(N, -\lambda) e^{-i\lambda x} \} \, d\lambda,$$

а так как при $\lambda \leqslant 0$

$$T(N, \pm\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\kappa + 1)} \int_{-\infty}^{0} (\lambda - \mu)^k d_\mu \{ T(N, \pm\mu) \}^{(k)}, \tag{2.15}$$

то

$$f(N, x) = \frac{1}{2\pi\Gamma(k+1)} \left(\int_{-\infty}^{0} dT^{(k)}(N, \mu) \int_{\mu}^{0} (\lambda - \mu)^k e^{i\lambda x} d\lambda + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{0} d_\mu \{ T(N, -\mu) \}^{(k)} \int_{\mu}^{0} (\lambda - \mu)^k e^{-i\lambda x} d\lambda \right).$$

Выполняя во внутренних интегралах замену переменной $\lambda = \mu\zeta$, получаем:

$$f(N, x) = \frac{1}{2\pi\Gamma(k+2)}\left\{\int_{-\infty}^{0}(-\mu)^{k+1}F(1, k+2, i\mu x)\,dT^{(k)}(N, \mu) + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{0}(-\mu)^{k+1}F(1, k+2, -i\mu x)\,d_\mu\{T(N, -\mu)\}^{(k)}\right\} \qquad (2.16)$$

Символом

$$F(\alpha, \gamma, w) \quad (\gamma \neq 0, -1, -2, \dots)$$

обозначается вырожденная гипергеометрическая функция *. Это есть целая функция от w, вещественная для вещественных α, γ, w. При $Re\gamma > Re\alpha > 0$ она допускает интегральное представление

$$F(\alpha, \gamma, w) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}e^{wz}dz, \qquad (2.17)$$

которым мы воспользовались выше.

В основе оценок, на которые опирается доказательство не только данной теоремы, но и последующих теорем, лежит асимптотическое разложение **

$$F(\alpha, \gamma, iv) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^{\frac{i\pi\alpha v}{|v|}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+j)}{j!\,\Gamma(\gamma-\alpha-j)(iv)^{\alpha+j}} +$$

$$+ \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}e^{iv}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(\gamma-\alpha+j)}{j!\,\Gamma(\alpha-j)(iv)^{\gamma-\alpha+j}}\ (\gamma > \alpha > 0), \qquad (2.18)$$

справедливое, когда v неограниченно возрастает по модулю, оставаясь вещественным. Отметим, что (2.18) можно почленно дифференцировать сколько угодно раз.

Из (2.18) вытекает, что при вещественном $v \neq 0$

$$\frac{F(1, k+2, iv)}{\Gamma(k+2)} = -\sum_{j=0}^{[k]}\frac{1}{\Gamma(k-j+1)(iv)^{j+1}} + \frac{e^{iv}}{(iv)^{k+1}} + \frac{\Psi(v)}{(iv)^{k+1}}, \qquad (2.19)$$

где функция $\Psi(v)$ бесконечно дифференцируема при $v \neq 0$, причем***

$$\Psi^{(j)}(v) = O(|v|^{-j}) \quad (j = 0,1,2\dots) \qquad (2.20)$$

и

$$\lim_{|v|\to\infty}\Psi(v) = 0. \qquad (2.21)$$

В силу (2.16) и (2.19),

$$f(N, x) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{[k]}\frac{1}{\Gamma(k-j+1)}\left\{\frac{1}{(-ix)^{j+1}}\int_{-\infty}^{0}(-\mu)^{k-j}\,dT^{(k)}(N, \mu) + \right.$$

* По поводу приведенных ниже свойств этой функции см., например, [6], стр. 331—342.

** Ряды, фигурирующие здесь, вообще говоря, расходятся, и их нужно понимать только как асимптотические.

*** Из (2.17) легко вывести, что в случае целого k

$$\Psi(v) \equiv 0.$$

$$+\frac{1}{(ix)^{j+1}}\int\limits_{-\infty}^{0}(-\mu)^{k-j}\,d_\mu\{T(N,-\mu\}^{(k)}\}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{e^{i\mu x}}{(-ix)^{k+1}}\,dT^{(k)}(N,\mu)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{e^{-i\mu x}}{(ix)^{k+1}}\,d_\mu\{T(N,-\mu)\}^{(k)}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\Psi(\mu x)}{(-ix)^{k+1}}\,dT^{(k)}(N,\mu)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\Psi(-\mu x)}{(ix)^{k+1}}\,d_\mu\{T(N,-\mu\}^{(k)}. \tag{2.22}$$

Но

$$\frac{1}{\Gamma(k-j+1)}\int\limits_{-\infty}^{0}(-\mu)^{k-j}dT^{(k)}(N,\mu)=T^{(j)}(N,0),$$

$$\frac{1}{\Gamma(k-j+1)}\int\limits_{-\infty}^{0}(-\mu)^{k-j}d_\mu\{T(N,-\mu)\}^{(k)}=$$

$$=\{T(N,-\mu)\}^{(j)}|_{\mu=0}=(-1)^jT^{(j)}(N,0)$$

для $j=0,1,\ldots,[k]$. Поэтому сумма в правой части равенства (2.22) исчезает.

Подставляя окончательное выражение для $f(N,x)$ в формулу (2.14), получаем после простых преобразований и перехода к пределу:

$$T_2(N,\lambda)=h^{-k}\Big(\int\limits_{-\infty}^{0}A_{k,\delta}(h\lambda-h\mu)\,dT^{(k)}(N,\mu)+\int\limits_{-\infty}^{0}A_{k,\delta}(-h\lambda-$$

$$-h\mu)\,d_\mu\{T(N,-\mu)\}^{(k)}\Big)+\int\limits_{-\infty}^{0}R(\lambda,\mu)\,dT^{(k)}(N,\mu)+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{0}R(-\lambda,\mu)\,d_\mu\{T(N,-\mu)\}^{(k)}, \tag{2.23}$$

где*

$$A_{k,\delta}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\varphi_\delta(x)}{(-ix)^{k+1}}e^{-i\lambda x}dx, \tag{2.24}$$

$$R(\lambda,\mu)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{1-\varphi_\delta\left(\frac{x}{h}\right)\right\}(-ix)^{-k-1}\Psi(\mu x)e^{-i\lambda x}dx. \tag{2.25}$$

Из (2.23) формально следует:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}T_2(N,\lambda)\,d\alpha(\lambda)=k^{-k}\Big(\int\limits_{-\infty}^{0}dT^{(k)}(N,\mu)\int\limits_{-\infty}^{\infty}A_{k,\delta}(h\lambda-h\mu)\,d\alpha(\lambda)+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{0}d_\mu\{T(N,-\mu)\}^{(k)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}A_{k,\delta}(-h\lambda-h\mu)\,d\alpha(\lambda)\Big)+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{0}dT^{(k)}(N,\mu)\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(\lambda,\mu)\,d\alpha(\lambda)+$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0}d_\mu\{T(N,-\mu)\}^{(k)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(-\lambda,\mu)\,d\alpha(\lambda). \tag{2.26}$$

* Символ главного значения Vp употреблен для того, чтобы не исключать случая $k=0$, $\lambda=0$.

Для обоснования этого результата установим абсолютную сходимость двойных интегралов, фигурирующих в (2.26).

Во-первых, при $|\lambda| \leqslant 1$

$$A_{k,\delta}(\lambda) = O(1), \quad R(\lambda, \mu) = O(1). \tag{2.27}$$

Теперь проинтегрируем по частям $[n+2]$ раза в правых сторонах равенств (2.24), (2.25). Получим:

$$A_{k,\delta}(\lambda) = \frac{1}{2\pi (i\lambda)^{[n+2]}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \left\{\frac{1-\varphi_\delta(x)}{(-ix)^{k+1}}\right\}^{([n+2])} dx,$$

$$R(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi (i\lambda)^{[n+2]}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \frac{d^{[n+2]}}{dx^{[n+2]}} \left(\left\{1-\varphi_\delta\left(\frac{x}{h}\right)\right\}(-ix)^{-k-1}\Psi(\mu x)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi (i\lambda)^{[n+2]}} \sum_{j=0}^{[n+2]} \binom{[n+2]}{j} \mu^{j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\Psi^{(j)}(\mu x) \left(\left\{1-\varphi_\delta\left(\frac{x}{h}\right)\right\}(-ix)^{-k-1}\right)^{([n+2]-j)} dx.$$

Отсюда с учетом (2.20) следует:

$$A_{k,\delta}(\lambda) = O(|\lambda|^{-[n+2]}), \quad R(\lambda, \mu) = O(|\lambda|)^{-[n+2]}).$$

Эти оценки в соединении с оценками (2.27) означают, что

$$A_{k,\delta}(\lambda) = O\left(\frac{1}{1+|\lambda|^{[n+2]}}\right), \; R(\lambda, \mu) = O\left(\frac{1}{1+|\lambda|^{[n+2]}}\right). \tag{2.28}$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A_{k,\delta}(\pm h\lambda - h\mu)|\,|d\alpha(\lambda)| = O(1+|\mu|^n), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |R(\pm\lambda, \mu)|\,|d\alpha(\lambda)| = O(1),$$

и равенство (2.26) доказано. Вместе с тем доказана сходимость интеграла (2.13).

Применяя лемму 2.1 к правой части (2.26), приходим к неравенству

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} T_2(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda)\right|}{M_{n,k}(N)} \leqslant \overline{\lim_{\mu\to-\infty}} \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} A_{k,\delta}(h\lambda - h\mu)\, d\alpha(\lambda)\right|}{1+|\mu|^n} +$$

$$+ \overline{\lim_{\mu\to-\infty}} \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} A_{k,\delta}(-h\lambda - h\mu)\, d\alpha(\lambda)\right|}{1+|\mu|^n}, \tag{2.29}$$

ибо, в силу (2.25), (2.21) и (2.20),

$$\lim_{|\mu|\to\infty} R(\lambda, \mu) = 0,$$

а отсюда и из (2.28) вытекает:

$$\lim_{|\mu|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\lambda, \mu)\, d\alpha(\lambda) = \lim_{|\mu|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\lambda, \mu)\, d\alpha(\lambda) = 0.$$

Повторяя в основном оценку В. А. Марченко [4] верхних пределов, стоящих в (2.29) справа, легко показать, что

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} T_2(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda)\right|}{M_{n,k}(N)} \leqslant \frac{C_\omega (1+k)^2}{(1-\delta)^3\, \delta^{k+3}} h^{-k} \alpha_n^*\left(\frac{1}{h}\right), \tag{2.30}$$

где C_ω — константа, зависящая только от функции $\omega(x)$, введенной в начале доказательства.

Возвращаясь к равенству (2.11), положим

$$\beta(\lambda) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\lambda (i\mu)^m E_G(\mu)\, d\mu. \tag{2.31}$$

Очевидно, $\beta(\lambda) \in V_n$, причем

$$\beta_n^*(\lambda) \equiv 0. \tag{2.32}$$

Используя (2.12) и (2.31), равенству (2.11) можно придать вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)(i\lambda)^m E_G(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} T_2(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} T_2(N, \lambda)\, d\beta(\lambda).$$

Отсюда, в силу (2.30) и (2.32),

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} T(N,\lambda)\, d\alpha(\lambda) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)(i\lambda)^m E_G(\lambda)\, d\lambda\right|}{M_{n,\,k}(N)} \leqslant \frac{C_\omega(1+k)^2}{(1-\delta)^3\delta^{k+3}} h^{-k}\alpha_n^*\left(\frac{1}{h}\right).$$

Левая часть полученного неравенства не зависит от параметра δ $(0 < \delta < 1)$, а потому правую часть можно минимизировать по δ, после чего она обратится в

$$\frac{C_\omega(1+k)^2(6+k)^3}{27}\left(\frac{6+k}{3+k}\right)^{3+k} h^{-k}\alpha_n^*\left(\frac{1}{h}\right) \leqslant C(1+k)^5 h^{-k}\alpha_n^*\left(\frac{1}{h}\right),$$

где $C = 8e^3C_\omega$. Остается заметить, что функцию $\omega(x)$ можно выбрать раз навсегда и тем самым константу C превратить в абсолютную. Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что оценка (2.7) точна относительно параметра h.

Положим

$$\alpha(\lambda) = \alpha^*(i\lambda)^n e^{-ih\lambda},$$

где $n \geqslant 0$, $\alpha^* > 0$, $h > 0$. Очевидно, $\alpha(\lambda) \in V_n$, причем

$$\alpha_n^*\left(\frac{1}{h}\right) = \alpha^*.$$

Кроме того, какова бы ни была функция $f(x) \in F_h^{(\infty)}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\alpha(\lambda) = 2\pi i\alpha^*\{nf^{(n-1)}(-h) - hf^{(n)}(-h)\} = 0.$$

Рассмотрим ядро типа M

$$T(N, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(k+1)}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^{[k+2]}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^k & (0 < \lambda < N) \\ 0 & (\lambda \leqslant 0,\ \lambda \geqslant N). \end{cases}$$

Входящий сюда показатель $k \geqslant 0$ совпадет с тем значением k, при котором это ядро удовлетворяет требованию A.

Используя (2.17), легко получить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) = N^{n+1}i^n\alpha^*\left\{-ih\frac{\Gamma(n+[k+3])}{\Gamma(n+k+[k+4])} F(n+[k+3], n+k+\right.$$

$$\left. + [k+4], -ihN) + \frac{n}{N}\frac{\Gamma(n+[k+2])}{\Gamma(n+k+[k+3])} F(n+[k+2], n+k+[k+3], -ihN)\right\}.$$

Ввиду (2.18), выражение в фигурных скобках равно

$$i^k h^{-k} N^{-k-1} e^{-ihN} + o(N^{-k-1}).$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) = i^{n+k} h^{-k} \alpha^* N^{n-k} e^{-ihN} + o(N^{n-k})$$

и, в силу (2.5), (2.6),

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) \right|}{M_{n,\,k}(N)} = \frac{1}{V_{n,\,k}} h^{-k} \alpha^*.$$

§ 3. Исследование главного члена

Теорема 2 дает представление интеграла (3) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) = Z(N) + R(N),$$

где

$$Z(N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, (i\lambda)^m E_G(\lambda)\, d\lambda \tag{3.1}$$

и

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{|R(N)|}{M_{n,\,k}(N)} \leqslant C(1+k)^5 h^{-k} \alpha_n^*\left(\frac{1}{h}\right). \tag{3.2}$$

Величины $Z(N)$ и $R(N)$ мы назвали соответственно главным членом и остаточным членом.

Если из главного члена удастся выделить такую часть, которая, обладая сравнительно простой структурой, в то же время отличается от $Z(N)$ на $o\{M_{n,\,k}(N)\}$, то тогда можно будет разность между $Z(N)$ и выделенной частью включить в остаточный член, не нарушая оценки (3.2). Тем самым удастся заменить главный член более простым выражением.

К желаемому результату можно формально придти следующим образом. Разложим ядро $T(N, \lambda)$ по степеням λ:

$$Z(N) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^{(j)}(N, 0)}{j!} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\lambda)^m \lambda^j E_G(\lambda)\, d\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^{(j)}(N, 0)\, (-i)^j}{j!} G^{(m+j)}(0).$$

Но при $j > [k-n)$

$$T^{(j)}(N, 0) = \frac{1}{\Gamma(k-j+1)} \int_{-\infty}^{0} (-\mu)^{k-j}\, dT^{(k)}(N, \mu) = o\{M_{n,k}(N)\}.$$

Поэтому *

$$Z(N) = \sum_{j=0}^{[k-n]} \frac{T^{(j)}(N, 0)\, (-i)^j}{j!} G^{(m+j)}(0) + o\{M_{n,\,k}(N)\}. \tag{3.3}$$

Асимптотическое представление (3.3) фактически справедливо при ограничениях, значительно меньших тех, которые нужны для оправдания формальной выкладки, проведенной выше. При этом обычно приходится понимать производные $G^{(m+j)}(0)$ в некотором обобщенном смысле.

---

* Здесь и в дальнейшем сумму вида $\sum\limits_{j=0}^{-\nu}$ при $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ надлежит считать равной нулю.

Теорема 3. *Пусть* $T(N,\lambda)$ — *ядро типа* M. *Если функция* $G(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ *суммируема и при* $m+\kappa+1>n$ *удовлетворяет условию*

$$\int_{-1}^{1} |x|^{-(m+k+1-n)} |G(x)|\, dx < \infty, \tag{3.4}$$

то

$$Z(N) = \sum_{j=0}^{[k-n]} \frac{T^{(j)}(N, 0)(-i)^j}{j!} \cdot \frac{1}{\Gamma(-m-j)} \int_{-\infty}^{0} \frac{G(x)\,dx}{(-x)^{m+j+1}} + o\{M_{n,\,k}(N)\}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Представим $Z(N)$ в виде

$$Z(N) = Z^-(N) + Z^+(N),$$

где

$$Z^{\pm}(N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} T(N, \pm\lambda)(\pm i\lambda)^m E_G(\pm\lambda)\, d\lambda.$$

В силу (2.15)

$$Z^-(N) = \frac{1}{2\pi\Gamma(k+1)} \int_{-\infty}^{0} dT^{(k)}(N, \mu) \int_{\mu}^{0} (i\lambda)^m (\lambda-\mu)^{\kappa} E_G(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{(-i)^m}{2\pi\Gamma(k+1)} \int_{-\infty}^{0} (-\mu)^{m+k+1} dT^{(k)}(N, \mu) \int_{0}^{1} \zeta^m (1-\zeta)^k E_G(\mu\zeta)\, d\zeta.$$

Так как при $|\mu| \to \infty$

$$(-\mu)^{m+k+1} \int_{0}^{1} \zeta^m (1-\zeta)^k E_G(\mu\zeta)\, d\zeta = o(|\mu|^{m+k+1}),$$

то в случае $m+k+1 \leqslant n$, в силу леммы 2.1,

$$Z^-(N) = o\{M_{n,\,k}(N)\}$$

и точно такая же оценка справедлива для $Z^+(N)$, а, значит, и для $Z(N)$. Таким образом, дальнейшему рассмотрению подлежит лишь случай $m+k+1>n$.

Продолжим преобразование величины $Z^-(N)$. Замечая, что

$$\int_{0}^{1} \zeta^m (1-\zeta)^k E_G(\mu\zeta)\, d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} G(x)\, dx \int_{0}^{1} \zeta^m (1-\zeta)^k e^{-i\mu x\zeta} d\zeta$$

и учитывая (2.17), получаем:

$$Z^-(N) = \frac{\Gamma(m+1)(-i)^m}{2\pi\Gamma(m+k+2)} \int_{-\infty}^{0} (-\mu)^{m+k+1} dT^{(k)}(N, \mu) \int_{-\infty}^{\infty} F(m+1, \quad m+k+2, \quad -i\mu x)\, G(x)\, dx. \tag{3.6}$$

Аналогично,

$$Z^+(N) = \frac{\Gamma(m+1)\, i^m}{2\pi\Gamma(m+k+2)} \int_{-\infty}^{0} (-\mu)^{m+k+1} d_{\mu}\{T(N, -\mu)\}^{(k)} \int_{-\infty}^{\infty} F(m+1, \quad m+k+2,\ i\mu x)\, G(x)\, dx. \tag{3.7}$$

Исходя из асимптотического разложения (2.18), положим:

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+k+2)} F(m+1,\ m+k+2,\ iv) =$$
$$= e^{\frac{i(m+1)\pi v}{|v|}} \sum_{j=0}^{[k-n]} \frac{\Gamma(m+j+1)}{j!\,\Gamma(k-j+1)(iv)^{m+j+1}} + \frac{\Phi(v)\,e^{iv}}{(iv)^{m+k+1-n}} \tag{3.8}$$

(v — вещественное, $v \neq 0$). Определяемая равенством (3.8), функция $\Phi(v)$ ограничена и имеет конечный предел* при $|v| \to \infty$.

При подстановке разложения (3.8) в формулы (3.6) и (3.7) там, в частности, появятся выражения, пропорциональные величинам

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{0} (-\mu)^n dT^{(k)}(N,\ \mu) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(-\mu x)\,e^{-i\mu x} G(x)}{(ix)^{m+k+1-n}}\,dx,\\ \int_{-\infty}^{0} (-\mu)^n d_\mu \{T(N,\ -\mu)\}^{(k)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\mu x)\,e^{i\mu x} G(x)}{(-ix)^{m+k+1-n}}\,dx.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Фигурирующие здесь внутренние интегралы стремятся к нулю при $|\mu| \to \infty$, в силу (3.4) и свойств функции $\Phi(v)$.
Применяя снова лемму 2.1, заключаем, что интегралы (3.9) будут $o\{M_{n,k}(N)\}$. Поэтому

$$Z^-(N) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{[k-n]} \frac{\Gamma(m+j+1)}{j!\,\Gamma(k-j+1)} \int_{-\infty}^{0} (-\mu)^{k-j} dT^{(k)}(N,\ \mu) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-i)^m e^{\frac{i(m+1)\pi x}{|x|}} G(x)}{(ix)^{m+j+1}}\,dx +$$
$$+ o\{M_{n,k}(N)\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{[k-n]} \frac{\Gamma(m+j+1)\,T^{(j)}(N,\ 0)}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-i)^m e^{\frac{i(m+1)\pi x}{|x|}} G(x)}{(ix)^{m+j+1}}\,dx +$$
$$+ o\{M_{n,k}(N)\},$$

и точно так же

$$Z^+(N) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{[k-n]} \frac{\Gamma(m+j+1)(-1)^{(j)}\,T^{(j)}(N,\ 0)}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i^m e^{\frac{i(m+1)\pi x}{|x|}} G(x)}{(-ix)^{m+j+1}}\,dx +$$
$$+ o\{M_{n,k}(N)\}.$$

Следовательно,

$$Z(N) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{[k-n]} \frac{\Gamma(m+j+1)\,T^{(j)}(N,\ 0)\,(-i)^j}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ Re\, \frac{(-i)^m e^{\frac{i(m+1)\pi x}{|x|}}}{(ix)^{m+1}} \right\} \frac{G(x)}{x^j}\,dx +$$
$$+ o\{M_{n,k}(N)\}.$$

Отсюда непосредственно получится доказываемая формула, если учесть, что

$$Re\, \frac{(-i)^m e^{\frac{i(m+1)\pi x}{|x|}}}{(ix)^{m+1}} = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ -\dfrac{\sin m\pi}{(-x)^{m+1}} & (x > 0) \end{cases}$$

и что

$$-\frac{\Gamma(m+j+1)\sin m\pi}{\pi} = \frac{(-1)^j}{\Gamma(-m-j)}.$$

* Этот предел отличен от нуля только при $m = n$.

Приведем пример, показывающий, что при замене условия (3.4) более слабым условием

$$\int_{-1}^{1} |x|^{-r} |G(x)|\, dx < \infty \quad (0 \leq r < m + k + 1 - n) \tag{3.10}$$

формула (3.5) может нарушиться, несмотря на то, что ее главная часть

$$\sum_{j=0}^{[k-n]} \frac{T^{(j)}(N,\ 0)(-i)^j}{j!} \cdot \frac{1}{\Gamma(-m-j)} \int_{-\infty}^{0} \frac{G(x)\,dx}{(-x)^{m+j+1}} \tag{3.11}$$

будет иметь смысл.

Зададим числа $n,\ m,\ k,\ s\, (0 \leq m \leq n,\ k \geq 0,\ k > n - m - 1,\ s > k)$ и положим

$$G(x) = \begin{cases} x^{m+k-n} \ln \frac{1}{x} & (0 < x < 1) \\ 0 & (x \leq 0,\ x \geq 1) \end{cases};$$

$$T(N,\ \lambda) = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^s \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{s+m} & (0 < \lambda < N) \\ 0 & (\lambda \leq 0,\ \lambda \geq N). \end{cases}$$

$T(N,\ \lambda)$ есть ядро типа M, заведомо соответствующее взятым $n,\ m,\ k$. Функция $G(x)$ удовлетворяет условию (3.10) при всех указанных там значениях r, но не удовлетворяет условию (3.7). Величина (3.11) здесь равна нулю.

Покажем, что при $N \to \infty$

$$\frac{Z(N)}{M_{n,\ k}(N)} \to \infty,$$

т. е., ввиду (2.5), — что

$$N^{k-n} Z(N) \to \infty.$$

Действительно, в данном случае

$$Z(N) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 x^{m+k-n} \ln \frac{1}{x} dx \int_0^N (i\lambda)^m \left(\frac{\lambda}{N}\right)^s \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{s+m} e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

откуда после замены переменных

$$\lambda = \frac{(1-\mu) N}{2},\quad x = \frac{y}{N}$$

получается

$$Z(N) = \frac{i^m}{2^{2(s+m+1)} \pi N^{k-n}} \int_0^N y^{m+k-n} \ln \frac{N}{y} e^{-\frac{iy}{2}} dy \int_{-1}^{1} (1 - \mu^2)^{s+m} e^{\frac{iy\mu}{2}} d\mu =$$

$$= \frac{\Gamma(s+m+1)\, i^m}{2\sqrt{\pi}\, N^{k-n}} \int_0^N y^{k-n-s-\frac{1}{2}} \ln \frac{N}{y} e^{-\frac{iy}{2}} I_{s+m+\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{2}\right) dy, \tag{3.12}$$

где $I_{s+m+\frac{1}{2}}(y)$ — функция Бесселя.

Так как интегралы

$$\int_0^\infty y^{k-n-s-\frac{1}{2}} e^{-\frac{iy}{2}} I_{s+m+\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{2}\right) dy, \quad \int_0^\infty y^{k-n-s-\frac{1}{2}} \ln y e^{-\frac{iy}{2}} I_{s+m+\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{2}\right) dy$$

сходятся, то из (3.12) вытекает

$$N^{k-n} Z(N) = c \ln N + o(\ln N),$$

где $c = \text{const}$. Неравенство $c \neq 0$ легко вывести из одной формулы теории бесселевых функций ([7], стр. 420—421) с помощью предельного перехода.

Следующее предложение непосредственно вытекает из теорем 2, 3.

Теорема 4. *Пусть функция $\alpha(\lambda)$ удовлетворяет условию $C(h;\ n;\ m)$, а $T(N, \lambda)$ — соответствующее условию ядро.*

Если функция $G(x)$ при $m+n+1>n$ дополнительно подчинена требованию (3.4), *то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) = \sum_{j=0}^{[k-n]} \frac{T^{(j)}(N, 0)(-i)^j}{j!} \cdot \frac{1}{\Gamma(-m-j)} \int_{-\infty}^{0} \frac{G(x)\, dx}{(-x)^{m+j+1}} + \hat{R}(N), \quad (3.13)$$

где остаточный член $\hat{R}(N)$ оценивается согласно (3.2).

Если $k<n$ или, если число m — целое, то теорема 4 дает:

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) = \mathrm{o}\{M_{n,k}(N)\}. \quad (3.14)$$

Если, сверх того, $\alpha_n^*(\lambda) \equiv 0$ или, если для данной функции $\alpha(\lambda)$ можно взять любое $h>0$, причем в случае $k=0$

$$\alpha_n^*(+0) = 0,$$

то оценку (3.14.) можно заменить более сильной оценкой

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) = \mathrm{o}\{M_{n,k}(N)\}. \quad (3.15.)$$

Установим теперь формулу типа (3.3), предполагая функцию $G(x)$ достаточно гладкой вблизи точки $x=0$. Прежде чем формулировать результат, условимся для определенности, говоря о ряде Фурье функции, заданной на всей оси, иметь в виду ее разложение на интервале $(-\pi, \pi)$.

Теорема 5. *Пусть $T(N, \lambda)$ есть ядро типа M и пусть суммируемая функция $G(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ в случае $m+k-n \geqslant 0$ принадлежит в некотором интервале $[-\varepsilon, \varepsilon]$ классу $D_{m+k-n}(-\varepsilon, \varepsilon)$. Если ряд Фурье функции, равной $G_{[-\varepsilon,\varepsilon]}^{m+k-n}(x)$ в случае $m+k-n \geqslant 0$ и равной $G_{n-m-k}(x)$ в случае $-1<m+k-n<0$, сходится вместе с сопряженным тригонометрическим рядом в точке* $x=0$, то*

$$Z(N) = \sum_{j=0}^{[k-n]} \frac{T^{(j)}(N, 0)(-i)^j}{j!} G^{(m+j)}(0) + \mathrm{o}\{M_{n,k}(N)\}.$$

*Здесь под $G^{(m+j)}(0)$ нужно понимать** сумму ряда Фурье функции $G^{(m+j)}(x)$ в точке $x=0$.*

Напомним, что если $m+k-n \leqslant -1$, то по теореме 3

$$Z(N) = \mathrm{o}\{M_{n,k}(N)\},$$

т. е. утверждение теоремы 5 в этом случае автоматически верно.

Остановимся на некоторых фактах, необходимых нам для доказательства теоремы 5.

Лемма 3.1. *Среди полиномов, удовлетворяющих условию интерполяционной задачи*

$$\begin{cases} P^{(j)}(x_s) = P_{sj} \quad (s=1, \ldots, r-1;\ j=0, 1, \ldots, l_{s-1}) \\ P^{(j)}(x_r) = 0 \quad (j=0, 1, \ldots, l_r - 1) \end{cases} \quad (3.16)$$

* Для чего достаточно. чтобы функция в окрестности точки удовлетворяла условию Липшица с каким-нибудь положительным показателем ([5], стр. 37)

** Существование величин $G^{(m+j)}(0)$ обнаруживается попутно.

с произвольными кратными узлами $x_1, \ldots, x_{r-1}$. x_r *существует такой полином* $P(x)$, *что*

$$\int_a^b P(x)\, u_\nu(x)\, dx = a_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \alpha), \tag{3.17}$$

где $u_\nu(x)$ — *какие-нибудь линейно независимые** *функции, заданные в конечном интервале* (a, b) *и такие, что*

$$(x - x_r)^{j_r}\, u_\nu(x) \in L(a, b);$$

a_ν — *любые заданные числа.*

Доказательство. Обозначим через $L_{sj}(x)$ — интерполяционный полином, построенный по условиям [8, стр. 64—66].

$$L_{sj}^{(q)}(x_p) = \begin{cases} 1 & (p = s,\ q = j) \\ 0 & (p \neq s \text{ или } q \neq j) \end{cases} (p = 1, 2, \ldots, r;\ q = 0, 1, \ldots, j_{p-1}).$$

Будем искать полином $P(x)$ в виде

$$P(x) = \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{j=0}^{j_s-1} P_{sj} L_{sj}(x) + Q(x) \prod_{s=1}^{r} (x - x_s)_{j_s},$$

где $Q(x)$ — пока неопределенный полином. Очевидно, независимо от выбора $Q(x)$, полином $P(x)$ является решением задачи (3.16)

Удовлетворяя условиям (3.17), приходим к системе уравнений

$$\int_a^b Q(x)\, w_\nu(x)\, dx = a_\nu - \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{j=0}^{j_s-1} P_{sj} \int_a^b L_{sj}(x)\, u_\nu(x)\, dx \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \alpha), \tag{3.18}$$

из которой надлежит определить полином $Q(x)$. Здесь

$$w_\nu(x) = u_\nu(x) \prod_{s=1}^{r} (x - x_s)^{j_s}.$$

Введем функции

$$\theta_\nu(\omega) = \int_a^b x^\omega w_\nu(x)\, dx$$

целочисленного аргумента $\omega = 0, 1, 2, \ldots$ и рассмотрим в α-мерном линейном пространстве вектор-функцию $\vec{\theta}(\omega) = (\theta_1(\omega), \ldots, \theta_\alpha(\omega))$. Линейная оболочка векторов $\vec{\theta}(\omega)$ заполняет все пространство, так как в противном случае нашелся бы вектор $\vec{A} = (A_1, \ldots, A_\alpha) \neq 0$, для которого

$$(\vec{A}, \vec{\theta}(\omega)) \equiv \sum_{\nu=1}^{\alpha} A_\nu \theta_\nu(\omega) = 0 \quad (\omega = 0, 1, 2, \ldots),$$

что невозможно, ввиду полноты системы x^ω $(\omega = 0, 1, 2, \ldots)$ в $L(a, b)$ и линейной независимости функций $w_\nu(x)$. Следовательно, существуют такие целые неотрицательные числа $\omega_1, \ldots, \omega_\alpha$, что $\det(\theta_\nu(\omega_\mu))_{\nu, \mu=1}^{\alpha} \neq 0$. Но тогда системе (3.18) удовлетворяет некоторый полином $Q(x) = Q_1 x^{\omega_1} + \ldots + Q_\alpha x^{\omega_\alpha}$, что и требовалось доказать.

* В том смысле, что не существует нетривиальной линейной комбинации данных функций, равной нулю почти всюду.

Лемма 3.2. *Пусть фукция* $g(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ *суммируема с весом* $\frac{1}{1+|x|}$ *и пусть интеграл*

$$E_g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx$$

сходится для почти всех λ, *причем при любых конечных* x_1, x_2

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} g(x)\, e^{-i\lambda x} dx \right| \leqslant \mathfrak{M}(\lambda),$$

где $\mathfrak{M}(\lambda)$ — *функция, суммируемая в каждом конечном интервале* *.

Если ряд Фурье функции $g(x)$ *сходится вместе с сопряженным тригонометрическим рядом в точке* $x = 0$, *то интеграл*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_g(\lambda)\, d\lambda$$

сходится и равен сумме ряда Фурье функции $g(x)$ *в точке*** $x = 0$.

Доказательство. Представим функцию $g(x)$ в виде суммы функций

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x) & (|x| < \pi) \\ 0 & (|x| \geqslant \pi) \end{cases}, \quad g_2(x) = \begin{cases} 0 & (|x| < \pi) \\ g(x) & (|x| \geqslant \mu) \end{cases}. \tag{3.19}$$

Очевидно, при любых конечных λ_1, λ_2

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{g_2}(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) \frac{e^{-i\lambda_1 x} - e^{-i\lambda_2 x}}{ix}\, dx = \int_{|x| \geqslant \pi} \frac{g(x)}{ix} (e^{-i\lambda_1 x} - e^{-i\lambda_2 x})\, dx,$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_{g_2}(\lambda)\, d\lambda = 0. \tag{3.20}$$

Сходимость интеграла от $E_{g_1}(\lambda)$ также можно было бы установить непосредственно. Однако для наших целей удобнее вывести этот факт из общей теоремы 2.

Заметим, что, какова бы ни была функция $f(x) \in F_\pi^{(\infty)}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g_1(-x)\, dx = \sum_{j=-\infty}^{\infty} E_f(j)\, \gamma_j = \int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\gamma(\lambda),$$

где γ_j — комплексные коэффициенты Фурье функции $g_1(x)$, $\gamma(\lambda)$ — ступенчатая функция со скачками в целых точках, соответственно равными γ_j. Так как $\gamma(\lambda) \in V_0$ и

$$\gamma_0^*(\lambda) \equiv 0, \tag{3.21}$$

то функция $\gamma(\lambda)$ удовлетворяет условию $C(\pi, 0, 0)$.

Обозначим через $a = a(N)$ $(N > 0)$ произвольную функцию, для которой $|N + a(N)| \to \infty$ при $N \to \infty$, и определим ядро типа M

$$T(N, \lambda) = \begin{cases} 1 & (\lambda \in (N, N+a)) \\ 0 & (\lambda \overline{\in} [N, N+a]) \\ \frac{1}{2} & (\lambda = N,\ \lambda = N+a). \end{cases} \tag{3.22}$$

---

* Для выполнения перечисленных условий достаточно суммируемости функции $g(x)$.

** Упомянутое равенство непосредственно следует из хорошо известной теоремы [13] (см. также [5], стр, 301 — 303).

Применяя теорему 2 и учитывая (3.21), получим

$$\lim_{N\to\infty}\left|\sum_{j\in(N,\,N+a)}\gamma_j-\frac{\operatorname{sign}a}{2\pi}\int\limits_N^{N+a}E_{g_1}(\lambda)\,d\lambda\right|=0. \tag{3.23}$$

Так как ряд $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}\gamma_j$ сходится *, то из (3.23) следует сходимость интеграла от $E_{g_1}(\lambda)$. Полагая теперь в (3.23) $a=-2N$, получаем равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}E_{g_1}(\lambda)\,d\lambda=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\gamma_j. \tag{3.24}$$

В силу (3.19), (3.20), (3.24), лемма доказана.

Лемма 3.3. Если функция $g(x)$ удовлетворяет условиям леммы 3.2., то для любого $\alpha>0$ и для любой абсолютно непрерывной функции $r(\zeta)$ $(0\le\zeta\le1)$ имеет место оценка

$$\int\limits_0^{\mu}\lambda^{\alpha}r\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)E_g(\lambda)\,d\lambda=o(|\mu|^{\alpha})$$

при $|\mu|\to\infty$

Доказательство. Примем для определенности $\mu>0$. В силу предыдущей леммы, можно ввести функцию

$$E(\mu)=-\int\limits_{\mu}^{\infty}E_g(\lambda)\,d\lambda.$$

Очевидно,

$$\int\limits_0^{\mu}\lambda^{\alpha}r\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)E_g(\lambda)\,d\lambda=\mu^{\alpha}\left\{r(1)\,E(\mu)-\int\limits_0^{1}(\alpha\zeta^{\alpha-1}r(\zeta)+\zeta^{\alpha}r'(\zeta))\,E(\mu\zeta)\,d\zeta\right\}.$$

Но правая часть этого равенства является $o(\mu^{\alpha})$ при $\mu\to\infty$.

Перейдем к доказательству теоремы 5. Предположим в начале, что $G(x)$ равна нулю при $|x|>\varepsilon$. По лемме 3.1 существует такой полином $P_0(x)$, что **

$$P_0^{(j)}(\pm\varepsilon)=G^{(j)}(\pm\varepsilon)\quad(j=0,\,1,\,\ldots,\,[m+k-n-1]), \tag{3.25}$$

$$P_0^{(j)}(0)=0\quad(j=0,\,1,\,\ldots,\,[m]+[k-n]), \tag{3.26}$$

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{0}\frac{P_0(x)\,dx}{(-x)^{m+j+1}}=0\quad(j=0,\,1,\ldots,\,[k-n]). \tag{3.27}$$

Положим

$$P(x)=\begin{cases}P_0(x) & (|x|\le\varepsilon)\\ 0 & (|x|>\varepsilon)\end{cases};\quad H(x)=G(x)-P(x).$$

В соответствии с этим

$$Z(N)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}T(N,\,\lambda)\,(i\lambda)^m E_P(\lambda)\,d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}T(N,\,\lambda)\,(i\lambda)^m E_H(\lambda)\,d\lambda. \tag{3.28}$$

---

* Его сходимость эквивалентна одновременной сходимости ряда Фурье функции $g(x)$ и сопряженного тригонометрического ряда в точке $x=0$,

** При $m+k-n<1$ условие (3.25) отпадает. При $k<n$ отпадают условия (3.26), (3.27). При $k<\min(n-m+1,\,n)$ следует считать $P_0(x)\equiv0$.

Первое слагаемое правой части (3.28) по теореме 3 есть $o\{M_{n,k}(N)\}$. Второе слагаемое обозначим через $W(N)$ и представим в виде суммы величин

$$W^{-}(N)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}T(N,\lambda)(i\lambda)^{m}E_{H}(\lambda)\,d\lambda,$$

$$W^{+}(N)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}T(N,-\lambda)(-i\lambda)^{m}E_{H}(-\lambda)\,d\lambda.$$

Исследуем величину $W^{-}(N)$. В силу (2.15),

$$W^{-}(N)=\frac{1}{2\pi\Gamma(k+1)}\int_{-\infty}^{0}dT^{(k)}(N,\mu)\int_{\mu}^{0}(i\lambda)^{m}(\lambda-\mu)^{k}E_{H}(\lambda)\,d\lambda.$$

Если $-1<m+k-n<0$, то $H(x)=G(x)$. Если же $m+k-n\geqslant 0$, то функция $H(x)$ одновременно с $G(x)$ входит в класс $D_{m+k-n}(-\varepsilon,\varepsilon)$, причем

$$H^{(j)}(\pm\varepsilon)=0\quad(j=0,\,1,\,\ldots,\,[m+k-n-1]),$$

а, значит, $H(x)$ в этом случае всюду имеет абсолютно непрерывную производную любого порядка $q\leqslant m+k-n-1$. Поэтому, если

$$Q(x)=\begin{cases}H_{(n-m-k)}(x)=G_{(n-m-k)}(x) & (-1<m+k-n<0)\\ H^{(m+k-n)}(x)=H^{(m+k-n)}_{[-\varepsilon,\,\varepsilon]}(x) & (m+k-n\geqslant 0),\end{cases}$$

то

$$E_{H}(\lambda)=(i\lambda)^{n-m-k}E_{Q}(\lambda)\quad(\lambda\neq 0),$$

откуда

$$E_{H^{(q)}}(\lambda)=(i\lambda)^{q+n-m-k}E_{Q}(\lambda)\;(-1<q\leqslant m+k-n).\tag{3.29}$$

Следовательно,

$$W^{-}(N)=\frac{1}{2\pi\Gamma(k+1)}\int_{-\infty}^{0}(-\mu)^{k}dT^{(k)}(N,\mu)\int_{\mu}^{0}(i\lambda)^{n-k}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}E_{Q}(\lambda)\,d\lambda.\tag{3.30}$$

Если $k<n$, то, согласно лемме 3.3 внутренний интеграл (3.30) есть $0(|\mu|^{n-k})$ при $\mu\to-\infty$, и лемма 2.1, как обычно, дает:

$$W^{-}(N)=o\{M_{n,k}(N)\}.$$

Точно такой же результат получается, очевидно, и для $W^{+}(N)$.

Таким образом, для случая $k<n$ теорема доказана *.

Пусть теперь $k\geqslant n$. Введем абсолютно непрерывную функцию $r(\zeta)$ $(0\leqslant\zeta\leqslant 1)$ по формуле

$$r(\zeta)=(-\zeta)^{-[k-n]-1}\left\{(1-\zeta)^{k}-\sum_{j=0}^{[k-n]}(-1)^{j}\binom{k}{j}\zeta^{j}\right\}.$$

Тогда

$$\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}=\sum_{j=0}^{[k-n]}(-1)^{j}\binom{k}{j}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j}+\left(-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{[k-n]+1}r\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Подставляя это разложение в (3.30), получаем:

$$W^{-}(N)=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{[k-n]}\frac{(-i)^{j}}{j!\,\Gamma(k-j+1)}\int_{-\infty}^{0}(-\mu)^{k-j}dT^{(k)}(N,\mu)\int_{\mu}^{0}(i\lambda)^{n-k+j}E_{Q}(\lambda)\,d\lambda+$$

$$+\,0\left(\left|\int_{-\infty}^{0}(-\mu)^{k-[k-n]-1}dT^{(k)}(N,\mu)\int_{\mu}^{0}\lambda^{n-k+[k-n]+1}\,r\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)E_{Q}(\lambda)\,d\lambda\right|\right).\tag{3.31}$$

* Если $m+k-n<0$, то заведомо $k<n$.

По лемме 3.3 внутренний интеграл в остаточном слагаемом (3.31) при $\mu\to-\infty$ есть $o(|\mu|^{n-k+[k-n]+1})$ и, следовательно, само слагаемое есть $o\{M_{n,k}(N)\}$.

Заметим далее, что интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{0}(i\lambda)^{n-k+j}E_Q(\lambda)\,d\lambda\ (j=0,\ 1,\ \ldots,\ [k-n])$$

сходятся, ибо при $-\infty<\mu_1<\mu_2<0$

$$\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}(i\lambda)^{n-k+j}E_Q(\lambda)\,d\lambda=(i\lambda)^{n-k+j}E(\lambda)\Big|_{\mu_2}^{\mu_2}-i(n-k+j)\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}(i\lambda)^{n-k+j}E(\lambda)\,d\lambda,\quad(3.32)$$

где

$$E(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\lambda}E_Q(\zeta)\,d\zeta.$$

Вместе с тем, из (3.32) следует, что при $\mu\to-\infty$

$$\int\limits_{-\infty}^{\mu}(i\lambda)^{n-k+j}E_Q(\lambda)\,d\lambda=o(|\mu|^{n-k+j})\ (j=0,\ 1,\ \ldots,\ [k-n]).$$

Эта оценка и равенство (3.29) дают:

$$\int\limits_{\mu}^{0}(i\lambda)^{n-k+j}E_Q(\lambda)\,d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{0}E_{H^{(m+j)}}(\lambda)\,d\lambda+o(|\mu|^{n-k+j}).$$

Следовательно,

$$W^-(N)=\sum_{j=0}^{[k-n]}\frac{T^{(j)}(N,0)(-i)^j}{j!}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}E_{H^{(m+j)}}(\lambda)\,d\lambda+o\{M_{n,k}(N)\}.$$

Аналогично,

$$W^+(N)=\sum_{j=0}^{[k-n]}\frac{T^{(j)}(N,0(-i)^j}{j!}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}E_{H^{(m+j)}}(\lambda)\,d\lambda+o\{M_{n,k}(N)\},$$

и, таким образом,

$$W(N)=\sum_{j=0}^{[k-n]}\frac{T^{(j)}(N,0)(-i)^j}{j!}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}E_{H^{(m+j)}}(\lambda)\,d\lambda+o\{M_{n,k}(N)\}.$$

Из сходимости стоящих справа интегралов вытекает ([5], стр. 301—303) сходимость в точке $x=0$ рядов Фурье функций $H^{(m+j)}(x)$ и равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}E_{H^{(m+j)}}(\lambda)\,d\lambda=\sigma\{H^{(m+j)}(x)\}|_{x=0},\quad(3.33)$$

где символ σ означает сумму ряда Фурье.

Опишем правую часть (3.33) в терминах исходной функции $G(x)$. Эта функция обладает в любом интервале $[-\eta,\eta]$ $(0<\eta<\varepsilon)$ абсолютно непрерывной производной любого порядка $q\ (-1\leqslant q\leqslant m+k-n-1)$ и ряд Фурье производной порядка $m+j$ сходится при $x=0$ к сумме

$$G^{(m+j)}(0)=\sigma\{H^{(m+j)}(x)\}|_{x=0}+P^{(m+j)}(0).$$

Остается учесть, что, в силу (3.27), $P^{(m+j)}(0)=0\ (j=0,\ 1,\ \ldots,\ [k-n])$. Действительно, полагая для краткости

$$\omega(x)=\frac{x^{[m]-m}}{\Gamma([m+1]-m)}\ (x>0),$$

будем иметь

$$P^{(m+j)}(x)=\frac{d^{[m+j+1]}}{dx^{[m+j+1]}}\int_0^{x+\varepsilon}\omega(t)\,P_0(x-t)\,dt=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{[m+j]}\omega^{([m+j]-\nu)}(x+\varepsilon)\,P_0^{(\nu)}(-\varepsilon)+\int_0^{x+\varepsilon}\omega(t)\,P_0^{([m+j+1])}(x-t)\,dt,$$

откуда

$$P^{(m+j)}(0)=\sum_{\nu=0}^{[m+j]}\omega^{([m+j]-\nu)}(\varepsilon)\,P_0^{(\nu)}(-\varepsilon)+\int_0^{\varepsilon}\omega(t)\,P_0^{([m+j+1])}(-t)\,dt.$$

Интегрируя по частям $[m+j+1]$ раз с использованием (3.26), получаем:

$$P^{(m+j)}(0)=\int_0^{\varepsilon}\omega^{([m+j+1])}(t)\,P_0(-t)\,dt=\frac{1}{\Gamma(-m-j)}\int_{-\varepsilon}^{0}\frac{P_0(t)\,dt}{(-t)^{m+j+1}}=0$$

$$(j=0,\ 1,\ \ldots,\ [k-n]).$$

Тем самым теорема доказана при условии, что $G(x)=0$ вне интервала $[-\varepsilon,\ \varepsilon]$.

Обращаясь к общему случаю, представим $G(x)$ в виде

$$G(x)=G(x;\ \varepsilon)+\{G(x)-G(x;\ \varepsilon)\},$$

где

$$G(x;\ \varepsilon)=\begin{cases}G(x) & (|x|\leqslant\varepsilon)\\ 0 & (|x|>\varepsilon).\end{cases}$$

Соответственно, величина $Z(N)$ распадется на два слагаемых, к первому из которых применима доказываемая теорема, а ко второму — теорема 3. Таким образом, окажется, что

$$Z(N)=\sum_{j=0}^{[k-n]}\frac{T^{(j)}(N,0)(-i)^j}{j!}\left(\sigma\{G^{(m+j)}(x;\ \varepsilon)\}\Big|_{x=0}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Gamma(-m-j)}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{G(x)-G(x;\ \varepsilon)}{(-x)^{m+j+1}}\,dx\right)+o\{M_{n,\ k}(N)\}.$$

Но так как $G(x)-G(x;\ \varepsilon)=0$ при $|x|\leqslant\varepsilon$, то в интервале $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ функция $G(x)-G(x;\ \varepsilon)$ обладает непрерывными производными всех неотрицательных порядков и

$$\frac{1}{\Gamma(-m-j)}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{G(x)-G(x;\ \varepsilon)}{(-x)^{m+j+1}}\,dx=G^{(m+j)}(0)-\sigma\{G^{(m+j)}(x,\ \varepsilon)\}\,|_{x=0}.$$

Теорема доказана полностью.

Замечание. При $j=0,\ 1,\ \ldots;\ j\leqslant k-n-1$ величины $G^{(m+j)}(0)$ имеют обычный смысл производных в точке $x=0$. Следовательно, в обобщенном смысле нужно понимать только, быть может, величину $G^{(m+[k-n])}(0)$.

Следующий пример показывает, что условия теоремы 5 по существу нельзя ослабить.

Построим функцию $G(x)$, равную нулю при $|x| \geq \pi$ и равную в интервале $(-\pi, \pi)$

$$\frac{1}{\Gamma(m+k-n)} \int_{-\pi}^{x} (x-t)^{m+k-n-1} \{\ln|t| \cdot \operatorname{sign} t + P(t)\}\, dt,$$

где $0 \leq m \leq n$, $m+k-n > 0$, $P(t)$ — такой полином*, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - t)^{m+k-n-j-1} \{\ln|t| \cdot \operatorname{sign} t + P(t)\}\, dt = 0$$

$$(j = 0, 1, \ldots, [m+k-n-1]). \tag{3.34}$$

Функция $G(x)$ принадлежит классу $D_{m+k-n}(-\pi, \pi)$, и

$$G^{(m+k-n)}_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(x) = \ln|x| \cdot \operatorname{sign} x + P(x) \quad (|x| < \pi,\ x \neq 0). \tag{3.35}$$

Кроме того, в силу (3.34),

$$G^{(j)}(\pm\pi) = 0\ (j = 0, 1, \ldots, [m+k-n-1]).$$

Поэтому функция $G(x)$ на всей оси имеет абсолютно непрерывные производные до порядка $m+k-n-1$ включительно и

$$G^{(m+k-n)}(x) = G^{(m+k-n)}_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(x).$$

Так как функция $\ln|x| \cdot \operatorname{sign} x$ нечетна, то ее ряд Фурье сходится в точке $x = 0$, в то время как сопряженный ряд расходится в той же точке, ибо

$$\int_0^{\pi} \ln x \, \sin \nu x dx = \frac{1 - \cos \nu\pi}{\nu} \ln \pi - \frac{1}{\nu} \int_0^{\nu\pi} \frac{1 - \cos x}{x} dx =$$

$$= -\frac{\ln \nu}{\nu} + 0\left(\frac{1}{\nu}\right) (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Теми же свойствами обладает, очевидно, ряд Фурье функции (3.35) и сопряженный с ним тригонометрический ряд.

Наконец, ряды Фурье всех производных, порядка ниже k, от функции $G(x)$, как легко проверить, сходятся в точке $x = 0$.

Рассмотрим ядро

$$T(N, \lambda) = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^s \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{s+n-k} & (0 < \lambda < N) \\ 0 & (\lambda \leq 0,\ \lambda \geq N) \end{cases}$$

$(s > k,\ s \geq 2k - n)$. Для этого ядра

$$\sum_{j=0}^{[k-n]} \frac{T^{(j)}(N, 0)(-i)^j}{j!} G^{(m+j)}(0) = 0,$$

и вместе с тем при $N \to \infty$

$$N^{k-n} Z(N) \to \infty.$$

Последнее проверяется так же, как в аналогичном примере к теореме 3. Нужно только заметить, что

$$Z(N) = \frac{1}{2\pi} \int_0^N \left(\frac{\lambda}{N}\right)^s \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{s+n-k} (i\lambda)^{n-k} E_{G^{(m+k-n)}}(\lambda)\, d\lambda.$$

Заканчивая исследование главного члена, сформулируем теорему, вытекающую из теорем 2,5.

---

* Существование этого полинома обнаруживается с помощью соображений, примененных при доказательстве леммы 3.1.

Теорема 6. *Пусть функция* $\alpha(\lambda)$ *удовлетворяет условию* $C(h;\ n,\ m)$, *а* $T(N,\ \lambda)$ *— соответствующее условию ядро.*

Если функция $G(x)$ *в случае* $m+k-n\geqslant 0$ *принадлежит классу* $D_{m+k-n}(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ *в некотором интервале* $[-\varepsilon,\ \varepsilon]$ *и, если ряд Фурье функции, равной* $G^{(m+k-n)}_{[-\varepsilon,\ \varepsilon]}(x)$ *при* $m+k-n\geqslant 0$ *и равной* $G_{(n-m-k)}(x)$ *при* $-1<m+k-n<0$, *сходится вместе с сопряженным тригонометрическим рядом в точке* $x=0$, *то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(N,\ \lambda)\,d\alpha(\lambda)=\sum_{j=0}^{[k-n]}\frac{T^{(j)}(N,\ 0)\,(-i)^j}{j!}\,G^{(m+j)}(0)+\hat{R}(N), \tag{3.36}$$

где остаточный член $\hat{R}(N)$ *оценивается, согласно* (3.2). *При этом* $G^{(m+j)}(0)$ *есть сумма ряда Фурье функции* $G^{(m+j)}(x)$ *в точке* $x=0$.

Если $k<n$, то теорема 6 приводит к оценке (3.14) или даже (при прежних дополнительных условиях) — к оценке (3.15).

§ 4. Ядра, зависящие только от отношения

В § 2 были указаны условия, при которых ядро вида

$$T(N,\ \lambda)=T\left(\frac{\lambda}{N}\right) \tag{4.1}$$

есть ядро типа M. Эти условия будут обеспечены для финитной (для определенности, равной нулю при $|\lambda|\geqslant 1$) функции $T(\lambda)\not\equiv 0$, если

а) функция $T(\lambda)$ имеет ограниченную вариацию и вместе с функцией $T(-\lambda)$ принадлежит некоторому классу $D_k(-1{,}0)$, причем $T^{(k)}_{[-1,0]}(\lambda)$, $\{T(-\lambda)\}^{(k)}_{[-1,0]}$ — функции ограниченной вариации *;

в) при $k>0$ функция $T(\lambda)$ непрерывна;

с) $T^{(j)}(\pm 1)=0$ $(j=0,\ 1,\ \ldots,\ [k-1])$;

д) функция $T(\lambda)$ непрерывна и $[k]$ раз дифференцируема в точке $\lambda=0$.

Оценка (2.7) для ядер (4.1), в силу (2.5), (2.6), принимает вид

$$\varlimsup_{N\to\infty}\frac{\left|\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} T\left(\frac{\lambda}{N}\right)d\alpha(\lambda)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T\left(\frac{\lambda}{N}\right)(i\lambda)^m E_G(\lambda)\,d\lambda\right|}{N^{n-k}}\leqslant$$

$$\leqslant CV_{n,k}(1+k)^5 h^{-k}\alpha_n^*\left(\frac{1}{h}\right). \tag{4.2}$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} T\left(\frac{\lambda}{N}\right)d\alpha(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T\left(\frac{\lambda}{N}\right)(i\lambda)^m E_G(\lambda)\,d\lambda+O(N^{n-k}). \tag{4.3}$$

Точно так же из оценок (3.13), (3.36), (3.2) следует соответственно

$$\int_{-\infty}^{\infty} T\left(\frac{\lambda}{N}\right)d\alpha(\lambda)=$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=0}^{[k-n]}\frac{T^{(j)}(N,\ 0)\,(-i)^j}{j!}\cdot\frac{1}{\Gamma(-m-j)}\int_{-\infty}^{0}\frac{G(x)\,dx}{(-x)^{m+j+1}}+O(N^{n-k})\\ \displaystyle\sum_{j=0}^{[k-n]}\frac{T^{(j)}(N,\ 0)\,(-i)^j}{j!}\,G^{(m+j)}(0)+O(N^{n-k}).\end{cases} \tag{4.4}$$

* Точнее, почти всюду совпадают с некоторыми функциями ограниченной вариации.

Если

$$\alpha_n^*(\lambda)\equiv 0, \tag{4.5}$$

то остаточные члены асимптотических формул (4.3), (4.4) можно заменить на $o(N^{n-k})$.

Из (4.4) следует, что при $k>n$ (а если имеет место (4.5), то и при $k=n$) существует предел*

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T\left(\frac{\lambda}{N}\right)d\alpha(\lambda). \tag{4.6}$$

С другой стороны, можно построить пример, показывающий, что при $k<n$ предел (4.6) может не существовать, несмотря на выполнение условий общих теорем. Таким образом, полученные результаты, вообще говоря, дают возможность обнаружить критическое значение ($k=n$) параметра k при произвольном дробном значении n.

Пример. Обозначим через $g(x)$ периодическую функцию с периодом 2π, равную нулю в промежутках $\left[-\pi, \frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ и равную $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty}\ln^{-2}\nu\cdot e^{8i\nu x}$ в интервале $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Функция $g(x)$ суммируема** в $[-\pi, \pi]$. Разложим ее в ряд Фурье

$$g(x)\sim\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} g_\nu e^{i\nu x}.$$

Легко видеть, что

$$g_{8\nu}=\begin{cases}\ln^{-2}\nu & (\nu=2,\ 3,\ 4,\dots)\\ 0 & (\nu=1,\ 0,\ -1,\dots).\end{cases} \tag{4.7}$$

Возьмем теперь произвольное число $n\,(0<n<1)$ и построим ступенчатую функцию $\alpha(\lambda)\,(-\infty<\lambda<\infty)$ со скачками в целых точках $\lambda=\nu$, соответственно равными $(i\nu)^n g_\nu$. Очевидно, $\alpha(\lambda)\in V_n$, причем $\alpha_n^*(\lambda)\equiv 0$. Опираясь на свойства интегралов дробного порядка от периодических функций ([5], стр. 222—223), нетрудно проверить, что функция

$$E_2(x;\ \alpha)=\sum_{\nu\neq 0}\frac{g_\nu e^{i\nu x}}{(i\nu)^{2-n}}$$

принадлежит классу $D_{2-n}(-\pi, \pi)$ и что производная порядка $2-n$ от этой функции в классе $D_{2-n}(-\pi, \pi)$ бесконечно дифференцируема в интервале $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Из теорем 1, 5 с учетом (4.5) следует существование

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\left(1-\frac{|\lambda|}{N}\right)^n d\alpha(\lambda).$$

С другой стороны, каково бы ни было $k\,(0\leqslant k<n)$, величина

$$\int_{-N}^{N}\left(1-\frac{|\lambda|}{N}\right)^k d\alpha(\lambda)=\sum_{|\nu|<N}\left(1-\frac{|\nu|}{N}\right)^k(i\nu)^n g_\nu$$

* Равный, очевидно, $T(0)\,G^{(m)}(0)$, где под $G^{(m)}(0)$ следует понимать либо величину $\frac{1}{\Gamma(-m)}\int\limits_{-\infty}^{0}(-x)^{-m-1}G(x)\,dx$, либо сумму ряда Фурье функции $G(x)$ в точке $x=0$.

** См. [5], стр. 112—119.

не имеет предела при $N \to \infty$. В противном случае при $\nu \to \infty$ было бы ([9], стр. 146—147, 132)

$$i^n g_\nu + (-i)^n g_{-\nu} = o(\nu^{k-n}),$$

что несовместимо с (4.7).

Пользуясь соотношением (4.3), можно детально исследовать влияние дифференциальных свойств функции $G(x)$ на асимптотическое поведение величины

$$\tau(N) = \int_{-\infty}^{\infty} T\left(\frac{\lambda}{N}\right) d\alpha(\lambda).$$

Пусть для простоты функция $T(\lambda)$ финитна и $k \geqslant 1$. Тогда

I) при $m+1 > n-k$

$$\tau(N) = o(N^{m+1});$$

II) если в некоторой окрестности нуля $G(x) \in L^p$ $(1 < p \leqslant 2)$, то при $m + \frac{1}{p} > n-k$

$$\tau(N) = o(N^{m+\frac{1}{p}});$$

III) если в некоторой окрестности нуля $G(x)$ ограничена, то при $m \geqslant n-k$

$$\tau(N) = O(N^m \ln N);$$

IV) если в точке $x=0$ $G(x)$ непрерывна, то при $m \geqslant n-k$

$$\tau(N) = o(N^m \ln N);$$

V) если функция $G(x)$ удовлетворяет одному из условий I—IV, но нарушается неравенство между n, m, k, фигурирующее в соответствующем условии, то

$$\tau(N) = O(N^{n-k});$$

если, сверх того, имеет место (4.5), то

$$\tau(N) = o(N^{n-k}).$$

На доказательствах этих утверждений мы не будем останавливаться.

§ 5. Модифицированное условие $C(h;\ n,\ m)$

В ряде важных приложений условие $C(h;\ n,\ m)$ возникает в следующей модифицированной форме.

Пусть монотонная функция $\rho(\lambda)$ такова, что при некотором $h > 0$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\rho(\lambda)$$

сходится на всех функциях $f(x) \in F_h^{(\infty)}$ и пусть существуют такая функция $\sigma(\lambda)$, принадлежащая некоторому классу V_n, такая суммируемая функция $G(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ и такое число m $(0 \leqslant m \leqslant n)$, что на всех функциях $f(x) \in F_h^{(\infty)}$ имеет место тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\sigma(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(x)\, G(-x)\, dx. \tag{5.1}$$

Если известно, что $\rho(\lambda) \in V_n$, то из сформулированного условия вытекает условие $C(h;\ n,\ m)$ для разности $\alpha(\lambda) = \rho(\lambda) - \sigma(\lambda)$. Оказывается, что $\rho(\lambda)$ автоматически принадлежит классу V_n, в силу тождества (5.1). Более того, справедлива

Теорема 7. *Если функция $\rho(\lambda)$ удовлетворяет модифицированному условию $C(h;\ n,\ m)$, то*

$$\rho_n^*\left(\frac{1}{h}\right) \leq C\sigma_n^*\left(\frac{1}{h}\right),$$

где C — абсолютная константа.

Доказательство. Покажем, что для произвольной функции $f(x) \in F_h^{(\infty)}$

$$\lim_{a\to\pm\infty} |a|^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\, e^{iax}\}^{(m)} G(-x)\, dx = 0. \tag{5.2}$$

С этой целью заметим, что

$$f(x)\, e^{iax} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda - a)\, e^{i\lambda x} d\lambda,$$

и так как функция $E_f(\lambda)$ при $\lambda \to \pm\infty$ стремится к нулю быстрее любой степени $|\lambda|$, то

$$\{f(x)\, e^{iax}\}^{(m)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\lambda)^m E_f(\lambda - a)\, e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\, e^{iax}\}^{(m)} G(-x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\lambda + ia)^m E_f(\lambda)\, E_G(\lambda + a)\, d\lambda.$$

Из этой формулы непосредственно следует (5.2), ибо функция

$$|a|^{-n} (i\lambda + ia)^m E_f(\lambda)\, E_G(\lambda + a)$$

стремится к нулю при $a \to \pm\infty$ и мажорируется суммируемой функцией $\mathrm{const} \cdot (|\lambda| + 1)^m |E_f(\lambda)|$ для всех a ($|a| \geq 1$).

Доказываемая теорема получается из соотношения (5.2) простым повторением рассуждений, примененных В. А. Марченко* в случае целого $n = m$ (лемма 1.1 [4]).

Замечание. Из упомянутых рассуждений В. А. Марченко видно, что для справедливости теоремы 7 достаточно иметь тождество (5.1) на всех функциях из $F_h^{(\infty)}$, преобразование Фурье которых неотрицательно.

§ 6. Примеры

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие применение общих теорем. Во-первых, коснемся одного вопроса, близкого к тауберовой теореме Икеара*.

Пусть для некоторой неубывающей функции $\rho(\lambda)$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\lambda} d\rho(\lambda) \quad (z = \zeta + ix)$$

сходится для всех $\zeta > 0$ и допускает представление

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\lambda} d\rho(\lambda) = \sum_{j=0}^{[\delta]} A_j z^{j-\delta} + \varepsilon(z) \quad (A_j = \mathrm{const}), \tag{6.1}$$

где δ — заданное число, которое мы для определенности предположим большим единицы и нецелым; $\varepsilon(z)$ — функция, стремящаяся при $\zeta \to +0$ к определенному пределу $\varepsilon(ix)$ в среднем в некотором интервале $(-h,\ h)$. Требуется при этих условиях изучить асимптотическое поведение функции $\rho(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$.

* См. по этому поводу стр. [10], 254—258 и [4].

Будем считать функцию $\rho(\lambda)$ нормированной так, что $\rho(+0)=0$; это не умаляет общности рассмотрения.

Вводя функцию

$$\sigma(\lambda)=\sum_{j=0}^{[\delta]}\frac{A_j|\lambda|^{\delta-j}\operatorname{sign}\lambda}{\Gamma(\delta-j+1)}\in V_{\delta-1},$$

можно записать (6.1) следующим образом

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z\lambda}d\rho(\lambda)=\int_{0}^{\infty}e^{-z\lambda}d\sigma(\lambda)+\varepsilon(z). \tag{6.2}$$

Примем во внимание, что из условия задачи следует сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{+0}e^{-\zeta\lambda}d\rho(\lambda)$$

для всех значений $\zeta>0$. *Поэтому равномерно в каждом конечном интервале оси* x

$$\lim_{\zeta\to+0}\int_{-\infty}^{+0}e^{-z\lambda}d\rho(\lambda)=\int_{-\infty}^{+0}e^{-i\lambda x}d\rho(\lambda).$$

Основываясь на этих соображениях, придадим равенству (6.2) вид

$$\int_{+0}^{\infty}e^{-z\lambda}\,d\rho(\lambda)=\int_{0}^{\infty}e^{-z\lambda}\,d\sigma(\lambda)+\varepsilon_1(z), \tag{6.3}$$

где

$$\varepsilon_1(z)=\varepsilon(z)-\int_{-\infty}^{+0}e^{-z\lambda}\,d\rho(\lambda).$$

Умножая обе части равенства (6.3) на произвольную функцию $f(x)\in F_h^{(\infty)}$ и интегрируя по x, получим:

$$\int_{+0}^{\infty}E_f(\lambda)\,e^{-\zeta\lambda}\,d\rho(\lambda)=\int_{0}^{\infty}E_f(\lambda)\,e^{-\zeta\lambda}\,d\sigma(\lambda)+\int_{-h}^{h}f(x)\,\varepsilon_1(\zeta+ix)\,dx. \tag{6.4}$$

Переход к пределу при $\zeta\to+0$ дает

$$\int_{+0}^{\infty}E_f(\lambda)\,d\rho(\lambda)=\int_{0}^{\infty}E_f(\lambda)\,d\sigma(\lambda)+\int_{-h}^{h}f(x)\,\varepsilon_1(ix)\,dx \tag{6.5}$$

по крайней мере для функций $f(x)$ класса F_h^{∞}, преобразование Фурье которых неотрицательно. Но тогда, согласно замечанию к теореме 7,

$$\varlimsup_{a\to\infty}\frac{|\rho(a+\lambda)-\rho(a)|}{a^{\delta-1}}<\infty.$$

Поэтому (6.5) следует из (6.4) для любой $f(x)\in F_h^{(\infty)}$.

Заменяя в (6.5) $f(x)$ на $f(-x)$ и складывая получающееся при этом равенство с равенством (6.5), найдем, что

$$\int_{+0}^{\infty}C_f(\lambda)\,d\rho(\lambda)=\int_{0}^{\infty}C_f(\lambda)\,d\sigma(\lambda)+\frac{1}{2}\int_{-h}^{h}f(x)\,G(-x)\,dx, \tag{6.6}$$

где $C_f(\lambda)$ — косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$ и

$$G(x) = \varepsilon_1(ix) + \varepsilon_1(-ix) = \varepsilon(ix) + \varepsilon(-ix) - \\ -2\int\limits_{-\infty}^{+0} \cos\lambda x \, d\rho(\lambda) \; (|x| \leqslant h). \tag{6.7}$$

Обозначим через $\rho_1(\lambda)$ функцию, получающуюся из $\rho(\lambda)$ нечетным продолжением на отрицательную полуось ($\rho_1(0) = 0$). Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} C_f(\lambda)\, d\rho_1(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} C_f(\lambda)\, d\rho(\lambda) + \int\limits_{-h}^{h} f(x)\, G(-x)\, dx,$$

и окончательно

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\rho_1(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\sigma(\lambda) + \int\limits_{-h}^{h} f(x)\, G(-x)\, dx.$$

Применяя ядро (2.3) для $\varkappa = \delta - 1$ и используя теоремы 2,7, получим после очевидных преобразований

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\left|\int\limits_{+0}^{N}\left(1-\frac{\lambda^2}{N^2}\right)^{\delta-1} d\rho(\lambda) - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{[\delta]} \frac{B\left(\delta, \frac{\delta-j}{2}\right)}{\Gamma(\delta-j)} A_j N^{\delta-j} - \right. \\ \left. -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-N}^{N}\left(1-\frac{\lambda^2}{N^2}\right)^{\delta-1} E_G(\lambda)\, d\lambda\right| \leqslant \frac{C(\delta)\, A_0}{h^\delta},$$

где $C(\delta)$ — константа, зависящая только от δ.

Выведенную оценку можно упростить, налагая на функцию $\varepsilon(ix)$ добавочные ограничения. Если, например, функция $\varepsilon(ix)$ непрерывна в точке $x = 0$, то [14], в силу (6.7),

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-N}^{N}\left(1-\frac{\lambda^2}{N^2}\right)^{\delta-1} E_G(\lambda)\, d\lambda = \varepsilon(0) + \rho(-\infty)$$

и

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\left|\int\limits_{+0}^{N}\left(1-\frac{\lambda^2}{N^2}\right)^{\delta-1} d\rho(\lambda) - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{[\delta]} \frac{B\left(\delta, \frac{\delta-j}{2}\right)}{\Gamma(\delta-j)} A_j N^{\delta-j} - \varepsilon(0) - \right. \\ \left. -\rho(-\infty)\right| \leqslant \frac{C(\delta)\, A_0}{h^\delta}.$$

В качестве второго примера получим некоторые результаты, относящиеся к суммированию рядов Фурье почти-периодических функций.

Пусть $G(x)$ — почти-периодическая функция Бора с рядом Фурье

$$G(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \gamma_\nu e^{i\lambda_\nu x},$$

и пусть ее спектр не имеет предельных точек на конечном расстоянии. Обозначим через $\mathfrak{M}(a, b)$ число точек спектра в интервале (a, b) и предположим, что

$$\overline{\lim_{|a|\to\infty}}\; |a|^{-n}\, \mathfrak{M}(a, a+\lambda) < \infty \tag{6.8}$$

для некоторого $n \geqslant 0$.

Как известно ([11], стр. 66—71), существует такая матрица $(\Lambda_{j\nu})_{j,\,\nu=1}^{\infty}$, что все ряды

$$\Lambda_j(x) \equiv \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \Lambda_{j\nu}\gamma_\nu e^{i\lambda_\nu x} \tag{6.9}$$

сходятся равномерно на всей оси и

$$\lim_{j \to \infty} \Lambda_j(x) = G(x) \tag{6.10}$$

равномерно относительно x. При этом

$$0 \leqslant \Lambda_{j\nu} \leqslant 1, \ \lim_{j \to \infty} \Lambda_{j\nu} = 1. \tag{6.11}$$

Возьмем любую функцию $f(x) \in F_{\pi}^{(\infty)}$. На основании (6.9) — (6.11)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, G(-x)\, dx = \lim_{j \to \infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \Lambda_{j\nu} \gamma_\nu E_f(\lambda_\nu) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \gamma_\nu E_f(\lambda_\nu),$$

ибо ряд в правой части сходится абсолютно, в силу (6.8). Вводя ступенчатую функцию $\alpha(\lambda)$ со скачками в точках $\lambda = \lambda_\nu$, соответственно равными γ_ν, будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\alpha(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, G(-x)\, dx.$$

Еще раз используя (6.8), обнаруживаем, что $\alpha(\lambda) \in V_n$, причем $\alpha_n^*(\lambda) \equiv 0$. Следовательно,

$$\lim_{N \to \infty} \left| \int_{-N}^{N} \left(1 - \frac{\lambda^2}{N^2}\right)^n d\alpha(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} \left(1 - \frac{\lambda^2}{N^2}\right)^n E_{G_1}(\lambda)\, d\lambda \right| = 0, \tag{6.12}$$

где $G_1(x)$ — функция, совпадающая с $G(x)$ при $|x| < \pi$ и равная нулю при $|x| \geqslant \pi$. В свою очередь из (6.12) вытекает, что при $n > 0$

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{|\lambda_\nu| < N} \left(1 - \frac{\lambda_\nu^2}{N^2}\right)^n \gamma_\nu = G(0).$$

Если же $n = 0$, то (6.12) дает

$$\lim_{N \to \infty} \left| \sum_{|\lambda_\nu| < N} \gamma_\nu - \sum_{|\nu| < N} \gamma_\nu^{(0)} \right| = 0, \tag{6.13}$$

где $\gamma_\nu^{(0)}$ — коэффициенты обычного комплексного ряда Фурье функции $G(x)$ в интервале $(-\pi, \pi)$. Равенством (6.13) устанавливается равносходимость ряда Фурье почти периодической функции Бора и обычного ряда Фурье этой функции при следующем ограничении на спектр:

$$\overline{\lim_{|a| \to \infty}}\, \mathfrak{M}(a, a + \lambda) < \infty.$$

Последнее условие, очевидно, выполняется, если расстояние между любыми двумя точками спектра ограничено снизу положительным числом.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ КЛАССА V_n

Для любой функции $\alpha(\lambda)$ ограниченной вариации в каждом конечном интервале можно ввести величину

$$\alpha_n^*(\lambda) \equiv \overline{\lim_{|a| \to \infty}}\, |a|^{-n} \mathop{Var}_{a}^{a+\lambda} \{\alpha(\mu)\},$$

конечность которой для всех значений λ равносильна принадлежности функции $\alpha(\lambda)$ классу V_n. Очевидно, величина $\alpha_n^*(\lambda)$ есть неотрицательная четная функция * от λ, неубывающая при $\lambda \geqslant 0$. Кроме того, для любых λ_1, λ_2

$$\alpha_n^*(\lambda_1 + \lambda_2) \leqslant \alpha_n^*(\lambda_1) + \alpha_n^*(\lambda_2). \tag{п. 1.1}$$

* могущая принимать и бесконечные значения.

Возьмем произвольное $\lambda_0 \neq 0$. Из неравенства (п. 1.1) и свойств функции $\alpha_n^*(\lambda)$ вытекает, что при любом λ

$$\alpha_n^*(\lambda) = \alpha_n^*(|\lambda|) \leqslant \alpha_n^*\left(\left[1 + \left|\frac{\lambda}{\lambda_0}\right|\right] |\lambda_0|\right) \leqslant \left[1 + \left|\frac{\lambda}{\lambda_0}\right|\right] \alpha_n^*(|\lambda_0|) \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 + \left|\frac{\lambda}{\lambda_0}\right|\right) \alpha_n^*(\lambda_0).$$

Следовательно, для принадлежности функции $\alpha(\lambda)$ классу V_n достаточно, чтобы величина $\alpha_n^*(\lambda)$ была конечной для одного какого-нибудь значения $\lambda \neq 0$.

Отметим еще несколько свойств функций класса V_n.

Пусть $\alpha(\lambda) \in V_n$. Положим

$$A(\lambda) = \sup_a (1 + |a|)^{-n} V_a^{a+\lambda} ar\, \{\alpha(\mu)\}.$$

Легко показать [4], что каково бы ни было $\lambda_0 > 0$,

$$A(\lambda) \leqslant \frac{A(\lambda_0)}{\lambda_0} (1 + \lambda_0 + |\lambda|)^{n+1}. \tag{п. 1.2}$$

Далее, очевидно,

$$|\alpha(\lambda) - \alpha(0)| \leqslant \underset{0}{\overset{\lambda}{Var}}\, \{\alpha(\mu)\} \leqslant A(\lambda),$$

откуда, в силу (п. 1.2), следует оценка

$$\alpha(\lambda) = O(1 + |\lambda|^{n+1}).$$

Наконец, если некоторая функция $T(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ удовлетворяет условию

$$\sup_\lambda (1 + |\lambda|^s) |T(\lambda)| \equiv T_s < \infty$$

при каком-нибудь $s > n + 1$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |T(\lambda - \mu)| |d\alpha(\lambda)| \leqslant C(1 + |\mu|^n),$$

где

$$C = C_{n,s} \frac{A(\lambda_0)}{\lambda_0} (1 + \lambda_0)^n T_s,$$

λ_0 — любое положительное число, $C_{n,s}$ — константа, зависящая только от n и s. Для доказательства достаточно учесть, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |T(\lambda - \mu)| |d\alpha(\lambda)| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{(j,\, j+1)} |T(\lambda)| |d_\lambda \alpha(\lambda + \mu)| \leqslant$$
$$\leqslant T_s \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\underset{j+\mu-0}{\overset{j+\mu+1+0}{Var}} \{\alpha(\lambda)\}}{1 + |j|^s} \leqslant C_n A(2) T_s \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\left(1 + \left|j + \mu - \frac{1}{2}\right|\right)^n}{1 + |j|^s} \leqslant$$
$$\leqslant C'_{n,s} A(2) T_s (1 + |\mu|^n),$$

где C_n — константа, зависящая только от n, $C'_{n,s}$ — константа, зависящая только от n и s.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ОБ ИНТЕГРАЛАХ И ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Во введении были сформулированы определения интеграла и производной дробного порядка. Ниже излагаются без доказательств использованные на протяжении работы свойства интегралов и производных дробного порядка.

Обозначим через $f(x)$ произвольную функцию, суммируемую в некотором интервале $(-\infty, a)$ $(a \leqslant \infty)$.

Для любого $\alpha\,(0<\alpha<1)$ интеграл порядка α от функции $f(x)$ абсолютно сходится для почти всех x и суммируем в каждой конечной части интервала $(-\infty, a)$. Во всем интервале $(-\infty, a)$ функция $f_{(\alpha)}(x)$ может не быть суммируемой, но она заведомо суммируема с весом $\frac{1}{1+|x|}$.

Преобразование Фурье функции $f_{(\alpha)}(x)$ $(a=\infty, 0<\alpha<1)$ вычисляется по формуле

$$E_{f_{(\alpha)}}(\lambda)=(i\lambda)^{-\alpha}E_f(\lambda),$$

причем равномерно относительно x_1, x_2

$$\int_{x_1}^{x_2} f_{(\alpha)}(x)e^{-i\lambda x}\,dx = O(|\lambda|^{-\alpha}).$$

Подчеркнем, что всюду в настоящей работе степенная функция z^θ с произвольным показателем θ определяется формулой

$$z^\theta = e^{\theta(\ln|z|+i\arg z)} \quad (-\pi<\arg z\leqslant\pi)$$

и при $z=0$ доопределяется, если возможно, по непрерывности. Кроме свойств, общих всем ветвям многозначной степенной функции, выделенная ветвь обладает следующими особыми свойствами:

$$\begin{array}{lll} 1)\ (z^{\theta_1})^{\theta_2}=z^{\theta_1\theta_2} & \text{при } -\pi<\theta_1\arg z\leqslant\pi; \\ 2)\ (z_1 z_2^{\pm 1})^\theta = z_1^\theta z_2^{\pm\theta} & \text{при } -\pi<\arg z_1\pm\arg z_2\leqslant\pi; \\ 3)\ \overline{z^\theta}=(\bar z)^{\bar\theta} & \text{при } \qquad \arg z\neq\pi. \end{array}$$

Переходя к рассмотрению производных дробного порядка, прежде всего отметим, что при нецелом α значение $f^{(\alpha)}(x)$ зависит от значений функции f на всей полуоси $(-\infty, x)$. В этом смысле операция дифференцирования нецелого порядка является нелокальной. Но, между прочим, поведение функции $f^{(\alpha)}(x)$ в каком-либо интервале (в частности, существование $f^{(\alpha)}(x)$ в фиксированной точке интервала) определяется только значениями функции $f(x)$ в данном интервале. Действительно, функция $\varphi(x)$, равная нулю при $x>a_1$ $(a_1<a)$ имеет в интервале (a_1, a) производную любого порядка $\alpha>0$, равную

$$\varphi^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_{-\infty}^{a_1}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha+1}}.$$

Для операции дифференцирования нецелого порядка характерно также отсутствие симметрии по отношению к перемене знака независимой переменной. Например, функция e^{-x} обладает производными всех порядков, в то время как функция e^x не имеет производных нецелых порядков. Более интересен пример четной функции

$$f(x)=\begin{cases}(1-x^2)^\alpha & (|x|<1;\ \alpha \text{ — нецелое, } \alpha>0),\\ 0 & (|x|\geqslant 1)\end{cases}$$

для которой производная порядка α в точке $x=-1$ испытывает скачок, а в точке $x=1$ имеет логарифмическую особенность.

Несмотря на указанное различие многие свойства производных дробного порядка близки к соответствующим свойствам производных целого порядка. В частности, весьма существенно, что при определенных достаточно широких условиях функцию $f(x)$ можно восстановить по функции $f^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha>0)$ с помощью интегрирования порядка α. Для наших целей удобна следующая формулировка этого факта: если функция $f(x)$ обладает всюду производной порядка $\alpha-1$ $(\alpha \geqslant 0)$, представимой в виде

$$f^{(\alpha-1)}(x)=f^{(\alpha-1)}(x_0)+\int_{x_0}^{x} f^{(\alpha)}(t)\,dt \quad (x_0 \leqslant a),$$

где $f^{(\alpha)}(x)$ — функция* ограниченной вариации в каждом конечном интервале промежутка $(-\infty, a)$, и если

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f^{(\alpha)}(x)=0,$$

$$\int_{-\infty} |x|^{\alpha}\,|df^{(\alpha)}(x)|<\infty,$$

то для почти всех x

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{\alpha}\,df^{(\alpha)}(t). \tag{п.2.1}$$

Если α — *натуральное число или, если функция $f(x)$ непрерывна, то представление* (п.2.1) имеет место для всех значений x.

Если непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, обеспечивающим справедливость формулы (п.2.1), то $f(x)$ дифференцируема любое число раз, меньшее α, и

$$f^{(\beta)}(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{\alpha-\beta}\,df^{(\alpha)}(t) \quad (\beta=0,1,2,\ldots;\ \beta<\alpha).$$

К этому замечанию примыкает следующее утверждение: если непрерывная функция $f(x)$, стремящаяся к нулю при $x\to-\infty$ обладает абсолютно непрерывной производной порядка $\alpha-1$ $(\alpha>0)$, причем

$$\int_{-\infty} |x|^{\alpha-\varepsilon}\,|f^{(\alpha)}(x)|\,dx<\infty$$

для всех $\varepsilon>0$, а в случае $\alpha>1$ еще и

$$\lim_{x\to-\infty} f^{(\alpha-1)}(x)=0,$$

то фунция $f(x)$ имеет абсолютно непрерывную производную любого порядка $\beta-1$ $(0<\beta<\alpha)$ и функция $f^{(\beta)}(x)$ почти всюду совпадает с интегралом порядка $\alpha-\beta$ от функции $f^{(\alpha)}(x)$.

Отметим еще, что если функция $f(x)$ в некотором интервале (x_1, x_2) обладает производной некоторого целого порядка $\nu-1$ $(\nu\geqslant 1)$, абсолютно непрерывной в каждом внутреннем сегменте, то при любом α $(0<\alpha<\nu)$ функция $f^{(\alpha-1)}(x)$ существует всюду в (x_1, x_2) и абсолютно непрерывна в любом внутреннем сегменте. Если при этом $f^{(\nu-1)}(x)$ удовлетворяет условию Lip 1 в каждом внутреннем сегменте, то функция $f^{(\alpha)}(x)$ непрерывна в интервале (x_1, x_2).

Перейдем к вопросу о преобразовании Фурье производной дробного порядка. При этом, конечно, мы будем считать $a=\infty$.

Если функция $f(x)$, стремящаяся к нулю при $|x|\to\infty$, обладает абсолютно непрерывной производной порядка $\alpha-1$ $(\alpha>0)$ и, если при $\alpha>1$

$$\lim_{|x|\to\infty} f^{(\alpha-1)}(x)=0,$$

* Так как функция $f^{(\alpha)}(x)$ почти всюду совпадает с производной порядка α от $f(x)$, то мы сохраняем для нее обозначение производной.

то имеет место обычная формула

$$E_{f(\alpha)}(\lambda) = (i\lambda)^{\alpha} E_f(\lambda).$$

Наоборот, если некоторая функция $E(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ при некотором $\alpha > 0$ удовлетворяет условию

$$\int_{-1}^{1} |\lambda|^{\alpha-[\alpha+1]} |E(\lambda)| d\lambda + \int_{|\lambda|\geqslant 1} |\lambda|^{\alpha} |E(\lambda)| d\lambda < \infty,$$

то функция

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (-\infty < x < \infty) \qquad (п. 2.2)$$

при всех x имеет производную порядка α, равную

$$f^{(\alpha)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (i\lambda)^{\alpha} E(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Если функция $E(\lambda)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям при некотором α $(0 < \alpha < 1)$ и функция $f(x)$ определена формулой (п. 2.2), то для любой суммируемой функции $g(x)$ имеет место формула интегрирования по частям

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(\alpha)}(x) g_{(\alpha)}(-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(-x) dx,$$

причем сходимость фигурирующих здесь интегралов также обеспечена.

В заключение обзора остановимся на свойствах функций класса $D_\alpha(a, b)$.

Во-первых, для принадлежности функции $f(x)$ классу $D_\alpha(a, b)$ достаточно, чтобы в интервале $[a, b]$ эта функция имела абсолютно непрерывную производную порядка $[\alpha]$. В частности, любая целая функция $W(x)$ принадлежит всем классам $D_\alpha(a, b)$, причем если

$$W(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{W^{(j)}(a)(x-a)^j}{j!}$$

то

$$W_{[a,\, b]}^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{W^{(j+[\alpha])}(a)(x-a)^{j+[\alpha]-\alpha}}{\Gamma(j+[\alpha+1]-\alpha)} & (a < x < b) \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{W^{(j+[\alpha])}(a)(x-a)^{j+[\alpha]-\alpha} - W^{(j+[\alpha])}(b)(x-b)^{j+[\alpha]-\alpha}}{\Gamma(j+[\alpha+1]-\alpha)} & (x > b) \end{cases}$$

Всякая функция $f(x) \in D_\alpha(a, b)$ допускает представление

$$f(x) = \sum_{j=0}^{[\alpha-1]} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^j}{j!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f_{[a,\, b]}^{(\alpha)}(t) dt,$$

справедливое для почти всех (а при $\alpha \geqslant 1$ — для всех) значений $x \in [a, b]$. Наоборот, если $0 < \alpha < 1$ и $g(x)$ — произвольная функция, суммируемая в некотором интервале $(-\infty, c)$ $(c \leqslant \infty)$, то интеграл

$$\int_{-\infty}^{x} (x-t)^{\alpha-1} g(t)\, dt$$

принадлежит классу $D_\alpha(a, b)$ $(a < b \leqslant c)$.

Наконец, если функция $f(x)$ принадлежит классу $D_\alpha(a, b)$ и удовлетворяет граничным условиям *

$$f^{(j)}(a) = f^{(j)}(b) = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots [\alpha - 1]),$$

то функция, равная $f(x)$ в интервале $[a, b]$ и равная нулю вне этого интервала, обладает абсолютно непрерывной производной любого порядка $\beta - 1$ $(0 < \beta \leqslant \alpha)$, причем производная порядка β от этой функции почти всюду равна интегралу порядка $\alpha - \beta$ от $f_{[a, b]}^{(\alpha)}(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Левитан. Об одной специальной тауберовой теореме. Изв. АН СССР, серия матем., **17** (1953), 269—284.

2. Б. М. Левитан. О разложении по собственным функциям оператора Лапласа. Матем. сб., **35 (77)**, 2 (1954), 267—316.

3. Б. М. Левитан. О разложении по собственным функциям уравнения $\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, \ldots x_n)\} u = 0$. Изв. АН СССР, серия матем., **20** (1956), 469—484.

4. В. А. Марченко. Теоремы тауберова типа в спектральном анализе дифференциальных операторов. Изв. АН СССР, серия матем., **19** (1955), 381—422.

5. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. ГОНТИ, 1939.

6. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. Гостехиздат, 1953.

7. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций. ч. 1, ИЛ, 1949.

8. В. Л. Гончаров. Теория интерполирования и приближения функций. Гостехиздат, 1954.

9. Г. Харди. Расходящиеся ряды. ИЛ, 1951.

10. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. Гостехиздат, 1947.

11. Б. М. Левитан. Почти периодические функции. Гостехиздат, 1953.

12. Hardy G. H., Littlewood I. E. Some properties of fractional integrals. Math. Z. **27** (1928), 565—606.

13. Hobson E. W. On a general convergence theorem. Proc. of the Lond. Math. Soc. **6** (1908), 349—395.

14. Bochner S. Summation of multiple Fourier series by spherical means. Trans. of the Amer. Math. Soc. **40** (1936), 175—207.

* При $\alpha < 1$ никаких граничных условий нет.