Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Г. Ч. Курінний, О. М. Невмержицька, О. О. Шугайло

ПРЯМА ТА ПЛОЩИНА У ТРИВИМІРНОМУ ДІЙСНОМУ ПРОСТОРІ

Навчально-методичний посібник з аналітичної геометрії
для студентів 1-го курсу механіко-математичного факультету

Харків – 2015

Зміст

1 Пряма в афінному тривимірному просторі **3**

1.1 Векторне та параметричне рівняння прямої в афінному просторі . 3

1.2 Канонічне рівняння прямої 4

1.3 Рівняння прямої “через дві точки“ 5

2 Площина в афінному просторі **6**

2.1 Визначення та векторне рівняння 6

2.2 Параметричне рівняння площини 8

2.3 Умови колінеарності і неколінеарності векторів. 9

2.4 Рівняння площини “через точку паралельно двом неколінеарним векторам“, рівняння площини “через три точки“, загальне рівняння площини 11

2.5 Загальне рівняння прямої у просторі 15

3 Взаємне розташування прямих та площин **15**

3.1 Дві площини загального розташування 15

3.2 Паралельність двох площин 17

3.3 Паралельність площини і вектора, паралельність площини і прямої 18

3.4 Взаємне розташування прямої та площини в афінному просторі . 19

3.5 В’язка та жмуток площин 20

4 Площина в евклідовому тривимірному просторі **22**

4.1 Нормаль, вектор нормалі, векторне рівняння площини 23

4.2 Рівняння площини “через точку перпендикулярно вектору“ 24

4.3 Взаємне розташування прямих та площин в евклідовому просторі. Кут між площинами. Кут між прямою та площиною 24

4.4 Відхилення від точки до площини. Нормальне рівняння площини. 25

4.5 Відстань від точки до площини 28

4.6 Відстань від точки до прямої у просторі 28

4.7 Спільний перпендикуляр двох мимобіжних прямих 29

4.8 Відстань між мимобіжними прямими 29

5 Малий шляхетний набір задач на площину **30**

6 Приклади **31**

1 Пряма в афінному тривимірному просторі

Нагадаємо, що в афінному просторі система координат може бути будь-якою (косоугольною) та скалярний добуток не використовується. Пряма у просторі визначається так само, як і пряма на площині. Вважаємо, що читач знайомий з темою "Пряма на площині", якщо ж ні, то рекомендуємо ознайомитись.

1.1 Векторне та параметричне рівняння прямої в афінному просторі

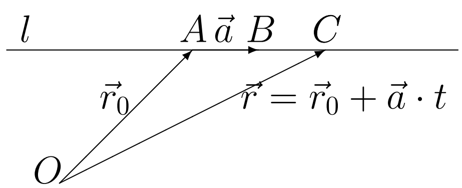
Векторне рівняння прямої в афінному просторі не залежить від вимірності простору, тобто векторне рівняння прямої в тривимірному просторі таке саме, як і на афінній площині.

Твердження 1.1 *Нехай є точка O (точка відліку), пряма l і точки A, B на цій прямій $A \neq B$. Позначимо*

$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_0, \qquad \overrightarrow{AB} = \vec{a},$$

Точка C з радіусом-вектором $r = \overrightarrow{OC}$ лежить на прямій l тоді і тільки тоді коли

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} \cdot t, \qquad \vec{a} \neq \vec{0}. \tag{1}$$



Визначення 1.1 *Рівняння (1) називається векторним рівнянням прямої, а вектор $\vec{a}$ в ньому називається напрямним вектором прямої.*

Запишемо векторне рівняння покоординатно

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot t, \qquad \{a_1, a_2, a_3\} \neq \vec{0},$$

Отримаємо наступне твердження.

Твердження 1.2 *Кожна пряма у просторі може бути задана рівнянням вигляду*

$$\begin{cases} x = & x_0 + a_1 \cdot t, \\ y = & y_0 + a_2 \cdot t, \qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0 \\ z = & z_0 + a_3 \cdot t. \end{cases} \tag{2}$$

і кожне рівняння вигляду (2) задає пряму в тривимірному дійсному афінному просторі.

Визначення 1.2 *Рівняння (2) називається параметричним рівнянням прямої у тривимірному просторі.*

Приклади.

1. Якщо пряма проходить через точку $A(2,5,0)$ і має напрямний вектор $\vec{a} = \{-1,0,3\}$. Тоді $\vec{r}_0 = \{2,5,0\}$ і векторним рівнянням цієї прямої буде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot t.$$

Те ж саме рівняння можна подати в покоординатному записі, тобто у вигляді параметричного рівняння.

$$\begin{cases} x = & 2 - t, \\ y = & 5, \\ z = & 3t. \end{cases}$$

2. Якщо пряма задана параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = & -t, \\ y = & 3, \\ z = & 0, \end{cases}$$

то переписуємо його із явною вказівкою всіх складових

$$\begin{cases} x = & 0 - 1 \cdot t, \\ y = & 3 + 0 \cdot t, \\ z = & 0 + 0 \cdot t. \end{cases}$$

і тоді переписуємо у вигляді векторного рівняння:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t.$$

1.2 Канонічне рівняння прямої

Знаходячи t з усіх рівнянь параметричного рівняння (2) і прирівнюючи їх, ми одержуємо рівняння тієї ж прямої у вигляді

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \tag{3}$$

Визначення 1.3 *Рівняння (3) називаються канонічним рівнянням прямої, що проходить через точку (x_0, y_0, z_0) в напрямку вектора $\{a_1, a_2, a_3\}$ у тривимірному просторі.*

В канонічному рівнянні немає нічого незвичного, коли вектор $\{a_1, a_2, a_3\}$ не має нульових координат. Якщо ж нульові координати є, то ці рівняння стають умовними — дріб з 0 у знаменнику коректний, коли і чисельник дорівнює нулю.

Наведемо приклади. Нехай є точка $A = (2, 5, 0)$. Пряма, що проходить через точку A в напрямку вектора $\vec{a} = \{2, 3, 1\}$ має звичайне канонічне рівняння:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-0}{1}.$$

Якщо ж напрямний вектор $\vec{a}$ має нульові координати $\vec{a} = \{0, 2, 3\}$, то канонічне рівняння приймає вигляд

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-0}{3},$$

яке за домовленістю розуміється як система

$$x = 2, \quad \frac{y-5}{2} = \frac{z-0}{3}.$$

А якщо напрямний вектор $\vec{a}$ має дві нульові координати, наприклад, $\vec{a} = \{0, 1, 0\}$, то рівняння

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-0}{0}.$$

за домовленістю розуміється як система

$$x = 2, \quad z = 0.$$

В даному випадку змінна y може приймати будь-яке значення. Тобто це пряма, яка проходить через точку $(2, 5, 0)$ паралельно осі Oy.

1.3 Рівняння прямої “через дві точки“

Розглянемо випадок, коли потрібно написати рівняння прямої, що проходить через дві різні задані точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. В цьому випадку ми можемо вважати, що пряма проходить через точку A у напрямку вектора $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}$, і переписати рівняння (3) у вигляді

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{4}$$

Визначення 1.4 *Рівняння (4) називаються рівняннями прямої “через дві точки“*

Приклад. Записати рівняння сторін (прямих, на яких лежать сторони) трикутника із вершинами $A(2, -2, 1)$, $B(3, 3, 0)$, $C(-1, 7, 2)$.

Скористаємося формулами (4) для сторони AB:

$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y+2}{3+2}=\frac{z-1}{0-1},\quad \frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-1}{-1};$$

для сторони AC:

$$\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y+2}{7+2}=\frac{z-1}{2-1},\quad \frac{x-2}{-3}=\frac{y+2}{9}=\frac{z-1}{1};$$

для сторони BC:

$$\frac{x-3}{-1-3}=\frac{y-3}{7-3}=\frac{z-0}{2-0},\quad \frac{x-3}{-4}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{2}.$$

Зауважимо, що і канонічне рівняння прямої і рівняння прямої "через дві точки"в тривимірному просторі — це насправді система з двох рівнянь. Пряму в просторі не можливо задати одним рівнянням в координатах. Векторне рівняння — це система з трьох параметричних рівнянь.

2 Площина в афінному просторі

Нагадаємо, що в афінному просторі система координат може бути будь-якою (косоугольною) та скалярний добуток не використовується.

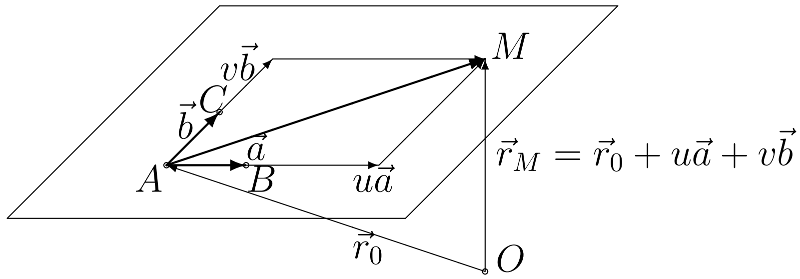
2.1 Визначення та векторне рівняння

Площина є первісним, неозначуваним елементом в елементарній геометрії. Є аксіоми, яким підкоряється площина. Ці аксіоми дозволяють ввести вектори на площині, а також системи координат, і далі одержати рівняння, які задають площину. Будемо користуватися тим, що через три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж єдину, тобто три точки визначають площину. Коли є три точки A, B, C в площині π, які не лежать на одній прямій, то можна ввести систему координат, взявши за початок координат одну з точок (нехай нею буде A) і базисними векторами можна взяти вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\quad \vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Далі з кожною точкою M площини π зв'язуємо її радіус-вектор $\overrightarrow{AM}$, який можна розкласти за базисом $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AM}=u\cdot\overrightarrow{AB}+v\cdot\overrightarrow{AC}\qquad u,v\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Якщо обрано за початок відліку точку O, яка не обов'язково лежить у вибраній площині, то для кожної точки $M\in\pi$ маємо радіус-вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$ і можемо записати

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+u\cdot\overrightarrow{AB}+v\cdot\overrightarrow{AC} \tag{6}$$



Визначення 2.1 *Нехай є три вектори: $\vec{r}_0$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, серед яких вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ не колінеарні. Тоді*

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}, \quad u, v \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

називають векторним рівнянням площини, яка проходить через точку з радіусом-вектором $\vec{r}_0$ паралельно векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ називають напрямними векторами площини.

Твердження 2.1 *Кожна площина може бути задана векторним рівнянням площини, а кожне векторне ріняння площини дійсно задає площину.*

Ця теорема є відправною точкою при вивченні площини в аналітичній геометрії — на межі між елементарною геометрією і вищою. Ретельно доводити теорему про коректність означення векторного рівняння площини не будемо з трьох причин. Перша полягає в тому, що можна уявити шкільний курс математики і, зокрема, геометрії, де вона вже доведена. Друга причина полягає в тому, що доведення ґрунтується на аксіоматиці тривимірного дійсного простору, яка в явному вигляді в пропонованому курсі не сформульована. І третя причина — означення буде використовуватися в більш загальному випадку, де площиною називається те, що може бути задане таким векторним рівнянням, і, таким чином, доводити нічого.

Приклад. Записати векторне рівняння площини, яка проходить через точки A, B, C з координатами $A(1,5,7)$, $B(-3,2,1)$, $C(1,2,2)$.

Точкою відліку за наявності системи координат завжди береться початок цієї системи координат. Тоді

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ \vec{r}_0 = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

і векторним рівнянням площини, що проходить через точки A, B, C, буде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad -\infty < u, v < \infty.$$

Якщо в рівнянні (7) змінні u, v пробігають не всі можливі значення, а лише у певних вказаних межах: $u_1 \le u \le u_2$, $v_1 \le v \le v_2$, то рівняння (7) перетвориться в рівняння частини площини, що обмежена паралелограмом. Зокрема, якщо $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$, то рівняння (7) перетвориться в *рівняння паралелограма*

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}, \quad 0 \le u, v \le 1, \tag{8}$$

що має одну вершину в точці з радіусом-вектором $\vec{r}_0$ і побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$.

2.2 Параметричне рівняння площини

Далі вважаємо, що у просторі є система координат. Оскільки ми не користуємося скалярним добутком, то вважати систему координат прямокутною немає підстав, система координат в загальному випадку косокутна, координати точки і координати радіуса-вектора точки збігаються.

Вибираємо на площині три точки

$$A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2), \quad C(x_3, y_3, z_3),$$

виписуємо координати векторів

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

і далі переписуємо векторне рівняння площини (6) у вигляді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix}$$

Останнє рівняння розглядаємо як матричне, яке означає рівність відповідних елементів, тобто

$$\left\{ \begin{array}{c} x = x_1 + u(x_2 - x_1) + v(x_3 - x_1), \\ y = y_1 + u(y_2 - y_1) + v(y_3 - y_1), \\ z = z_1 + u(z_2 - z_1) + v(z_3 - z_1) \end{array} \right.$$

Ми довели, що площину можна задати системою трьох рівнянь. Оформимо це у вигляді визначення.

Визначення 2.2 *Трійка числових рівнянь*

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 u + b_1 v, \\ y = y_0 + a_2 u + b_2 v, \\ z = z_0 + a_3 u + b_3 v, \end{cases} \tag{9}$$

де вектори

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

не колінеарні, називається параметричним рівнянням площини, що проходить через точку з координами (x_0, y_0, z_0) паралельно векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Твердження 2.2 *Кожна площина може бути задана параметричним рівнянням (9) і кожне параметричне рівняння (9) задає площину.*

Твердження правильне тому, що кожна площина може бути задана векторним рівнянням і кожне векторне рівняння площини задає площину (див. теор. 2.1), а за наявності системи координат від векторного рівняння до параметричного ми перейшли рівносильними перетвореннями.

2.3 Умови колінеарності і неколінеарності векторів.

У векторному і у параметричному рівнянні площини використовуються неколінеарні вектори. Нагадаємо, що два вектори є колінеарними, коли один із них одержується із другого множенням на число.

Нехай у нас є два вектори (10). Якщо $\vec{a} = \vec{0}$, то $\vec{a} = 0 \cdot \vec{b}$ і вектори колінеарні. Якщо $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, і $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ для деякого $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda \neq 0$, $\vec{b} = \dfrac{1}{\lambda}\vec{a}$, тобто кожен із векторів одержується із другого множенням на ненульове число. Рівність $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ означає $a_1 = \lambda b_1, \quad a_2 = \lambda b_2, \quad a_3 = \lambda b_3$. або

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda. \tag{11}$$

Таким чином, якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}$ ненульові, то умова

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \tag{12}$$

є умовою їх колінеарності. Перепишемо умову (12) у вигляді

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}; \qquad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_3}{b_3}, \qquad \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}. \tag{13}$$

Так записану умову колінерності можна пристосувати до випадку, коли вектори мають нульові координати, - для цього можна домовитися, що рівність

$$\frac{a}{b} = \frac{0}{0}$$

є правильною для будь-яких чисел a, b.

Ще один підхід до використання рівностей (13) полягає в застосуванні рівносильностей

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow a_1 b_2 = b_1 a_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0; \tag{14}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_3}{b_3} \Leftrightarrow a_1 b_3 = b_1 a_3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = 0; \tag{15}$$

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \Leftrightarrow a_2 b_3 = b_2 a_3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Сказане дозволяє вважати доведеною наступну теорему.

Твердження 2.3 *Два вектори з координатами* $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b_1, b_2, b_3\}$ *колінеарні тоді і тільки тоді, коли всі три детермінанти*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

дорівнюють нулю. Якщо ж один із них не дорівнює нулю, то вектори не колінеарні.

Згідно з нашими умовами, вектори $\{2, 4, 6\}$ та $\{1, 2, 3\}$ колінеарні, тому що $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3}$. Вектори $\{2, 4, 0\}$ та $\{1, 2, 0\}$ є колінеарними оскільки $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{0}{0}$. Вектори $\{2, 0, 6\}$ та $\{1, 2, 0\}$ не колінеарні, тому що $0 \cdot 0 \neq 2 \cdot 6$ і, відповідно, $\frac{0}{2} \neq \frac{6}{0}$.

Приклади. Перехід від векторного рівняння до параметричного і від параметричного до векторного.

1. Візьмемо площину із векторним рівнянням

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad -\infty < u, v < \infty.$$

Від матричної рівності переходимо до покомпонентних рівностей

$$\begin{cases} x = & 1 - 4u, \\ y = & 5 - 3u - 3v, \\ z = & 7 - 6u - 5v. \end{cases}$$

Це і є параметричне рівняння нашої площини.

2. Нехай маємо параметричне рівняння

$$\begin{cases} x = & 5v, \\ y = & 1 - 3u, \\ z = & 7 + u - v. \end{cases}$$

Знайдемо векторне рівняння цієї площини.

Переписуємо це рівняння так, що у кожному окремому рівнянні були обидві змінні u, v з відповідними коефіцієнтами

$$\begin{cases} x = & 0 + 0 \cdot u + 5 \cdot v, \\ y = & 1 - 3 \cdot u + 0 \cdot v, \\ z = & 7 + 1 \cdot u - 1 \cdot v. \end{cases}$$

Тепер ми можемо перейти до векторного рівняння

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad -\infty < u, v < \infty.$$

2.4 Рівняння площини “через точку паралельно двом неколінеарним векторам“, рівняння площини “через три точки“, загальне рівняння площини

Розглянемо параметричне рівняння площини (9) з умовою неколінеарності напрямних векторів. Оскільки напрямні вектори неколінеарні, то одне із чисел

$$a_1b_2 - b_1a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad a_1b_3 - b_1a_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad a_3b_2 - b_3a_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}.$$

не дорівнює нулю. Нехай

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Розв’яжемо перші два рівняння системи (9), взявши за невідомі u, v.

$$\begin{cases} x - x_0 = a_1u + b_1v, \\ y - y_0 = a_2u + b_2v, \\ z - z_0 = a_3u + b_3v, \end{cases}$$

За формулами Крамера

$$u = \frac{\begin{vmatrix} x - x_0 & b_1 \\ y - y_0 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad v = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & x - x_0 \\ a_2 & y - y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Підставимо знайдені значення u, v в третє рівняння системи (9) і позбудемося знаменника. Одержимо

$$(z-z_0)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_3\begin{vmatrix} x-x_0 & b_1 \\ y-y_0 & b_2 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_1 & x-x_0 \\ a_2 & y-y_0 \end{vmatrix}.$$

В правій частині цього рівняння обчислимо визначники :

$$(z-z_0)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_3((x-x_0)b_2 - b_1(y-y_0)) + b_3(a_1(y-y_0) - (x-x_0)a_2),$$

згрупуємо доданки потрібним чином

$$(z-z_0)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (x-x_0)(a_3b_2 - b_3a_2) + (y-y_0)(b_3a_1 - a_3b_1),$$

перенесемо доданки в ліву частину

$$(x-x_0)(b_3a_2 - a_3b_2) - (y-y_0)(b_3a_1 - b_1a_3) + (z-z_0)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

і запишемо через визначники

$$(x-x_0)\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - (y-y_0)\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + (z-z_0)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (17)$$

На останнє рівняння (17) подивимося з двох різних точок зору. З однієї точки зору рівняння (17) можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (18)$$

Визначення 2.3 *Рівняння (18) називається рівнянням площини "через задану точку паралельно двом неколінеарним векторам".*

Припустимо, що площина визначається трьома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Тоді у рівнянні (18) ми можемо взяти

$$x_0 = x_1, y_0 = y_1, z_0 = z_1, \quad a_1 = x_2 - x_1, a_2 = y_2 - y_1, a_3 = z_2 - z_1,$$

$$b_1 = x_3 - x_1, b_2 = y_3 - y_1, b_3 = z_3 - z_1$$

і одержати рівняння

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (19)$$

Оскільки

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix},$$

то рівняння (19) можна переписати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

Визначення 2.4 *Рівняння (19) та (20) називаються рівняннями площини "через три точки".*

Від параметричного рівняння до рівняння "через точку паралельно двом неколінеарним векторам" і до рівняння "через три точки" ми перейшли за допомогою рівносильних перетворень. Тому можна вважати доведеною наступну теорему

Твердження 2.4 *Кожну площину можна задати рівнянням "через точку паралельно двом неколінеарним векторам" і кожне рівняння "через точку паралельно двом неколінеарним веторам" задає площину. Також кожну площину можна задати рівнянням "через три точки" і кожне рівняння "через три точки" задає площину.*

За другого підходу ми переписуємо рівняння (17) у вигляді

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{21}$$

де

$$A = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, B = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$D = -x_0 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + y_0 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} - z_0 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Причому з огляду на неколінеарність напрямних векторів площини один із коефіцієнтів A, B, C не дорівнює нулю.

Визначення 2.5 *Рівняння (21), де один із коефіцієнтів A, B, C не дорівнює нулю, називається загальним рівнянням площини. Вектор з координатами $\{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\} = \{A,\ B,\ C\}$ називається вектором афінной нормалі площини.*

Твердження 2.5 *Кожну площину можна задати загальним рівнянням, і коже загальне рівняння площини дійсно задає площину.*

Доведення. Ми обґрунтували, що площину, яка задана векторним чи параметричним рівнянням, можна задати загальним рівнянням.

Покажемо тепер, що рівняння (21), де один із коефіцієнтів A, B, C не дорівнює нулю,завжди задає площину, тобто від цього рівняння можна перейти до параметричного і, відповідно, до векторного.

Оскільки серед коефіцієнтів A, B, C є ненульовий, то рівняння можна розділити на цей коефіцієнт. Отже ми можемо вважати із самого початку, що один із коефіцієнтів дорівнює 1 — нехай ним буде A. Отже ми маємо рівняння

$$x + By + Cz + D = 0.$$

А це рівняння перетворюється в параметричне наступним чином:

$$\begin{cases} x = & -D - Bu - Cv, \\ y = & u, \\ z = & v. \end{cases}$$

Ми закінчили перевірку того, що будь-яка площина може бути задана загальним рівнянням і загальне рівняння задає площину.

■

Приклади.

1. Нехай загальне рівняння площини $x + 2z = 7$. Перетворити його в параметричне, а потім у векторне.

Нехай $y = u,\ z = v$, тоді $x = -2v + 7$, і

$$\begin{cases} x = & 7 - 2v \\ y = & u \\ z = & v \end{cases}, \quad \begin{cases} x = & 7 + 0 \cdot u - 2 \cdot v \\ y = & 0 + 1 \cdot u + 0 \cdot v \\ z = & 0 + 0 \cdot u + 1 \cdot v \end{cases},$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Записати рівняння площини, що проходить через точки: $(1, 0, 5),\ (2, -7, 3),\ (-1, 1, 2)$.

Записуємо рівняння (20) “через три точки“ потрібної площини. Одержуємо

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & -7 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Визначник 4-го порядку обчислювати складніше, ніж 3-го порядку, тому на практиці зручніше користуватися формулою (19):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-5 \\ 2-1 & -7-0 & 3-5 \\ -1-1 & 1-0 & 2-5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-5 \\ 1 & -7 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладаємо визначник за елементами першого рядка

$$(x-1)(21+2) - y(-3-4) + (z-5)(1-14) = 0.$$

Одержуємо загальне рівняння площини.

Відповідь: $23x + 7y - 13z + 42 = 0$.

2.5 Загальне рівняння прямої у просторі

Якщо дві площини $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ у просторі не паралельні, тобто перетинаються по прямій, то ця пряма може бути задана системою рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{22}$$

Визначення 2.6 *Рівняння (22) називаєтьcя загальним рівнянням прямої у просторі.*

В наступному параграфі з'суємо, за якої умови на коефіцієнти, площини перетинаються по прямій, та які координати має напрямний вектор цієї прямої.

3 Взаємне розташування прямих та площин

3.1 Дві площини загального розташування

Твердження 3.1 (Про перетин двох площин) *Нехай є дві площини із загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ такі, що вектори $\{A_1, B_1, C_1\}$ і $\{A_2, B_2, C_2\}$ не колінеарні. Тоді ці площини* *перетинаються, їх перетином є пряма, напрямним вектором цієї прямої є вектор*

$$\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right). \tag{23}$$

Доведення. Неколінеарність векторів $\{A_1, B_1, C_1\}$ і $\{A_2, B_2, C_2\}$ означає, що один із визначників

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \qquad - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

не дорівнює нулю. Нехай

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді беремо вільною змінною z (z приймає будь-які значення) і знаходимо змінні x, y із системи рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1 - C_1z, \\ A_2x + B_2y = -D_2 - C_2z, \end{cases}$$

що задають площини, за формулами Крамера. Одержуємо

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 - C_1z & B_1 \\ -D_2 - C_2z & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} - z\frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 - C_1z \\ A_2 & -D_2 - C_2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} - z\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

Позначивши

$$x_0 = -\frac{\begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad z_0 = 0, \quad t = \frac{z}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

одержуємо рівняння геометричного місця спільних для двох площин точок.

$$
\begin{cases}
x = x_0 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \cdot t, \\
y = y_0 - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \cdot t, \\
z = z_0 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \cdot t
\end{cases} \tag{24}
$$

Рівняння (24) є параметричним рівнянням прямої, що проходить через точку $(x_0, y_0, 0)$ в напрямку вектора (23). Теорема доведена

$\blacksquare$

Приклад. Обчислимо напрямний вектор $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ прямої, по якій перетинаються площини $y - 2z + 1 = 0$, $2x - 2y - z - 9 = 0$.

Формула (23) дає нам числа

$$
a_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad a_2 = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4, \quad a_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2.
$$

Якщо потрібно знайти рівняння цієї прямої, то на практиці зручніше не використовувати формули, а просто виразити дві змінні через третю. Покажемо на цьому прикладі.

$$
\begin{cases} y - 2z + 1 = 0, \\ 2x - 2y - z - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2z - 1, \\ 2x - 2(2z - 1) - z - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2z - 1, \\ 2x - 5z - 7 = 0 \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} y = 2z - 1, \\ x = \frac{5}{2}z + \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5t + \frac{7}{2} \\ y = 4t - 1, \\ z = 2t \end{cases}
$$

Змінна z — вільна, для того, щоб позбавитись дробів, ми взяли $z = 2t$. Отже напрямний вектор прямої $\vec{a} = \{5, 4, 2\}$. Напрямний вектор прямої визначається з точністю до колінеарності, тобто координати напрямного вектора можуть відрізнятися множенням на те саме число (в нашому випадку це (-1)).

3.2 Паралельність двох площин

Твердження 3.2 *Дві площини, що мають рівняння* $A_1x + B_1y + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, *паралельні тоді і тільки тоді, коли вектори* $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ *і* $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ *колінеарні.*

Доведення. Якщо вектори $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ не колінеарні, то за твердженням 3.1 площини мають єдину спільну пряму і не збігаються, отже, не паралельні. Лишилося довести, що у випадку колінеарності цих векторів площини паралельні.

Нехай вектори $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ колінерані, тобто для деякого числа λ виконується рівність

$$\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1 \quad \Rightarrow \ A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1.$$

Тоді виникають два випадки: коли $D_2 = \lambda D_1$ і коли $D_2 \neq \lambda D_1$. Якщо $D_2 = \lambda D_1$, то рівняння площин рівносильні, множини розвязків у них збігаються, отже вони задають одну і ту ж площину. А коли $D_2 \neq \lambda D_1$, тоді система рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1y + D_1 = 0, \\ \lambda A_1x + \lambda B_1y + \lambda C_1z + D_2 = 0 \end{cases}$$

несумісна, розв'язків немає, і площини не перетинаються, отже, паралельні.

■

3.3 Паралельність площини і вектора, паралельність площини і прямої

Твердження 3.3 (Про паралельність вектора і площини) *Вектор $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ паралельний площині π, що задана рівнянням $Ax+By+Cz+D = 0$ тоді і тільки тоді, коли виконується рівність*

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0. \tag{25}$$

Доведення. Оскільки вільний вектор $\vec{a}$ можна відкладати від будь-якої точки, то відкладемо його від точки $M(x_1, y_1, z_1)$, яка лежить у площині π, тобто

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0. \tag{26}$$

Вектор $\vec{a}$ буде паралельним площині π тоді і тільки тоді, коли кінець $N(x_2, y_2, z_2)$ відкладеного вектора $\overrightarrow{MN} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} = \{a_1, a_2, a_3\}$ лежить у площині π, тобто коли

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0, \tag{27}$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D,$$

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0,$$

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0.$$

■

Наведемо приклад. Якщо площина π задана рівнянням $2x-3y+5z+15 = 0$, то вектор $\vec{a} = \{7, -2, -4\}$ паралельний площині π , тому що $2\cdot7+3\cdot2-5\cdot4 = 0$, а вектор $\vec{b} = \{1, 2, 1\}$ не паралельний площині π, тому що $1\cdot2-3\cdot2+5\cdot1 = 1 \neq 0$.

Прямим наслідком твердження про паралельність вектора і площини є твердження про паралельність прямої, яка задана векторним рівнянням, і площини, яка задана загальним рівнянням.

Твердження 3.4 *Площина, що задана рівнянням* $Ax + By + Cz + D = 0$, *і пряма, що задана рівнянням*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

паралельні тоді і тільки тоді, коли виконується рівність (25).

3.4 Взаємне розташування прямої та площини в афінному просторі

Розглянемо в просторі пряму l задану параметрично і площину π задану загальним рівнянням. Взаємне розташування прямої і площини описується таким твердженням.

Твердження 3.5 *Нехай пряма* l *і площина* π *задані рівняннями*

$$l: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, \qquad \pi: \ Ax + By + Cz + D = 0.$$

Тоді

а) $l \cap \pi = \{\text{єдина точка}\}$ *тоді і тільки тоді, коли* $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0$*;*

б) $l \parallel \pi$ *тоді і тільки тоді, коли* $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$ *і* $Ax_0 + By_0 + Cy_0 + D \neq 0$*;*

в) $l \subset \pi$ *тоді і тільки тоді, коли* $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$ *і* $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Доведення. Для того, щоб знайти точки перетину прямої і площини, ми підставимо x, y, z з параметричного рівняння прямої в загальне рівняння площини. Отримаємо

$$A(x_0 + a_1 t) + B(y_0 + a_2 t) + C(z_0 + a_3 t) + D = 0$$

і наведемо подібні щодо t

$$(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Якщо $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0$, то лінійне рівняння має єдиний розв'язок

$$t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}.$$

З геометричної точки зору умова $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0$ означає, що пряма та площина не паралельні і існує єдина точка їх перетину. На прямій цій точці відповідає значення параметру $t = t_0$, координати точки перетину: $(x_0 + a_1 t_0, x_0 + a_2 t_0, z_0 + a_3 t_0)$. Пункт а) доведено.

Якщо $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$, але $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то лінійне рівняння не має рішень, тобто пряма і площина не мають спільних точок, вони паралельні. Пункт б) доведено.

Якщо $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то множина рішень лінійного рівняння $\forall t \in \mathbb{R}$, тобто при будь-якому значенні параметра координати точки на прямій задовольняють рівнянню площини, що доводить в).

Умова $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$ означає, що напрямний вектор прямої паралельний площині. Можливі два випадки: або пряма паралельна площині, або пряма належить площині. Це можна перевірити наступним чином: підставити координати будь-якої точки (x_0, y_0, z_0) на прямій в загальне рівняння площини, якщо $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то ми маємо точку на прямій, яка не належить площині — пряма і площина паралельні; якщо $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то із умови паралельності випливає, що і всі інші точки прямої належать площині.

■

3.5 В'язка та жмуток площин

Визначення 3.1 *Жмутком площин називається сукупність усіх площин, що проходять через задану пряму,*

Твердження 3.6 *Припустимо, що пряма у тривимірному просторі задана як перетин двох непаралельних площин π_1, π_2 із загальними рівняннями, відповідно,*

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \tag{28}$$

і

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \tag{29}$$

Тоді площина π_3 із загальним рівнянням

$$A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0. \tag{30}$$

належить жмутку площин, що проходять через вибрану пряму, в тому і тільки тому випадку, коли для деяких $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ виконуються рівності

$$A_3 = \lambda A_1 + \mu A_2, \quad B_3 = \lambda B_1 + \mu B_2, \quad C_3 = \lambda C_1 + \mu C_2, \quad D_3 = \lambda D_1 + \mu D_2.$$

Доведення. Виберемо три площини як в умові теореми. Оскільки рівняння (28), (29) задають пряму (отже, площини не паралельні), то один із трьох визначників

$$d_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \qquad d_2 = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \qquad d_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

не нульовий, — для визначеності будемо вважати, що $d_1 \neq 0$. Тоді система рівнянь

$$\begin{cases} \lambda A_1 + \mu A_2 = A_3, \\ \lambda B_1 + \mu B_2 = B_3 \end{cases}$$

з невідомими λ, μ має розв'язок $\lambda = \lambda_0, \quad \mu = \mu_0$ і до того ж єдиний. Із того, що всі три площини π_1, π_2, π_3 проходять через одну пряму, випливає, що множина розв'язків системи (28), (29), (32) нескінченна. Віднімемо від рівняння (32) рівняння (28), помножене на λ_0 і віднімемо рівняння (29), помножене на μ_0 . Одержимо рівняння

$$(C_3 - \lambda_0 C_1 - \mu_0 C_2)z + (D_3 - \lambda D_1 - \mu D_2) = 0. \tag{31}$$

У випадку, коли $(C_3 - \lambda_0 C_1 - \mu_0 C_2) \neq 0$, рівння (31) має єдиний розвязок $z = z_0$, система

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y = -C_1 z_0 - D_1, \\ A_2 x + B_2 y = -C_2 z_0 - D_2 \end{cases}$$

також має єдиний розвязок, що суперечить припущенню про існування спільної прямої. Таким чином $(C_3 - \lambda_0 C_1 - \mu_0 C_2) = 0, \quad C_3 = \lambda_0 C_1 + \mu_0 C_2$ і із (31) випливає

$$(D_3 - \lambda D_1 - \mu D_2) = 0, \qquad D_3 = \lambda D_1 + \mu D_2.$$

Оскільки хоч одне із чисел A_3, B_3, C_3 не нульове, то $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$. Теорема доведена.

$\blacksquare$

Приклад. Знайти площину, що проходить через точку $(-1, 1, 3)$ і пряму

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 7 = 0, \\ -x + 2z - 11 = 0 \end{cases} . \tag{32}$$

Пишемо рівняння потрібної нам площини з невідомими λ, μ, тобто рівняння жмутку площин, які визначаються даною прямою:

$$\lambda(2x + 3y - z + 7) + \mu(-x + 2z - 11) = 0. \tag{33}$$

Оскільки наша площина повинна проходити через точку $(-1, 1, 3)$, то

$$\lambda(-2 + 3 - 3 + 7) + \mu(1 + 6 - 11) = 0, \qquad 5\lambda - 4\mu = 0.$$

Вибираємо один, будь-який ненульовий ровзвязок, наприклад: $\lambda = 4, \mu = 5$. Рівняням шуканої площини буде

$$4(2x + 3y - z + 7) + 5(-x + 2z - 11) = 0,$$

$$3x + 12y + 6z - 27 = 0.$$

Визначення 3.2 *Сім'я площин, що проходять через задану точку, називається в'язкою площин.*

Твердження 3.7 (про в'язку площин) *Площина α із загальним рівнянням*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{34}$$

проходить через точку (x_0, y_0, z_0) тоді і тільки тоді, коли її можна задати рівнянням

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Доведення. Площина π із загальним рівнянням (34) проходить через точку (x_0, y_0, z_0) тоді і тільки тоді, коли

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

або

$$Ax + By + Cz + D = Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0,$$

тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

$\blacksquare$

Приклад. Рівняння всіх площин, що проходять через точку $(3, -2, 5)$ мають вигляд $A(x - 3) + B(y + 2) + C(z - 5) = 0$.

4 Площина в евклідовому тривимірному просторі

В цьому розділі ми вважаємо, що задана прямокутна декартова система координат в евклідовому тривимірному просторі. Відповідно, є скалярний, векторний і змішаний добутки векторів, ми можемо обчислювати кути між векторами, відстані між точками.

4.1 Нормаль, вектор нормалі, векторне рівняння площини

Визначення 4.1 *Пряму, що перпендикулярна площині, називають нормаллю до площини, а ненульовий вектор, що паралельний нормалі, отже перпендикулярний площині, називають вектором нормалі.*

Твердження 4.1 *Рівняння*

$$\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle = a \tag{35}$$

де $\vec{n}$ — заданий ненульовий вектор, a — задане дійсне число, $\vec{r}$ — радіус-вектор змінної точки, задає площину, для якої $\vec{n}$ є вектором нормалі, і будь-яка площина може бути задана рівнянням вигляду (35).

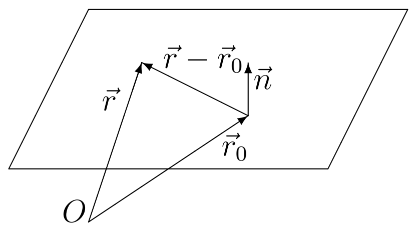


Рис. 1: Площина, що задана векторним рівнянням $\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle = a$.

Доведення. Припустимо, що площина задана векторним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$ і вектор $\vec{n}$ перпеникулярний цій площині, тобто $\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle = 0$, $\langle \vec{n}, \vec{b} \rangle = 0$. Тоді $\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{r}_0 \rangle + u\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle + v\langle \vec{n}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{r}_0 \rangle = a$.

Навпаки, нехай маємо ненульовий вектор $\vec{n}$, дійсне число a і який-небудь вектор $\vec{r}_0$, для якого $\langle \vec{n}, \vec{r}_0 \rangle = a$. Тоді точка з радіусом-вектором $\vec{r}$ лежить у площині, що проходить через точку з радіусом-вектором $\vec{r}_0$ перпендикулярно вектору $\vec{n}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\langle \vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0 \rangle = 0, \qquad \langle \vec{n}, \vec{r} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{r}_0 \rangle = a.$$

Доведення завершене.

■

Перепишемо рівняння (35) з використанням координат. Якщо $\vec{n} = \{A, B, C\}$, $\vec{r} = \{x, y, z\}$, то рівняння (35) прийме вигляд

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{36}$$

де $D = -a$. Ми обґрунтували наступне

Твердження 4.2 *Якщо система координат прямокутна декартова, то в загальному рівнянні площини $Ax+By+Cz+D = 0$ вектор $\{A, B, C\}$ є вектором нормалі.*

4.2 Рівняння площини “через точку перпендикулярно вектору“

Векторне рівняння площини, що проходить через точку з радіусом-вектором $\vec{r}_0$ перпендикулярно вектору $\vec{n}$:

$$\langle \vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0 \rangle = 0$$

Перепишемо це рівняння в координатах. Отже, рівняння площини, яка проходить через точку $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A, B, C\}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{37}$$

Визначення 4.2 *Рівняння (37) називається рівнянням площини “через точку перпендикулярно вектору“.*

4.3 Взаємне розташування прямих та площин в евклідовому просторі. Кут між площинами. Кут між прямою та площиною

На евклідовій площині взаємне розташування прямих та площин (пряма та площина перетинаються в єдиній точці, паралельні, або пряма належить площині; площини перетинаються по прямій, паралельні або співпадають) визначається тими ж умовами, що і в афінному просторі. Але в евклідовому просторі ми ще маємо змогу вирахувати під яким кутом перетинаються площини, прямі та пряма з площиною.

Кут між прямими. Прямі l_1 та l_2 або перетинаються, або паралельні (співпадають), або є мимобіжними. Якщо прямі перетинаються, то кутом між ними вважається найменший з утворених ними кутів. Якщо, прямі паралельні або співпадають, то кут між ними приймається рівним 0. Якщо ж прямі мимобіжні, то кутом між l_1 та l_2 вважається кут між l_1 та прямою l_2' такою, що $l_1 \cap l_2' \neq \emptyset$ та $l_2' \parallel l_2$.

Отже, в будь-якому випадку кут φ між прямими — це гострий кут між напрямними векторами прямих, тобто

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{a}_1 \,\widehat{}\, \vec{a}_2)| = \frac{|\langle \vec{a}_1,\, \vec{a}_2 \rangle|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}.$$

Кут між площинами. Кутом між площинами називається найменший з двох двогранних кутів, які утворені цими площинами. Мірою двогранного кута є кут між прямими, які перпендикулярні ребру двогранного кута. Цей кут дорівнює куту між прямими, які перпендикулярні заданим площинам, тобто мають напрямки векторів нормалей площин.

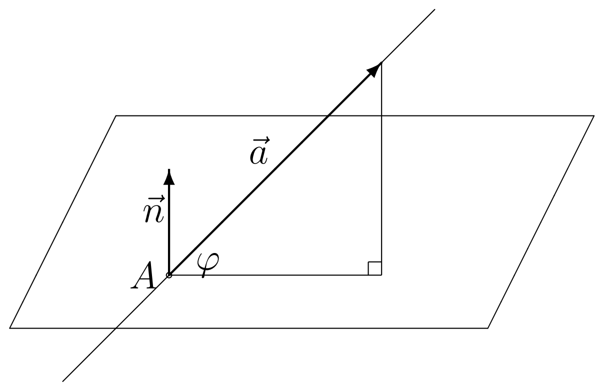
Отже, кут φ між площинами — це гострий кут між векторами нормалей площин, тобто

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{n}_1 \,\widehat{}\, \vec{n}_2)| = \frac{|\langle \vec{n}_1,\, \vec{n}_2 \rangle|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Кут між прямою та площиною. Кут φ між прямою та площиною — це гострий кут між прямою та її ортогональною проекцією на площину, тобто це гострий кут, який доповнює до прямого кута кут між напрямним вектором прямої та вектором нормалі площини:

$$\sin\varphi = |\cos(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{n})| = \frac{|\langle\vec{a},\,\vec{n}\rangle|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|},$$

де $\vec{a}$ – напрямний вектор прямої, $\vec{n}$ – вектор нормалі площини.



4.4 Відхилення від точки до площини. Нормальне рівняння площини.

Кожна площина ділить тривимірний дійсний простір на два півпростори: відрізок, який з'єднує точки одного піпростору, не перетинає площину, а якщо кінці відрізка лежать в різних півпросторах, то цей відрізок перетинає площину.

Визначення 4.3 *Нехай α — площина і V_1, V_2 — два півпростори, що визначаються площиною α, $d = d(M,\alpha)$ — відстань від точки M до площини α. Функція*

$$\delta(M) = \begin{cases} d(M,\alpha), & \text{якщо } M \in V_1, \\ 0, & \text{якщо } M \in \alpha, \\ -d(M,\alpha), & \text{якщо } M \in V_2, \end{cases}$$

називається відхиленням точки M від площини α.

Для прикладу, якщо точка M має координати (x_0, y_0, z_0), то y буде відхилення точки M від координатної площини xOz.

Метою подальшої роботи є знаходження формули для підрахунку відхилення точки від площини і, відповідно, знаходження відстані від точки до площини.

Розглянемо випадок, коли в загальному рівнянні (36) довжина вектора номалі $\vec{n} = \{A, B, C\}$ дорівнює одиниці:

$$|\vec{n}|^2 = A^2 + B^2 + C^2 = 1.$$

Визначення 4.4 *Загальне рівняння площини (36) називається нормальним, якщо*
$$A^2 + B^2 + C^2 = 1.$$

Щоб загальне рівняння (36) перетворити в нормальне, потрібно розділити його на $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$

Визначення 4.5 *Перехід від загального рівняння (36) до нормального*
$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$
називається нормуванням загального рівняння.

Приклад. Загальне рівняння
$$5x - 3y - 2z + 1 = 0$$
не є нормальним, оскільки $5^2 + 3^2 + 2^2 = 38 \neq 1$. Щоб його нормувати, потрібно розділи на $\sqrt{38}$. Рівняння
$$\frac{5}{\sqrt{38}}x - \frac{3}{\sqrt{38}}y - \frac{2}{\sqrt{38}}z + \frac{1}{\sqrt{38}} = 0$$
є нормальним.

Твердження 4.3 (про відхилення точки від площини) *Нехай вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$ має довжину 1, $|\vec{n}|^2 = A^2 + B^2 + C^2 = 1$ і площина α має векторне рівняння*
$$\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle = a$$
і нормальне рівняння
$$Ax + By + Cz + D = 0.$$
Позначимо $\vec{r}_M$ радіус-вектор довільної точки $M(x, y, z)$ простору. Тоді функція
$$\delta(M) = \langle \vec{n}, \vec{r}_M \rangle - a \tag{38}$$
або
$$\delta(M) = Ax + By + Cz + D \tag{39}$$
є відхиленням від точки M до заданої площини.

Доведення. Виберемо точку N з радіусом-вектором $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ на площині α. Тоді
$$\langle \vec{n}, \vec{r}_0 \rangle = a, \qquad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$
Для довільної точки M з радіусом-вектором $\vec{r} = \{x, y, z\}$ у просторі будуємо три вектори $\overrightarrow{NM} = \vec{r} - \vec{r}_0$, $\vec{m}$, $\vec{h}$ так, що (див. рис. 4.4) $\vec{m}$ паралельний площині

α (є ортогональною проекцією вектора $\vec{r}-\vec{r}_0$ на площину α), $\vec{h}$ перпендикулярний площині α і
$$\overrightarrow{NM} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{m} + \vec{h}.$$
В цих позначеннях число
$$\langle \vec{n}, \vec{h} \rangle = |\vec{n}| \cdot |\vec{h}| \cos\varphi = 1 \cdot |\vec{h}| \cos\varphi = \pm|\vec{h}|, \quad \varphi \in \{0, \pi\}$$
буде відхиленням точки M від площини α. Кут φ тут може приймати два значення 0 і π. Якщо $\varphi = 0$, то точка M і кінець вектора нормалі $\vec{n}$, відкладеного від площини α лежать в одному півпросторі, а якщо $\varphi = \pi$, то в різних півпросторах.

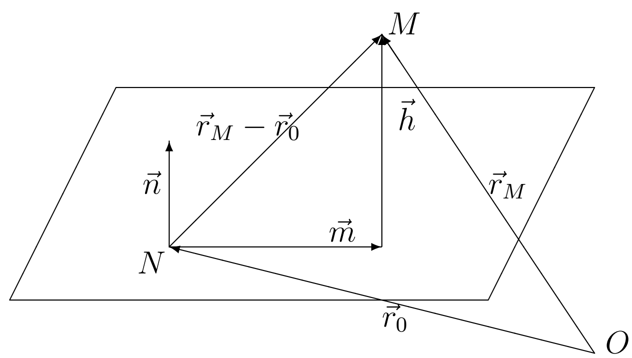


Рис. 2: Площина задана рівнянням $\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle - a = 0$, $\vec{n}$ — вектор нормалі одиничної довжини, точка N лежить у площині і її радіус-вектор дорівнює $\vec{r}_0$, M - довільна точка простору з радіусом-вектором $\vec{r}_M$, $\vec{m}$ — проекція вектора $\vec{r}_M - \vec{r}_0$ на площину, вектор $\vec{h} = (\vec{r}_M - \vec{r}_0) - \vec{m}$ перпендикулярний площині, $\langle \vec{n}, \vec{r}_M \rangle - a = \delta(M)$ - відхилення від точки M до площини, $|\delta(M)| = d$ — відстань від точки M до площини.

Оскільки
$$\langle \vec{n}, \vec{r}_M \rangle - a = \langle \vec{n}, \vec{r}_M \rangle - \langle \vec{n}, \vec{r}_0 \rangle = \langle \vec{n}, \vec{r}_M - \vec{r}_0 \rangle = \langle \vec{n}, \vec{m} + \vec{h} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle + \langle \vec{n}, \vec{h} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{h} \rangle,$$
то спосіб (38) обчислення відхилення точки від площини є коректним.

В координатному записі
$$\langle \vec{n}, \vec{r}_M \rangle = Ax + By + Cz, \qquad \langle \vec{n}, \vec{r}_0 \rangle = Ax_0 + By_0 + Cz_0.$$
Оскільки $\vec{r}_0$ — радіус-вектор точки площини α, то
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \quad D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$
і
$$\langle \vec{n}, \vec{h} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0 \rangle = Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = Ax + By + Cz + D$$

Отже спосіб (39) обчислення відхилення точки від площини також є коректним.

■

Зауваження. Якщо рівняння площини задане у вигляді $\langle\vec{n}, \vec{r}-\vec{r}_0\rangle = 0$ ($|\vec{n}| = 1$), то відхиленням точки M від площини буде:

$$\delta(M) = \langle\vec{n}, \vec{r}_M - \vec{r}_0\rangle \tag{40}$$

Якщо для розв'язання конкретної задачи нам не потрібно знати відстань від точки до площини, а потрібно лише встановити в якому півпросторі відносно площини знаходиться точка, тобто нас цікавить тільки знак відхилення, то рівняння площини можна не нормувати.

4.5 Відстань від точки до площини

Якщо площина задана нормальним рівнянням, то відстань від точки до площини — це $d(M, \alpha) = |\delta(M)|$ (дивись відповідні формули для $\delta(M)$).

Твердження 4.4 *Нехай площина α має рівняння*

$$\langle\vec{n}, \vec{r}\rangle = a, \ \textit{або} \ \ \langle\vec{n}, \vec{r}_M - \vec{r}_0\rangle = 0, \ \textit{або} \ \ Ax + By + Cz + D = 0.$$

Тоді відстань від точки $M(x_1, y_1, z_1)$ с радіусом-вектором $\vec{r}_M$ до площини α обчислюєтьcя відповідно за формулами

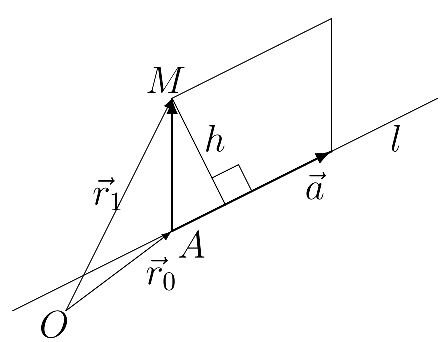
$$d(M, \alpha) = \frac{|\langle\vec{n}, \vec{r}_M\rangle - a|}{|\vec{n}|} \tag{41}$$

$$d(M, \alpha) = \frac{|\langle\vec{n}, \vec{r}_M - \vec{r}_0\rangle|}{|\vec{n}|} \tag{42}$$

$$d(M, \alpha) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{43}$$

4.6 Відстань від точки до прямої у просторі

Нехай пряма l у просторі задана рівнянням $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$. Знайдемо відстань від точки M з радіусом-вектором $\vec{r}_1$ до прямої l. Розглянемо паралелограм, побудований на векторах $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ і $\vec{a}$. Шукана відстань дорівнює висоті h цього паралелограма.



Площа паралелограма $S = |\vec{a}|\, h$. З іншого боку, $S = \left|[\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a}]\right|$. Отже,

$$h = \frac{\left|[\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a}]\right|}{|\vec{a}|}.$$

Запишемо цю формулу в інших позначеннях. Нехай на прямій l відомі координати точки A та напрямного вектора $\vec{a}$. Відстань h від точки M до прямої l:

$$h = \frac{\left|[\overrightarrow{AM}, \vec{a}]\right|}{|\vec{a}|}. \tag{44}$$

4.7 Спільний перпендикуляр двох мимобіжних прямих

Нехай $l_1\colon \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$ і $l_2\colon \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t$ — дві мимобіжні прямі в просторі. Спільний перпердикуляр має напрямок $\vec{N} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$, оскільки $\vec{N} \perp \vec{a}_1$ і $\vec{N} \perp \vec{a}_2$.

Розглянемо площини $\pi_1\colon \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 u + \vec{N} v$ та $\pi_2\colon \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 u + \vec{N} v$. Ці площини не паралельні, вони перетинаються по прямій $l = \pi_1 \cap \pi_2$, що має напрямок $\vec{N}$.

Прямі l та l_1 обидві лежать у площині π_1 і не паралельні (вони перпендикулярні), отже пряма l перетинає пряму l_1 під прямим кутом.

Аналогічно доводимо, що пряма l перетинає пряму l_2 під прямим кутом.

Отже, пряма l і є шуканий спільний перпендикуляр. Випишемо його рівняння. Запишемо рівняння площин у вигляді:

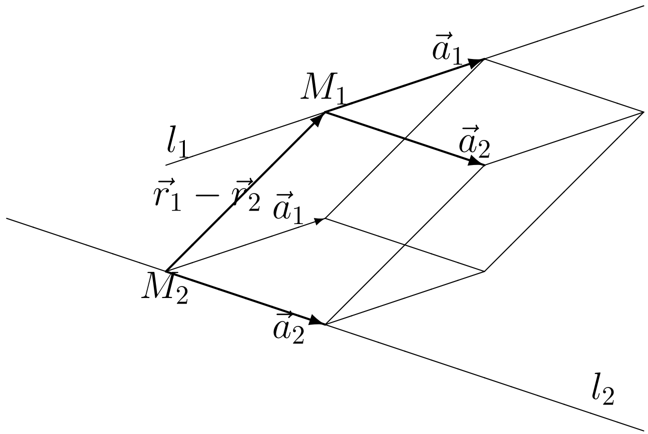
$$\pi_1\colon \langle \vec{r} - \vec{r}_1, [\vec{a}_1, \vec{N}] \rangle = 0,$$
$$\pi_2\colon \langle \vec{r} - \vec{r}_2, [\vec{a}_2, \vec{N}] \rangle = 0.$$

Тоді рівняння прямої l:

$$\begin{cases} \langle \vec{r} - \vec{r}_1, [\vec{a}_1, \vec{N}] \rangle = 0 \\ \langle \vec{r} - \vec{r}_2, [\vec{a}_2, \vec{N}] \rangle = 0 \end{cases}, \text{ де } \vec{N} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2].$$

4.8 Відстань між мимобіжними прямими

Нехай l_1 та l_2 — мимобіжні прямі. $l_1\colon \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$, $l_2\colon \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t$. Розглянемо площини $\pi_1\colon \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 u + \vec{a}_2 v$ та $\pi_2\colon \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_1 u + \vec{a}_2 v$. Це дві паралельні площини, в яких лежать наші мимобіжні прямі. Відстань між l_1 та l_2 — це відстань між π_1 та π_2.



Точка M_1 с радіусом-вектором $\vec{r}_1$ належить π_1. Запишемо рівняння площини π_2 у вигляді: $\pi_2\colon \langle \vec{r} - \vec{r}_2, [\vec{a}_1, \vec{a}_2]\rangle = 0$. Тоді відстань від M_1 до π_2 — це відстань між паралельними площинами і, відповідно, відстань між мимобіжними прямими l_1 та l_2:

$$d_{l_1,l_2} = \frac{|\langle \vec{r}_1 - \vec{r}_2, [\vec{a}_1, \vec{a}_2]\rangle|}{|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|}. \tag{45}$$

Тут ми скористались формулою (42), де $\vec{n} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$.

Наслідок 4.1 *Нехай $l_1\colon \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$, $l_2\colon \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t$, $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$ дві непаралельні прямі. Ці прямі перетинаються тоді і тільки тоді, коли $\langle \vec{r}_1 - \vec{r}_2, [\vec{a}_1, \vec{a}_2]\rangle = 0$.*

Доведення. Достатньо зауважити, що наведена умова означає рівність нулю відстані між мимобіжними прямими (45).

■

5 Малий шляхетний набір задач на площину

Задача 1. З'ясувати, чи лежить задана точка між двома заданими паралельними площинами.

Розв'язування. Позначаємо дві задані паралельні площини через α_1, α_2, а задану точку через M. На площинах α_1 і α_2 вибираємо відповідно точки A і B. Тепер точка M лежить між двома площинами тоді і тільки тоді, коли вона лежить по ту ж сторону від α_2, що і A, і по ту ж сторону від α_1, що і B. Підраховуємо відхилення $\delta_1(M), \delta_2(M)$ точки M від площин $\alpha_1,\ \alpha_2$, відхилення $\delta_2(A)$ точки A від площини α_2 і відхилення $\delta_1(B)$ точки B від α_1. Тепер ми можемо сказати, що точка M лежить між площинами $\alpha_1,\ \alpha_2$ тоді і тільки тоді, коли знак $\delta_1(M)$ збігається із знаком $\delta_1(B)$, а знак $\delta_2(M)$ збігається із знаком $\delta_2(A)$.

Задача 2. Знайти бісекторні площини двогранного кута, утвореного двома площинами, що перетинаються.

Розв'язування. Позначимо одну площину через α, а другу через β. Позначимо відхилення точки $M(x, y, z)$ від площини α через d, а відхилення M від площини β через h. Тоді рівнянням однієї бісекторної площини буде

$$h = d,$$

а рівнянням другої бісекторної площини буде

$$h = -d.$$

Задача 3. Знайти вектор $\vec{n}$ нормалі площини, що задана векторним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$.

Відповідь: $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Задача 4. Знайти напрямний вектор $\vec{a}$ прямої, по якій перетинаються задані дві площини, якщо відомі вектори $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ нормалей цих площин.

Відповідь: $\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$.

Задача 5. Знайти точку $M'(x_1, y_1, z_1)$, яка симетрична точці $M(x_0, y_0, z_0)$ відносно площини α з рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$.

Розв'язування. Точка M' буде симетрична точці M відносно α тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{MM'}$ буде паралельним вектору нормалі до площини α, а середина відрізка MM' лежить у площині α. Отже для знаходження точки M' потрібно розв'язати систему трьох рівнянь

$$\frac{x_1 - x_0}{A} = \frac{y_1 - y_0}{B} = \frac{z_2 - z_0}{C}, \qquad A\frac{x_1 + x_0}{2} + B\frac{y_1 + y_0}{2} + C\frac{z_1 + z_0}{2} + D = 0.$$

6 Приклади

Приклад 1. Знайдіть рівняння бісектриси тупого кута між прямою $l: \ x - 2y - 5 = 0, \ y - 4z + 14 = 0$ та її ортогональною проекцією на площину $\alpha: x + y + 1 = 0$. Система координат прямокутна.

Розв'язування. Для того, щоб знайти рівняння бісектриси, нам потрібно знати напрямні вектори прямої та її ортогональної проекції. Напрямний вектор прямої ми знайдемо як векторний добуток векторів нормалей площин, перетином яких вона утворена: $\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$, $\vec{n}_1 = \{1, -2, 0\}$, $\vec{n}_2 = \{0, 1, -4\}$.

$$\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = \{8, 4, 1\}.$$

Легко перевірити, що точка з коодинатами $(1,-2,3)$ належить прямій l, отже параметричне рівняння прямої:

$$\begin{cases} x &= & 1+8t \\ y &= & -2+4t \\ z &= & 3+t \end{cases}$$

Знайдемо координати точки перетину прямої l та площини α, для цього підставимо параметричне рівняння прямої в загальне рівняння площини:

$$1+8t-2+4t+1=0, \;\Rightarrow 12t=0, \;\Rightarrow t=0.$$

Отже, перетин прямої і площини відбувається при значенні параметра $t=0$, підставляємо його у параметричне рівняння прямої l, та отримаємо координати точки перетину: $A(1,-2,3)$.

Через пряму l проведемо площину β перпендикулярну до площини α. Для цього беремо точку $A(1,-2,3)$ на прямій l, напрямний вектор $\vec{a}=\{8,4,1\}$ прямої l, та вектор нормалі $\vec{n}_\alpha=\{1,1,0\}$ площини α:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 8 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}(x-1) - \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}(y+2) + \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}(z-3) =$$

$$= -1(x-1)+(y+2)+4(z-3) = -x+y+4z-9=0.$$

Отже, ортогональна проекція l на α – це перетин площин α і β. Напрямний вектор ортогональної проекції ми знайдемо аналогічно попередньому випадку, як векторний добуток векторів нормалей площин, перетином яких вона утворена: $\vec{n}_\alpha=\{1,1,0\}$, $\vec{n}_\beta=\{-1,1,4\}$.

$$[\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}\vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{e}_3 =$$

$$= \{4,-4,2\} \parallel \{2,-2,1\} = \vec{b}.$$

Перевіримо, який кут утворюють вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, для цього знайдемо їх скалярний добуток: $\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = 16-8+1=9>0$. Скалярний добуток додатний, тобто косинус кута між векторами додатний, отже кут гострий. Візьмемо в якості напрямного вектора ортогональної проекції вектор $\vec{b}_1=-\vec{b}=\{-2,2,-1\}$. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}_1$ утворюють тупий кут. Знайдемо їх довжини.

$$|\vec{a}|=\sqrt{64+16+1}=\sqrt{81}=9, \; |\vec{b}_1|=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$$

Вектори $\vec{a}$ і $3\vec{b}_1$ мають однакові довжини (по 9), вони утворюють ромб. Відомо, що діагональ ромба є бісектрисою кута. Сума векторів $\vec{a}$ і $3\vec{b}_1$ (за правилом паралелограма) є діагональ і бісектриса ромба. Отже, напрямний вектор бісектриси тупого кута:

$$\vec{a}+3\vec{b}_1=\{8,4,1\}+\{-6,6,-3\}=\{2,10,-2\}\parallel\{1,5,-1\}=\vec{c}$$

Наша бісектриса проходить через точку A з напрямним вектором $\vec{c}$, тобто параметричне рівняння:

$$\begin{cases} x &=& 1+t \\ y &=& -2+5t \\ z &=& 3-t \end{cases}$$

Відповідь: канонічне рівняння бісектриси $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Приклад 2. Знайдіть відстань між паралельними прямими $x=t+1,\ y=2t-1,\ z=t$ і $x=t+2,\ y=2t-1,\ z=t+1$.

Розв'язування. Напрямні вектори обох прямих $\vec{a}_1=\vec{a}_2=\{1,2,1\}$, тобто прямі дійсно паралельні, або співпадають. Відстань між паралельними прямими дорівнює відстані від довільної точки однієї прямої до другої прямої. На першій прямій нам відома точка з координатами $A_1(1,-1,0)$ на другій $A_2(2,-1,1)$. Скористаємось формулою (44), де $M=A_1,\ A=A_2,\ \vec{a}=\vec{a}_2$, тобто

$$h=\frac{\left|[\overrightarrow{A_2A_1},\vec{a}_2]\right|}{|\vec{a}_2|}.$$

Знаходимо $\overrightarrow{A_2A_1}=\{-1,0,-1\}$ та обчислюємо векторний добуток

$$[\overrightarrow{A_2A_1},\vec{a}_2]=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{e}_1-\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{e}_2+\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{e}_3=\{2,0,-2\}.$$

$$\left|[\overrightarrow{A_2A_1},\vec{a}_2]\right|=2\sqrt{2},\ |a_2|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6},\text{ отже } h=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Відповідь: відстань між паралельними прямими дорівнює $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Приклад 3. Знайдіть координати центру сфери радіуса $r=5$, вписаного в той тригранний кут, утворений площинами $3x-4y+8=0(1),\ 6x-2y-3z+4=0(2),\ x+2y+2z-20=0(3)$, якому належить точка $A(1,-1,-1)$.

Розв'язування. Якщо сфера дотикається площини, то відстань від центру сфери до площини дорівнює радіусу сфери. Оскільки сфера лежить в тому тригранному куті, якому належить точка A, то знак відхилення центру сфери від площин тригранного кута співпадає зі знаком відхилення точки A від відповідних площин. Обчислимо знак відхилення точки A від площин (рівняння площини можна не нормувати):

$$\begin{aligned} 3\cdot 1-4\cdot(-1)+8=15 &\quad\Rightarrow\quad \delta_1(A)>0,\\ 6\cdot 1-2\cdot(-1)-3\cdot(-1)+4=13 &\quad\Rightarrow\quad \delta_2(A)>0,\\ 1+2\cdot(-1)+2\cdot(-1)-20=-23 &\quad\Rightarrow\quad \delta_3(A)<0, \end{aligned}$$

Нехай центр сфери знаходиться в точці $O(a,b,c)$, радіус сфери $r=5$, тоді с урахуванням знаку відхилення згідно формулам (43) отримаємо:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{3a-4b+8}{\sqrt{9+16}} &=& 5\\ \dfrac{6a-2b-3c+4}{\sqrt{36+4+9}} &=& 5\\ \dfrac{a+2b+2c-20}{\sqrt{1+4+4}} &=& -5 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcl} 3a-4b &=& 17\\ 6a-2b-3c &=& 31\\ a+2b+2c &=& 5 \end{array}\right.$$

Розв'яжемо цю систему за методом Гауса (для зручності поміняли місцями рівняння):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 5\\ 3 & -4 & 0 & 17\\ 6 & -2 & -3 & 31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 5\\ 0 & -10 & -6 & 2\\ 0 & 6 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 5\\ 0 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -11 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & \frac{49}{11}\\ 0 & 2 & 0 & -\frac{8}{11}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{11} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{57}{11}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{11}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{11} \end{array}\right)$$

Отже, центр сфери знаходиться в точці $O\left(\frac{57}{11},-\frac{4}{11},\frac{3}{11}\right)$, радіус $r=5$ і рівняння сфери $(x-\frac{57}{11})^2+(y+\frac{4}{11})^2+(z-\frac{3}{11})^2=25$.

Відповідь: центр сфери знаходиться в точці $O\left(\frac{57}{11},-\frac{4}{11},\frac{3}{11}\right)$.

Покажчик

формули
- Крамера, 10

нормування
- рівняння
  - площини, 20

паралельність
- площин, 14
- площини і прямої, 14
- площини і вектора, 14

площина
- бісекторна, 24
- дійсна, 6

радіус-вектор, 6

рівняння
- паралелограма, 6
- площини
  - бісекторної, 24
  - нормальне, 20
  - параметричне, 7
  - векторне, 6
  - загальне, 9
  - "через три точки", 9
- прямої
  - через дві точки, 5
  - канонічне, 4
  - векторне, 3
- відрізка, 5

умова
- колінеарності векторів, 8

в'язка
- площин, 16

вектор
- напрямний
  - площини, 6
  - прямої, 3, 14
- нормалі
  - площини, 18

вектори
- колінеарні, 8

відхилення
- точки
  - від площини, 20

відстань
- від точки
  - до площини, 20

жмуток
- площин, 16