ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIX. Серия 4 1963

ОБ ОДНОМ ПРЕДПОЛОЖЕНИИ В. А. СТЕКЛОВА

Я. Л. Геронимус

Рассматривая систему многочленов, ортонормальных на отрезке относительно некоторого веса, В. А. Стеклов [6] высказал 40 лет тому назад предположение: *положительность веса необходима и достаточна для ограниченности ортонормальной системы.*

Настоящая работа имеет целью приблизиться к доказательству этого предположения — либо для данной точки и бесконечно малой ее окрестности, либо для некоторого внутреннего отрезка, либо, наконец, для всего отрезка ортогональности.

Мы рассмотрим систему многочленов $\{\varphi_n(z)\}_0^\infty$, *ортонормальных на единичной окружности*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_n(e^{i\theta})\overline{\varphi_m(e^{i\theta})}\,d\sigma(\theta) = \delta_{nm} \qquad (n,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{1}$$

причем функция $\sigma(\theta)$ *ограничена и не убывает на отрезке* $[0,2\pi]$.

Мы будем пользоваться соотношениями ([4], § 8.1)

$$\begin{gathered}\sqrt{1-|a_n|^2}\,\varphi_{n+1}(z) = z\varphi_n(z) - \bar{a}_n\varphi_n^*(z),\\ \varphi_n^*(z) = z^n\bar{\varphi}_n\left(\frac{1}{z}\right), \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\\ \sqrt{1-|a_n|^2}\,\varphi_{n+1}^*(z) = \varphi_n^*(z) - a_n z\varphi_n(z),\end{gathered} \tag{2}$$

где *параметры* $\{a_n\}_0^\infty$ независимы друг от друга и удовлетворяют единственному условию $\{|a_n|\}_0^\infty < 1$. Задание этих параметров определяет единственным образом функцию $\sigma(\theta)$, ибо мы имеем

$$\frac{1}{2\pi c_0}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\sigma(\theta) = 1 + \frac{2a_0\,|}{|1-a_0} - \frac{a_1 z(1-|a_0|^2)\,|}{|\quad a_0 + a_1 z} - \frac{a_0 a_2 z(1-|a_1|^2)}{|\quad a_1 + a_2 z} - \ldots, \tag{3}$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma(\theta),$$

причем непрерывная дробь равномерно сходится при $|z| \leqslant r < 1$.

Отметим также равенства ([4], § 1.1)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ik\theta}d\theta}{|\varphi_n(e^{i\theta})|^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}d\sigma(\theta), \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n;\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{4}$$

и неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\prod_{k=0}^{n-1}(1-|a_k|^2)\right\}^{\frac{1}{2n}} \leqslant d(\mathscr{E}_\sigma) \leqslant 1, \tag{5}$$

где $\mathscr{E}_\sigma$ — *спектр* функции $\sigma(\theta)$, а $d(\mathscr{E}_\sigma)$ — *трансфинитный диаметр* множества $\mathscr{E}_\sigma$.

§ 1. Обозначим через $C(\lambda)$, $\lambda \geqslant 1$, окружность, описанную на отрезке $\left[\frac{1}{\lambda}, \lambda\right]$ как на диаметре. Очевидно, что через каждую точку правой полуплоскости можно провести одну и только одну окружность $C(\lambda)$; очевидно также, что при $\lambda_1 < \lambda_2$ окружность $C(\lambda_1)$ целиком лежит внутри окружности $C(\lambda_2)$.

Теорема 1.1.

1) *Если построена ортонормальная система* $\{\varphi_k(z)\}_0^n$ (или, что то же самое, известны параметры $\{a_k\}_0^{n-1}$), *то точку*

$$w_n(z) = \frac{\varphi^*_{n+1}(z)}{\varphi^*_n(z)}, \qquad z = e^{i\theta},$$

можно выбрать совершенно произвольно в полуплоскости $\mathrm{Re}\, w > 0$, *чем определится параметр* a_n;

2) *если точка* z *опишет окружность* $|z| = 1$, *то точка* $w_n(z)$ *опишет* $n+1$ *раз окружность* $C\left(\sqrt{\frac{1+|a_n|}{1-|a_n|}}\right)$;

3) *выполнение условия*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| < 1 \tag{1.1}$$

влечет за собою неравенства

$$0 < m \leqslant |w_n(e^{i\theta})| \leqslant M, \ (n = 0, 1, 2, \ldots), \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{1.2}$$

Доказательство основано на неравенстве

$$\left| w_n(z) - \frac{1}{\sqrt{1-|a_n|^2}} \right| = \frac{|a_n| \cdot |z|}{\sqrt{1-|a_n|^2}} \cdot \left| \frac{\varphi_n(z)}{\varphi^*_n(z)} \right| \leqslant \frac{|a_n|}{\sqrt{1-|a_n|^2}}, \qquad |z| \leqslant 1, \tag{1.3}$$

вытекающем из (2) и из того факта, что все корни многочлена $\varphi_n(z)$ лежат в области $|z| < 1$; при условии $\sup |a_n| = a < 1$ *) все окружности $C\left(\sqrt{\frac{1+|a_n|}{1-|a_n|}}\right)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ не выходят за пределы окружности $C\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right)$, откуда

$$0 < \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \leqslant \left| \frac{\varphi^*_{n+1}(e^{i\theta})}{\varphi^*_n(e^{i\theta})} \right| \leqslant \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}, \ (n = 0, 1, 2, \ldots), \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{1.4}$$

Примечание 1.1. Легко видеть, что окружность $C\left(\sqrt{\frac{1+|a_n|}{1-|a_n|}}\right)$ не изменится, если точку $w_n(z)$ заменить точкой $w'_n(z) = \frac{\varphi^*_n(z)}{\varphi^*_{n+1}(z)}$ или точкой $w''_n(z) = \frac{z\varphi_n(z)}{\varphi_{n+1}(z)}$.

Примечание 1.2. Если все параметры $\{a_n\}_0^\infty$ *вещественны и неположительны*, то из чисто локального условия ограниченности всей ортонормальной системы в одной точке $z = 1$

$$0 < C_1 \leqslant |\varphi_n(1)| \leqslant C_2, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.5}$$

вытекает *глобальное* условие

$$|a_n| \leqslant \frac{C_2^2 - C_1^2}{C_2^2 + C_1^2}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.6}$$

*) Так как $\{a_n\}_0^\infty < 1$, то условия $\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| < 1$ и $\sup |a_n| < 1$ эквивалентны.

Действительно, из (1.5) находим

$$\frac{C_1}{C_2} \leqslant |w_n(1)| \leqslant \frac{C_2}{C_1}, \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \ldots;$$

так как в нашем случае $w_n(1) = \sqrt{\dfrac{1+|a_n|}{1-|a_n|}}$, то отсюда следует (1.6).

Примечание 1.3. Если вместо (1.1) имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n| = 1, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}|a_n| < 1, \tag{1.7}$$

то мы сможем выделить *подпоследовательность* $\{n_i\}$, для которой $\lim\limits_{i\to\infty}|a_{n_i}| = 1$ так, чтобы для оставшейся подпоследовательности $\{n_k\}$ иметь $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|a_{n_k}| < 1$. В таком случае неравенства (1.2) будут иметь место *лишь для подпоследовательности* $\{\varphi_{n_k}(e^{i\theta})\}$.

Теорема 1.2. *При условии* (1.1) *имеем*

$$0 < \overline{\lim_{n\to\infty}}|\varphi_n(e^{i\theta})| = \underline{\lim_{n\to\infty}}|\varphi_n(e^{i\theta})| < \infty, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{1.8}$$

Действительно, пусть $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}|\varphi_n(e^{i\theta})| < \infty$; отсюда следует существование бесконечной подпоследовательности многочленов, ограниченной сверху. Докажем, что при нашем предположении имеем $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|\varphi_n(e^{i\theta})| < \infty$.

Если бы это было не так, то всю последовательность натуральных чисел можно было бы разбить на две бесконечные подпоследовательности $\{n_i\}$ и $\{n_k\}$, причем

$$|\varphi_{n_i}(e^{i\theta})| \leqslant M, \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots), \quad \lim_{k\to\infty}|\varphi_{nk}(e^{i\theta})| = \infty.$$

Рассмотрим только такие пары натуральных чисел n и $n+1$, которые принадлежат *разным подпоследовательностям* — такие пары найдутся для сколь угодно больших значений n, ибо в противном случае одна из наших подпоследовательностей была бы конечной. Если, например, $n = n_k$, $n+1 = n_i$, то мы имели бы

$$|w_{n_k}(e^{i\theta})| = \left|\frac{\varphi^*_{n_i}(e^{i\theta})}{\varphi^*_{n_k}(e^{i\theta})}\right| \leqslant \frac{M}{|\varphi_{n_k}(e^{i\theta})|},$$

откуда вытекало бы $\lim\limits_{k\to\infty}|w_{n_k}(e^{i\theta})| = 0$, что противоречит (1.2); аналогичное заключение при $n = n_i$, $n+1 = n_k$.

Точно так же показываем, что из условия $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\varphi_n(e^{i\theta}) > 0$ следует $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}|\varphi_n(e^{i\theta})| > 0$.

Таким образом, при условии (1.1) для каждой точки θ_0 представляется одна из трех возможностей:

$$0 < m \leqslant |\varphi_n(e^{i\theta_0})| \leqslant M < \infty, \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots); \tag{I}$$

$$\lim_{n\to\infty}|\varphi_n(e^{i\theta_0})| = \infty; \tag{II}$$

$$\lim_{n\to\infty}|\varphi_n(e^{i\theta_0})| = 0, \tag{III}$$

причем в случаях II, III характер стремления всей последовательности к бесконечности или к нулю таков, что выполняется (1.4); случаи

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}|\varphi_n(e^{i\theta_0})| < \infty, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}|\varphi_n(e^{i\theta_0})| = \infty, \tag{IV}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}|\varphi_n(e^{i\theta_0})| = 0, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}|\varphi_n(e^{i\theta_0})| > 0, \qquad \text{V}$$

а также случаи II, III при невыполнении (1.4) возможны, очевидно, только при условии $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n| = 1$.

Например, если $\varphi_n(1) = \sqrt{n!}$, $(n = 0, 1, \ldots)$, то имеем случай II, причем условие (1.4) невыполнено; легко видеть, что в этом случае

$$a_n = -\frac{n}{n+2}, \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -1. \tag{1.9}$$

Теорема 1.3. *Сходимость* $\lim\limits_{n\to\infty} \varpi_n(e^{i\theta_0}) = 1$ *в одной точке* θ_0 *эквивалентна условию* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; *из каждого из этих двух условий вытекает* $d(\mathcal{E}_\sigma) = 1$ *и равномерная сходимость* $\lim\limits_{n\to\infty} \varpi_n(z) = 1$ *для* $|z| \leqslant 1$.

Справедливость этого утверждения следует из формулы

$$\varpi_n(z) - 1 = \frac{a_n}{\sqrt{1-|a_n|^2}}\left(\frac{\bar{a}_n}{1+\sqrt{1-|a_n|^2}} - z\frac{\varphi_n(z)}{\varphi_n^*(z)}\right),$$

вытекающей из (2).

§ 2. Рассмотрим поставленную нами задачу для случая **одной точки** θ_0 (и ее бесконечно малой окрестности).

Теорема 2.1. *Если существует* $\sigma'(\theta_0)$, *то для справедливости неравенства*

$$\sigma'(\theta_0) > 0 \tag{2.1}$$

достаточно, чтобы, кроме (1.1), *выполнялись еще два условия:*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}|\varphi_n(e^{i\theta_0})| < \infty, \tag{2.2}$$

$$\int_0^h |d_t\{\sigma(\theta_0+t) - \sigma(\theta_0-t) - 2t\sigma'(\theta_0)\}| = o(h). \tag{2.3}$$

Действительно, из (1.1) и (2.2) по теореме 1.2 находим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|\varphi_n(e^{i\theta_0})| < \infty, \quad \{|\varphi_n(e^{i\theta_0})|\}_0^\infty \leqslant M; \tag{2.4}$$

отсюда легко получаем

$$\frac{1}{n+1}K_n(\theta_0) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}|\varphi_m(e^{i\theta_0})|^2 \leqslant M^2, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.5}$$

Воспользуемся неравенством ([4], § 4.1)

$$\frac{n+1}{K_n(\theta_0)} \leqslant \sigma_n(\theta_0), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.6}$$

где $\sigma_n(\theta)$ — *сумма Фейера* n-го порядка для ряда Фурье — Стильтьеса $\mathfrak{S}(d\sigma)$. Так как условие (2.3) достаточно для сходимости $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(\theta_0) = \sigma'(\theta_0)$, ([5], § 3.8), то из (2.5), (2.6) находим

$$\sigma'(\theta_0) = \lim_{n\to\infty}\sigma_n(\theta_0) \geqslant \frac{1}{M^2}. \tag{2.7}$$

Примечание 2.1. Условие (2.2) можно заменить менее общим условием

$$K_n(\theta_0) \leqslant C(n+1), \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots), \tag{2.2'}$$

откуда вытекает (2.2); действительно, если предположить, что

$$\lim_{n\to\infty}|\varphi_n(e^{i\theta_0})| = \infty,$$

то по известным свойствам среднеарифметического мы имели бы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{K_n(\theta_0)}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}|\varphi_m(e^{i\theta_0})|^2=\infty,$$

что противоречит (2.2′).

Интересно отметить, что из (2.2′) и (1.1) вытекает (2.4); если же условие (1.1) не выполнено, то из (2.2′) вытекает, как было сказано, только (2.2).

Рассмотрим такой пример: пусть

$$\varphi_n(1)=\begin{cases}1, & n\neq k^3\\ k, & n=k^3\end{cases}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots),\quad \varphi_0=1; \tag{2.8}$$

легко видеть, что в этом случае имеем

$$a_m=\begin{cases}\lambda_k, & m=k^3,\\ -\lambda_k & m=k^3-1,\\ 0 & m\neq k^3,\quad k^3-1;\end{cases}\qquad \lambda_k=\frac{k^2-1}{k^2+1},\quad (k=2,\ 3,\ \ldots) \tag{2.9}$$

выполняется (2.2) и по (5) $d(\mathscr{E}_\sigma)=1$.

Примечание 2.2. Так как для нас важна не сходимость (2.7), а нахождение оценки снизу для $\sigma'(\theta_0)$ по аналогичной оценке для $\sigma_n(\theta_0)$ то условие (2.3) можно заменить более общим условием

$$\int_0^h|d_t\{\sigma(\theta_0+t)-\sigma(\theta_0-t)-2t\sigma'(\theta_0)\}|\leqslant C_1h. \tag{2.3′}$$

Воспроизводя все вычисления, приведенные в [6], § 3.8, мы найдем оценку

$$\sigma'(\theta_0)\geqslant\frac{1}{M^2}-C_1\left(\frac{2}{\pi}+\frac{\pi}{2}\right), \tag{2.10}$$

имеющую, очевидно, смысл лишь при условии $M\sqrt{C_1}<\left(\frac{2}{\pi}+\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Примечание 2.3. В том частном случае, когда функция $\sigma(\theta)$ *абсолютно непрерывна для* $\theta\in[\theta_0-h,\ \theta_0+h]$, условие (2.3) можно заменить таким условием

$$\int_0^h|p(\theta_0+t)+p(\theta_0-t)-2p(\theta_0)|\,dt=o(h),\quad p(\theta)=\sigma'(\theta); \tag{2.11}$$

в частности, это последнее условие всегда выполняется, если θ_0 является *точкой Лебега* функции $p(\theta)$; совершенно аналогично условие (2.3′) заменяется условием

$$\int_0^h|p(\theta_0+t)+p(\theta_0-t)-2p(\theta_0)|\,dt\leqslant C_1h. \tag{2.11′}$$

Примечание 2.4. Из хода рассуждений, приведенных в [5], § 3.8, ясно, что теорема 2.1 останется в силе, если потребовать существование лишь *обобщенной производной*

$$\sigma^{(1)}(\theta_0)=\lim_{h\to0}\frac{\sigma(\theta_0+h)-\sigma(\theta_0-h)}{2h}. \tag{2.12}$$

Примечание 2.5. Условие (1.1) не локального, а глобального характера; оно нужно лишь для того, чтобы из (2.2) вывести (2.4); поэтому условие (1.1) в формулировке теоремы 2.1 можно отбросить, если в условии (2.2) заменить $\underline{\lim}$ на $\overline{\lim}$.

Мы можем еще иначе видоизменить формулировку теоремы 2.1, придавая ей чисто локальный характер и в то же время накладывая ограничения на поведение подпоследовательности: *если выполняется* (2.12) *и если существует подпоследовательность* $\{\varphi_{n_i}(e^{i\theta})\}$, *равномерно ограниченная в сколь угодно малой окрестности точки* θ_0

$$|\varphi_{n_i}(e^{i\theta})| \leqslant M, \quad \theta_0 - \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + \varepsilon, \quad n_i > \frac{1}{2\varepsilon},$$

то $\sigma^{(1)}(\theta_0) > 0$ *).

§ 3. Рассмотрим теперь нашу задачу в случае отрезка $[\alpha, \beta]$, причем $0 \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant 2\pi$.

Теорема 3.1. *Если для* $\theta \in [\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$ *имеем*

$$|\varphi_{n_i}(e^{i\theta})| \leqslant M, \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{3.1}$$

то для любых двух точек θ_1, θ_2 *непрерывности функции* $\sigma(\theta)$ *справедливо неравенство*

$$\sigma(\theta_2) - \sigma(\theta_1) \geqslant \frac{1}{M^2}(\theta_2 - \theta_1), \quad \alpha \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \beta. \tag{3.2}$$

Для доказательства рассмотрим равномерно ограниченную последовательность неубывающих функций

$$\mu(\theta) = \int\limits_0^\theta \frac{d\psi}{|\varphi_n(e^{i\psi})|^2}, \quad (n = 0, 1, \ldots), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi; \tag{3.3}$$

по первой теореме Хелли из нее можно выделить бесконечную подпоследовательность $\{\mu_{n_i}(\theta)\}$, сходящуюся «в основном» (т. е. на всюду плотном множестве) к некоторой неубывающей функции

$$\lim_{i\to\infty} \mu_{n_i}(\theta) = \mu(\theta).$$

Так как по (4) мы имеем

$$\mu_{n_i}(0) = 0, \quad \mu_{n_i}(2\pi) = 2\pi C_0, \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

то по второй теореме Хелли получим

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\mu_{n_i}(\theta) = \lim_{i\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{ik\theta}d\theta}{|\varphi_{n_i}(e^{i\theta})|^2} = \int\limits_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\mu(\theta), \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

С другой стороны, на основании (4) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{ik\theta}d\theta}{|\varphi_{n_i}(e^{i\theta})|^2} = \int\limits_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\mu(\theta) = \int\limits_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\sigma(\theta), \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Так как *тригонометрическая проблема моментов* имеет единственное решение, то *функции* $\mu(\theta)$ *и* $\sigma(\theta)$ *эквивалентны.*

Применяя эти же рассуждения к любой другой бесконечной последовательности функций $\{\mu_{n_k}(\theta)\}$, мы видим, что *вся последовательность функций* (3.3) *сходится*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\theta \frac{d\psi}{|\varphi_n(e^{i\psi})|^2} = \sigma(\theta). \tag{3.4}$$

---

*) Доказательство этой теоремы, требующее применения совсем другого аппарата, будет приведено в другом месте.

Отсюда получаем основную формулу

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\psi}{|\varphi_n(e^{i\psi})|^2}=\sigma(\theta_2)-\sigma(\theta_1); \tag{3.5}$$

пользуясь ею, мы из (3.1) выводим (3.2).

Теорема 3.2. *При выполнении условий* (3.2) *и* (1.1) *имеем*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\varphi_n(e^{i\theta})|<\infty,\quad \alpha+\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\beta-\varepsilon,\quad \varepsilon>0; \tag{3.6}$$

отсюда следует (по теореме Осгуда) *существование отрезка* $[\alpha', \beta']\subset[\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon]$, *на котором имеем равномерную ограниченность*

$$|\varphi_n(e^{i\theta})|\leqslant M,\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{3.7}$$

Действительно, из (3.2) вытекает *)

$$K_n(\theta)\leqslant C(n+1),\quad \alpha+\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\beta-\varepsilon;$$

отсюда, на основании примечания 2.1, следует (2.2); в свою очередь по теореме 1.2 из (2.2) и (1.1) следует (3.6).

Опуская условие (1.1), мы сможем утверждать справедливость (3.7) лишь для некоторой *подпоследовательности.*

Теорема 3.3. *Если* (3.1) *справедливо на всем отрезке* $[0, 2\pi]$, *то и* (3.2) *справедливо для* $0\leqslant\theta_1<\theta_2\leqslant 2\pi$.

Действительно, эта теорема является частным случаем теоремы 3.1 при $[\alpha, \beta]=[0, 2\pi]$.

Теорема 3.4. *Если*

$$\sigma(\theta_2)-\sigma(\theta_1)\geqslant m(\theta_2-\theta_1),\ 0\leqslant\theta_1<\theta_2\leqslant 2\pi, \tag{3.8}$$

то мы имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\varphi_n(e^{i\theta})|<\infty,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \tag{3.9}$$

$$|\varphi_n(e^{i\theta})|\leqslant M,\quad (n=0,\ 1,\ \ldots),\quad \theta\in[\alpha', \beta']\subset[0, 2\pi]. \tag{3.9'}$$

Эта теорема является частным случаем теоремы 3.2 при $[\alpha, \beta]=[0, 2\pi]$ с тем изменением, что из (3.8) вытекает неравенство (2.2′) на всем отрезке $[0, 2\pi]$. Кроме того, из (3.8) вытекает неравенство

$$\int_0^{2\pi}\lg\sigma'(\theta)\,d\theta>-\infty, \tag{3.10}$$

эквивалентное условию $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty$ (см. [4], § 8.2), поэтому в данном случае условие (1.1) в теореме 3.2 становится излишним.

Подведем итоги. Теорема 2.1 доказывает предположение В. А. Стеклова для случая точки. В частности, если функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна на всем отрезке $[0, 2\pi]$, (а именно такой случай рассматривал В. А. Стеклов), то для справедливости неравенства $p(\theta_0)>0$ достаточны локальные условия: θ_0 *является точкой Лебега для функции* $p(\theta)$ *и справедливо* (2.4). Теоремы 3.1 и 3.2 доказывают предположение В. А. Стеклова для случая внутреннего отрезка $[\alpha, \beta]\subset[0, 2\pi]$, однако в теореме 3.2 мы вынуждены были ввести дополнительное глобальное условие (1.1). Теоремы 3.3 и 3.4 доказывают предположение В. А. Стеклова для случая всего отрезка $[0, 2\pi]$, однако теорема 3.4 обеспечивает ограниченность ортонормальной системы в каждой точке отрезка $[0, 2\pi]$, а равномерную ограниченность — лишь на каком-то внутреннем отрезке.

*) См. [4], § 4.1.

При более ограничительном условии

$$\left.\begin{array}{l} d\sigma(\theta) = p(\theta)\,d\theta, \quad 0 < m \leqslant p(\theta) \leqslant M, \\ p(\theta) \in \mathrm{Lip}\left(\frac{1}{2}, 2\right) \end{array}\right\} 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \tag{3.11}$$

имеет место равномерная ограниченность (3.9) на всем отрезке $[0, 2\pi]$ (см. [4], § 3.7).

§ 4. В теоремах 2.1, 3.1, 3.3 мы выяснили, что ограниченность ортонормальной системы связана с положительностью функции $\sigma'(\theta)$; рассмотрим несколько дальнейших теорем, связывающих поведение последовательности ортонормальных многочленов со свойствами функции $\sigma(\theta)$.

Теорема 4.1. *Если мы имеем*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} |\varphi_n(e^{i\theta})| \geqslant m > 0, \quad \theta \in [\alpha, \beta], \tag{4.1}$$

то функция $\sigma(\theta)$ *абсолютно непрерывна на* $[\alpha, \beta]$, *причем*

$$\sigma'(\theta) \leqslant \frac{1}{m^2}, \quad \theta \in [\alpha, \beta]. \tag{4.2}$$

Действительно, из (4.1) вытекает существование подпоследовательности, для которой

$$|\varphi_{n_i}(e^{i\theta})| \geqslant m > 0, \quad (i = 1, 2, \ldots), \quad \theta \in [\alpha, \beta],$$

после чего из (3.5) находим

$$\sigma(\theta_2) - \sigma(\theta_1) \leqslant \frac{1}{m^2}(\theta_2 - \theta_1), \quad \alpha \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \beta.$$

Теорема 4.2. *Если* α, β — *точки непрерывности функции* $\sigma(\theta)$ *и если*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \frac{d\theta}{|\varphi_n(e^{i\theta})|^{2\gamma}} \leqslant M, \quad \gamma > 1, \tag{4.3}$$

то функция $\sigma(\theta)$ *абсолютно непрерывна на отрезке* $[\alpha, \beta]$, *причем* $p(\theta) \in L_\gamma(\alpha, \beta)$.

По (3.4) и по второй теореме Хелли имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \frac{e^{ik\theta}}{|\varphi_n(e^{i\theta})|^2}\,d\theta = \int_\alpha^\beta e^{ik\theta}\,d\sigma(\theta), \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.4}$$

С другой стороны, из условия (4.3) вытекает существование подпоследовательности $\{n_i\}$, для которой

$$\int_\alpha^\beta \frac{d\theta}{|\varphi_{n_i}(e^{i\theta})|^{2\gamma}} \leqslant M, \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, функции

$$\lambda_{n_i}(\theta) = \frac{1}{M\,|\varphi_{n_i}(e^{i\theta})|^2}, \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

являются элементами функционального пространства $L_\gamma(\alpha, \beta)$ и принадлежат его единичной сфере, ибо

$$\|\lambda_{n_i}\| = \left\{\int_\alpha^\beta |\lambda_{n_i}(\theta)|^\gamma d\theta\right\}^{\frac{1}{\gamma}} \leqslant 1, \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

На основании *слабой компактности* единичной сферы в пространстве $L_\gamma(\alpha, \beta)$ найдется элемент $\lambda(\theta)$ этого пространства, к которому подпоследовательность $\lambda_{n_i}(\theta)$ *слабо сходится*; в частности, будем иметь

$$\lim_{i\to\infty}\int_\alpha^\beta \lambda_{n_i}(\theta)\,e^{ik\theta}d\theta=\int_\alpha^\beta \lambda(\theta)\,e^{ik\theta}d\theta,\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

и таким образом найдем

$$\lim_{i\to\infty}\int_\alpha^\beta \frac{e^{ik\theta}d\theta}{|\varphi_{n_i}(e^{i\theta})|^2}=M\int_\alpha^\beta \lambda(\theta)\,e^{ik\theta}d\theta,\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Сопоставляя с (4.4), получим

$$\int_\alpha^\beta e^{ik\theta}d\sigma(\theta)=\int_\alpha^\beta e^{ik\theta}M\lambda(\theta)\,d\theta,\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Мы нашли, таким образом, два решения тригонометрической проблемы моментов на отрезке $[0,\ 2\pi]$, а именно:

$$\sigma_1(\theta)=\begin{cases}\sigma(\theta), & \theta\in[\alpha,\ \beta],\\ \mathrm{Const}, & \theta\,\overline{\in}\,[\alpha,\ \beta],\end{cases}\qquad \sigma_2(\theta)=\begin{cases}\int_\alpha^\theta M\lambda(\psi)\,d\psi, & \theta\in[\alpha,\ \beta],\\ \mathrm{Const}, & \theta\,\overline{\in}\,[\alpha,\ \beta];\end{cases}$$

вследствие единственности решения указанной проблемы эти две функции должны быть эквивалентны, откуда

$$\sigma(\theta)=M\int_\alpha^\theta \lambda(\theta)\,d\theta+C,\ \ \theta\in[\alpha,\ \beta];\qquad \int_\alpha^\beta[\lambda(\theta)]^\gamma\,d\theta<\infty.$$

Теорема 4.3. *Если мы имеем*

$$\lim_{i\to\infty}|\varphi_{n_i}(e^{i\theta})|=\varphi(\theta)\neq 0,\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta, \tag{4.5}$$

равномерно на $[\alpha,\ \beta]$, *то функция* $\sigma(\theta)$ *имеет производную* $\sigma'(\theta)=\frac{1}{[\varphi(\theta)]^2}$ *во всех точках отрезка* $[\alpha,\ \beta]$.

Доказательство очевидно.

Теорема 4.4. *Если подпоследовательность* $\{\varphi_{n_i}(e^{i\theta})\}$ *сходится по мере на множестве* $e\subset[\alpha,\ \beta]$, $\mathrm{m}e>0$, *к измеримой функции* $\varphi(\theta)$ *и* $\varphi(\theta)\not\equiv\infty$ *на множестве* $e'\subset e$, $\mathrm{m}e'>0$, *то справедливо* (3.10) *).

§ 5. В случае многочленов $\{p_n(x)\}_0^\infty$, ортонормальных на отрезке $[-1,\ +1]$ относительно обложения $d\psi(x)$, мы введем функцию

$$\sigma(\theta)=\begin{cases}-\psi(\cos\theta), & 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\\ \ \ \psi(\cos\theta), & \pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases} \tag{5.1}$$

и воспользуемся формулой Г. Сеге

$$p_n(x)=\frac{\varphi_{2n}(z)+\overset{*}{\varphi}_{2n}(z)}{2\pi\sqrt{1-a_{2n-1}}}\cdot z^{-n},\quad x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\quad (n=1,\ 2,\ \ldots), \tag{5.2}$$

где многочлены $\{\varphi_n(z)\}$ ортонормальны относительно обложения $d\sigma(\theta)$; отсюда найдем для $-1\leqslant x\leqslant 1$

$$|p_n(x)|\leqslant\frac{|\varphi_{2n}(e^{i\theta})|}{\pi\sqrt{1-a_{2n-1}}},\quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{5.3}$$

Таким образом, *при условии* (1.1) *из ограниченности многочленов* $\{\varphi_n(e^{i\theta})\}$ *вытекает аналогичное свойство многочленов* $\{p_n(x)\}$.

---

*) См. [4], § 5.8.

Многочлены $\{p_n(x)\}$ связаны *трехчленной рекуррентной формулой* (см. [3], § 31)

$$\sqrt{\lambda_{n+1}}\, p_n(x) = (x - \alpha_n)\, p_{n-1}(x) - \sqrt{\lambda_n}\, p_{n-2}(x),\ \lambda_n > 0 \ (n = 1,\ 2.\ \ldots); \quad (5.4)$$

$$\lambda_n = \frac{(1 - a_{2n-5})(1 - a_{2n-4}^2)(1 + a_{2n-3})}{4}, \quad (n = 3,\ 4,\ \ldots), \quad (5.5)$$

Ясно, что условие (1.1) эквивалентно условию

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n > 0; \quad (5.6)$$

этот же вывод справедлив и в случае любого *конечного* отрезка ортогональности.

Условие (1.1), фигурирующее в наших рассуждениях, имеет тот недостаток, что оно наложено не на функцию $\sigma(\theta)$, из которой мы исходим, а на параметры $\{a_n\}_0^\infty$, которые, впрочем, также позволяют построить всю систему. Было бы весьма интересно выяснить, каким условиям должна удовлетворять функция $\sigma(\theta)$, для того чтобы выполнялось условие (1.1), выяснить, в частности, не достаточно ли для этого выполнения условия (3.2) для любого малого отрезка $[\alpha, \beta]$. Сделать это, к сожалению, нам не удалось.

Перечислим некоторые полученные нами результаты:

1) из условия $d(\mathscr{E}_\sigma) = 0$ вытекает $\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| = 1$;

2) из условия $\sup |a_n| = a < 1$ вытекает $d(\mathscr{E}_\sigma) \geqslant \sqrt{1 - a^2}$ *;

3) из условия (3.10) вытекает (1.1);

4) если многочлены ортонормальны на дуге l единичной окружности $|z| = 1$ относительно веса $p(\theta)$, положительного и непрерывного на l, то существует $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $|a| < 1$ **;

5) если существует $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $|a| = 1$ (как, например, в случае (1.9)), то точка $\theta = \pi$ является единственной предельной точкой множества $\mathscr{E}_\sigma$ ***.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер. О полиномах, ортогональных на дуге окружности. «Докл. АН СССР», 130, 247—250 (1960).

2. Я. Л. Геронимус. О полиномах, ортогональных на круге, о тригонометрической проблеме моментов и об ассоциированных с нею функциях типа Каратеодори и Шура. «Матем. сб.» **15(57)**, 99—130 (1944).

3. Я. Л. Геронимус. Полиномы, ортогональные на круге и их приложения. «Зап. Харьковск. матем. об-ва», **(4)**, **19**, 35—120 (1948).

4. Я. Л. Геронимус. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке, Физматгиз, 1958.

5. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, М. — Л., ГОНТИ, 1939.

6. В. А. Стеклов. Une méthode de la solution du problème du developpement des fonctions en séries de polynomes de Tchebycheff, independente de la théorie de fermeture. Изв. Рос. АН, **15**, 281—302, 303—326 (1921).

* Доказательство 1), 2) вытекает из 5).

** Доказательство вытекает из результатов Н. И. Ахиезера [1].

*** См. [2], § 6.