ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVI. Серия 4 1960

ОБ УРАВНЕНИИ $-\frac{d}{dy}\left[p(y)\frac{d}{dy}u\right]+q(y)u=\lambda u$

М. И. Ломоносов

(Харьков)

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через

$$l[u] = -\frac{d}{dy}\left[p(y)\frac{d}{dy}u\right]+q(y)u \tag{1.1}$$

дифференциальную операцию, определенную в интервале $(-c,\ c,)$, где $c \leqslant \infty$.

Потребуем, чтобы функции $p(y)$ и $q(y)$ удовлетворяли следующим условиям.

I*. Функция $p(y)$ положительна и дифференцируема в интервале $(-c,\ c)$, причем ее производная $p'(y)$ ограничена в каждом интервале $(-d,\ d)$ при любых $d < c$.

II*. Функция $q(y)$ вещественна и суммируема в каждом интервале $(-d,\ d)$ при любых $d < c$.

Эти условия будем считать выполненными на протяжении всей работы, не оговаривая это каждый раз особо.

Если функция $p(y)$ дважды дифференцируема, то оператор (1.1.) известным преобразованием

$$x = \int_0^y p^{-1/2}(\alpha)\,d\alpha, \quad v = up^{1/4}$$

может быть приведен к виду $-v'' + q_1(x)v$. Для такого оператора в работах В. А. Марченко [1, 2, 3] и Б. М. Левитана [4, 5] были получены асимптотические формулы для соответствующих ему спектральных функций и доказана равносходимость разложений по собственным функциям этого оператора с разложением в обычный интеграл Фурье.

Целью настоящей работы* является обобщение этих результатов на тот случай, когда выполнены только условия I* и II**.

Заметим, что изучением асимптотики спектральной функции оператора более общего вида, чем (1.1), занимался И. С. Кац [6]. Полученные им результаты менее точны, чем наши, что объясняется более широкой постановкой задачи.

Рассмотрим в интервале $(-c,\ c)$ дифференциальное уравнение для собственных функций оператора

$$l[u] = \lambda u,$$

где λ — параметр.

---

* Некоторые результаты настоящей работы были ранее опубликованы в ДАН СССР, т. 105, № 3 (1955).

Как известно, такое уравнение естественно появляется при решении уравнения в частных производных гиперболического типа методом разделения переменных. С другой стороны, указанное гиперболическое уравнение также можно решить методом Римана.

Именно этот простой факт был использован в работах А. Я. Повзнера [7], Б. М. Левитана [4, 5] и В. А. Марченко [1, 2, 3] для исследования спектральных свойств оператора l в случае, когда $p(y) \equiv 1$.

Мы покажем, что этот метод можно использовать и в нашем случае, если функция $p(y) > 0$ имеет только *одну* ограниченную производную, хотя оператор l привести к виду $-v'' + q_1(x)v$ при этих предположениях нельзя (для этого требуется, как это уже отмечалось выше, наличие у функции $p(y)$ *двух* производных).

Нам удобнее будет в дальнейшем перейти к новым переменным

$$x = \int\limits_0^y p^{-1/2}(\alpha)\, d\alpha, \quad u(y) \equiv \omega(x).$$

При таком преобразовании оператор l заменится следующим:

$$L[\omega] = -\frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\ln R(x)\right]\frac{d\omega}{dx} + Q(x)\omega \qquad (a_1 < x < a_2),$$

а уравнение $l[u] = \lambda u$ примет вид

$$L[\omega] = \lambda\omega \qquad (a_1 < x < a_2), \tag{1.2}$$

где

$$R(x) \equiv p(y); \qquad Q(x) \equiv q(y);$$

$$a_1 = \lim_{y \to -c} \int\limits_0^y p^{-1/2}(\alpha)\, d\alpha \geqslant -\infty; \quad a_2 = \lim_{y \to c} \int\limits_0^y p^{-1/2}(\alpha)\, d\alpha \leqslant \infty.$$

Очевидно, что условия I* и II* равносильны следующим:

1. Функция $R(x)$ положительна и дифференцируема в интервале (a_1, a_2), причем ее производная $R'(x)$ ограничена в каждом интервале (b_1, b_2) при любых $a_1 < b_1 < b_2 < a_2$.

II. Функция $Q(x)$ вещественна и суммируема в каждом интервале (b_1, b_2) при любых $a_1 < b_1 < b_2 < a_2$.

Отметим, что настоящая работа появилась в результате решения задачи, поставленной В. А. Марченко на семинаре кафедры математической физики Харьковского государственного университета, об отыскании асимптотики спектральной функции уравнения

$$\psi''(\lambda, z) + \lambda\rho(z)\psi(\lambda, z) = 0 \tag{1.3}$$

в случае, если $\rho(z) > 0$ имеет лишь *одну* производную. Для этого нужно было построить и изучить функцию Римана вспомогательного уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi(z, t) = \rho(z)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(z, t).$$

Решение указанной задачи содержится в теореме 4.1 настоящей работы, так как уравнение (1.3) после замены

$$x = \int\limits_0^z \rho^{1/2}(\alpha)\, d\alpha; \quad \psi(\lambda, z) \equiv \omega(\lambda, x); \quad \rho(z) \equiv R(x)$$

сведется к изученному нами уравнению (1.2) с $Q(x) \equiv 0$.

В силу последнего обстоятельства все доказанные нами теоремы справедливы также и для уравнения (1.3).

Отметим еще, что все результаты настоящей работы распространяются и на уравнение

$$-\frac{d}{dy}\left[p(y)\frac{d}{dy}u\right]+q(y)u=\lambda r(y)u,$$

так как после замены

$$x=\int_0^y\left[\frac{r(\alpha)}{p(\alpha)}\right]^{1/2}d\alpha;\quad u(\lambda,y)\equiv\omega(\lambda,x);\quad p(y)\equiv p^*(x);\quad q(y)\equiv q^*(x);$$

$$r(y)\equiv r^*(x)$$

оно также сводится к изученному нами уравнению (1.2) при

$$R(x)=p^*(x)r^*(x);\quad Q(x)=\frac{q^*(x)}{r^*(x)}.$$

Заметим, наконец, что на протяжении всей работы мы будем пользоваться следующими обозначениями для преобразования Фурье функции $f(x)$

$$C_f(\lambda)=\int_0^\infty f(x)\cos\lambda x\,dx$$

и для вариации функции $\alpha(\lambda)$ в полуинтервале $[a, b)$

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\{\alpha(\lambda)\}.$$

Автор пользуется возможностью принести глубокую благодарность профессору В. А. Марченко за ценные указания, данные при написании настоящей работы.

§ 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Основное значение для дальнейшего будет иметь задача Коши для следующего уравнения в частных производных:

$$\underset{x}{L_1}[v(x,t)]=\underset{t}{L_2}[v(x,t)]\quad(a_1<x<a_2,\quad t\geqslant 0),$$

где

$$\underset{s}{L_i}[\varphi]=-\frac{d^2\varphi}{ds^2}-\frac{1}{2}\left[\frac{d}{ds}\ln R_i(s)\right]\frac{d\varphi}{ds}+Q_i(s)\varphi\quad(i=1,2),$$

а функции $R_i(s)$ и $O_i(s)$ $(i=1, 2)$ подчинены условиям I и II.

Преобразуем это уравнение, перейдя к характеристикам

$$\xi=x+t;\quad \eta=x-t:$$

$$M[v(\xi,\eta)]=v_{\xi\eta}+\frac{1}{4}(A_\eta v_\xi+A_\xi v_\eta+Bv)=0.$$

Здесь мы ввели обозначения

$$A(\xi,\eta)=\ln\left[R_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)R_2\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right];\ B(\xi,\eta)=Q_2\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)-Q_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right).\tag{2.1}$$

В дальнейшем нам потребуются следующие известные факты из теории уравнений в частных производных гиперболического типа.

1. Дифференциальное выражение

$$N[u(\xi, \eta)] = u_{\xi\eta} - \frac{1}{4}(A_\eta u)_\xi - \frac{1}{4}(A_\xi u)_\eta + \frac{1}{4} Bu$$

является сопряженным $M[v]$.

2. Функцией Римана $V(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$ (ξ, η — аргументы, ξ_0, η_0 — параметры) дифференциального выражения $N[u]$ называется функция, удовлетворяющая уравнению

$$M[V] = 0,$$

условиям на характеристиках

$$\left[V_\eta + \frac{1}{4} A_\eta V\right]_{\xi=\xi_0} = 0; \qquad \left[V_\xi + \frac{1}{4} A_\xi V\right]_{\eta=\eta_0} = 0, \tag{2.2}$$

и обращающаяся в единицу в точке (ξ_0, η_0)

$$V(\xi_0, \eta_0, \xi_0, \eta_0) = 1. \tag{2.3}$$

3. Аналогично функцией Римана $U(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$ дифференциального выражения $M[v]$ называется функция, удовлетворяющая уравнению

$$N[U] = 0,$$

условиям на характеристиках

$$\left[U_\eta - \frac{1}{4} A_\eta U\right]_{\xi=\xi_0} = 0; \qquad \left[U_\xi - \frac{1}{4} A_\xi U\right]_{\eta=\eta_0} = 0, \tag{2.4}$$

причем

$$U(\xi_0, \eta_0, \xi_0, \eta_0) = 1. \tag{2.5}$$

4. Закон взаимности для функций Римана U и V состоит в том что если у одной из них поменять местами аргументы и параметры, то она совпадет с другой:

$$U(\xi_0, \eta_0, \xi, \eta) = V(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0). \tag{2.6}$$

5. Решение уравнения

$$M[v(\xi, \eta)] = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$v/_{\xi=\eta} = 0; \qquad [v_\xi - v_\eta]_{\xi=\eta} = f(\xi),$$

дается формулой Римана

$$v(\xi_0, \eta_0) = \frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\xi_0} f(s)\, U(s, s, \xi_0, \eta_0)\, ds. \tag{2.7}$$

Если допустить, что функции Римана U и V существуют, то для доказательства последних двух фактов, как известно, следует применить формулу Грина к интегралу

$$\iint_{(\delta)} \{uM[v] - vN[u]\}\, d\delta,$$

положив в первом случае $u = U$; $v = V$; (δ) — прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат и диагональю, соединяющей точки (ξ, η) и (ξ_0, η_0); а во втором — $u = U$; v — решение задачи Коши, (δ) — треугольник, ограниченный двумя характеристиками, исходящими из точки (ξ_0, η_0), и прямой $\xi = \eta$.

В теории гиперболических уравнений существование функций Римана U и V в прямоугольной области, ограниченной характеристиками, доказывается в предположении, что коэффициенты дифференциальных выражений $M[v]$ и $N[u]$ (функции A_η, A_ξ, $A_{\xi\eta}$, B) ограничены в рассматриваемой области.

В нашем случае вместо этих условий выполнены только условия I и II. Поэтому, чтобы можно было использовать формулы (2.6) и (2.7) нам нужно доказать, что и при наших предположениях существуют функции Римана U и V.

Лемма 2.1. Уравнение

$$M[v] = 0 \tag{2.8}$$

в области $\xi_0 \leqslant \xi \leqslant a$, $b \leqslant \eta \leqslant \eta_0$ имеет единственное решение, удовлетворяющее заданным условиям на характеристиках:

$$\left.\begin{aligned} v|_{\xi=\xi_0} &= \varphi_1(\eta) \qquad (b \leqslant \eta \leqslant \eta_0) \\ v|_{\eta=\eta_0} &= \varphi_2(\xi) \qquad (\xi_0 \leqslant \xi \leqslant a) \end{aligned}\right\}, \tag{2.9}$$

если функции $\varphi_1(\eta)$ и $\varphi_2(\xi)$ имеют ограниченные производные и

$$\varphi_1(\eta_0) = \varphi_2(\xi_0). \tag{2.10}$$

Доказательство. Перейдем от уравнения (2.8) и условий (2.9), (2.10) к интегро-дифференциальному уравнению

$$v(\xi, \eta) = \varphi_1(\eta) + \varphi_2(\xi) - \varphi_1(\eta_0) - \frac{1}{4}\int_{\xi_0}^{\xi}\int_{\eta_0}^{\eta}(A_\eta v_\xi + A_\xi v_\eta + Bv)\, d_{\xi_1} d_{\eta_1} \tag{2.11}$$

и покажем, что его можно решить методом последовательных приближений.

С этой целью положим:

$$v(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\xi, \eta);\; v_\xi(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{n\xi}(\xi, \eta);\; v_\eta = \sum_{n=1}^{\infty} v_{n\eta}(\xi, \eta); \tag{2.12}$$

$$v_1(\xi, \eta) = \varphi_1(\eta) + \varphi_2(\xi) - \varphi_1(\eta_0);\; v_{1\xi}(\xi, \eta) = \varphi_2'(\xi);\; v_{1\eta}(\xi, \eta) = \varphi_1'(\eta),$$

. . . .

$$\left.\begin{aligned} v_{n+1}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}\int_{\xi_0}^{\xi}\int_{\eta_0}^{\eta}(A_\eta v_{\eta\xi} + A_\xi v_{n\eta} + Bv_n)\, d\xi_1 d\eta_1, \\ v_{n+1\xi}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}\int_{\eta_0}^{\eta}(A_\eta v_{n\xi} + A_\xi v_{n\eta} + Bv_n)\, d\eta_1, \\ v_{n+1\eta}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}\int_{\xi}^{\xi}(A_\eta v_{n\xi} + A_\xi v_{n\eta} + Bv_n)\, d\xi_1. \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Докажем абсолютную и равномерную сходимость рядов (2.12) в области $\xi_0 \leqslant \xi \leqslant a$; $b \leqslant \eta \leqslant \eta_0$.

Обозначим через M верхнюю грань абсолютных величин функций v_1, $v_{1\xi}$, $v_{1\eta}$, а через $4N$ — верхнюю грань суммы $|A_\eta| + |A_\xi|$ и интегралов от нее в промежутках (ξ_0, ξ) и (η, η_0) в области $\xi_0 \leqslant \xi \leqslant a$, $b \leqslant \eta \leqslant \eta_0$. Оценим, далее, интегралы от функции $B(\xi, \eta)$ в интервалах (ξ_0, ξ) и (η, η_0):

$$\int\limits_{\xi_0}^{\xi} |B(\xi_1, \eta)|\, d\xi_1 \leqslant \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \left|Q_1\left(\frac{\xi_1+\eta}{2}\right)\right| d\xi_1 + \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \left|Q_2\left(\frac{\xi_1-\eta}{2}\right)\right| d\xi_1 \leqslant$$

$$\leqslant 2\left[\int\limits_{\frac{\xi_0+\eta}{2}}^{\frac{\xi+\eta}{2}} |Q_1(u)|\, du + \int\limits_{\frac{\xi_0-\eta}{2}}^{\frac{\xi-\eta}{2}} |Q_2(u)|\, du\right] \leqslant 2\left[\int\limits_{\frac{\xi_0+\eta}{2}}^{\frac{\xi+\eta_0}{2}} |Q_1(u)|\, du + \int\limits_{\frac{\xi_0-\eta_0}{2}}^{\frac{\xi-\eta}{2}} |Q_2(u)|\, du\right] =$$

$$= 4I(\xi, \eta),$$

аналогично

$$\int\limits_{\eta}^{\eta_0} |B(\xi, \eta_1)|\, d\eta_1 \leqslant \int\limits_{\eta}^{\eta_0} \left|Q_1\left(\frac{\xi+\eta_1}{2}\right)\right| d\eta_1 + \int\limits_{\eta}^{\eta_0} \left|Q_2\left(\frac{\xi-\eta_1}{2}\right)\right| d\eta_1 \leqslant 2\left[\int\limits_{\frac{\xi+\eta}{2}}^{\frac{\xi+\eta_0}{2}} |Q_1(u)|\, du +\right.$$

$$\left. + \int\limits_{\frac{\xi-\eta}{2}}^{\frac{\xi-\eta_0}{2}} |Q_2(u)|\, du\right] \leqslant 2\left[\int\limits_{\frac{\xi_0+\eta}{2}}^{\frac{\xi+\eta_0}{2}} |Q_1(u)|\, du + \int\limits_{\frac{\xi_0-\eta_0}{2}}^{\frac{\xi-\eta}{2}} |Q_2(u)|\, du\right] = 4I(\xi, \eta).$$

Обозначим через I верхнюю грань значений функции $I(\xi, \eta)$ в области $\xi_0 \leqslant \xi \leqslant a$, $b \leqslant \eta_0 \leqslant \eta$.

Имеем:

$$|v_2| \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 \int\limits_{\xi_0}^{\xi} (|A_\eta| \cdot |v_{1\xi}| + |A_\xi| \cdot |v_{1\eta}| + |B| \cdot |v_1|)\, d\xi_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{4}\left\{\int\limits_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 \left[\int\limits_{\xi_0}^{\xi} (|A_\eta| + |A_\xi|)\, d_{\xi_1} + \int\limits_{\xi_0}^{\xi} |B|\, d\xi_1\right]\right\} \leqslant M(N+I)(\xi - \eta - \xi_0 + \eta_0);$$

$$|v_{2\xi}| \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_{\eta}^{\eta_0} (|A_\eta| \cdot |v_{1\xi}| + |A_\xi| \cdot |v_{1\eta}| + |B| \cdot |v_1|)\, d\eta_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{4}\left[\int\limits_{\eta}^{\eta_0} (|A_\eta| + |A_\xi|)\, d\eta_1 + \int\limits_{\eta}^{\eta_0} |B|\, d\eta_1\right] \leqslant M(N+I),$$

аналогично

$$|v_{2\eta}| \leqslant M(N+I).$$

Предположим, что для некоторого n имеют место оценки

$$|v_n| \leqslant M(N+I)^{n-1} \frac{(\xi - \eta - \xi_0 + \eta_0)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$|v_{n\xi}| \leqslant M(N+I)^{n-1} \frac{(\xi - \eta - \xi_0 + \eta_0)^{n-2}}{(n-2)!}, \qquad (2.14)$$

$$|v_{n\eta}| \leqslant M(N+I)^{n-1} \frac{(\xi - \eta - \xi_0 + \eta_0)^{n-2}}{(n-2)!}.$$

Пользуясь этими оценками и формулами (2.13), получим:

$$|v_{n+1}| \leqslant \frac{1}{4}\int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 \int_{\xi_0}^{\xi} (|A_\eta| \cdot |v_{n\xi}| + |A_\xi| \cdot |v_{n\eta}| + |B| \cdot |v_n|)\, d\xi_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{4}(N+I)^{n-1}\int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1 \Big[\int_{\xi_0}^{\xi} (|A_\eta| + |A_\xi|)\frac{(\xi_1-\eta_1-\xi_0+\eta_0)^{n-2}}{(n-2)!}\, d\xi_1 +$$

$$+\int_{\xi_0}^{\xi} |B| \frac{(\xi_1-\eta_1-\xi_0+\eta_0)^{n-1}}{(n-1)!}\, d\xi_1\Big] \leqslant$$

$$\leqslant M(N+I)^{n-1}\Big[N\int_{\eta}^{\eta_0} d\eta_1\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{(\xi_1-\eta_1-\xi_0+\eta_0)^{n-2}}{(n-2)!}\, d\xi_1 + I\int_{\eta}^{\eta_0}\frac{(\xi-\eta_1-\xi_0+\eta_0)^{n-1}}{(n-1)!}\, d\eta_1\Big] \leqslant$$

$$\leqslant M(N+I)^n\frac{(\xi-\eta-\xi_0+\eta_0)^n}{n!};$$

$$|v_{n+1\xi}| \leqslant \frac{1}{4}\int_{\eta}^{\eta_0} (|A_\eta| \cdot |v_{n\xi}| + |A_\xi| \cdot |v_{n\eta}| + |B| \cdot |v_n|)\, d\eta_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{4}(N+I)^{n-1}\Big[\int_{\eta}^{\eta_0} (|A_\eta| + |A_\xi|)\frac{(\xi-\eta_1-\xi_0+\eta_0)^{n-2}}{(n-2)!}\, d\eta_1 +$$

$$+\int_{\eta}^{\eta_0} |B| \frac{(\xi-\eta_1-\xi_0+\eta_0)^{n-1}}{(n-1)!}\, d\eta_1\Big] \leqslant M(N+I)^{n-1}\Big[N\int_{\eta}^{\eta_0}\frac{(\xi-\eta_1-\xi_0+\eta_0)^{n-2}}{(n-2)!}\, d\eta_1 +$$

$$+ I\frac{(\xi-\eta-\xi_0+\eta_0)^{n-1}}{(n-1)!}\Big] \leqslant M(N+I)^n\frac{(\xi-\eta-\xi_0+\eta_0)^{n-1}}{(n-1)!},$$

а также

$$|v_{n+1\eta}| \leqslant M(N+I)^n\frac{(\xi-\eta-\xi_0+\eta_0)^{n-1}}{(n-1)!},$$

откуда следует, что аналогичные оценки верны и для $n+1$.
Так как оценки (2.14) верны при $n=2$, то, согласно предыдущему, они верны при всех $n \geqslant 2$.

Из неравенств (2.14) следует абсолютная и равномерная сходимость рядов (2. 12) в области $\xi_0 \leqslant \xi \leqslant a$, $b \leqslant \eta \leqslant \eta_0$ и оценки

$$\sum_{n=1}^{\infty}|v_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} M(N+I)^{n-1}\frac{(\xi-\eta-\xi_0+\eta_0)^{n-1}}{(n-1)} = Me^{(N+I)(\xi-\eta-\xi_0+\eta_0)};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|v_{n\xi}| \leqslant M + \sum_{n=2}^{\infty} M(N+I)^{n-1}\frac{(\xi-\eta-\xi_0+\eta_0)^{n-2}}{(n-2)!} =$$

$$= M[1+(N+I)e^{(N+I)(\xi-\eta-\xi_0+\eta_0)}],$$

и аналогично

$$\sum_{n=1}^{\infty}|v_{n\eta}| \leqslant M[1+(N+I)e^{(N+I)(\xi_0-\eta-\xi_0+\eta_0)}].$$

Отсюда вытекает, что функция $v(\xi, \eta)$, определенная рядом (2.12), дифференцируема по ξ и η и удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению (2. 11).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция v удовлетворяет также уравнению (2. 8) и условиям (2.9), (2.10).

Оценки, аналогичные оценкам (2.14), полученным для членов рядов (2. 12), можно получить и для решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (2. 11). Из этих оценок будет следовать единственность найденной функции.

Лемма 2.2. Уравнение

$$N[u]=0 \tag{2.15}$$

в области $\xi_0 \leqslant \xi \leqslant a$, $b \leqslant \eta \leqslant \eta_0$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям на характеристиках

$$\begin{aligned} u|_{\xi=\xi_0} &= \psi_1(\eta) \qquad (b \leqslant \eta \leqslant \eta_0) \\ u|_{\eta=\eta_0} &= \psi_2(\xi) \qquad (\xi_0 \leqslant \xi \leqslant a) \end{aligned} \tag{2.16}$$

и ограниченно дифференцируемое по ξ и η, если функции $\psi_1(\eta)$ и $\psi_2(\xi)$ имеют ограниченные производные и

$$\psi_1(\eta_0)=\psi_2(\xi_0). \tag{2.17}$$

Доказательство. Перейдем от уравнения (2.15) и условий (2.16) и (2.17) к интегро-дифференциальному уравнению

$$u(\xi,\ \eta)=\psi_1(\eta)+\psi_2(\xi)-\psi_1(\eta_0)+\frac{1}{4}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\int\limits_{\eta_0}^{\eta}[(A_\eta u)_\xi+(A_\xi u)_\eta-Bu]\,d\xi_1 d\eta_1,$$

которое после очевидных упрощений может быть приведено к виду

$$u(\xi,\ \eta)=u_1(\xi,\ \eta)+\frac{1}{4}\left[\int\limits_{\xi_0}^{\xi}A_\xi u\,d\xi_1+\int\limits_{\eta_0}^{\eta}A_\eta u\,d\eta_1-\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\int\limits_{\eta_0}^{\eta}Bu\,d\xi_1 d\eta_1\right], \tag{2.18}$$

где

$$u_1(\xi,\ \eta)=\psi_1(\eta)+\psi_2(\xi)-\psi_1(\eta_0)-\frac{1}{4}\left[\int\limits_{\eta_0}^{\eta}A_\eta\psi_1(\eta_1)\,d\eta_1+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\xi_0}^{\xi}A_\xi\psi_2(\xi_1)\,d\xi_1\right]. \tag{2.19}$$

Подставив в уравнение (2.18) явные выражения для функций A_ξ и A_η

$$A_\xi(\xi_1,\ \eta)=\frac{1}{2}\,\frac{R_1'\left(\frac{\xi_1+\eta}{2}\right)}{R_1\left(\frac{\xi_1+\eta}{2}\right)}+\frac{1}{2}\,\frac{R_2'\left(\frac{\xi_1-\eta}{2}\right)}{R_2\left(\frac{\xi_1-\eta}{2}\right)};$$

$$A_\eta(\xi,\ \eta_1)=\frac{1}{2}\,\frac{R_1'\left(\frac{\xi+\eta_1}{2}\right)}{R_1\left(\frac{\xi+\eta_1}{2}\right)}-\frac{1}{2}\,\frac{R_2'\left(\frac{\xi-\eta_1}{2}\right)}{R_2\left(\frac{\xi-\eta_1}{2}\right)},$$

после замены переменной интегрирования, получим

$$u(\xi,\ \eta)=u_1(\xi,\ \eta)+\frac{1}{4}\left[\int\limits_{\frac{\xi+\eta_0}{2}}^{\frac{\xi+\eta}{2}}\frac{R_1'(\alpha)}{R_1(\alpha)}\,u(\xi,\ 2\alpha-\xi)\,d\alpha+\right.$$

$$+\int\limits_{\frac{\xi-\eta_0}{2}}^{\frac{\xi-\eta}{2}}\frac{R_2'(\alpha)}{R_2(\alpha)}\,u(\xi,\ \xi-2\alpha)\,d\alpha+\int\limits_{\frac{\xi_0+\eta}{2}}^{\frac{\xi+\eta}{2}}\frac{R_1'(\alpha)}{R_1(\alpha)}\,u(2\alpha-\eta,\ \eta)\,d\alpha+$$

$$\left.+\int\limits_{\frac{\xi_0-\eta}{2}}^{\frac{\xi-\eta}{2}}\frac{R_2'(\alpha)}{R_2(\alpha)}\,u(2\alpha+\eta,\ \eta)\,d\alpha-\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\int\limits_{\eta_0}^{\eta}B(\xi_1,\ \eta_1)\ u\ (\xi_1,\ \eta_1)\,d\xi_1 d\eta_1\right].$$

Заметим, что если сделать подобное преобразование в интегралах формулы (2.19), то окажется, что функция $u_1(\xi, \eta)$ имеет ограниченные производные по ξ и η.

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству леммы 2.1. Применяя метод последовательных приближений для нахождения решения полученного уравнения, установим, что оно и эквивалентное ему уравнение (2.15) с условиями (2.16), (2.17) имеет единственное решение. Если попутно оценивать и частные производные u_ξ и u_η, то окажется, что их можно представить в виде равномерно сходящихся рядов ограниченных функций. Это докажет наличие у функции u ограниченных частных производных u_ξ и u_η.

Следствием доказанных лемм является

Теорема 2.1. Функции Римана U и V существуют, удовлетворяют, соответственно, уравнениям

$$V(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = -1 + \left[\frac{R_1\left(\frac{\xi_0+\eta_0}{2}\right) R_2\left(\frac{\xi_0-\eta_0}{2}\right)}{R_1\left(\frac{\xi_0+\eta}{2}\right) R_2\left(\frac{\xi_0-\eta}{2}\right)}\right]^{1/4} +$$

$$+\left[\frac{R_1\left(\frac{\xi_0+\eta_0}{2}\right) R_2\left(\frac{\xi_0-\eta_0}{2}\right)}{R_1\left(\frac{\xi+\eta_0}{2}\right) R_2\left(\frac{\xi-\eta_0}{2}\right)}\right]^{1/4} - \frac{1}{4}\int_{\xi_0}^{\xi}\int_{\eta_0}^{\eta}(A_\eta V_\xi + A_\xi V_\eta + BV)\, d\xi_1 d\eta_1,$$

$$U(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = 1 + \frac{1}{4}\left(\int_{\xi_0}^{\xi} A_\xi U\, d\xi_1 + \int_{\eta_0}^{\eta} A_\eta U\, d\eta_1 - \int_{\xi_0}^{\xi}\int_{\eta_0}^{\eta} BU\, d\xi_1\, d\eta\right)$$

и имеют в каждой конечной области ограниченные частные производные по аргументам ξ и η.

Доказательство. Условия (2.2), (2.3) и (2.4), (2.5) равносильны условиям

$$V/_{\xi=\xi_0} = \left[\frac{R_1\left(\frac{\xi_0+\eta_0}{2}\right) R_2\left(\frac{\xi_0-\eta_0}{2}\right)}{R_1\left(\frac{\xi_0+\eta}{2}\right) R_2\left(\frac{\xi_0-\eta}{2}\right)}\right]^{1/4}; \quad V/_{\eta=\eta_0} =$$

$$= \left[\frac{R_1\left(\frac{\xi_0+\eta_0}{2}\right) R_2\left(\frac{\xi_0-\eta_0}{2}\right)}{R_1\left(\frac{\xi+\eta_0}{2}\right) R_2\left(\frac{\xi-\eta_0}{2}\right)}\right]^{1/4}; \quad V/_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=\eta_0}} = 1; \tag{2.20}$$

$$U/_{\xi=\xi_0} = \left[\frac{R_1\left(\frac{\xi_0+\eta}{2}\right) R_2\left(\frac{\xi_0-\eta}{2}\right)}{R_1\left(\frac{\xi_0+\eta_0}{2}\right) R_2\left(\frac{\xi_0-\eta_0}{2}\right)}\right]^{1/4}; \quad U/_{\eta=\eta_0} =$$

$$= \left[\frac{R_1\left(\frac{\xi+\eta_0}{2}\right) R_2\left(\frac{\xi-\eta_0}{2}\right)}{R_1\left(\frac{\xi_0+\eta_0}{2}\right) R_2\left(\frac{\xi_0-\eta_0}{2}\right)}\right]^{1/4}; \quad U/_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=\eta_0}} = 1. \tag{2.21}$$

Данные на характеристиках (2.20) и (2.21) в силу 1 удовлетворяют условиям лемм 2.1 и 2.2, поэтому из указанных лемм и следует теорема 2.1.

Теперь, когда доказано существование функций Римана, можно использовать закон взаимности и формулу Римана решения задачи Коши.

Теорема 2.2. Уравнение

$$M[v] = 0 \tag{2.8}$$

при начальных условиях

$$v/_{\xi=\eta} = 0; \quad [v_\xi - v_\eta] = f(\xi), \tag{2.22}$$

где $f(\xi)$ суммируемая в каждом конечном интервале функция, имеет в области $a_1 < \eta \leqslant \xi < a_2$ единственное решение, представимое в виде:

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\xi} f(s) W(\eta, s, \xi) ds,$$

где $W(\eta, s, \xi)$ — дифференцируемая функция, удовлетворяющая по переменным ξ, η уравнению:

$$W(\eta, s, \xi) = -1 + \left[\frac{R_1(s) R_2(0)}{R_1\left(\frac{s+\eta}{2}\right) R_2\left(\frac{s-\eta}{2}\right)} \right]^{1/4} +$$

$$+ \left[\frac{R_1(s) R_2(0)}{R_1\left(\frac{\xi+s}{2}\right) R_2\left(\frac{\xi-s}{2}\right)} \right]^{1/4} - \frac{1}{4} \int_s^{\eta} \int_s^{\xi} (A_{\eta} W_{\xi} + A_{\xi} W_{\eta} + BW) d\xi_1 d\eta_1. \quad (2.23)$$

Доказательство. Решение задачи Коши согласно (2.7) дается формулой Римана

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\xi} f(s) U(s, s, \xi, \eta) ds,$$

где U — функция Римана, существование которой было доказано в теореме 2.1.

Так как уравнение (2.8) с условиями (2.22) эквивалентно интегро-дифференциальному уравнению

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\xi} f(\alpha) d\alpha + \frac{1}{4} \int_{\eta}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta}^{\xi_1} (A_{\eta} v_{\xi} + A_{\xi} v_{\eta} + Bv) d\eta_1,$$

имеющему тот же вид что и (2.11), то единственность решения задачи (2.8), (2.22) следует из леммы 2.1. Согласно закону взаимности, для функций Римана (2.6)

$$U(s, s, \xi, \eta) = V(\xi, \eta, s, s),$$

поэтому, положив

$$W(\eta, s, \xi) \equiv V(\xi, \eta, s, s), \quad (2.24)$$

окончательно получим:

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\xi} f(s) W(\eta, s, \xi) ds. \quad (2.25)$$

Используя закон взаимности (2.6), определение функции $W(\eta, s, \xi)$ (2.24) и теорему 2.1, найдем, что функция $W(\eta, s, \xi)$ имеет ограниченные производные по всем аргументам в каждой конечной области их изменения и удовлетворяет уравнению (2.23).

В зависимости от значений коэффициентов уравнения $M[v] = 0$ (см. формулы (2.1)), нами будут использованы следующие

Частные случаи теоремы 2.2.

А. $R_1(x) \equiv R(x)$; $Q_1(x) \equiv Q(x)$; $R_2(t) \equiv 1$; $Q_2(t) \equiv 0$. Уравнение $M[v] = 0$ сводится к следующему:

$$v_{\xi\eta} + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \frac{R'\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)}{R\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)} (v_{\xi} + v_{\eta}) - Q\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) v \right] = 0.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (2.22), представимо в области $a_1 < \eta \leqslant \xi < a_2$ в виде

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\int_{\eta}^{\xi} f(s)\, G(\eta, s, \xi)\, ds. \tag{2.26}$$

Функция $G(\eta, s, \xi)$ получается из функции $W(\eta, s, \xi)$ при

$$A(\xi, \eta) = \ln R\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right); \quad B(\xi, \eta) = -Q\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)$$

и удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$G(\eta, s, \xi) = -1 + \left[\frac{R(s)}{R\left(\frac{\xi+s}{2}\right)}\right]^{1/4} + \left[\frac{R(s)}{R\left(\frac{s+\eta}{2}\right)}\right]^{1/4} -$$

$$-\frac{1}{4}\int_{s}^{\xi}\int_{s}^{\eta}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{R'\left(\frac{\xi_1+\eta_1}{2}\right)}{R\left(\frac{\xi_1+\eta_1}{2}\right)}\,[G_{\xi}(\eta_1, s, \xi_1) + G_{\eta}(\eta_1, s, \xi_1)] - \right. \tag{2.27}$$

$$\left. -Q\left(\frac{\xi_1+\eta_1}{2}\right) G(\eta_1, s, \xi_1)\right\} d\xi_1\, d\eta_1.$$

А*. В случае четных функций $R(x)$ и $Q(x)$ положим

$$P^{-1}(\eta, s, \xi) = G(\eta, s, \xi)\Big/_{\substack{R(-x)=R(x)\\ Q(-x)=Q(x)}}.$$

Б. $R_1(x) \equiv 1$; $Q_1(x) \equiv 0$; $R_2(t) \equiv R(t)$; $Q_2(t) \equiv Q(t)$. Теперь уравнение $M[v] = 0$ имеет вид

$$v_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\,\frac{R'\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)}{R\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)}(v_{\eta} - v_{\xi}) + Q\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right) v\right] = 0.$$

Решение этого уравнения в той же области $a_1 < \eta \leqslant \xi < a_2$ при начальных данных (2.22) представимо формулой

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\int_{\eta}^{\xi} f(s)\, P(\eta, s, \xi)\, ds, \tag{2.28}$$

где функция $P(\eta, s, \xi)$ является частным видом функции $W(\eta, s, \xi)$ при

$$A(\xi, \eta) = \ln R\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right); \quad B(\xi, \eta) = Q\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)$$

и удовлетворяет следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$P(\eta, s, \xi) = -1 + \left[\frac{R(0)}{R\left(\frac{\xi-s}{2}\right)}\right]^{1/4} + \left[\frac{R(0)}{R\left(\frac{s-\eta}{2}\right)}\right]^{1/4} -$$

$$-\frac{1}{4}\int_{s}^{\xi}\int_{s}^{\eta}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{R'\left(\frac{\xi_1-\eta_1}{2}\right)}{R\left(\frac{\xi_1-\eta_1}{2}\right)}\,[P_{\eta}(\eta_1, s, \xi_1) - P_{\xi}(\eta_1, s, \xi_1)] + \right.$$

$$\left. + Q\left(\frac{\xi_1-\eta_1}{2}\right) P(\eta_1, s, \xi_1)\right\} d\xi_1 d\eta_1. \tag{2.29}$$

В дальнейшем нам придется находить частные производные функции (2.26) и (2.28). Для этого потребуются значения функций $G(\eta, s, \xi)$ и $P(\eta, s, \xi)$ в точках $s = \eta$ и $s = \xi$.

Следствие из частных случаев теоремы 2.2

Из формул (2.27) и (2.29) следует:

$$G(\eta, \eta, \xi) = \left[\frac{R(\eta)}{R\left(\frac{\eta+\xi}{2}\right)}\right]^{1/4}; \quad G(\eta, \xi, \xi) = \left[\frac{R(\xi)}{R\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)}\right]^{1/4};$$

$$P(\eta, \eta, \xi) = \left[\frac{R(0)}{R\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)}\right]^{1/4}; \qquad P(\eta, \xi, \xi) = \left[\frac{R(0)}{R\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)}\right]^{1/4}.$$

§ 3. ОПЕРАТОРЫ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В указанных во введении работах для исследования многих проблем теории одномерных дифференциальных операторов вида $-v'' + q(x)v$ были введены и широко использованы операторы обобщенного сдвига и операторы преобразования.

В настоящем параграфе будут построены аналогичные операторы, связанные с дифференциальным уравнением

$$L[\omega] = -\frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\ln R(x)\right]\frac{d\omega}{dx} + Q(x)\omega = \lambda\omega \quad (a_1 < x < a_2). \tag{1.2}$$

Лемма 3.1. Любое решение уравнения (1.2) $\omega(\lambda, x)$ удовлетворяет соотношению

$$\omega(\lambda, x)\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\omega(\lambda, s)\,G(x-t, s, x+t)\,ds$$

$$(a_1 + t < x < a_2 - t, \ t \geqslant 0), \tag{3.1}$$

где функция $G(\eta, s, \xi)$ ограниченно дифференцируема по всем аргументам.

Доказательство. Найдем в области $a_1 < \eta \leqslant \xi < a_2$ решение уравнения

$$v_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\frac{R'\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)}{R\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)}(v_\xi + v_\eta) - Q\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)v\right] = 0 \tag{3.2}$$

при начальных условиях

$$v|_{\xi=\eta} = 0; \quad [v_\xi - v_\eta]_{\xi=\eta} = \omega(\lambda, \xi).$$

Легко проверить, что искомым решением является функция

$$v(\xi, \eta) = \omega\left(\lambda, \frac{\xi+\eta}{2}\right)\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,\frac{\xi-\eta}{2}}{\sqrt{\lambda}}.$$

С другой стороны, это решение можно найти, используя частный случай А теоремы 2.2. Поэтому

$$\omega\left(\lambda, \frac{\xi+\eta}{2}\right)\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,\frac{\xi-\eta}{2}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2}\int\limits_{\eta}^{\xi}\omega(\lambda, s)\,G(\eta, s, \xi)\,ds.$$

Отсюда, после замены $\frac{\xi+\eta}{2} = x$, $\frac{\xi-\eta}{2} = t$ следует (3.1).

Наличие у ядра $G(\eta, s, \xi)$ ограниченных частных производных по всем аргументам вытекает из свойств функций $W(\eta, s, \xi)$ (см. теорему 2.2). Лемма доказана.

Обозначим через $M^p(a_1, a_2)$ и $M^p[0, a)$ $(p = 1, 2)$ множество всех функций $f(x)$, суммируемых в p-ой степени, соответственно, на каждом конечном интервале

$$[b_1, b_2] \subset (a_1, a_2) \text{ и } [0, b] \subset [0, a).$$

Очевидно, если $f(x) \in M^2$, то и $f(x) \in M^1$.

Введем, далее, аддитивный и однородный оператор G_{x-t}^{x+t}, определенный на всех функциях множеств $M^2(a_1, a_2)$ и $M^2[0, a)$ по формуле

$$G_{x-t}^{x+t}[f(s)] \equiv \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} f(s)\, G(x-t, s, x+t)\, ds,$$

где $G(\eta, s, \xi)$ — функция, дающая решение уравнения (3.2).

Оператор G_{x-t}^{x+t} будем называть *оператором обобщенного сдвига.*

Теорема 3.1. Оператор обобщенного сдвига G_{x-t}^{x+t} переводит любое решение уравнения (1.2) $\omega(\lambda, x)$ в области $a_1 + t < x < a_2 - t$, $t \geqslant 0$ в произведение этого решения на функцию $\frac{\sin\sqrt{\lambda}\, t}{\sqrt{\lambda}}$:

$$G_{x-t}^{x+t}[\omega(\lambda, s)] = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \omega(\lambda, s)\, G(x-t, s, x+t)\, ds = \omega(\lambda, x)\frac{\sin\sqrt{\lambda}\, t}{\sqrt{\lambda}},$$

причем ядро оператора $G(\eta, s, \xi)$ ограниченно дифференцируемо по всем аргументам в каждой конечной области их изменения.

Доказательство следует из леммы 3.1 и определения оператора G_{x-t}^{x+t}.

Рассмотрим, далее, уравнение (1.2) в полуинтервале $[0, a)$, полагая $a_1 = 0$, $a_2 = a$:

$$L[\omega] = -\frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\ln R(x)\right]\frac{d\omega}{dx} + Q(x)\,\omega = \lambda\omega \quad (0 \leqslant x < a). \qquad (3.3)$$

Обозначим через $\omega_\theta(\lambda, x)$ и $\omega_\infty(\lambda, x)$ решения этого уравнения, удовлетворяющие условиям

$$\omega_\theta(\lambda, 0) = 1;\quad \omega_\infty(\lambda, 0) = 0;$$

$$\left[R^{1/2}(x)\frac{d}{dx}\omega_\theta(\lambda, x)\right]_{x=0} = \theta;\quad \left[R^{1/2}(x)\frac{d}{dx}\omega_\infty(\lambda, x)\right]_{x=0} = 1.$$

Продолжим в уравнении (3.3) функции $R(x)$ и $Q(x)$ четно на отрицательную полуось. Очевидно, что производная $R'(x)$ продолжится нечетно. Рассмотрим теперь уравнение (3.3) на симметричном интервале $(-a, a)$, причем, как уже было сказано, выполнены условия

$$R(-x) = R(x);\quad Q(-x) = Q(x). \qquad (3.4)$$

Ясно, что решения уравнения (3.3) $\omega_0(\lambda, x)$ и $\omega_\infty(\lambda, x)$, продолженные, соответственно, четно и нечетно на отрицательную полуось x, будут являться также и решениями уравнения

$$L[\omega(\lambda, x)] = \lambda\omega(\lambda, x) \quad (-a, a).$$

Лемма 3.2. Функция $\omega_0(\lambda, x)$ удовлетворяет соотношению

$$\cos\sqrt{\lambda}\, t = \omega_0(\lambda, t)\frac{R^{1/4}(t)}{R^{1/4}(0)} + \int_0^t \omega_0(\lambda, s)\frac{R^{1/4}(s)}{R^{1/4}(0)} C_0^{-1}(t, s)\, ds, \qquad (3.5)$$

где функции $C_0^{-1}(t, s)$ и $\frac{\partial}{\partial s}\int_s^t C_0^{-1}(u, s)\, du$

ограничены при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b < a$.

Доказательство. Рассмотрим формулу (3.1) при условии (3.4) и положим $\omega(\lambda, x) = \omega_0(\lambda, x)$. Тогда в силу частного случая А* теоремы 2.2 будем иметь:

$$\omega_0(\lambda, x) \frac{\sin \sqrt{\lambda}\, t}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} \omega_0(\lambda, s) P^{-1}(x-t, s, x+t)\, ds.$$

Положив $x = 0$, получим

$$\frac{\sin \sqrt{\lambda}\, t}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2} \int\limits_{-t}^{t} \omega_0(\lambda, s) P^{-1}(-t, s, t)\, ds.$$

Продифференцируем это равенство по t:

$$\cos \sqrt{\lambda}\, t\, \frac{1}{2}\Big[\omega_0(\lambda, t) P^{-1}(-t, t, t) + \omega_0(\lambda, -t) P^{-1}(-t, -t, t)\Big] + \\ + \frac{1}{2} \int\limits_{-t}^{t} \omega_0(\lambda, s) P_t^{-1}(-t, s, t)\, ds. \qquad (3.6)$$

Согласно следствию из частных случаев теоремы 2.2, ввиду четности функции $R(t)$, имеем:

$$P^{-1}(-t, t, t) = \left|\frac{R(t)}{R(0)}\right|^{1/4}; \quad P^{-1}(-t, -t, t) = \left[\frac{R(-t)}{R(0)}\right]^{1/4} = \left[\frac{R(t)}{R(0)}\right]^{1/4} \qquad (3.7)$$

Учтя соотношения (3.7) и четность функции $\omega_0(\lambda, t)$, представим (3.6) в виде

$$\cos \sqrt{\lambda}\, t = \omega_0(\lambda, t) \frac{R^{1/4}(t)}{R^{1/4}(0)} + \int\limits_0^t \omega_0(\lambda, s) \frac{P_t^{-1}(-t, s, t) + P_t^{-1}(-t, -s, t)}{2}\, ds.$$

Положив

$$C_0^{-1}(t, s) = \frac{R^{1/4}(0)}{R^{1/4}(s)} \cdot \frac{P_t^{-1}(-t, s, t) + P_t^{-1}(-t, -s, t)}{2}, \qquad (3.8)$$

получим формулу (3.5). Ограниченность функции $C_0^{-1}(t, s)$ и $\frac{\partial}{\partial s} \int\limits_s^t C_0^{-1}(u, s)\, du$ в области $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b < a$ следует из формулы (3.8) и ограниченности частных производных по всем аргументам функции $P^{-1}(\eta, s, \xi)$, так как, согласно (3.7):

$$\frac{\partial}{\partial s} \int\limits_s^t C_0^{-1}(\alpha, s)\, d\alpha = \frac{\partial}{\partial s} \left\{\frac{R^{1/4}(0)}{R^{1/4}(s)} \cdot \left[\frac{P^{-1}(-t, s, t) + P^{-1}(-t, -s, t)}{2} - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{R^{1/4}(s)}{R^{1/4}(0)}\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{R^{1/4}(0)}{R^{1/4}(s)} \frac{P^{-1}(-t, s, t) + P^{-1}(-t, -s, t)}{2}\right].$$

Следствие. Введем однородный и аддитивный оператор $\underset{t}{C_0^{-1}}[f(s)]$, определенный на всех функциях множества $M^2[0, a)$ формулой

$$\underset{t}{C_0^{-1}}[f(s)] = f(t) + \int\limits_0^t f(s)\, C_0^{-1}(t, s)\, ds.$$

Из леммы 3.2 вытекает, что этот оператор преобразует решение уравнения (3.3) $\omega_0(\lambda, x)$ в функцию $\cos \sqrt{\lambda}\, x$ по формуле:

$$\underset{t}{C_0^{-1}}\left[\omega_0(\lambda, s) \frac{R^{1/4}(s)}{R^{1/4}(0)}\right] = \cos \sqrt{\lambda}\, t,$$

причем ядро оператора $C_0^{-1}(t, s)$ ограничено в области $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b < a$.

Оператор $\underset{t}{C_0^{-1}}$ назовем *оператором преобразования.*

Будем называть *операторами Вольтерра* интегральные операторы вида

$$\underset{t}{I}\,[f(s)] = f(t) + \int_0^t f(s)\, I(t, s)\, ds$$

с ограниченными в области $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b < a$ ядрами $I(t, s)$.

Из ограниченности функций $I(t, s)$ в указанной области следуют такие основные свойства операторов Вольтерра:

1. Областью определения операторов является множество $M^2\,[0, a)$.
2. Операторы отображают любое множество $M^2\,[0, a)$ на себя.
3. Каждый оператор имеет обратный, тоже являющийся оператором Вольтерра.

Из определения оператора преобразования $\underset{t}{C_0^{-1}}$ и ограниченности его ядра вытекает, что он является оператором Вольтерра.

Ниже будут получены операторы преобразования, связанные с функциями $\omega_0(\lambda, x)$ и $\omega_\infty(\lambda, x)$. Эти операторы также окажутся операторами Вольтерра.

Лемма 3.3. Для функции $\omega_\infty(\lambda, t)$ справедливо следующее представление:

$$\omega_\infty(\lambda, t)\,\frac{R^{1/4}(t)}{R^{1/4}(0)} = \int_0^t \cos\sqrt{\lambda}\, s\, C_\infty(t, s)\, ds, \tag{3.9}$$

где ядро $C_\infty(t, s)$ ограниченно дифференцируемо по обоим аргументам при любых $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b < a$.

Доказательство. Рассмотрим в области $-a < \eta \leqslant \xi < a$ уравнение

$$v_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\,\frac{R'\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)}{R\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)}(v_\eta - v_\xi) + Q\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)v\right] = 0 \tag{3.10}$$

при начальных условиях

$$v\,|_{\xi=\eta} = 0;\quad [v_\xi - v_\eta]_{\xi=\eta} = \cos\sqrt{\lambda}\,\xi.$$

Решением этого уравнения, как это легко проверить, является функция

$$v(\xi, \eta) = R^{1/2}(0)\cos\sqrt{\lambda}\,\frac{\xi+\eta}{2}\cdot\omega_\infty\left(\lambda, \frac{\xi-\eta}{2}\right).$$

В то же время это решение можно получить на основании частного случая Б теоремы 2.2. Поэтому

$$R^{1/2}(0)\cos\sqrt{\lambda}\,\frac{\xi+\eta}{2}\cdot\omega_\infty\left(\lambda, \frac{\xi-\eta}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_\eta^\xi \cos\sqrt{\lambda}\, s\, P(\eta, s, \xi)\, ds.$$

Заменяя переменные ξ и η по формулам $\frac{\xi+\eta}{2} = x$; $\frac{-\eta}{2} = t$, будем иметь

$$R^{1/2}(0)\cos\sqrt{\lambda}\, x\,\omega_\infty(\lambda, t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\cos\sqrt{\lambda}\, s P(x-t, s, x+t)\, ds.$$

После умножения обеих частей этого равенства на $\frac{R^{1/4}(t)}{R^{1/4}(0)}$, положив $x = 0$, получим формулу (3.9), где

$$C_\infty(t, s) = \frac{P(-t, s, t) + P(-t, -s, t)}{2} \frac{R^{1/4}(t)}{R^{3/4}(0)}. \tag{3.11}$$

Свойства ядра $C_\infty(t, s)$ следуют из теоремы 2.2.

Теорема 3.2*. Для функции $\omega_\theta(\lambda, x)$ справедливы следующие представления:

$$\omega_\theta(\lambda, t) \frac{R^{1/4}(t)}{R^{1/4}(0)} = \cos\sqrt{\lambda}t + \int_0^t \cos\sqrt{\lambda}s\, C_\theta(t, s)\, ds \equiv \underset{t}{C_\theta}[\cos\sqrt{\lambda}s], \tag{3.12}$$

$$\cos\sqrt{\lambda}t = \omega_\theta(\lambda, t) \frac{R^{1/4}(t)}{R^{1/4}(0)} + \int_0^t \omega_\theta(\lambda, s) \frac{R^{1/4}(s)}{R^{1/4}(0)} C_\theta^{-1}(t, s)\, ds \equiv$$

$$\equiv \underset{t}{C_\theta^{-1}}\left[\omega_\theta(\lambda, s) \frac{R^{1/4}(s)}{R^{1/4}(0)}\right],$$

где операторы $\underset{t}{C_\theta}$ и $\underset{t}{C_\theta^{-1}}$ являются операторами Вольтерра.

Доказательство. В силу свойства 3 операторов Вольтерра для оператора

$$\underset{t}{C_0^{-1}}\left[\omega_0(\lambda, s) \frac{R^{1/4}(s)}{R^{1/4}(0)}\right] \equiv \omega_0(\lambda, t) \frac{R^{1/4}(t)}{R^{1/4}(0)} + \int_0^t \omega_0(\lambda, s) \frac{R^{1/4}(s)}{R^{1/4}(0)} C_0^{-1}(t, s)\, ds =$$

$$= \cos\sqrt{\lambda}t$$

существует обратный:

$$\underset{t}{C_0}[\cos\sqrt{\lambda}s] \equiv \cos\sqrt{\lambda}t + \int_0^t \cos\sqrt{\lambda}s\, C_0(t, s)\, ds = \omega_0(\lambda, t) \frac{R^{1/4}(t)}{R^{1/4}(0)}, \tag{3.13}$$

где функция $C_0(t, s)$ ограничена в области $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b < a$.

Ядра $C_0(t, s)$ и $C_0^{-1}(t, s)$ связаны интегральным уравнением:

$$C_0(t, s) + C_0^{-1}(t, s) = -\int_s^t C_0(z, s)\, C_0^{-1}(t, z)\, dz. \tag{3.14}$$

Так как функцию $\omega_\theta(\lambda, t)$ можно представить в виде:

$$\omega_\theta(\lambda, t) = \omega_0(\lambda, t) + \theta\omega_\infty(\lambda, t),$$

то используя (3.13) и (3.9), получим (3.12), где ядро $C_\theta(t, s)$ определяется формулой

$$C_\theta(t, s) = C_0(t, s) + \theta C_\infty(t, s). \tag{3.15}$$

В силу ограниченности функций $C_0(t, s)$ и $C_\infty(t, s)$ в области $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b < a$ функция $C_\theta(t, s)$ ограничена в той же области. Отсюда следует, что оператор

$$\underset{t}{C_\theta}[\cos\sqrt{\lambda}s] \equiv \cos\sqrt{\lambda}t + \int_0^t \cos\sqrt{\lambda}s\, C_\theta(t, s)\, ds = \omega_\theta(\lambda, t) \frac{R^{1/4}(t)}{R^{1/4}(0)}$$

является оператором Вольтерра. Поэтому для него, согласно свойству 3 операторов Вольтерра, должен существовать обратный

$$\underset{t}{C_\theta^{-1}}\left[\omega_\theta(\lambda, s) \frac{R^{1/4}(s)}{R^{1/4}(0)}\right] \equiv \omega_\theta(\lambda, t) \frac{R^{1/4}(t)}{R^{1/4}(0)} + \int_0^t (\omega_\theta(\lambda, s) \frac{R^{1/4}(s)}{R^{1/4}(0)} C_\theta^{-1}(t, s)\, ds = \cos\sqrt{\lambda}t,$$

тоже являющийся оператором Вольтерра.

---

* Эта теорема для случая $Q(x) \equiv 0$ была доказана М. Г. Крейном [8] в связи с исследованием обратной задачи.

Ядра $C_\theta(t, s)$ и $C_\theta^{-1}(t, s)$ связаны уравнением, аналогичным уравнению (3.14):

$$C_\theta(t, s) + C_\theta^{-1}(t, s) = -\int_s^t C_\theta^{-1}(z, s)\, C_\theta(t, z)\, dz. \qquad (3.16)$$

Следствие. Из доказанной теоремы в силу ограниченности ядра $C_\theta(x, s)$ в области $0 \leqslant s \leqslant x \leqslant b < a$ следует оценка, справедливая при $0 \leqslant x \leqslant h < a$

$$|\omega_\theta(\lambda, x)| \leqslant \begin{cases} A(x)\operatorname{ch}\sqrt{|\lambda|}\,x, & -\infty < \lambda \leqslant 0 \\ A(x), & 0 \leqslant \lambda < \infty, \end{cases}$$

причем

$$A^*(h) = \sup_{0 \leqslant x \leqslant h} A(x) < \infty.$$

Отметим еще одно свойство функций $C_\theta(t, s)$ и $C_\theta^{-1}(t, s)$. В лемме 3.2. было доказано, что функция $\dfrac{\partial}{\partial s}\displaystyle\int_s^t C_\theta^{-1}(\alpha, s)\, d\alpha$ ограничена при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b < a$. Аналогичным свойством обладают ядра операторов прямого и обратного преобразования при любых $0 \leqslant |\theta| < \infty$.

Доказательство этого факта опирается на следующую лемму.

Лемма 3.4. Пусть функции $u_1(t, s)$ и $v_1(t, s)$ ограничены при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b < a$ и связаны уравнением

$$u_1(t, s) + v_1(t, s) = -\int_s^t v_1(z, s)\, u_1(t, z)\, dz. \qquad (3.17)$$

Если функция $u_2(t, s) = \dfrac{\partial}{\partial s}\displaystyle\int_s^t u_1(\alpha, s)\, d\alpha$ ограничена при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b < a$, то функция $v_2(t, s) = \dfrac{\partial}{\partial s}\displaystyle\int_s^t v_1(\alpha, s)\, d\alpha$ также ограничена в этой же области.

Доказательство. Обозначим:

$$u(t, s) = \int_s^t u_1(\alpha, s)\, d\alpha; \quad v(t, s) = \int_s^t v_1(\alpha, s)\, d\alpha.$$

Проинтегрируем соотношение (3.17) по t в пределах от s до t:

$$\int_s^t u_1(\alpha, s)\, d\alpha + \int_s^t \vartheta_1(\alpha, s)\, d\alpha = -\int_s^t d\alpha \int_s^\alpha v_1(z, s)\, u_1(\alpha, z)\, dz.$$

Так как

$$\int_s^t d\alpha \int_s^\alpha v_1(z, s)\, u_1(\alpha, z)\, dz = \int_s^t v_1(z, s)\, dz \int_z^t u_1(\alpha, z)\, d\alpha,$$

то, используя введенные обозначения, получим:

$$u(t, s) + v(t, s) = -\int_s^t v_1(z, s)\, u(t, z)\, dz.$$

Интегрирование по частям дает

$$u(t, s) + v(t, s) = \int_s^t v(z, s)\, u_2(t, z)\, dz.$$

Продифференцируем это равенство формально по s. Согласно нашим обозначениям, имеем:

$$u_2(t, s) + v_2(t, s) = \int_s^t v_2(z, s)\, u_2(t, z)\, dz.$$

Мы получили уравнение Вольтерра для неизвестной функции $v_2(t, s)$. В силу ограниченности функции $u_2(t, s)$ в области $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b < a$ это уравнение имеет единственное, ограниченное в той же области, решение — функцию $v_2(t, s)$. Это оправдывает законность формального дифференцирования и доказывает лемму.

Теорема 3.3. Функции $\frac{\partial}{\partial s}\int_s^t C_\theta(\alpha, s)\, d\alpha$ и $\frac{\partial}{\partial s}\int_s^t C_\theta^{-1}(\alpha, s)\, d\alpha$ ограничены в области $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b < a$ при любых $0 \leqslant |\theta| < \infty$.

Доказательство. Так как, согласно лемме 3.2, функция $\frac{\partial}{\partial s}\int_s^t C_0^{-1}(\alpha, s)\, d\alpha$ ограничена в области $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b < a$, то в силу (3.14) функции $C(t, s)$ и $C_0^{-1}(t, s)$ удовлетворяют всем условиям доказанной леммы. Поэтому функция $\frac{\partial}{\partial s}\int_s^t C_0(\alpha, s)\, d\alpha$ также ограничена в указанной области. Согласно лемме 3.3, функция $C_\infty(t, s)$ ограниченно дифференцируема по аргументу s в этой же области. Откуда, в силу определения функции $C_0(t, s)$ (3.15), следует ограниченность функции $\frac{d}{\partial s}\int_s^t C_\theta(\alpha, s)\, d\alpha$ при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b < a$ и $0 \leqslant |\theta| < \infty$. Это и уравнение (3.16) показывает, что функции $C_\theta(t, s)$ и $C_\theta^{-1}(t, s)$ также удовлетворяют всем условиям леммы 3.4. Поэтому функция $\frac{\partial}{\partial s}\int_s^t C_\theta^{-1}(\alpha, s)\, d\alpha$ также ограничена при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b < a$ и $0 \leqslant |\theta| < \infty$.

Следствие. Из доказанной теоремы следует, что функция $\int_s^t C_\theta^{-1}(\alpha, s)\, d\alpha$ непрерывна по аргументу s в области $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b < a$ при любых $0 \leqslant |\theta| < \infty$.

Теорема 3.4. Для функции $\omega_\infty(\lambda, t)$ справедливы следующие представления:

$$\omega_\infty(\lambda, t)\, R^{1/4}(t)\, R^{1/4}(0) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, t}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^t \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, s}{\sqrt{\lambda}} S(t, s)\, ds \equiv \underset{t}{S}\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}\, s}{\sqrt{\lambda}}\right]; \quad (3.18)$$

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}\, t}{\sqrt{\lambda}} = \omega_\infty(\lambda, t)\, R^{1/4}(t)\, R^{1/4}(0) + \int_0^t \omega_\infty(\lambda, s)\, R^{1/4}(s)\, R^{1/4}(0)\, S^{-1}(t, s)\, ds \equiv$$
$$\equiv \underset{t}{S^{-1}}[\omega_\infty(\lambda, s)\, R^{1/4}(s)\, R^{1/4}(0)], \quad (3.19)$$

где операторы $\underset{t}{S}$ и $\underset{t}{S^{-1}}$ являются операторами Вольтерра.

Доказательство. Решение уравнения (3.2) в области $-a < \eta \leqslant \xi < a$, удовлетворяющее начальным условиям

$$v|_{\xi=\eta} = 0; \quad [v_\xi - v_\eta]_{\xi=\eta} = \omega_\infty(\lambda, \xi)\, R^{1/2}(0),$$

в предположении (3.4), можно представить в виде

$$u(\xi, \eta) = R^{1/2}(0)\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,\frac{\xi-\eta}{2}}{\sqrt{\lambda}}\cdot\omega_\infty\left(\lambda, \frac{\xi+\eta}{2}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_s^{\xi}\omega_\infty(\lambda, s)\,R^{1/2}(0)\,P^{-1}(\eta, s, \xi)\,ds,$$

откуда следует:

$$R^{1/2}(0)\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}}\,\omega_\infty(\lambda, x) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\omega_\infty(\lambda, s)\,R^{1/2}(0)\,P^{-1}(x-t, s, x+t)\,ds.$$

Дифференцируя это соотношение по x, получим:

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}}\frac{d}{dx}\omega_\infty(\lambda, x)\,R^{1/2}(0) = \frac{R^{1/2}(0)}{2}[\omega_\infty(\lambda, x+t)\,P^{-1}(x-t, x+t, x+t) -$$
$$-\,\omega_\infty(\lambda, x-t)\,P^{-1}(x-t, x-t, x+t)] +$$
$$+\,\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\omega_\infty(\lambda, s)\,R^{1/2}(0)\,P_x^{-1}(x-t, s, x+t)\,ds,$$

откуда, используя нечетность функции $\omega_\infty(\lambda, t)$ и формулы (3.7), будем иметь при $x=0$ формулу (3.19), где положено:

$$S^{-1}(t, s) = \frac{[P_x^{-1}(x-t, s, x+t) - P_x^{-1}(x-t, -s, x+t)]_{x=0}}{2}\cdot\frac{R^{1/4}(0)}{R^{1/4}(s)}.$$

Из свойств функции $P^{-1}(\eta, s, \xi)$ (см. теорему 2.2) следует ограниченность ядра $S^{-1}(t, s)$.

Аналогично решение уравнения (3.10) в области $-a<\eta\leqslant\xi<a$ при начальных условиях

$$v|_{\xi=\eta} = 0; \quad [v_\xi - v_\eta]_{\xi=\eta} = \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,\xi}{\sqrt{\lambda}}$$

можно представить в виде

$$v(\xi, \eta) = R^{1/2}(0)\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,\frac{\xi+\eta}{2}}{\sqrt{\lambda}}\cdot\omega_\infty\left(\lambda, \frac{\xi-\eta}{2}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_\eta^\xi\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,s}{\sqrt{\lambda}}\,P(\eta, s, \xi)\,ds.$$

Отсюда получим

$$R^{1/2}(0)\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}}\,\omega_\infty(\lambda, t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,s}{\sqrt{\lambda}}\,P(x-t, s, x+t)\,ds.$$

Продифференцировав это соотношение по x, найдем:

$$\cos\sqrt{\lambda}\,x\cdot\omega_\infty(\lambda, t)\,R^{1/2}(0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x+t)}{\sqrt{\lambda}}\,P(x-t, x+t, x+t) -\right.$$
$$\left.-\,\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}}\,P(x-t, x-t, x+t)\right] +$$
$$+\,\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,s}{\sqrt{\lambda}}\,P_x(x-t, s, x+t)\,ds.$$

В силу следствия из частных случаев теоремы 2.2 имеем:

$$P(-t, t, t) = P(-t, -t, t) = \frac{R^{1/4}(0)}{R^{1/4}(t)}.$$

Положим в найденном соотношении $x = 0$, тогда в силу нечетности функции $\sin \sqrt{\lambda} t$, получим (3.18), где

$$S(t, s) = \frac{[P_x(x-t, s, x+t) - P_x(x-t, -s, x+t)]_{x=0}}{2} \cdot \frac{R^{1/4}(t)}{R^{1/4}(0)}.$$

Ограниченность этого ядра следует из свойства функции $P(\eta, s, \xi)$ (см. теорему 2.2).

Из определения операторов преобразования $\underset{t}{S}$ и $\underset{t}{S^{-1}}$ и ограниченности их ядер в области $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b < a$ вытекает, что эти операторы являются операторами Вольтерра. Теорема доказана полностью.

В дальнейшем, при отыскании асимптотики спектральных функций мы будем применять тауберовы теоремы В. А. Марченко [3]. Для этого важно знать локальные свойства (в смысле разложимости в ряд Фурье) в точке $t = 0$ производной ядра оператора обобщенного сдвига $G_t(x-t, s, x+t)$ и ядра оператора преобразования $C_0^{-1}(t, s)$. Поведение этих функций при $t = 0$ характеризуют следующие леммы:

Лемма 3. 5. Производная ядра оператора обобщенного сдвига при $s = x$ в области $b_1 \leqslant x \leqslant b_2$, $0 \leqslant t \leqslant h$ представима в виде

$$G_t(x-t, x, x+t) = -\frac{1}{8} \frac{R'\left(x + \frac{t}{2}\right) - R'\left(x - \frac{t}{2}\right)}{R(x)} + N(x, t),$$

где функция $N(x, t)$ по аргументу t разложима в ряд Фурье при $t = 0$, и сумма ее ряда Фурье в этой точке равна нулю.

Доказательство. Из уравнения, определяющего функцию $G(x-t, s, x+t)$ (см. частный случай A теоремы 2.2) следует:

$$G_t(x-t, x, x+t) = I_1(x, t) + I_2(x, t) + I_3(x, t),$$

где

$$I_1(x, t) = -\frac{1}{8} R^{1/4}(x) \left[R^{-5/4}\left(x + \frac{t}{2}\right) R'\left(x + \frac{t}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - R^{-5/4}\left(x - \frac{t}{2}\right) R'\left(x - \frac{t}{2}\right)\right];$$

$$I_2(x, t) = \frac{1}{8}\left\{ \int_x^{x-t} \frac{R'\left(\frac{x+t+\eta_1}{2}\right)}{R\left(\frac{x+t+\eta_1}{2}\right)} [G_\xi(\eta_1, x, x+t) + G_\eta(\eta_1, x, x+t)]\, d\eta_1 + \right.$$
$$\left. + \int_x^{x+t} \frac{R'\left(\frac{x-t+\xi_1}{2}\right)}{R\left(\frac{x-t+\xi_1}{2}\right)} [G_\xi(x-t, x, \xi_1) + G_\eta(x-t, x, \xi_1)]\, d\xi_1 \right\};$$

$$I_3(x, t) = -\frac{1}{4}\left[\int_x^{x-t} Q\left(\frac{x+t+\eta_1}{2}\right) G(\eta_1, x, x+t)\, d\eta_1 + \right.$$
$$\left. + \int_x^{x-t} Q\left(\frac{x-t+\xi_1}{2}\right) G(x-t, x, \xi_1)\, d\xi_1 \right] = -\frac{1}{2}\left[\int_{x+\frac{t}{2}}^{x} Q(u)\, G(2u - x - \right.$$
$$\left. - t, x, x+t)\, du + \int_{x-\frac{t}{2}}^{x} Q(u)\, G(x-t, x, 2u - x + t)\, du \right].$$

На основании условий I, II и свойств ядра $G(\eta, s, \xi)$ имеем в области $b_1 \leqslant x \leqslant b_2$ при $t \to 0$:

$$R^{-5/4}\left(x \pm \frac{t}{2}\right) = R^{-5/4}(x) + O(t),$$

поэтому:

$$I_1(x, t) = -\frac{1}{8}\,\frac{R'\left(x+\frac{t}{2}\right) - R'\left(x-\frac{t}{2}\right)}{R(x)} + O(t)$$

$$I_2(x, t) = O(t).$$

Функция $I_3(x, t)$ абсолютно непрерывна по аргументу t и равна нулю при $t = 0$. Отсюда следует лемма.

Лемма 3. 6. Ядро оператора преобразования $\underset{t}{C_\theta^{-1}}$ в точке $s = 0$ представимо в виде

$$C_\theta^{-1}(t, 0) = -\frac{1}{4}\,\frac{R'\left(\frac{t}{2}\right)}{R(0)} - \frac{\theta}{R^{1/2}(0)} + n(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant h < a),$$

где функция $n(t)$ разложима в ряд Фурье в точке $t = 0$ и сумма ее ряда Фурье в этой точке равна нулю.

Доказательство. В силу ограниченности ядер операторов преобразования из теоремы 3.2 (формулы (3.16), (3.15), (3.14)) получим, что при $t \to 0$

$$C_\theta^{-1}(t,\ 0) = C_0^{-1}(t,\ 0) - \theta C_\infty(t,\ 0) + O(t). \tag{3.20}$$

Из определения ядра $C_0^{-1}(t, s)$ (3.8) (лемма 3.2) при $s = 0$ следует:

$$C_0^{-1}(t, 0) = P_t(-t,\ 0,\ t). \tag{3.21}$$

Так как, согласно частному случаю A^* теоремы 2.2,

$$P^{-1}(\eta,\ s,\ \xi) = G(\eta,\ s,\ \xi)/_{\substack{R(-x) = R(x),\\ Q(-x) = Q(x)}} \tag{3.22}$$

то на основании формул (3.21), (3.22), из леммы 3.5 при $x = 0$ получим

$$C_0^{-1}(t,\ 0) = -\frac{1}{4}\,\frac{R'\left(\frac{t}{2}\right)}{R(0)} + n_1(t), \tag{3.23}$$

где функция $n_1(t) = N(0,\ t)$ разложима в ряд Фурье при $t = 0$ и сумма ее ряда Фурье в этой точке равна нулю.

В силу леммы 3.3 из определения ядра $C_\infty(t, s)$ (3.11) при $s = 0$ следует:

$$C_\infty(t, 0) = P(-t, 0, t)\,\frac{R^{1/4}(t)}{R^{3/4}(0)}. \tag{3.24}$$

Из уравнения для ядра $P(\eta, s, \xi)$ (см. частный случай Б теоремы 2.2) в силу условий I и II при $s = 0$ получим, что при $t \to 0$

$$P(-t, 0, t) = -1 + 2\,\frac{R^{1/4}(0)}{R^{1/4}\left(\frac{t}{2}\right)} + O(t).$$

На основании 1 при $t \to 0$:

$$R^{-1/4}\left(\frac{t}{2}\right) = R^{-1/4}(0) + O(t),$$

$$R^{1/4}(t) = R^{1/4}(0) + O(t).$$

Поэтому из формулы (3.24) и полученных оценок следует, что при $t \to 0$

$$C_\infty(t, 0) = R^{-1/2}(0) + O(t). \tag{3.25}$$

Формулы (3.20), (3.23), (3.25) и свойства функции $n_1(t)$ доказывают лемму.

§ 4. ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ

Вывод асимптотических формул, полученных в следующих параграфах, опирается на теоремы тауберова типа, доказанные В. А. Марченко [3]. Ниже сформулированы нужные для дальнейшего результаты этой работы.

*Лемма 4.1**. Пусть разность двух неубывающих и непрерывных слева функций $\rho(\lambda) - \sigma(\lambda)$ удовлетворяет условиям:

(а) на множество четных, бесконечно дифференцируемых функций $g(x)$, равных нулю вне интервала $(-h, h)$, имеет место тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_g(\lambda)\, d\,[\rho(\lambda) - \sigma(\lambda)] = \int_0^h g(x)\, G(x)\, dx,$$

где $G(x)$ — некоторая функция, определенная и суммируемая на интервале $(0, h)$;

(в) для одной из функций, например, $\rho(\lambda)$, существует

$$\overline{\lim_{|a| \to \infty}} \left[\rho\left(a + \frac{1}{h}\right) - \rho(a)\right] = \rho^*\left(\frac{1}{h}\right) < \infty.$$

Тогда функция $\sigma(\lambda)$ тоже удовлетворяет условию (в), причем

$$\sigma^*\left(\frac{1}{h}\right) \leqslant 300\rho^*\left(\frac{1}{h}\right).$$

Теорема 4.1**. Если непрерывная слева функция $\alpha(\lambda)$, имеющая ограниченную вариацию в каждом конечном интервале, удовлетворяет условию (а) предыдущей леммы и условию

$$\overline{\lim_{|a| \to \infty}} \bigvee_a^{a+\frac{1}{h}} \{\alpha(\lambda)\} = \alpha^*\left(\frac{1}{h}\right) < \infty,$$

то при любых $\delta < h$

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} \left| \frac{\alpha(N+0) + \alpha(N)}{2} - \frac{\alpha(-N+0) + \alpha(-N)}{2} - \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin Nx}{x} G(x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot 10^6 \cdot \alpha^*\left(\frac{1}{h}\right).$$

Следствие. Представим функцию $\alpha(\lambda)$ в виде разности двух неубывающих функций

$$\alpha(\lambda) = \rho(\lambda) - \sigma(\lambda),$$

одна из которых, например $\rho(\lambda)$, удовлетворяет условию (в) леммы 4.1.

* Следует из леммы 1.1 работы [3].
** Следует из леммы 2.1 и примера к теореме 4.1 работы [3].

Тогда при любых $\delta < h$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \left| \frac{\alpha(N+0)+\alpha(N)}{2} - \frac{\alpha(-N+0)+\alpha(-N)}{2} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{\sin Nx}{x} G(x)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^6 \cdot 10^7 \cdot \rho^*\left(\frac{1}{h}\right).$$

Теорема 4.2*. Пусть семейство S непрерывных слева функций $\alpha_s(\lambda)$, имеющих ограниченную вариацию в каждом конечном интервале, удовлетворяет условию (а) леммы 4.1 и условиям

$$\overline{\lim_{|a|\to\infty}} \sup_{\alpha_s \in S} \bigvee_a^{a+\frac{1}{h}} \{\alpha_s(\lambda)\} = S^*\left(\frac{1}{h}\right),$$

$$\sup_{-\infty<a<\infty} \sup_{\alpha_s \in S} \bigvee \{\alpha_s(\lambda)\} < \infty.$$

Если $\varphi(x)$ — произвольная, четная, бесконечно дифференцируемая функция вида

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1 \quad \text{при} \quad |x| < \theta, \quad (0<\theta<1) \\ 1 \geqslant \varphi(x) &\geqslant 0 \quad \text{при} \quad \theta < |x| < 1, \\ \varphi(x) &= 0 \quad \text{при} \quad 1 < |x|, \end{aligned}$$

то

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \sup_{\alpha_s \in S} \left| \frac{\alpha_s(N+0+\alpha_s(N)}{2} - \frac{\alpha_s(-N+0)+\alpha_s(-N)}{2} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} \varphi\left(\frac{t}{h}\right) G_s(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot 10^6 \cdot S^*\left(\frac{1}{h}\right).$$

В заключение этого параграфа приведем известную лемму из теории рядов Фурье.

Лемма 4.2. Пусть $G(x)$ вещественная суммируемая на интервале $(0, h)$ функция и

$$\Phi(N) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{\sin Nx}{x} G(x)\,dx \quad (\delta < h).$$

Тогда

(1) если функция $G(x)$ ограничена в некоторой окрестности нуля, то при $N \to \infty$

$$\Phi(N) = O(\ln N);$$

(2) если функция $G(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, то при $N \to \infty$

$$\Phi(N) = o(\ln N);$$

(3) если функция $G(x)$ разложима в ряд Фурье в точке $x = 0$, то

$$\lim_{N\to\infty} \Phi(N) = G_0,$$

где через G_0 обозначена сумма ряда Фурье функции $G(x)$ в точке $x = 0$.

* Следует из замечания к лемме 2.1 и доказательства теоремы 5.2 работы [3].

§ 5. ИНТЕРВАЛ $(0, \infty)$. АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Обозначим через $l_\theta[u]$ самосопряженное расширение оператора

$$l[u] = -\frac{d}{dy}\left[p(y)\frac{d}{dy}u\right] + q(y)u \quad (0 \leq y < c \leq \infty), \tag{1.1}$$

определенное граничным условием в нуле:

$$\left[p(y)\frac{du}{dy}\right]_{y=0} = \theta u(0)$$

и, возможно, в точке c.

Как известно [9], такому расширению соответствует неубывающая функция $\sigma_\theta(\lambda)$ порождающая формулы обращения вида:

$$F(\lambda) = \underset{d\to c}{\text{l.i.m}} \int_0^d f_1(y)\,u(\lambda, y)\,dy, \tag{5.1}$$

$$f_1(y) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m}} \int_{-N}^{N} F(\lambda)\,u(\lambda, y)\,d\sigma_\theta(\lambda), \tag{5.2}$$

где интегралы сходятся в метриках пространств $L^2_{\{\sigma\}}(-\infty, \infty)$ и $L^2(0, c)$ соответственно, и

$$\int_0^c |f_1(y)|^2\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2\,d\sigma_\theta(\lambda). \tag{5.3}$$

Здесь $u(\lambda, y)$ — решения уравнения

$$l_\theta[u] = \lambda u \tag{5.4}$$

при начальных условиях

$$u(\lambda, 0) = 1; \quad \left[p(y)\frac{d}{dy}u(\lambda, y)\right]_{y=0} = \theta.$$

Без ограничения общности можно считать $\sigma_\theta(+0) = 0$.

Как уже говорилось выше, уравнение (5.4) для собственных функций оператора l_θ после замены $x = \int_0^y p^{-1/2}(\alpha)\,d\alpha$ приведется к виду

$$L_\theta[\omega] = -\frac{d^2}{dx^2}\omega(\lambda, x) - \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\ln R(x)\right]\frac{d}{dx}\omega(\lambda, x) + Q(x)\,\omega(\lambda, x) = \lambda\omega(\lambda, x), \tag{5.5}$$

где

$$\omega(\lambda, x) \equiv u(\lambda, y); \;\; R(x) \equiv p(y); \;\; Q(x) \equiv q(y);$$

при этом $0 \leq x < a$ и

$$a = \lim_{y\to c}\int_0^y p^{-1/2}(\alpha)\,d\alpha \leq \infty.$$

Решения уравнения (5.5) $\omega_\theta(\lambda, x)$ определяются начальными условиями:

$$\omega_\theta(\lambda, 0) = 1; \left[R^{1/2}(x)\frac{d}{dx}\omega(\lambda, x)\right]_{x=0} = \theta.$$

При переходе от уравнения (5.4) к уравнению (5.5), формулы (5.1), (5,2), (5,3) заменяются следующими:

$$F(\lambda) = \underset{b\to a}{\text{l.i.m}} \int_0^b f(x)\,\omega_\theta(\lambda, x)\,R^{1/2}(x)\,dx, \tag{5.6}$$

$$f(x) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m}} \int_{-N}^{N} F(\lambda)\, \omega_\theta(\lambda, x)\, d\sigma_\theta(\lambda), \tag{5.7}$$

$$\int_0^a |f(x)|^2 R^{\frac{1}{2}}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\sigma_\theta(\lambda). \tag{5.8}$$

Здесь $f(x) \equiv f_1(y)$, и интеграл (5.7) сходится уже в метрике пространства $L^2_{\{r\}}[0, a)$,
где

$$r(x) = \int_0^x R^{\frac{1}{2}}(x)\, dx.$$

В этом параграфе мы найдем асимптотику для функции обложения $\sigma_\theta(\lambda)$, а в следующем — докажем равносходимость разложения (5.7) по собственным функциям оператора L_θ с разложением в обычный интеграл Фурье.

Докажем предварительно лемму, характеризующую поведение функции $\sigma_\theta(\lambda)$ при $\lambda \to \pm\infty$.

Лемма 5.1. Пусть $\sigma_\theta(\lambda)$ — функция обложения, соответствующая оператору $l_\theta(L_\theta)$, заданному в интервале $0 \leqslant y < c \leqslant \infty$ $(0 \leqslant x < a \leqslant \infty)$ и h — произвольное положительное число $(h < a)$.

Тогда в области $\frac{\pi^2}{4h^2} \leqslant \lambda < \infty$

$$\sigma_\theta(\lambda) \leqslant C\sqrt{\lambda},$$

где C — некоторая константа, интеграл

$$\int_{-\infty}^{+0} \operatorname{ch}\sqrt{|\lambda|}\, x\, d\sigma_\theta(\lambda) = I(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 2h)$$

сходится равномерно относительно $x \in [0, 2h]$, а функция $I(x)$ бесконечно дифференцируема.

Доказательство. В силу теоремы 3.2,

$$\cos\sqrt{\lambda}\, t = \omega_\theta(\lambda, t)\frac{R^{1/4}(t)}{R^{1/4}(0)} + \int_0^t \omega_\theta(\lambda, s)\frac{R^{1/4}(s)}{R^{1/4}(0)} C_\theta^{-1}(t, s)\, ds.$$

Проинтегрируем это равенство по t в интервале $(0, x)$. После перемены порядка интегрирования получим:

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}\, x}{\sqrt{\lambda}} = \int_0^x \omega_\theta(\lambda, s)\frac{R^{1/4}(s)}{R^{1/4}(0)}\, ds + \int_0^x dt \int_0^t \omega_\theta(\lambda, s)\frac{R^{1/4}(s)}{R^{1/4}(0)} C_\theta^{-1}(t, s)\, ds =$$

$$= \int_0^x R^{-1/4}(s) R^{-1/4}(0)\left[1 + \int_s^x C_\theta^{-1}(t, s)\, dt\right] \omega(\lambda, s) R^{1/2}(s)\, ds. \tag{5.9}$$

Сопоставление формул (5.9) и (5.6) показывает, что функция $\frac{\sin\sqrt{\lambda}\, x}{\sqrt{\lambda}}$, где x — параметр, является преобразованием Фурье по функциям $\omega_\theta(\lambda, x)$ функции

$$f(s, x) = \begin{cases} R^{-1/4}(s) R^{-1/4}(0)\left[1 + \int_s^x C_\theta^{-1}(t, s)\, dt\right], & 0 \leqslant s \leqslant x \\ 0, & x < s \end{cases}$$

Поэтому в силу равенства Парсеваля (5.8)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \sqrt{\lambda}\, x}{\lambda}\, d\sigma_\theta(\lambda) = \int_0^x |f(s, x)|^2 R^{1/2}(s)\, ds.$$

Согласно свойству операторов преобразования абсолютная величина функции $f(s, x)$ ограничена при всех $0 \leqslant s \leqslant x \leqslant h < a$. Поэтому в силу ограниченности функции $R(s)$ в этой же области

$$\int_0^x |f(s, x)|^2 R^{1/2}(s)\, ds \leqslant Ax,$$

где A — некоторая константа.

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \sqrt{\lambda}\, x}{\lambda}\, d\sigma_\theta(\lambda) = \int_{-\infty}^{+0} \frac{\sin^2 \sqrt{\lambda}\, x}{\lambda}\, d\sigma_\theta(\lambda) + \int_{+0}^{\infty} \frac{\sin^2 \sqrt{\lambda}\, x}{\lambda}\, d\sigma_\theta(\lambda),$$

то из последней оценки следует, что при всех $x \in [0, h]$ сходятся в отдельности оба интеграла правой части написанного равенства, причем

$$\int_{+0}^{\infty} \frac{\sin^2 \sqrt{\lambda}\, x}{\lambda}\, d\sigma_\theta(\lambda) \leqslant Ax.$$

Используя неравенство $\sin \sqrt{\lambda}\, x \geqslant \frac{2}{\pi} \sqrt{\lambda}\, x \quad \left(0 \leqslant \sqrt{\lambda}\, x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, получим

$$Ax \geqslant \int_{+0}^{\frac{\pi^2}{4x^2}} \frac{\sin^2 \sqrt{\lambda}\, x}{\lambda}\, d\sigma_\theta(\lambda) \geqslant \frac{4}{\pi^2} x^2 \left[\sigma_\theta\left(\frac{\pi^2}{4x^2}\right) - \sigma_\theta(+0)\right].$$

Поскольку всегда можно предположить, что $\sigma_\theta(+0) = 0$, то, обозначив $\frac{\pi^2}{4x^2} = \mu$, будем иметь:

$$\sigma_\theta(\mu) \leqslant C \sqrt{\mu},$$

где константа $C = \frac{\pi}{2} \cdot A$.

Из сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+0} \frac{\operatorname{sh}^2 \sqrt{|\lambda|}\, x}{\lambda}\, d\sigma_\theta(\lambda)$ при любом x вытекает, что он сходится равномерно относительно $x \in [0, h]$ и бесконечно дифференцируем по x.

Так как

$$I(2x) = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+0} \frac{\operatorname{sh}^2 \sqrt{|\lambda|}\, x}{\lambda}\, d\sigma_\theta(\lambda)\right]'',$$

то функция $I(x)$ также бесконечно дифференцируема в области $0 \leqslant x \leqslant 2h$.

Перейдем к нахождению асимптотики функции обложения $\sigma_\theta(\lambda)$.

Лемма 5.2. Для произвольной четной бесконечно дифференцируемой функции $g(x)$, равной нулю при $h \leqslant |x| < a$, справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_g(\sqrt{\lambda})\, d\sigma_\theta(\lambda) = g(0) R^{-1/2}(0) + \int_0^h g(x)\, C_\theta^{-1}(x, 0) R^{-1/2}(0)\, dx. \quad (5.10)$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ произвольная функция из пространства $L^2_{\{r\}}[0, a)$, равная нулю при $h < x < a$. Тогда, согласно (5.6), имеем

$$F(\lambda) = \int_0^h f(s)\, \omega_\theta(\lambda, s)\, R^{1/2}(s)\, ds. \tag{5.11}$$

Положим

$$f_N(x) = \int_{-N}^{N} F(\lambda)\, \omega_\theta(\lambda, x)\, d\sigma_\theta(\lambda);$$

умножим обе части этого равенства на $\dfrac{R^{1/4}(x)}{R^{1/4}(0)}$ и применим к нему оператор $\underset{x}{C_\theta^{-1}}$. Тогда, в силу теоремы 3.2, получим

$$\int_{-N}^{N} F(\lambda) \cos\sqrt{\lambda}\, x\, d\sigma_\theta(\lambda) = \underset{x}{C_\theta^{-1}}\left[f_N(s)\frac{R^{1/4}(s)}{R^{1/4}(0)}\right] \equiv$$

$$\equiv f_N(x)\frac{R^{1/4}(x)}{R^{1/4}(0)} + \int_0^x f_N(s)\frac{R^{1/4}(s)}{R^{1/4}(0)}\, C_\theta^{-1}(x, s)\, ds;$$

умножим это соотношение на произвольную четную бесконечно дифференцируемую функцию $g(x)$, равную нулю вне интервала $(-h, h)$ и проинтегрируем по x от 0 до ∞. Согласно (5.11), имеем

$$\int_{-N}^{N}\left[\int_0^h f(s)\, \omega_\theta(\lambda, s)\, R^{1/2}(s)\, ds\right] C_g(\sqrt{\lambda})\, d\sigma_\theta(\lambda) =$$

$$= \int_0^h g(s) f_N(s)\frac{R^{1/4}(s)}{R^{1/4}(0)}\, ds + \int_0^h g(x)\, dx \int_0^x f_N(s)\frac{R^{1/4}(s)}{R^{1/4}(0)}\, C_\theta^{-1}(x, s)\, ds.$$

Поменяем в обеих частях полученного равенства порядки интегрирования:

$$\int_0^h f(s)\, R^{1/2}(s)\, ds \int_{-N}^{N} C_g(\sqrt{\lambda})\, \omega_\theta(\lambda, s)\, d\sigma_\theta(\lambda) =$$

$$= \int_0^h f_N(s)\frac{R^{1/4}(s)}{R^{1/4}(0)}\left[g(s) + \int_s^h g(x)\, C_\theta^{-1}(x, s)\, dx\right] ds.$$

Пусть $N \to \infty$. Последовательность $\{f_N(x)\}$, согласно (5.7), сходится в метрике $L^2_{\{r\}}[0, a)$ к функции $f(x)$. Так как функция $C_g(\sqrt{\lambda})$, являясь косинус-преобразованием Фурье бесконечно дифференцируемой функции $g(x)$, при $\lambda \to \infty$ убывает быстрее любой отрицательной степени λ, то в силу следствия из теоремы 3.2 и леммы 5.1, внутренний интеграл левой части равенства сходится при всех $s \in [0, h]$, оставаясь равномерно ограниченным. Поэтому в указанном равенстве на основании теоремы Лебега можно перейти к пределу при $N \to \infty$. Выполнив предельный переход, получим:

$$\int_0^h f(s)\left\{R^{1/2}(s)\int_{-\infty}^{\infty} C_g(\sqrt{\lambda})\, \omega_\theta(\lambda, s)\, d\sigma_\theta(\lambda) -\right.$$

$$\left. - \frac{R^{1/4}(s)}{R^{1/4}(0)}\left[g(s) + \int_s^h g(x)\, C_\theta^{-1}(x, s)\, dx\right]\right\} ds = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности функции $f(s)$ и непрерывности подынтегральной функции, следует, что равенство

$$R^{1/2}(s)\int\limits_{-\infty}^{\infty} C_g(\sqrt{\lambda})\,\omega_\theta(\lambda, s)\,d\sigma_\theta(\lambda) - \frac{R^{1/4}(s)}{R^{1/4}(0)}\left[g(s)+\int\limits_s^h g(x)\,C_\theta^{-1}(x, s)\,dx\right]=0$$

справедливо для всех $s\in[0, h]$. Чтобы убедиться в непрерывности функции $\int\limits_s^h g(x)C_\theta^{-1}(x, s)\,dx$ следует в этом интеграле произвести интегрирование по частям и воспользоваться следствием из теоремы 3.3. Положив в последнем равенстве $s=0$, получим нужное соотношение.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 5.1. *Для функции обложения* $\sigma_\theta(\lambda)$ *при* $\lambda\to\infty$ *и любых* $\delta < a$ *имеет место следующая асимптотическая формула:*

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\left|\frac{\sigma_\theta(\lambda+0)+\sigma_\theta(\lambda)}{2}-\sigma_\theta(-\infty)-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{R(0)}}+\frac{\theta}{R(0)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\delta\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{x}\,\frac{R'\left(\frac{x}{2}\right)}{R^{3/2}(0)}\,dx\right|\leqslant 2\cdot 10^8\cdot a^{-1}\cdot R^{-1/2}(0).$$

Доказательство. Так как по известным свойствам интеграла Фурье

$$g(0)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty C_g(\sqrt{\lambda})\,d\sqrt{\lambda},$$

формулу (5.10) можно переписать в виде:

$$\int\limits_{+0}^{\infty}C_g(\sqrt{\lambda})\,d\left[\sigma_\theta(\lambda)-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{R(0)}}\right]=$$

$$=\int\limits_0^h g(x)\,C_\theta^{-1}(x, 0)\,R^{-1/2}(0)\,dx-\int\limits_{-\infty}^{+0}C_g(\sqrt{\lambda})\,d\sigma_\theta(\lambda).$$

Замечая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+0}C_g(\sqrt{\lambda})\,d\sigma_\theta(\lambda)=\int\limits_0^h g(x)\,I(x)\,dx,$$

где (в обозначениях леммы 5.1)

$$I(x)=\int\limits_{-\infty}^{+0}\operatorname{sh}\sqrt{|\lambda|}\,x\,d\,\sigma_\theta(\lambda),$$

и воспользовавшись представлением ядра $C_\theta^{-1}(x, 0)$, данным леммой 3.6, получим:

$$\int\limits_0^\infty C_g(\sqrt{\lambda})\,d\left[\sigma_\theta-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{R(0)}}\right]=$$

$$=\int\limits_0^h g(x)\left[-\frac{R'\left(\frac{x}{2}\right)}{4R^{3/2}(0)}-\frac{\theta}{R(0)}+\frac{n(x)}{R^{1/2}(0)}-I(x)\right]dx.$$

Положим $\sqrt{\lambda} = \mu$ и обозначим через $\sigma^*(\mu)$ нечетную функцию, совпадающую с функцией $\sigma_\theta(\mu^2)$ при $\mu > 0$. Тогда, в силу нечетности функций $\sigma^*(\mu)$ и $\frac{2}{\pi}\frac{\mu}{R^{1/2}(0)}$, последнее соотношение может быть записано так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_g(\mu)\, d\left[\sigma^*(\mu) - \frac{2}{\pi}\frac{\mu}{R^{1/2}(0)}\right] = \int_0^h g(x)\, G(x)\, dx, \tag{5.12}$$

где

$$G(x) = -2\left[\frac{R'\left(\frac{x}{2}\right)}{4R^{3/2}(0)} + \frac{\theta}{R(0)} + I(x) - \frac{n(x)}{R^{1/2}(0)}\right]. \tag{5.13}$$

Равенство (5.12) показывает, что функции $\sigma^*(\mu)$ и $\frac{2}{\pi}\frac{\mu}{R^{1/2}(0)}$ удовлетворяют всем условиям следствия из теоремы 4.1. при

$$\rho(\mu) = \frac{2}{\pi}\frac{\mu}{R^{1/2}(0)} \qquad \left(\rho^*\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{2}{\pi h R^{1/2}(0)}\right)$$

и $G(x)$, определенной формулой (5.13). Поэтому, в силу нечетности функции $\sigma^*(\mu) - \frac{2}{\pi}\frac{\mu}{R^{1/2}(0)}$, при любых $\delta < h$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\left|\frac{\sigma^*(N+0)+\sigma^*(N)}{2} - \frac{2}{\pi}\frac{N}{R^{1/2}(0)} - \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin Nx}{x} G(x)\, dx\right| \leqslant \frac{2\cdot 10^8}{hR^{1/2}(0)}.$$

Так как это неравенство выполняется при любом конечном $h < a$, то переходя к пределу при $h \to a$ и возвращаясь снова к переменной λ, получим, что при любых $\delta < a$

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\left|\frac{\sigma_\theta(\lambda+0)+\sigma_\theta(\lambda)}{2} - \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{R(0)}} - \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{x} G(x)\, dx\right| \leqslant \frac{2\cdot 10^8}{aR^{1/2}(0)}. \tag{5.14}$$

В силу (5.13) имеем:

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{x} G(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{x}\,\frac{R'\left(\frac{x}{2}\right)}{R^{3/2}(0)}\, dx + \frac{2}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{x}\left[\frac{\theta}{R(0)} + I(x) - \frac{n(x)}{R^{1/2}(0)}\right] dx. \tag{5.15}$$

Согласно лемме 5.1, функция $I(x)$ бесконечно дифференцируема. Поэтому ее ряд Фурье сходится в точке $x = 0$ к

$$I(0) = -\sigma_\theta(-\infty),$$

откуда, в силу леммы 4.2. (3) и свойства функции $n(x)$ (лемма 3.6), получим

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{x}\left[\frac{\theta}{R(0)} + I(x) - \frac{n(x)}{R^{1/2}(0)}\right] dx = \frac{\theta}{R(0)} - \sigma_\theta(-\infty).$$

Следовательно, из (5.14) и (5.15) имеем:

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\left|\frac{\sigma_\theta(\lambda+0)+\sigma_\theta(\lambda)}{2} - \sigma_\theta(-\infty) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{R(0)}} + \frac{\theta}{R(0)} + \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{x}\,\frac{R'\left(\frac{x}{2}\right)}{R^{3/2}(0)}\, dx\right| \leqslant \frac{2\cdot 10^8}{aR^{1/2}(0)}.$$

Накладывая различные ограничения на поведение функции $R'(x)$ в нуле, в соответствии с леммой 4.2, получим следующие следствия.

Следствие 1. Если функция $R'(x)$ подчинена только условию I, то при $\lambda \to \infty$

$$\sigma_\theta(\lambda) - \sigma_\theta(-\infty) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{R(0)}} + O(\ln\lambda).$$

Следствие 2. Если функция $R'(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, то при $\lambda \to \infty$

$$\sigma_\theta(\lambda) - \sigma_\theta(-\infty) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{R(0)}} + o(\ln\lambda).$$

Очевидно, что не сделав дальнейших предположений о свойствах функции $R'(x)$ в точке $x = 0$, уточнить доказанные формулы нельзя.

Следствие 3. Если функция $R'(x)$ разложима в ряд Фурье в точке $x = 0$, то

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\left|\sigma_\theta(\lambda) - \sigma_\theta(-\infty) - \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{R(0)}} + \frac{\theta}{R(0)} + \frac{1}{4}\,\frac{R_0'}{R^{3/2}(0)}\right| \leqslant \frac{2\cdot 10^8}{aR^{1/2}(0)},$$

где через R_0' обозначена сумма ряда Фурье функции $R'(x)$ в точке $x = 0$.

В частности, если кроме этого и

$$a = \lim_{y\to c}\int_0^y p^{-1/2}(\alpha)\,d\alpha = \infty,$$

то при $\lambda \to \infty$

$$\sigma_\theta(\lambda) - \sigma_\theta(-\infty) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{R(0)}} - \frac{\theta}{R(0)} - \frac{1}{4}\,\frac{R_0'}{R^{3/2}(0)} + o(1) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{p(0)}} - \frac{\theta}{p(0)} - \frac{1}{4}\,\frac{p_0'}{p(0)} + o(1).$$

Полученные следствия наглядно демонстрируют влияние дифференциальных свойств функции $R'(x)$ (или $p'(y)$) в нуле на точность асимптотических формул для функции обложения $\sigma_\theta(\lambda)$.

§ 6. ИНТЕРВАЛ $(0, \infty)$. ТЕОРЕМА О РАВНОСХОДИМОСТИ

Перейдем к доказательству теоремы о равносходимости разложения по собственным функциям $\omega_\theta(\lambda, x)$ с разложением в обычный интеграл Фурье.

Пусть $f(x)$ — произвольная функция из пространства $L^2_{\{r\}}[0, a)$, где

$$r(x) = \int_0^x R^{\frac{1}{2}}(\alpha)\,d\alpha,$$

и

$$F(\lambda) = \underset{b\to a}{\mathrm{l.i.m}}\int_0^b f(x)\,\omega_\theta(\lambda, x)\,R^{\frac{1}{2}}(x)\,dx, \tag{6.1}$$

$$C_{fR^{1/4}}(\sqrt{\lambda}) = \underset{b\to a}{\mathrm{l.i.m}}\int_0^b f(x)\,R^{\frac{1}{4}}(x)\cos\sqrt{\lambda}\,x\,dx,$$

причем интегралы сходятся в метриках пространств $L^2_{\{\sigma\}}(-\infty, \infty)$ и $L^2_{\{\sqrt{\lambda}\}}[0, \infty)$.

Тогда справедлива следующая

Лемма 6.1. Для произвольной четной бесконечно дифференцируемой функции $g(x)$, равной нулю вне интервала $(-h, h)$, имеет место соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_g(\sqrt{\lambda})F(\lambda)\,\omega_\theta(\lambda, x)\,d\sigma_\theta(\lambda) -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} Cg(\sqrt{\lambda})\,C_{f\cdot R^{\frac{1}{4}}}(\sqrt{\lambda})\,R^{-\frac{1}{4}}(x)\cos\sqrt{\lambda}\,d\sqrt{\lambda} =$$

$$= \int_0^h g(t)\,B(x, t)\,dt,$$

где для функции $B(x, t)$ справедлива равномерная относительно $x \in [0, b]$ оценка:

$$|B(x, t)| \leqslant At^{\frac{1}{2}} \quad (0 \leqslant t \leqslant h),$$

где A — некоторая константа.

Доказательство. Рассмотрим в интервале $0 \leqslant x \leqslant b+h$ $(h < a-b)$ последовательность функций $\{f_N(x)\}$, сходящуюся в метрике пространства $L^2_{\{r\}}[0, a)$ к функции $f(x)$:

$$f_N(x) = \int_{-N}^{N} F(\lambda)\,\omega_\theta(\lambda, x)\,d\sigma_\theta(\lambda), \tag{6.2}$$

где $F(\lambda)$ определяется формулой (6.1).

Применяя к равенству (6.2) оператор обобщенного сдвига G_{x-t}^{x+t}, получим в силу теоремы 3.1:

$$\int_{-N}^{N} F(\lambda)\,\omega_\theta(\lambda, x)\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\,d\sigma_\theta(\lambda) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} f_N(s)\,G(x-t, s, x+t)\,ds \equiv$$

$$\equiv G_{x-t}^{x+t}[f_N(s)] \quad (t \leqslant x \leqslant b+h-t,\ 0 \leqslant t \leqslant h).$$

Продифференцируем это равенство по t в области $t \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant t \leqslant h$. Согласно следствию из частных случаев теоремы 2.2, получим

$$\int_{-N}^{N} F(\lambda)\,\omega_\theta(\lambda, x)\cos\sqrt{\lambda}t\,d\sigma_\theta(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[f_N(x+t)\,R^{\frac{1}{4}}(x+t) + f_N(x-t)\,R^{\frac{1}{4}}(x-t)\right]R^{-\frac{1}{4}}(x) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} f_N(s)\,G_t(x-t, s, x+t)\,ds \equiv \frac{\partial}{\partial t}G_{x-t}^{x+t}[f_N(s)].$$

Применим к найденному соотношению оператор преобразования $\underset{t}{C_\theta}$. На основании теоремы 3.2 будем иметь

$$\int_{-N}^{N} F(\lambda)\,\omega_\theta(\lambda, t)\frac{R^{\frac{1}{4}}(t)}{R^{\frac{1}{4}}(0)}\,d\sigma_\theta(\lambda) = \underset{t}{C_\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial t}G_{x-t}^{x+t}[f_N(s)]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[f_N(x+t)\,R^{\frac{1}{4}}(x+t) + f_N(x-t)\,R^{\frac{1}{4}}(x-t)\right]R^{-\frac{1}{4}}(x) + A_N(x, t), \tag{6.3}$$

где

$$A_N(x, t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} f_N(s)\, G_t(x-t, s, x+t)\, ds +$$
$$+ \int\limits_0^t C_\theta(t, s)\, \frac{\partial}{\partial s} G_{x-s}^{x+s}[f_N(u)]\, ds. \quad (6.4)$$

Умножим обе части равенства (6.3) на $\frac{R^{\frac{1}{4}}(x)}{R^{\frac{1}{4}}(0)}$ и, пользуясь тем, что левая часть оказалась симметричной относительно x и t, продолжим правую часть симметрично в область $0 \leqslant x \leqslant t$, $0 \leqslant t \leqslant h$:

$$\int\limits_{-N}^{N} F(\lambda)\, \omega_\theta(\lambda, x)\, \frac{R^{\frac{1}{4}}(x)}{R^{\frac{1}{4}}(0)}\, \omega_\theta(\lambda, t)\, \frac{R^{\frac{1}{4}}(t)}{R^{\frac{1}{4}}(0)}\, d\sigma_\theta(\lambda) =$$
$$= \frac{1}{2} R^{-\frac{1}{4}}(0)\left[f_N(x+t)\, R^{\frac{1}{4}}(x+t) + f_N(|x-t|)\, R^{\frac{1}{4}}(|x-t|)\right] +$$
$$+ \begin{cases} A_N(x, t)\, \dfrac{R^{\frac{1}{4}}(x)}{R^{\frac{1}{4}}(0)}, & (0 \leqslant t \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant t \leqslant h) \\[2ex] A_N(t, x)\, \dfrac{R^{\frac{1}{4}}(t)}{R^{\frac{1}{4}}(0)}, & (0 \leqslant x \leqslant t, \quad 0 \leqslant t \leqslant h). \end{cases}$$

После умножения обеих частей этого соотношения на $\frac{R^{\frac{1}{4}}(0)}{R^{\frac{1}{4}}(x)}$ и применения оператора обратного преобразования $\underset{t}{C_\theta^{-1}}$, в силу теоремы 3.2 получим:

$$\int\limits_{-N}^{N} F(\lambda)\, \omega_\theta(\lambda, x) \cos\sqrt{\lambda}\, t\, d\sigma_\theta(\lambda) = \quad (6.5)$$
$$= \frac{1}{2}\left[f_N(x+t)\, R^{\frac{1}{4}}(x+t) + f_N(|x-t|)\, R^{\frac{1}{4}}(|x-t|)\right] R^{-\frac{1}{4}}(x) + B_N(x, t),$$

где

$$\left.\begin{aligned} B_N(x, t) &= \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} f_N(s)\, G(x-t, s, x+t)\, ds, \quad (t \leqslant x \leqslant b); \\ B_N(x, t) &= A_N(t, x)\, \frac{R^{\frac{1}{4}}(t)}{R^{\frac{1}{4}}(x)} + \int\limits_0^t C_\theta^{-1}(t, s)\left\{\frac{1}{2}\left[f_N(x+s)\, R^{\frac{1}{4}}(x+s) + \right.\right. \\ &\quad \left. + f_N(s-x)\, R^{\frac{1}{4}}(s-x)\right] R^{-\frac{1}{4}}(x) + \\ &\quad \left. + A_N(s, x)\, \frac{R^{\frac{1}{4}}(s)}{R^{\frac{1}{4}}(x)}\right\} ds, \quad (0 \leqslant x \leqslant t) \end{aligned}\right\} \quad (6.6)$$

Так как, согласно (6.2), последовательность $\{f_N(x)\}$ сходится в метрике $L^2_{\{r\}}[0, a)$ к $f(x)$, то последовательности $\{A_N(x, t)\}$ и $\{B_N(x, t)\}$ сходятся к $A(x, t)$ и $B(x, t)$ соответственно; функции $A(x, t)$ и $B(x, t)$ определяются теми же формулами (6.4) и (6.6), где $f_N(x)$, $A_N(x, t)$, $B_N(x, t)$ заменены предельными функциями.

Оценим функцию $B(x, t)$ в области $0 \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant t \leqslant h$. В силу теоремы 3.1 производная $G_t(x-t, s, x+t)$ $(|x-s| < t)$ в рассматриваемой области ограничена некоторой константой C_1. Поэтому на основании неравенства Буняковского имеем:

$$\left|\int\limits_{x-t}^{x+t} f(s)\, G_t(x-t,\ s,\ x+t)\, ds\right| \leqslant C_1 \sqrt{2}\left[\int\limits_{x-t}^{x+t} f^2(s)\, ds\right]^{\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{2}} \leqslant C_2 t^{\frac{1}{2}}. \quad (6.7)$$

В области $0 \leqslant x \leqslant t$

$$|A(t, x)| \leqslant \frac{1}{2}\left|\int\limits_{t-x}^{t+x} f(s)\, G_x(t-x,\ s,\ t+x)\, ds\right| ds +$$

$$+\left|\int\limits_0^x C_\theta(x, s) \frac{\partial}{\partial s} G_{t-s}^{t+s}[f(u)]\, ds\right| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^{2t} |f(s)|\, |G_x(t-x,\ s,\ t+x)|\, ds +$$

$$+\int\limits_0^t \left| C_\theta(x, s) \frac{\partial}{\partial s} G_{t+s}^{t+s}[f(u)]\right| ds.$$

Откуда, после применения неравенства Буняковского, в силу ограниченности функций $G_x(t-x, s, t+x)$ $(|t-s| < x)$ и $C_\theta(x, s)$ $(0 \leqslant s \leqslant x \leqslant t)$ будет следовать, что в области $0 \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant t \leqslant h$:

$$|A(t, x)| \leqslant C_3 t^{\frac{1}{2}}. \quad (6.8)$$

Оценки (6.7) и (6.8) равномерны относительно $x \in [0, b]$. Поэтому из определения функции $B(x, t)$ в силу ограниченности ядра $C_\theta^{-1}(t, x)$ и условия 1, на основании неравенства Буняковского, следует равномерная относительно $x \in [0, b]$ оценка:

$$|B(x, t)| \leqslant A t^{\frac{1}{2}} \qquad (0 \leqslant t \leqslant h),$$

где A — некоторая константа.

Умножим равенство (6.5) на четную бесконечно дифференцируемую функцию $g(t)$, равную нулю вне интервала $(-h, h)$, и проинтегрируем его по t от 0 до ∞:

$$\int\limits_{-N}^{N} \mathrm{C_g}(\sqrt{\lambda})\, F(\lambda)\, \omega_\theta(\lambda, x)\, d\sigma_\theta(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^h g(t)\left[f_N(x+t) R^{\frac{1}{4}}(x+t) + f_N(|x-t|) R^{\frac{1}{4}}(|x-t|)\right] R^{-\frac{1}{4}}(x)\, dt +$$

$$+\int\limits_0^h g(t)\, B_N(x, t)\, dt.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ и учтя, что в силу известных свойств классического интеграла Фурье

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^h g(t)\left[f_N(x+t) R^{\frac{1}{4}}(x+t) + f_N(|x-t|) R^{\frac{1}{4}}(|x-t|)\right] R^{-\frac{1}{4}}(x)\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{C_g}(\sqrt{\lambda})\, C_{f \cdot R^{\frac{1}{4}}} \cos\sqrt{\lambda}x \cdot R^{-\frac{1}{4}}(x)\, d\sqrt{\lambda},$$

окончательно получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_g(\sqrt{\lambda}) F(\lambda)\, \omega_\theta(\lambda, x)\, d\sigma_\theta(\lambda) -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} C_g(\sqrt{\lambda})\, C_{f\cdot R^{\frac{1}{4}}}(\sqrt{\lambda}) \cos\sqrt{\lambda}\, x R^{-\frac{1}{4}}(x)\, d\sqrt{\lambda} =$$

$$= \int_0^h g(t) B(x, t)\, dt. \tag{6.9}$$

Замечание. Из формулы (6.9) методами, указанными в предыдущем параграфе можно найти асимптотику для ядра разложения единицы оператора L_θ. В следующем параграфе мы найдем асимптотику такого ядра для оператора L, заданного на все оси.

Теорема 6.1. При фиксированном $b < a$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+0} F(\lambda)\, \omega_\theta(\lambda, x)\, d\sigma_\theta(\lambda)$$

сходится абсолютно и равномерно относительно $x \in [0, b]$ и

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0\leqslant x\leqslant b} \Bigg| \int_{-\infty}^{N} F(\lambda)\, \omega_\theta(\lambda, x)\, d\sigma_\theta(\lambda) -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{N} C_{f\cdot R^{\frac{1}{4}}}(\sqrt{\lambda}) \cos\sqrt{\lambda}\, x \cdot R^{-\frac{1}{4}}(x)\, d\sqrt{\lambda} \Bigg| = 0.$$

Доказательство. На основании неравенства Буняковского

$$\int_{-N}^{+0} |\omega_\theta(\lambda, x) \cos\sqrt{\lambda}\, t F(\lambda)|\, |\lambda|^m\, d\sigma_\theta(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_{-N}^{+0} \cos^2\sqrt{\lambda} t \cdot \omega_\theta^2(\lambda, x)\, |\lambda|^{2m}\, d\sigma_\theta(\lambda)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_{-N}^{+0} F^2(\lambda)\, d\sigma_\theta(\lambda)\right]^{\frac{1}{2}},$$

откуда в силу следствия из теоремы 3.2, леммы 5.1 и равенства Парсеваля (5.8) следует, что в области $0 \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant t \leqslant h$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+0} F(\lambda)\, \omega_\theta(\lambda, x) \cos\sqrt{\lambda}\, t\, d\sigma_\theta(\lambda) = I(x, t) \tag{6.10}$$

сходится абсолютно и равномерно относительно x и t, а функция $I(x, t)$ бесконечно дифференцируема по t. Отсюда мы заключаем, что и интеграл

$$\int_{-\infty}^{+0} F(\lambda)\, \omega_\theta(\lambda, x)\, d\sigma_\theta(\lambda) = I(x, 0) \tag{6.11}$$

сходится абсолютно и равномерно относительно $x \in [0, b]$, и для функции $I(x, t) - I(x, 0)$ справедлива равномерная относительно $x \in [0, b]$ оценка:

$$|I(x, t) - I(x, 0)| \leqslant B \cdot t \quad (0 \leqslant t \leqslant h), \tag{6.12}$$

где B — некоторая константа.

Согласно (6.10) и (6.11), имеем

$$\int_0^h I(x, t)\, g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+0} C_g(\sqrt{\lambda})\, F(\lambda)\, \omega_\theta(\lambda, x)\, d\sigma_\theta(\lambda),$$

$$\int_0^h I(x, 0) g(t)\, dt = C_g(0) \int_{-\infty}^{+0} F(\lambda)\, \omega_\theta(\lambda, x)\, d\sigma_\theta(\lambda).$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+0} C_g(\sqrt{\lambda}) F(\lambda)\, \omega_\theta(\lambda, x)\, d\sigma_\theta(\lambda) =$$

$$= C_g(0) \int_{-\infty}^{+0} F(\lambda)\, \omega_\theta(\lambda, x)\, d\sigma_\theta(\lambda) + \int_0^h g(t)\, [I(x, t) - I(x, 0)]\, dt,$$

а равенство (6.9) можно записать в виде

$$\int_{+0}^{\infty} C_g(\sqrt{\lambda})\, d\Big[\int_{-\infty}^{\lambda} F(\lambda)\, \omega_\theta(\lambda, x)\, d\sigma_\theta(\lambda) -$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda} C_{f \cdot R^{\frac{1}{4}}}(\sqrt{\lambda}) \cos \sqrt{\lambda}\, x R^{-\frac{1}{4}}(x)\, d\sqrt{\lambda}\Big] + \tag{6.13}$$

$$+ C_g(0) \int_{-\infty}^{+0} F(\lambda)\, \omega_\theta(\lambda, x)\, d\sigma_\theta(\lambda) = \int_0^h g(t)\, [B(x, t) - I(x, t) + I(x, 0)]\, dt.$$

Введем функции $\alpha(x, \mu)$ и $C(x, t)$ по формулам

$$\alpha(x, \mu) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\mu^2} F(\lambda)\, \omega_\theta(\lambda, x)\, d\sigma_\theta(\lambda) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\mu^2} C_{f \cdot R^{\frac{1}{4}}}(\sqrt{\lambda}) \cos \sqrt{\lambda}\, x R^{-\frac{1}{4}}(x)\, d\sqrt{\lambda}, & \mu > 0 \\ 0, & \mu \leq 0, \end{cases}$$

$$C(x, t) = B(x, t) - I(x, t) - I(x, 0),$$

причем в силу предыдущей леммы и формулы (6.12), для функции $C(x, t)$ имеет место равномерная относительно $x \in [0, b]$ оценка

$$|C(x, t)| \leq C \cdot t^{\frac{1}{2}} \quad (0 \leq t \leq h), \tag{6.14}$$

где C — некоторая константа.

Теперь равенство (6.13) перепишется так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_g(\mu)\, d\alpha(x, \mu) = \int_0^h g(t)\, C(x, t)\, dt. \tag{6.15}$$

Из определения функции $\alpha(x, \mu)$ следует, что при любом $l > 0$

$$\sup_{0 \leq x \leq b} \bigvee_{l}^{l+\frac{1}{h}} \{\alpha(x, \mu)\} \leq \sup_{0 \leq x \leq b} \int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2} |F(\lambda)| \cdot |\omega_\theta(\lambda, x)|\, d\sigma_\theta(\lambda) +$$

$$+ \sup_{0 \leq x \leq b} R^{-\frac{1}{4}}(x) \cdot \frac{2}{\pi} \int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2} |C_{f \cdot R^{\frac{1}{4}}}(\sqrt{\lambda})|\, d\sqrt{\lambda}.$$

На основании следствия из теоремы 3.2 имеем

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant b}\bigvee_{l}^{l+\frac{1}{h}}\{\alpha(x,\mu)\}\leqslant A^*(b)\Big[\int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2}|F(\lambda)|^2\,d\sigma_\theta(\lambda)\cdot\int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2}d\sigma_\theta(\lambda)\Big]^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\sup_{0\leqslant x\leqslant b}R^{-\frac{1}{4}}(x)\cdot\frac{2}{\pi}\Big[\int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2}|C_{f\cdot R^{\frac{1}{4}}}(\sqrt{\lambda})|^2\,d\sqrt{\lambda}\cdot\int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2}d\sqrt{\lambda}\Big]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=A^*(b)\Big[\int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2}|F(\lambda)|^2\,d\sigma_\theta(\lambda)\cdot\left\{\sigma_\theta\left[\left(l+\frac{1}{h}\right)^2\right]-\sigma_\theta(l^2)\right\}\Big]^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\sup_{0\leqslant x\leqslant b}R^{-\frac{1}{4}}\cdot(x)\frac{2}{\pi h^{\frac{1}{2}}}\Big[\int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2}|C_{f\cdot R^{\frac{1}{4}}}(\sqrt{\lambda})|^2\,d\sqrt{\lambda}\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Так как

$$F(\lambda)\in L^2_{\{\sigma\}}(-\infty,\ \infty),\quad C_{f\cdot R^{1/4}}(\sqrt{\lambda})\in L^2_{\{\sqrt{\lambda}\}}[0,\ \infty),$$

то

$$\lim_{l\to\infty}\int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2}|F(\lambda)|^2\,d\sigma_\theta(\lambda)=0;\quad \lim_{l\to\infty}\int_{l^2}^{\left(l+\frac{L}{h}\right)^2}|C_{f\cdot R^{1/4}}(\sqrt{\lambda})|^2\,d\sqrt{\lambda}=0,$$

а в силу теоремы 5.1

$$\overline{\lim_{l\to\infty}}\left\{\sigma_\theta\left[\left(l+\frac{1}{h}\right)^2\right]-\sigma_\theta(l^2)\right\}<\infty.$$

Поэтому

$$\lim_{l\to\infty}\sup_{0\leqslant x\leqslant b}\bigvee_{l}^{l+\frac{1}{h}}\{\alpha(x,\ \mu)\}=0. \tag{6.16}$$

Аналогично можно проверить, что

$$\sup_{-\infty<l<\infty}\ \sup_{0\leqslant x\leqslant b}\bigvee_{l}^{l+\frac{1}{h}}\{\alpha(x,\ \mu)\}<\infty. \tag{6.17}$$

Формулы (6.15), (6.16), (6.17) показывают, что функция $\alpha(x,\mu)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4.2. Поэтому при любом $0<\varepsilon<h$

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{0\leqslant x\leqslant b}\left|\alpha(x,\ N)-\frac{2}{\pi}\int_0^\varepsilon\frac{\sin Nt}{t}\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)C(x,\ t)\,dt\right|=0.$$

Согласно (6.14) имеем

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant b}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^\varepsilon\frac{\sin Nt}{t}\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)C(x,t)\,dt\right|\leqslant\frac{2\cdot C}{\pi}\int_0^\varepsilon t^{-1/2}\,dt=\frac{4C}{\pi}\varepsilon^{1/2}.$$

Поэтому

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{0\leqslant x\leqslant b}|\alpha(x,\ N)|\leqslant\frac{4C}{\pi}\varepsilon^{1/2},$$

откуда, в силу произвольной малости числа $\varepsilon>0$ следует:

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{0\leqslant x\leqslant b}|\alpha(x,\ N)|=0.$$

Вспоминая определение функции $\alpha(x, \mu)$, окончательно получим:

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{0\leqslant x\leqslant b}\left|\int_{-\infty}^{N^2} F(\lambda)\,\omega_\theta(\lambda, x)\,d\sigma_\theta(\lambda)-\frac{2}{\pi}\int_0^{N^2} C_{f\cdot R^{1/4}}(\sqrt{\lambda})\cos\sqrt{\lambda}x\cdot R^{-1/4}(x)\,d\sqrt{\lambda}\right|=0.$$

§ 7. ИНТЕРВАЛ $(-\infty, \infty)$. АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть оператор (1.1)

$$l[u]=-\frac{d}{dy}\left[p(y)\frac{d}{dy}u\right]+q(y)\,u$$

задан на всей оси $-\infty<y<\infty$ и l_u — его самосопряженное расширение. Известно [9], что разложение единицы E_λ такого расширения является интегральным оператором, порожденным спектральной функцией $\Theta_1(y_0, y, \lambda)$ $(-\infty<y_0,\ y<\infty;\ -\infty<\lambda<\infty)$:

$$(E_\beta-E_\alpha)f_1=\int_{-\infty}^{\infty}[\Theta_1(y_0, y, \beta)-\Theta_1(y_0, y, \alpha)]\,f_1(y)\,dy\equiv$$

$$\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_1(y_0, y, \Delta_{\alpha\beta})\,f_1(y)\,dy. \tag{7.1}$$

Из формулы*, выражающей функцию $\Theta_1(y_0, y, \Delta_{\alpha\beta})$ через решения уравнения

$$l[u]=\lambda u,$$

следует, что эта функция симметрична относительно аргументов y_0 и y, удовлетворяет неравенству

$$|\Theta_1(y_0, y, \Delta)|\leqslant\sqrt{\Theta_1(y_0, y_0, \Delta)\cdot\Theta_1(y, y, \Delta)} \tag{7.2}$$

и абсолютно непрерывна относительно некоторой неубывающей функции $\tau(\lambda)$:

$$\Theta_1(y_0, y, \Delta_{\alpha\beta})=\int_\alpha^\beta\psi_1(y_0, y, \lambda)\,d\tau(\lambda), \tag{7.3}$$

причем функция $\psi_1(y_0, y, \lambda)$ по каждому из аргументов y_0 и y удовлетворяет уравнению

$$l[u]=\lambda u.$$

Из (7.1) вытекает, что

$$f_1(y)=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(z)\,\psi_1(y, z, \lambda)\,dz\right]d\tau(\lambda), \tag{7.4}$$

где интеграл сходится в метрике пространства $L^2(-\infty, \infty)$.

На основании (7.3) равенство Парсеваля может быть записано так:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(z)\,\overline{g_1(z)}\,dz=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(z)\,\overline{g_1(y)}\,\psi_1(y, z, \lambda)\,dy\,dz\right]d\tau(\lambda) \tag{7.5}$$

$$(f_1,\ g_1\in L^2(-\infty, \infty)).$$

Перейдем, далее, с помощью замены $x=\int_0^y p^{-1/2}(\alpha)\,d\alpha$ от уравнения

$$l[u]=\lambda u$$

---

* См. [9], стр. 204, формула (38).

к уравнению

$$L[\omega] = -\frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\ln R(x)\right]\frac{d\omega}{dx} + Q(x)\,\omega = \lambda\omega \quad (a_1 < x < a_2), \quad (7.6)$$

где

$$\omega(\lambda, x) \equiv u(\lambda, y); \quad R(x) \equiv p(y); \quad Q(x) \equiv q(y); \quad a_{1,2} = \lim_{y \to \mp\infty} \int_0^y p^{-1/2}(z)\, dz.$$

При этом формулы (7.2), (7,3), (7.4), (7.5) примут вид

$$|\Theta(x_0, x, \Delta)| \leqslant \sqrt{\Theta(x_0, x_0, \Delta)\cdot\Theta(x, x, \Delta)}, \quad (7.7)$$

$$\Theta(x_0, x, \Delta_{\alpha\beta}) = \int_\alpha^\beta \psi(x_0, x, \lambda)\, d\tau(\lambda), \quad (7.8)$$

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,\psi(x, s, \lambda)\, R^{1/2}(s)\, ds\right] d\tau(\lambda), \quad (7.9)$$

$$\int_{a_1}^{a_2} f(s)\,\overline{g(s)}\, R^{1/2}(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{a_1}^{a_2}\int_{a_1}^{a_2} f(s)\,\overline{g(x)}\,\psi(x, s, \lambda)\, R^{1/2}(x)\, R^{1/2}(s)\, dx\, ds\right] d\tau(\lambda), \quad (7.10)$$

где

$$\Theta(x_0, x, \lambda) \equiv \Theta_1(y_0, y, \lambda); \quad \psi(x_0, x, \lambda) \equiv \psi_1(y_0, y, \lambda); \quad f(x) \equiv f_1(y); \quad g(x) \equiv g_1(y).$$

Функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат пространству $L^2_{\{r\}}(a_1, a_2)$, где

$$r(x) = \int_0^x R^{1/2}(s)\, ds,$$

а функция $\psi(x_0, x, \lambda)$ по каждому из аргументов x_0 и x удовлетворяет уравнению (7.6).

В этом параграфе мы найдем асимптотику для спектральной функции $\Theta(x, s, \lambda)$ при $\lambda \to \infty$ и покажем, как влияют дифференциальные свойства производной $R'(x)$ на точность асимптотических формул.

Лемма 7.1. Пусть $\Theta(x, x_0, \lambda) \equiv \Theta_1(y, y_0, \lambda)$ — спектральная функция оператора $L_\omega(l_u)$ и $0 < h < \min\{b_1 - a_1;\ a_2 - b_2\}$. *Если* $a_1 < b_1 \leqslant x,\ x_0 \leqslant b_2 < a_2$ и $\frac{\pi^2}{4h^2} \leqslant \lambda < \infty$, то

$$|\Theta(x, x_0, \lambda)| \leqslant C\sqrt{\lambda}.$$

где C — некоторая константа, функция

$$\Phi(t, x, x_0) = \int_{-\infty}^{+0} \cos\sqrt{\lambda}\, t\, d_\lambda\Theta(x, x_0, \lambda)$$

бесконечно дифференцируема по $t \in [0, 2h]$, причем интегралы, определяющие эту функцию и ее производные по t сходятся абсолютно и равномерно относительно $t \in [0, 2h]$ и ограничены при всех $x, x_0 \in [b_1, b_2]$.

Доказательство. Выберем в качестве функций $f(s)$ и $g(s)$, фигурирующих в равенстве Парсеваля (7.10), следующие функции, зависящие от параметров x, x_0, t:

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} G(x - t, s, x + t)\, R^{-1/2}(s), & |x - s| < t \\ 0 & |x - s| > t; \end{cases}$$

$$g(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}G(x_0-t,\ s,\ x_0+t)\,R^{-1/2}(s), & |x_0-s|<t\\ 0 & |x_0-s|>t,\end{cases}$$

где $G(\eta,\ s,\ \xi)$ — ядро оператора обобщенного сдвига G_{x-t}^{x+t}. Имеем:

$$\frac{1}{4}\int\limits_{\Delta}G(x-t,\ s,\ x+t)\,G(x_0-t,\ s,\ x_0+t)\,R^{-1/2}(s)\,ds=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{x-t}^{x+t}\int\limits_{x_0-t}^{x_0+t}G(x-t,\ s,\ x+t)\,G(x_0-t,\ p,\ x_0+t)\,\psi(s,\ p,\ \lambda)\,ds\,dp\right]d\tau(\lambda),$$

где через Δ обозначено пересечение интервалов $|x-s|<t$ и $|x_0-s|<t$. Замечая, что функция $\psi(s,\ p,\ \lambda)$ удовлетворяет уравнению (7.5) по обоим аргументам, и дважды используя теорему 3.1, получим:

$$\frac{1}{4}\int\limits_{\Delta}G(x-t,\ s,\ x+t)\,G(x_0-t,\ s,\ x_0+t)\,R^{-1/2}(s)\,ds=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\sqrt{\lambda}\,t}{\lambda}\,\psi(x,\ x_0,\ \lambda)\,d\tau(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\sqrt{\lambda}\,t}{\lambda}\,d_\lambda\Theta(x,\ x_0,\ \lambda).$$

Написанное равенство* справедливо в области $0\leqslant t\leqslant h<\min\{b_1-a_1;\ a_2-b_2\}$, причем, в силу теоремы 3.1, в области $b_1\leqslant x,\ x_0\leqslant b_2$

$$\left|\frac{1}{4}\int\limits_{\Delta}G(x-t,\ s,\ x+t)\,G(x_0-t,\ s,\ x_0+t)\,R^{-1/2}(s)\,ds\right|\leqslant C_1t\qquad(0\leqslant t\leqslant h),$$

где C_1 — некоторая константа.

Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\sqrt{\lambda}\,t}{\lambda}\,d_\lambda\Theta(x,\ x_0,\ \lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+0}\frac{\operatorname{sh}^2\sqrt{|\lambda|}\,t}{\lambda}\,d_\lambda\Theta(x,\ x_0,\ \lambda)+\int\limits_{+0}^{\infty}\frac{\sin^2\sqrt{\lambda}\,t}{\lambda}\,d_\lambda\Theta(x,\ x_0,\ \lambda),$$

то из предыдущей оценки следует, что в той же области $b_1\leqslant x,\ x_0\leqslant b_2$, $0\leqslant t\leqslant h$ сходятся в отдельности оба интеграла правой части написанного равенства. В частности, в силу монотонности функции $\Theta(x,\ x,\ \lambda)$ и положительности подынтегральной функции в области $b_1\leqslant x\leqslant b_2$, $0\leqslant t\leqslant h$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+0}\frac{\operatorname{sh}^2\sqrt{|\lambda|}\,t}{\lambda}\,d_\lambda\Theta(x,\ x,\ \lambda)\leqslant C_1t \tag{7.11}$$

$$\int\limits_{+0}^{\infty}\frac{\sin^2\sqrt{\lambda}\,t}{\lambda}\,d_\lambda\Theta(x,\ x,\ \lambda)\leqslant C_1t.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что для всех $x,\ x_0\in[b_1,\ b_2]$

$$\Theta(x,\ x_0,\ +0)=0.$$

Поэтому из последнего неравенства, рассуждая, как и при доказательстве леммы 5.1, получим, что в области $b_1\leqslant x\leqslant b_2$, $\frac{\pi^2}{4h^2}\leqslant\lambda<\infty$

$$\Theta(x,\ x,\ \lambda)\leqslant C\sqrt{\lambda},$$

где константа $C=\frac{\pi}{2}C_1$.

* Идея доказательства этого равенства принадлежит Ю. М. Березанскому [10].

Отсюда, согласно (7.7), следует:

$$|\Theta(x, x_0, \lambda)| \leq C\sqrt{\lambda} \quad \left(b_1 \leq x, x_0 \leq b_2, \quad \frac{\pi^2}{4h^2} \leq \lambda < \infty\right).$$

Из неравенства (7.11) мы заключаем, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+0} \frac{\operatorname{sh}^2 \sqrt{|\lambda|} \cdot t}{\lambda} d_\lambda \Theta(x, x, \lambda)$$

сходится равномерно относительно $t \in [0, h]$ и бесконечно дифференцируем по t в этой области, причем интегралы, определяющие его производные по t, сходятся равномерно относительно $t \in [0, h]$ и ограничены при всех $x \in [b_1, b_2]$.

Применяя неравенство Буняковского к интегралу

$$\int_{-\infty}^{+0} \frac{\operatorname{sh}^2 \sqrt{|\lambda|} \cdot t}{\lambda} d_\lambda \Theta(x, x_0, \lambda)$$

и используя оценки (7.7) и (7.11), получим, что он бесконечно дифференцируем по $t \in [0, h]$, причем сам интеграл и все его производные по t сходятся абсолютно и равномерно относительно $t \in [0, h]$ и ограничены при всех $x, x_0 \in [b_1, b_2]$. Доказательство заканчивается так же как и в лемме 5.1.

Лемма 7.2. Пусть $\beta(x, s, \mu)$ $(x, s \in [b_1, b_2],\ \mu^2 = \lambda)$ — нечетная функция, определенная для $\mu > 0$ формулой

$$\beta(x, s, \mu) = \Theta(x, s, \mu^2) - \frac{1}{\pi} \frac{\sin \mu(x-s)}{x-s} R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s),$$

и

$$Q(t, x, s) = \begin{cases} R^{-1/2}(s) G_t(x-t, s, x+t) - 2\Phi(t, x, s), & |x-s| < t \leq h \\ -2\Phi(t, x, s), & 0 \leq t < |x-s|, \end{cases}$$

где функции $\Theta(x, s, \lambda)$ и $\Phi(t, x, s)$ имеют то же значение, что и в предыдущей лемме, а $h < \min\{b_1 - a_1, a_2 - b_2\}$.

Тогда для произвольной четной бесконечно дифференцируемой функции $g(t)$, равной нулю вне интервала $(-h, h)$, справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_g(\mu)\, d\beta(x, s, \mu) = \int_0^h g(t) Q(t, x, s)\, dt.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций $\{f_N(x)\}$, сходящуюся в пространстве $L^2_{\{r\}}(a_1, a_2)$ к функции $f(x)$, равной нулю вне интервала $[b_1, b_2]$. Согласно (7.9) имеем

$$f_N(x) = \int_{-N}^{N} \left[\int_{b_1}^{b_2} \psi(x, s, \lambda) f(s) R^{1/2}(s)\, ds\right] d\tau(\lambda). \tag{7.12}$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор обобщенного сдвига G_{x-t}^{x+t}, в силу теоремы 3.1 получим

$$\int_{-N}^{N} \frac{\sin \sqrt{\lambda}\, t}{\sqrt{\lambda}} \left[\int_{b_1}^{b_2} \psi(x, s, \lambda) f(s) R^{1/2}(s)\, ds\right] d\tau(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} f_N(s) G(x-t, s, x+t)\, ds,$$

причем $a_1 < b_1 \leq b_2 < a_2$; $0 \leq t \leq h < \min\{b_1 - a_1, a_2 - b_2\}$.

Продифференцируем найденное соотношение по t.

Согласно следствию из частных случаев теоремы 2.2 и (7.8) имеем:

$$\int_{-N}^{N} \cos\sqrt{\lambda} t\, d_\lambda \Big[\int_{b_1}^{b_2} \Theta(x, s, \lambda) f(s) R^{1/2}(s)\, ds\Big] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[f_N(x+t) R^{1/4}(x+t) + f_N(x-t) R^{1/4}(x-t)\right] R^{-1/4}(x) +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} f_N(s)\, G_t(x-t, s, x+t)\, ds.$$

Умножим последнее равенство на произвольную четную бесконечно дифференцируемую функцию $g(t)$, равную нулю вне интервала $(-h, h)$ и проинтегрируем по t от 0 до ∞:

$$\int_{-N}^{N} C_g(\sqrt{\lambda})\, d_\lambda \Big[\int_{b_1}^{b_2} \Theta(x, s, \lambda) f(s) R^{1/2}(s)\, ds\Big] =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{h} g(t)\left[f_N(x+t) R^{1/4}(x+t) + f_N(x-t) R^{1/4}(x-t)\right] R^{-1/4}(x)\, dt +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{0}^{h} g(t)\, dt \int_{x-t}^{x+t} f_N(s)\, G_t(x-t, s, x+t)\, ds. \tag{7.13}$$

Так как в силу четности функции $g(t)$ первый интеграл правой части равен

$$\frac{1}{2}\int_{x-h}^{x+h} g(s-x) f_N(s) R^{1/4}(s) R^{-1/4}(x)\, ds,$$

то, поменяв при фиксированном $x \in [b_1, b_2]$ по теореме Фубини порядок интегрирования в остальных интегралах, получим

$$\int_{b_1}^{b_2} f(s) R^{1/2}(s) \Big[\int_{-N}^{N} C_g(\sqrt{\lambda})\, d_\lambda \Theta(x, s, \lambda)\Big] ds =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{x-h}^{x+h} g(s-x) f_N(s) R^{1/4}(s) R^{-1/4}(x)\, ds +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{x-h}^{x+h} f_N(s)\, ds \int_{|x-s|}^{h} g(t)\, G_t(x-t, s, x+t)\, dt.$$

Преобразование Фурье $C_g(\sqrt{\lambda})$ бесконечно дифференцируемой функции $g(t)$ убывает быстрее любой отрицательной степени λ, поэтому в силу леммы 7.1 внутренний интеграл левой части написанного равенства сходится для всех значений $s \in [b_1, b_2]$, оставаясь равномерно ограниченным. Следовательно, здесь можно по теореме Лебега перейти к пределу при $N \to \infty$. С другой стороны, последовательность функций $\{f_N(x)\}$ сходится, согласно (7.12), в метрике $L^2_{\{r\}}(a_1, a_2)$ к $f(x)$. Выполнив в последнем соотношении предельный переход при $N \to \infty$, получим:

$$\int_{b_1}^{b_2} f(s) R^{1/2}(s) \left[\int_{-\infty}^{\infty} C_g(\sqrt{\lambda})\, d_\lambda \Theta(x, s, \lambda) \right] ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x-h}^{x+h} g(s-x) f(s) R^{1/4}(s) R^{-1/4}(x)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x-h}^{x+h} f(s)\, ds \int_{|x-s|}^{h} g(t) G_t(x-t, s, x+t)\, dt. \qquad (7.14)$$

Функция

$$\varphi(x, s) = \int_{|x-s|}^{h} g(t) G_t(x-t, s, x+t)\, dt,$$

стоящая в квадратных скобках правой части равенства (7.14), непрерывна по обоим аргументам $x, s \in [b_1, b_2]$.

В этом можно убедиться, если произвести интегрирование по частям и учесть, что функция $G(x-t, s, x+t)$, согласно теореме 3.1, дифференцируема по всем аргументам.

Из формулы (7.14) в силу произвольности функции $f(s)$ и непрерывности подынтегральных функций следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Cg}(\sqrt{\lambda})\, d_\lambda \Theta(x, s, \lambda) =$$

$$= \frac{1}{2} g(x-s) R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s) + \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^{h} g(t) R^{-1/2}(s) G_t(x-t, s, x+t)\, dt, \qquad (7.15)$$

причем $x, s \in [b_1, b_2]$ и $h < \min\{b_2 - a_1,\ a_2 - b_2\}$.

Для завершения доказательства леммы нам остается заметить, что

$$\frac{1}{2} g(x-s) R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} C_g(\sqrt{\lambda}) \cos\sqrt{\lambda}(x-s) R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s)\, d\sqrt{\lambda},$$

а в силу леммы 7.1

$$\int_{-\infty}^{+0} C_g(\sqrt{\lambda})\, d_\lambda \Theta(x, s, \lambda) = \int_0^h g(t) \Phi(t, x, s)\, dt.$$

Это позволяет переписать равенство (7.15) так:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{Cg}(\sqrt{\lambda})\, d_\lambda \left[\Theta(x, s, \lambda) - \frac{1}{\pi} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-s)}{x-s} R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^{h} g(t) R^{-1/2}(s) G_t(x-t, s, x+t)\, dt - \int_0^h g(t) \Phi(t, x, s)\, dt.$$

Если в формуле (7.13) перейти к пределу при $N \to \infty$ не меняя порядка интегрирования, то, используя предельное соотношение, можно доказать теорему о равносходимости разложения по собственным функциям оператора L_ω с разложением в обычный интеграл Фурье. На доказательстве этой теоремы мы останавливаться не будем, так как оно аналогично доказательству теоремы 6.1.

Теорема 7.1. Пусть $\Theta(x, s, \lambda)$ — спектральная функция оператора L_ω. При каждом фиксированном $a_1 < b_1 \leqslant x = s \leqslant b_2 < a_2$ и любом $\delta < h$, где $h < \min\{b_1 - a_1, a_2 - b_2\}$:

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\left|\Theta(x, x, \lambda) - \Theta(x, x, -\infty) - \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{R(x)}} + \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{t}\,\frac{R'\left(x+\frac{t}{2}\right) - R'\left(x-\frac{t}{2}\right)}{8R^{3/2}(x)}\,dt\right| \leqslant \frac{2^5\cdot 10^7}{\pi h} R^{-1/2}(x).$$

Доказательство. Из предыдущей леммы имеем при $x = s$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_g(\mu)\, d\beta(x, x, \mu) = \int_0^h g(t)\, Q(t, x, x)\, dt, \tag{7.16}$$

где нечетная функция $\beta(x, x, \mu)$ при $\mu > 0$ определена формулой:

$$\beta(x, x, \mu) = \Theta(x, x, \mu^2) - \frac{1}{\pi}\frac{\mu}{R^{1/2}(x)} \tag{7.17}$$

и

$$Q(t, x, x) = R^{-1/2}(x)\, G_t(x - t, x, x + t) - 2\Phi(t, x, x). \tag{7.18}$$

Формулы (7.16) и (7.17) показывают, что функция $\beta(x, x, \mu)$ при каждом фиксированном $x \in [b_1, b_2]$ удовлетворяет всем условиям следствия из теоремы 4.1 при

$$\sigma(\mu) = \Theta(x, x, \mu^2); \quad \rho(\mu) = \frac{1}{\pi}\frac{\mu}{R^{1/2}(x)}; \quad G(t) = Q(t, x, x).$$

При этом

$$\rho^*\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1}{\pi h R^{1/2}(x)}.$$

Поэтому, в силу нечетности функции $\beta(x, x, \mu)$, при любых $\delta < h$ получим

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\left|\beta(x, x, \mu) - \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin Nt}{t} Q(t, x, x)\, dt\right| \leqslant \frac{2^5\cdot 10^7}{\pi h R^{1/2}(x)}. \tag{7.19}$$

Согласно (7.18) и лемме 3.5 имеем

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin Nt}{t} Q(t, x, x)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin Nt}{t}\,\frac{R'\left(x+\frac{t}{2}\right) - R'\left(x-\frac{t}{2}\right)}{8R^{3/2}(x)}\, dt + \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin Nt}{t}\left[2\Phi(t, x, x) - \frac{N(x, t)}{R^{1/2}(x)}\right] dt, \tag{7.20}$$

где функция $N(x, t)$ разложима по t в ряд Фурье в точке $t = 0$ и сумма ее ряда Фурье в этой точке равна нулю. Из леммы 7.1 следует, что функция $\Phi(t, x, x)$ также разложима в ряд Фурье по t в точке $t = 0$, и сумма ее ряда Фурье в этой точке равна

$$\Phi(0, x, x) = -\Theta(x, x, -\infty).$$

Отсюда мы заключаем, что в силу леммы 4.2 (3)

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin Nt}{t}\left[2\Phi(t,x,x)-\frac{N(x,t)}{R^{1/2}(x)}\right]dt=-\Theta(x,x,-\infty).$$

Поэтому, используя (7.17), (7.19), (7.20) и переходя к переменной λ, получим

$$\varlimsup_{\lambda\to\infty}\left|\Theta(x,x,\lambda)-\Theta(x,x,-\infty)-\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{R(x)}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{t}\,\frac{R'\left(x+\frac{t}{2}\right)-R'\left(x-\frac{t}{2}\right)}{8R^{3/2}(x)}\,dt\right|\leqslant\frac{2^5\cdot 10^7}{\pi hR^{1/2}(x)}.$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 5.1, накладывая различные ограничения на поведение функции $R'(x)$ в точке x, в соответствии с леммой 4.2, получим следующие следствия.

Следствие 1. Если функция $R'(x)$ подчинена только условию 1, то при $\lambda\to\infty$

$$\Theta(x,x,\lambda)-\Theta(x,x,-\infty)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{R(x)}}+O(\ln\lambda).$$

Следствие 2. Если функция $R'(x)$ непрерывна в точке x, то при $\lambda\to\infty$

$$\Theta(x,x,\lambda)-\Theta(x,x,-\infty)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{R(x)}}+o(\ln\lambda).$$

Только сделав дальнейшие предположения о свойствах функции $R'(x)$ в точке x, можно уточнить полученные формулы.

Следствие 3. Если функция $R'(x)$ разложима в ряд Фурье в точке x, то

$$\varlimsup_{\lambda\to\infty}\left|\Theta(x,x,\lambda)-\Theta(x,x,-\infty)-\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{R(x)}}+\frac{1}{16}\,\frac{R'_{x+0}-R'_{x-0}}{R^{3/2}(x)}\right|\leqslant\frac{2^5\cdot 10^7}{\pi hR^{1/2}(x)},$$

где

$$R'_{x\pm 0}=\lim_{N\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\delta\frac{\sin Nt}{t}R'(x\pm t)\,dt.$$

Полученная формула учитывает возможное различие значений в точке x разложений в ряды Фурье функции $R'(x)$ на интервалах слева и справа от точки x.

В случае, если $-a_1=a_2=\infty$, последнее неравенство может быть улучшено переходом к пределу при $h\to\infty$, что даст:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left[\Theta(x,x,\lambda)-\Theta(x,x,-\infty)-\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{R(x)}}+\frac{1}{16}\,\frac{R'_{x+0}-R'_{x-0}}{R^{3/2}(x)}\right]=0.$$

Во всех найденных формулах можно снова вернуться к переменной y. Написанное равенство, например, примет такой вид:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left[\Theta_1(y,y,\lambda)-\Theta_1(y,y,-\infty)-\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{p(y)}}+\frac{1}{16}\,\frac{p'_{y+0}-p'_{y-0}}{p(y)}\right]=0.$$

Результаты приведенных следствий ясно характеризуют влияние дифференциальных свойств функции $R'(x)$ (или $p'(y)$) на точность асимптотических формул и показывают, как проявляются скачки этих функций.

При этом следует учесть, что если функция $R'(x)$ имеет ограниченную вариацию в некоторой окрестности точки x, то

$$R'_{x+0} - R'_{x-0} = R'(x+0) - R'(x-0).$$

Перейдем к нахождению асимптотики спектральной функции $\Theta(x, s, \lambda)$ при $x \neq s$.

Лемма 7.3. Пусть функция $Q(t, x, s)$ имеет то же значение, что и в предыдущей лемме, и x, s — различные фиксированные точки сегмента $[b_1, b_2]$.

Тогда функция $Q(t, x, s)$ разложима в ряд Фурье по t и ее ряд Фурье сходится в точке $t=0$ к значению

$$Q(0, x, s) = 2\Theta(x, s, -\infty).$$

Доказательство. Так как $x \neq s$, то из определения функции $Q(t, x, s)$ следует, что при $0 \leqslant t < |x-s|$

$$Q(t, x, s) = -2\Phi(t, x, s).$$

С другой стороны, функция $\Phi(t, x, s)$, как это можно заключить из леммы 7.1, разложима в ряд Фурье по t, причем ее ряд Фурье в точке $t=0$ сходится к значению

$$\Phi(0, x, s) = -\Theta(x, s, -\infty). \tag{7.21}$$

Отсюда и следует лемма.

Теорема 7.2. Для спектральной функции $\Theta(x, s, \lambda)$ при каждых фиксированных $a_1 < b_1 \leqslant x \neq s \leqslant b_2 < a_2$ справедлива асимптотическая формула:

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}} \left| \Theta(x, s, \lambda) - \Theta(x, s, -\infty) - \frac{1}{\pi} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-s)}{x-s} R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2^5 \cdot 10^7}{\pi h} R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s),$$

где

$$h < \min\{b_1 - a_1, a_2 - b_2\}.$$

Доказательство. Для применения тауберовой теоремы 4.1 к результату леммы 7.2 следует оценить $\bigvee\limits_{l}^{l+\frac{1}{h}} \{\beta(x, s, \mu)\}$ при $l \to \infty$.

Согласно определению функции $\beta(x, s, \mu)$ при любом $l > 0$ имеем:

$$\bigvee_{l}^{l+\frac{1}{h}} \{\beta(x, s, \mu)\} \leqslant \bigvee_{l}^{l+\frac{1}{h}} \{\Theta(x, s, \mu^2)\} +$$
$$+ \bigvee_{l}^{l+\frac{1}{h}} \left\{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin\mu(x-s)}{x-s} R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s)\right\} = \mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2.$$

Очевидно, что

$$V_2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{l}^{l+\frac{1}{h}} |\cos \mu (x-s)| R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s) \, d\mu \leqslant \frac{R^{-1/4}(x)^{-1/4}(s)}{\pi h}.$$

Для оценки V_1 используем неравенство (7.7):

$$V_1 \leqslant \int\limits_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2} |d_\lambda \Theta(x, s, \lambda)| \leqslant \Big[\int\limits_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2} d_\lambda \Theta(x, x, \lambda) \cdot \int\limits_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2} d_\lambda \Theta(s, s, \lambda) \Big]^{1/2} =$$

$$= \Big[\bigvee_{l}^{l+\frac{1}{h}} \{\Theta(x, x, \mu^2)\} \cdot \bigvee_{l}^{l+\frac{1}{h}} \{\Theta(s, s, \mu^2)\} \Big]^{1/2}.$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{l\to\infty}} \bigvee_{l}^{l+\frac{1}{h}} \{\beta(x, s, \mu)\} \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{l\to\infty}} \Big[\bigvee_{l}^{l+\frac{1}{h}} \{\Theta(x, x, \mu^2)\} \cdot \bigvee_{l}^{l+\frac{1}{h}} \{\Theta(s, s, \mu^2)\} \Big]^{1/2} + \frac{R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s)}{\pi h}.$$

В то же время из формул (7.16) и (7.17) следует, что монотонные функции $\Theta(x, x, \mu^2)$ и $\frac{1}{\pi} \frac{\mu}{R^{1/2}(x)}$ удовлетворяют всем условиям леммы 4.1. Поэтому

$$\overline{\lim_{l\to\infty}} \bigvee_{l}^{l+\frac{1}{h}} \{\Theta(x, x, \mu^2)\} \leqslant 300 \frac{R^{-1/2}(x)}{\pi h},$$

что окончательно дает:

$$\overline{\lim_{l\to\infty}} \bigvee_{l}^{l+\frac{1}{h}} \{\beta(x, s, \mu)\} \leqslant 320 \frac{R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s)}{\pi h}. \qquad (7.22)$$

Из предыдущего и леммы 7.2 вытекает, что функции $\beta(x, s, \mu)$ и $Q(t\ x, s)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 4.1. Поэтому, используя нечетность функции $\beta(x, s, \mu)$, имеем

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \left| \beta(x, s, N) - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\delta \frac{\sin Nt}{t} Q(t, x, s) \, dt \right| \leqslant \frac{2^5 \cdot 10^7}{\pi h} R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s),$$

где

$$\delta < h < \min\{b_1 - a_1,\ a_2 - b_2\}.$$

В то же время в силу лемм 4.2 (3) и 7.3

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\delta \frac{\sin Nt}{t} Q(t, x, s) \, dt = \Theta(x, s, -\infty).$$

Вспоминая определение функции $\beta(x, s, \mu)$ и используя последнее равенство, окончательно получим

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \left| \Theta(x, s, N^2) - \Theta(x, s, -\infty) - \frac{1}{\pi} \frac{\sin N(x-s)}{x-s} R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^5 \cdot 10^7}{\pi h} R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s).$$

Следствие. Если $-a_1 = a_2 = \infty$, то при каждом фиксированном $a_1 < b_1 \leqslant x \neq s \leqslant b_2 < a_2$

$$\lim_{\lambda \to \infty}\left[\Theta(x, s, \lambda) - \Theta(x, s, -\infty) - \frac{1}{\pi}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-s)}{x-s}R^{-1/4}(x)R^{-1/4}(s)\right] = 0.$$

Сопоставление асимптотических формул для спектральной функции $\Theta(x, s, \lambda)$, полученных в теоремах 7.1 $(s = x)$ и 7.2 $(s \neq x)$, показывает, что первая из них не совпадает с результатом предельного перехода $s \to x$ во второй. Для выяснения причины указанного несовпадения мы найдем такую асимптотическую формулу для спектральной функции $\Theta(x, s, \lambda)$ $(x, s \in [b_1, b_2])$, из которой при $s = x$ получалась бы асимптотическая формула теоремы 7.1, а при $s \neq x$ — асимптотическая формула теоремы 7.2.

С этой целью заметим, что неравенство (7.22) для $\overset{l+\frac{1}{h}}{\underset{l}{V}}\{\beta(x, s, \mu)\}$ верно при всех $x, s \in [b_1, b_2] \subset (a_1, a_2)$. Поэтому, как и при доказательстве теоремы 7.2, будем иметь:

$$\overline{\lim_{N \to \infty}}\left|\beta(x, s, N) - \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin Nt}{t}[Q(t, x, s)\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2^5 \cdot 10^7 \pi^{-1} h^{-1} R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s), \qquad (7.23)$$

где $x, s \in [b_1, b_2] \subset (a_1, a_2)$ и $h < \min\{b_1 - a_1, a_2 - b_2\}$. Однако здесь уже $|x - s| < \delta < h$, так как если $0 < \delta < |x - s|$, то

$$Q(t, x, s) = -2\Phi(t, x, s)$$

и асимптотическая формула теоремы 7.1 для спектральной функции $\Theta(x, x, \lambda)$ из (7.23) уже не может быть получена.

Согласно определению функции $Q(t, x, s)$ имеем:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin Nt}{t}Q(t, x, s)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{|x-s|}^\delta \frac{\sin Nt}{t}G_t(x-t, s, x+t)R^{-1/2}(s)\,dt -$$
$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin Nt}{t}\Phi(t, x, s)\,dt.$$

Используя (7.21), найдем

$$\lim_{N \to \infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin Nt}{t}\Phi(t, x, s)\,dt = -\Theta(x, s, -\infty) \quad (x, s \in [b_1, b_2]).$$

Поэтому, заменяя функцию $\beta(x, s, \mu)$ ее значением, вместо (7.23) получим

$$\overline{\lim_{\lambda \to \infty}}\left|\Theta(x, s, \lambda) - \Theta(x, s, -\infty) - \frac{1}{\pi}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-s)}{x-s}R^{-1/4}(x)R^{-1/4}(s), -\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\pi}\int_{|x-s|}^\delta \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{t}G_t(x-t, s, x+t)R^{-1/2}(s)\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2^5 \cdot 10^7 \pi^{-1} R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s). \qquad (7.24)$$

Изучим функцию

$$D(x, s, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|x-s|}^{\delta} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,t}{t} G_t(x-t, s, x+t) R^{-1/2}(s)\, dt.$$

Если $s = x$, то

$$D(x, x, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,t}{t} G_t(x-t, x, x+t) R^{-1/2}(x)\, dt.$$

Поэтому согласно лемме 3.5, как и при доказательстве теоремы 7.1, найдем:

$$\lim_{\lambda\to\infty} D(x, x, \lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,t}{t} \frac{R'\left(x+\frac{t}{2}\right) - R'\left(x-\frac{t}{2}\right)}{8R^{3/2}(x)}\, dt. \tag{7.25}$$

Если $s \neq x$, то, как это следует из леммы 3.1, функция $\frac{G_t(x-t,\ s,\ x+t)}{t}$ интегрируема в интервале $(|x-s|, \delta)$. Следовательно, по теореме Римана — Лебега

$$\lim_{\lambda\to\infty} D(x, s, \lambda) = 0. \tag{7.26}$$

В то же время

$$\lim_{s\to x} \frac{1}{\pi} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-s)}{x-s} R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{R(x)}}. \tag{7.27}$$

Равенства (7.25), (7.26), (7.27) показывают, что асимптотическая формула (7.24) при $s = x$ и $s \neq x$ совпадает с асимптотическими формулами теорем 7.1 и 7.2.

Доопределив при $0 \leqslant t < |x-s|$ функцию $G_t(x-t,\ s,\ x+t)$ равенством

$$G_t(x-t, s, x+t) = 0 \quad (0 \leqslant t < |x-s|), \tag{7.28}$$

получим

$$D(x, s, \lambda) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,t}{t} \frac{G_t(x-t, s, x+t)}{2R^{1/2}(s)}\, dt.$$

Теперь ясно, что функция $D(x, s, \lambda)$ является интегралом Дирихле и при $\lambda\to\infty$ характеризует поведение усеченной суммы ряда Фурье в точке $t = 0$ функции $\frac{1}{2} G_t(x-t, s, x+t) R^{-1/2}(s)$.

По принципу локализации

$$\lim_{\lambda\to\infty} D(x, s, \lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\varepsilon} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,t}{t} \frac{G_t(x-t, s, x+t)}{2R^{1/2}(s)}\, dt,$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Если $s \neq x$, то, выбрав $0 < \varepsilon < |x-s|$, согласно (7.28) и лемме 4.2(3), снова получим (7.26).

Если же $s = x$, то поведение при $\lambda \to \infty$ функции $D(x, s, \lambda)$ существенно зависит от значений функции $\frac{1}{2} G_t(x - t, s, x + t) R^{-1/2}(s)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$.

Таким образом, структура функции $D(x, s, \lambda)$ и равенство (7.28) являются причиной того, что асимптотическая формула для функции $\Theta(x, x, \lambda)$ (теорема 7.1) не совпадает с асимптотической формулой для функции $\Theta(x, s, \lambda)$ (теорема 7.2) при $s = x$.

Формулу (7.24) можно привести к более простому виду. Действительно, рассмотрим функцию

$$D_0(x, s, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|x-s|}^{\delta} \frac{\sin \sqrt{\lambda}\, t}{t} \left[\frac{G_t(x - t, s, x + t)}{R^{1/2}(s)} - \frac{R'\left(x + \frac{t}{2}\right) - R'\left(x - \frac{t}{2}\right)}{8R^{3/2}(x)} \right] dt.$$

Если $s - x$, то по теореме Римана — Лебега

$$\lim_{\lambda \to \infty} D_0(x, s, \lambda) = 0.$$

Если $s = x$, то согласно леммам 3.5 и 4.2(3)

$$\lim_{\lambda \to \infty} D_0(x, x, \lambda) = 0.$$

Из этих равенств и формулы (7.24) вытекает следующая теорема.

Теорема 7.3. Для спектральной функции $\Theta(x, s, \lambda)$ при всех $s, x \in [b_1, b_2] \subset (a_1, a_2)$ и любых $|x - s| < \delta < h$ имеет место асимптотическая формула

$$\overline{\lim_{\lambda \to \infty}} \left| \Theta(x, s, \lambda) - \Theta(x, s, -\infty) - \frac{1}{\pi} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x - s)}{x - s} R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \int\limits_{|x-s|}^{\delta} \frac{\sin \sqrt{\lambda}\, t}{t} \frac{R'\left(x + \frac{t}{2}\right) - R'\left(x - \frac{t}{2}\right)}{8R^{3/2}(x)} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^5 \cdot 10^7 \pi^{-1} h^{-1} R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s),$$

где

$$h < \min\{b_1 - a_1,\ a_2 - b_2\}.$$

Следствие. Если $-a_1 = a_2 = \infty$, то

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left[\Theta(x, s, \lambda) - \Theta(x, s, -\infty) - \frac{1}{\pi} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x - s)}{x - s} R^{-1/4}(x) R^{-1/4}(s) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \int\limits_{|x-s|}^{\delta} \frac{\sin \sqrt{\lambda}\, t}{t} \frac{R'\left(x + \frac{t}{2}\right) - R'\left(x - \frac{t}{2}\right)}{8R^{3/2}(x)} dt \right] = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко. ДАН, 74, № 4, 657 (1950).
2. В. А. Марченко. Труды Московского математ. общ-ва, 1, 327 (1952).
3. В. А. Марченко. Изв. АН СССР, серия математ., 19, № 6 (1955).
4. Б. М. Левитан. Изв. АН СССР, серия математ., 17, 331 (1953).
5. Б. М. Левитан. Изв. АН СССР, серия математ., 19, 33 (1955).
6. И. С. Кац, ДАН СССР. 106, № 2 (1956).
7. А. Я. Повзнер. Математический сборник, 23 (65): 1, 1 (1948).
8. М. Г. Крейн. ДАН СССР, 97, № 1, 21 (1954).
9. М. А. Наймарк. Линейные дифференциальные операторы, М., 1954.
10. Ю. М. Березанский. ДАН, т. XCIII, № 4, 1953, 591—594.