УДК 517.53

*А. Э. ЕРЕМЕНКО, М. Л. СОДИН*

# О МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЯХ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА С МАКСИМАЛЬНОЙ СУММОЙ ДЕФЕКТОВ

1. Введение. В работе [1] Д. Дрейсин доказал такую теорему: *пусть $f$ — мероморфная функция конечного порядка $\rho$ со свойством*

$$\sum_{a\in \overline{C}} \delta(a, f) = 2.$$

*Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $2\rho$ — *натуральное число* $\geqslant 2$;
2) $\delta(a, f) = p(a)/\rho$, $a \in \overline{C}$, *где* $p(a)$ — *целые неотрицательные числа. (Отсюда вытекает, что количество дефектных значений не превосходит* $2\rho$);
3) *все дефектные значения являются асимптотическими.*

Эта теорема доказывает справедливость гипотезы Ф. Неванлинны, высказанной в 1929 г. Доказательство теоремы Дрейсина чрезвычайно сложно и использует кроме теории Неванлинны широкий набор разнообразных средств, таких как альфорсова теория накрывающих поверхностей, квазиконформные отображения и т. д. В работе [2] один из авторов предложил более короткое доказательство, основанное на теории Неванлинны и теории потенциала. При этом, кроме 1) — 3) были доказаны следующие утверждения:

4) $T(r, f) \sim r^\rho l_1(r)$, $r\to\infty$, *где* $l_1$ — *непрерывная функция со свойством* $l_1(2r) \sim l_1(r)$, $r\to\infty$;

$$\sum_{\{a:\delta(a,f)>0\}} \log \frac{1}{|(f-a)(re^{i\theta})|} = \pi r^{\rho} l_1(r) |\cos\rho(\theta - l_2(r))| + o(r^{\rho} l_1(r)),$$

*равномерно относительно* $\theta$ *при* $r \to \infty$, $re^{i\theta} \notin C_0$. Здесь $C_0$ — объединение кругов с центрами в точках $z_k$ и радиусами $r_k$ таких, что

$$\sum_{|z_k|<R} r_k = o(R), \ R \to \infty,$$

а $l_2$ — непрерывная функция со свойством $l_2(cr) - l_2(r) \to 0$, при $r \to \infty$ равномерно относительно $c \in [1, 2]$.

Мы покажем, что при доказательстве утверждений 1)—5) можно обойтись одной только теорией потенциала, причем получится более общий результат.

В 1929 г. Р. Неванлинна высказал предположение, что соотношение дефектов

$$\sum_{a \in C} \delta(a, f) \leqslant 2$$

остается справедливым, если постоянные $a$ заменить мероморфными функциями $a(z)$ со свойством $T(r, a) = o(T(r, f))$. При этом $\delta(a, f)$ означает $\delta(0, f - a)$. Эта гипотеза была недавно доказана Ч. Осгудом [3]. Затем доказательство существенно упростил Н. Штейнмец

Возникает естественный вопрос об обобщении теоремы Дрейсина на случай «малых» мероморфных функций. Внимание авторов было привлечено к этому вопросу во время визита в Харьков Янга Ло в 1988 г. Справедлива следующая

**Теорема 1.** *Пусть $f$ — мероморфная функция конечного нижнего порядка, $S$ — не более, чем счетное множество мероморфных функций $a$ со свойством*

$$T(r, a) = o(T(r, f)), \ r \to \infty. \tag{1.1}$$

*Если*

$$\sum_{a \in S} \delta(a, f) = 2, \tag{1.2}$$

*то справедливы утверждения 1)—5). При этом 3) означает, что найдется кривая $\Gamma$, стремящаяся к $\infty$, такая, что $f(z) - a(z) \to 0$ при $z \to \infty$, $z \in \Gamma$.*

Для случая целых функций теорема 1 доказана в [5].

Теорема Осгуда — Штейнмеца не будет использоваться при доказательстве теоремы 1. Наши рассуждения дают новое доказательство этой теоремы для функций $f$ конечного нижнего порядка*. Существенно новым элементом является следующая теорема 2, заменяющая

---

* Метод применим и к произвольным мероморфным функциям. Он позволяет получить [1] основную теорему с малыми функциями вместо констант, однако, в случае бесконечного порядка требуется немного более сильное условие малости, чем (1.1). См. [6].

II основную теорему и ее обобщение, принадлежащее Ч. Осгуду и Н. Штейнмецу.

Прежде чем сформулировать теорему 2, напомним некоторые обозначения [2]. Разность двух субгармонических функций называется $\delta$-субгармонической функцией. Она, вообще говоря, определена лишь квазивсюду, т. е. вне некоторого множества емкости нуль. Для $\delta$-субгармонической функции $v$ всегда полагаем

$$v(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta$$

во всех точках $z$, в которых этот предел существует. Естественное отношение порядка превращает линейное пространство $\delta$-субгармонических функций в решетку (верхняя огибающая $u \bigvee v = (u - v)^+ + v$ и нижняя огибающая $u \bigwedge v = u - (u - v)^+$ двух $\delta$-субгармонических функций тоже являются $\delta$-субгармоническими функциями). Для каждой $\delta$-субгармонической функции определен ее риссовский заряд. На пространстве зарядов также есть естественное отношение порядка: $\mu_1 \geqslant \mu_2$, если $\mu_1 - \mu_2$ — (неотрицательная) мера. Пространство зарядов с этим отношением порядка является решеткой: $\mu_1 \bigvee \mu_2 = (\mu_1 - \mu_2)^+ + \mu_2$, где $\mu^+$ — положительная часть в разложении Жордана заряда $\mu$.

**Теорема 2.** *Пусть $\{u_k\}_{k=1}^{\omega}$, $\omega \leqslant \infty$ — неотрицательные $\delta$-субгармонические функции со свойством*

$$\sum_{k=1}^{\omega} u_k = \bigvee_{k=1}^{\omega} u_k. \tag{1.3}$$

*Предположим, что риссовские заряды $\mu_k$ функций $u_k$ равномерно ограничены: $\mu_k \leqslant \mu$ для некоторой меры $\mu$ и всех $k$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\omega} \mu_k \leqslant 2 \bigvee_{k=1}^{\omega} \mu_k. \tag{1.4}$$

План дальнейшего изложения таков. В п. 2 мы докажем теорему 1, используя теорему 2 и Основную лемму из [2, часть II]. В п. 3 будет доказана теорема 2.

2. Доказательство теоремы 1. Не уменьшая общности, считаем, что $f(0) \neq \infty$ и

$$N(r, f) \sim T(r, f),\ r \to \infty, \tag{2.1}$$

откуда

$$m(r, f) = o(T(r, f)),\ r \to \infty. \tag{2.2}$$

Это означает, что $\infty$ не является исключительным значением в смысле Валирона. Положим $T(r) = T(r, f)$ и определим порядок $\rho^*$ и нижний порядок $\rho_*$ в смысле Пойа:

$$\rho^* = \sup\left\{p : \limsup_{r, B \to \infty} \frac{T(Br)}{B^p T(r)} = \infty\right\}; \tag{2.3}$$

$$\rho_* = \inf\left\{p : \liminf_{r, B \to \infty} \frac{T(Br)}{B^p T(r)} = 0\right\}. \tag{2.4}$$

праведливы **неравенства** $\rho_* \leqslant \rho \leqslant \rho^*$. **Здесь и далее** $\rho$ **означает** жний порядок функции $f$. Далее мы увидим, что он совпадает порядком. Из условия теоремы следует, что $\rho_* < \infty$. Для любого $[\rho_*, \rho^*]$ существует последовательность $r_j \to \infty$ пиков Пойа порядка $\lambda$ [7]. Это означает, что для некоторой последовательности $\to 0$ выполняется

$$T(rr_j) \leqslant (1+\varepsilon_j) r^\lambda T(r_j), \ \varepsilon_j \leqslant r \leqslant \varepsilon_j^{-1}. \tag{2.5}$$

фиксируем произвольное $\lambda \in [\rho_*, \rho^*]$ и последовательность $r_j$ со ойством (2.5).

Рассмотрим $\delta$-субгармонические функции

$$v_a = \log \frac{1}{|f-a|}, \ a \in S$$

риссовскими зарядами $\nu_a$. Определим операторы $A_j$, действующие функцию $v$ по правилу $A_j v(z) = v(r_j z)/T(r_j)$ и на заряд $\nu$ — по равилу $A_j \nu(E) = \nu(r_j E)/T(r_j)$, $E \subset \boldsymbol{C}$. Очевидно, что так определенные операторы коммутируют с оператором Лапласа, т. е. функция имеет заряд $A_j \nu$. Согласно теореме Андерсона — Бернстейна [8] условия (2.5) вытекает, что семейства $\delta$-субгармонических функций $\{v_a\}_{j=1}^{\infty}$ относительно компактны в следующем смысле. Можно рать подпоследовательность пиков Пойа (которую мы снова обоим через $r_j$) так, чтобы выполнялось

$$A_j v_a \to u_a \ \textbf{(2.6)}; \ A_j \nu_a \to \mu_a, \ a \in S, \ j \to \infty \ \textbf{(2.7)},$$

$u_a$ — некоторые $\delta$-субгармонические функции с риссовскими зарядами $\mu_a$. Сходимость в (2.6) имеет место в $L^1_{\text{loc}}$, т. е. в среднем площади на каждом компакте, а также в среднем по угловой ре на каждой окружности. Сходимость зарядов в (2.7) слабая.

Из (2.2) следует, что

$$u_a \geqslant 0, \ a \in S. \tag{2.8}$$

кажем, что выполняется (1.3). Для любых комплексных чисел $a$, $b$ справедливо неравенство

$$|x-a| \cdot |x-b| \geqslant \frac{|a-b|}{2} \min\{|x-a|, |x-b|\}.$$

сюда следует, что при $a \neq b$; $a$, $b \in S$ выполняется

$$v_a + v_b \leqslant v_a \vee v_b + \log|a-b|^{-1} + \log 2.$$

именяя оператор $A_j$ и устремляя $j$ к $\infty$, получаем с учетом (1.1), что $+ u_b \leqslant u_a \vee u_b$ при $a \neq b$. Это значит, что в каждой точке не лее, чем одна из функций $u_a$ отлична от нуля. Таким образом, нкции $u_a$ удовлетворяют условию (1.3) т. е.

$$\sum_{a \in S} u_a = \bigvee_{a \in S} u_a. \tag{2.9}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta})\, d\theta = \lim_{j \to \infty} \frac{m(rr_j, 0, f-a)}{T(r_j)}. \tag{2.10}$$

Отсюда и из (2.5) вытекает

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta})\,d\theta \leqslant r^{\lambda},\ 0 \leqslant r < \infty, \tag{2.11}$$

в частности, с учетом (2.8) получаем

$$u_a(0) = 0,\ a \in S. \tag{2.12}$$

Для любого борелевского $\sigma$-конечного заряда $\alpha$ в плоскости полагаем $n(r,\ \alpha) = \alpha(\{z;\ |z| \leqslant r\})$,

$$N(r,\ \alpha) = \int_0^r n(t,\ \alpha)\frac{dt}{t},$$

если интеграл сходится абсолютно. Пусть $\nu(E)$ — количество полюсов функции $f$ с учетом кратности на множестве $E \subset \boldsymbol{C}$. Тогда $\nu$ — (неотрицательная) боролевская $\sigma$-конечная мера.

$$N(r,\ \nu) = N(r,\ f) \sim T(r),\ r \to \infty. \tag{2.13}$$

В силу (2.5) выполняется

$$N(rr_j,\ \nu) \leqslant 2r^{\lambda}\,T(r_j),\ \varepsilon_j \leqslant r \leqslant \varepsilon_j^{-1}, \tag{2.14}$$

откуда

$$n(rr_j,\ \nu) \leqslant 2e^{\lambda}r^{\lambda}\,T(r_j),\ \varepsilon_j/e \leqslant r \leqslant (e\varepsilon_j)^{-1}. \tag{2.15}$$

Условие (2.15) означает, что семейство мер $\{A_j\nu\}$ равномерно ограничено на компактах, поэтому, выбирая, если нужно подпоследовательность пиков Пойа, можно считать, что

$$A_j\nu \to \mu \geqslant 0. \tag{2.16}$$

Из (2.15) следует также

$$n(r,\ \mu) \leqslant 2e^{\lambda}r^{\lambda},\ 0 \leqslant r < \infty. \tag{2.17}$$

Покажем, что

$$N(r, A_j\nu) \to N(r,\ \mu),\ j \to \infty,\ 0 \leqslant r < \infty. \tag{2.18}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Имеем

$$|N(r,\ A_j\,\nu) - N(r,\ \mu)| \leqslant \int_0^{\varepsilon}\frac{n(t,\ \mu)}{t}\,dt + \int_0^{\varepsilon}\frac{n(t,\ A_j\,\nu)}{t}\,dt + $$

$$+\left|\int_{\varepsilon}^{r}(n(t,\ A_j\,\nu) - n(t,\ \mu))\frac{dt}{t}\right|.$$

Первое слагаемое не превосходит $2e^{\lambda}\lambda^{-1}\varepsilon^{\lambda}$ в силу (2.17), второе слагаемое равно

$$N(\varepsilon,\ A_j\nu) = N(r_j\,\varepsilon,\ \nu)/T(r_j) \leqslant 2\varepsilon^{\lambda}$$

в силу (2.14), а третье слагаемое стремится к нулю при $j \to \infty$ в силу слабой сходимости (2.16). Это доказывает соотношение (2.18).

Пусть теперь $\varkappa_a(E)$ — количество полюсов функции $a \in S$ (с учетом кратности) на множестве $E \subset \boldsymbol{C}$. Ясно, что

$$\nu_a \leqslant \nu + \varkappa_a, \ a \in S. \tag{2.19}$$

С другой стороны, из (1.1) и (2.5) легко следует, что $A_j \varkappa_a \to 0$ при $j \to \infty$. Применяя оператор $A_j$ к неравенству (2.19) и переходя к пределу при $j \to \infty$, получим, учитывая (2.7) и (2.16), что $\mu_a \leqslant \mu$. Поскольку выполняется (2.9), то применима теорема 2, и мы получаем

$$\sum_{a \in S} \mu_a \leqslant 2 \bigvee_{a \in S} \mu_a \leqslant 2\mu. \tag{2.20}$$

Используем теперь условие (1.2). Зафиксируем произвольно малое $\varepsilon > 0$ и выберем конечное подмножество $S' \subset S$ такое, что

$$\sum_{a \in S'} \delta(a, f) \geqslant 2 - \varepsilon.$$

Имеем, учитывая (2.13),

$$\sum_{a \in S'} m(rr_j, 0, f - a) \geqslant (2 - 2\varepsilon) T(rr_j) \geqslant (2 - 3\varepsilon) N(rr_j, \nu)$$

при фиксированном $r$ и $j \to \infty$. Деля на $T(r_j)$ и переходя к пределу с учетом (2.10) и (2.18), получаем

$$\sum_{a \in S'} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta})\, d\theta \geqslant (2 - 3\varepsilon) N(r, \mu).$$

С другой стороны, формула Иенсена и (2.12) дают

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta})\, d\theta = N(r, \mu_a).$$

Таким образом,

$$\sum_{a \in S} N(r, \mu_a) \geqslant \sum_{a \in S'} N(r, \mu_a) \geqslant (2 - 3\varepsilon) N(r, \mu).$$

Устремляя $\varepsilon$ к нулю, получаем

$$\sum_{a \in S} N(r, \mu_a) \geqslant 2N(r, \mu).$$

Вместе с (2.20) это дает

$$\sum_{a \in S} \mu_a = 2 \bigvee_{a \in S} \mu_a = 2\mu. \tag{2.21}$$

Покажем теперь, что все функции $u_a$ субгармонические и непрерывные. Прежде всего, функция $w = \sum_{a \in S} u_a$ субгармоническая, так как в силу (2.21) ее риссовский заряд равен $2\mu \geqslant 0$. Далее, из (2.21) следует, что $\mu \geqslant \mu_a$ для любого $a \in S$, поэтому функция $w_a = w - 2u_a$ субгармоническая. Легко видеть, что $u_a(z) > 0$ тогда и только тогда, когда $w_a(z) < 0$. Поскольку $w_a$ полунепрерывна сверху, множество $D_a = \{z : u_a(z) > 0\}$ открыто. Из принципа максимума, примененного к функции $w_a$ следует, что все связные компоненты множества $D_a$ односвязны. На этом множестве $D_a$ выполняется $u_b(z)\equiv 0$ для всех $b\neq a$, поэтому $\mu_b|_{D_a}=0$, и тогда из (2.21) следует, что $\mu_a|_{D_a}=0$. Таким образом, функция $u_a\geqslant 0$ гармоническая в $D_a$ и равна 0 вне $D_a$. Отсюда следует, что она субгармоническая и непрерывная.

Из субгармонической версии теоремы Данжуа — Карлемана — Альфорса [9] теперь вытекает, что множество $S$ конечно (и card $S\leqslant 2\lambda$). Более того, общее количество связных компонент множеств $D_a$ тоже конечно. Теперь применима следующая Основная лемма, доказанная в работе [2, часть II].

Лемма 1. *Пусть $D_a$ — попарно непересекающиеся открытые множества, состоящие из конечного числа односвязных областей, $u_a\not\equiv 0$ — неотрицательные субгармонические функции, носители которых содержатся в $D_a$, соответственно. Пусть риссовские меры $\mu_a$ этих функций удовлетворяют условию (2.21) и кроме того выполняется*

$$\sum_{a\in S}\int_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta})\,d\theta=\begin{cases}O(r^{\lambda+\varepsilon}), & r\to\infty;\\ O(r^{\lambda-\varepsilon}), & r\to 0,\end{cases}\tag{2.22}$$

*где* $0<\varepsilon<1/4$, card $S<\infty$. *Тогда существует натуральное число $n\geqslant 2$, $|n/2-\lambda|<1/2$ и число $\theta_0\in[0,2\pi]$, такие что*

$$w(re^{i\theta})\overset{\mathrm{def}}{=}\sum_{a\in S}u_a(re^{i\theta})=cr^{n/2}\left|\cos\frac{n}{2}(\theta-\theta_0)\right|.\tag{2.23}$$

Функции $u_a$ удовлетворяют условиям леммы 1 ((2.22) выполняется с $\varepsilon=0$ в силу (2.11)). Поэтому справедливо (2.23). Определим постоянную $c$. Для этого положим в (2.23) $r=1$ и проинтегрируем по $\theta$:

$$c=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} w(e^{i\theta})\,d\theta.$$

Далее применяя последовательно формулу Иенсена и соотношения (2.21), (2.18) и (2.13), получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(e^{i\theta})\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\sum_{a\in S}\int_0^{2\pi}u_a(e^{i\theta})\,d\theta=\sum_{a\in S}N(1,\ \mu_a)=$$
$$=2N(1,\ \mu)=2\lim_{j\to\infty}N(1,\ A_j\nu)=2\lim_{j\to\infty}\frac{N(r_j,\ \nu)}{T(r_j)}=2,$$

так что $c=\pi$.

Подведем итог. Обозначим через $W_n$ множество всех субгармонических функций вида

$$w(re^{i\theta},\ \theta_0)=\pi r^{n/2}\left|\cos\frac{n}{2}(\theta-\theta_0)\right|,\ 0\leqslant\theta_0<2\pi.$$

Мы доказали следующее

**Предложение 1.** *Пусть $f$ — мероморфная функция, удовлетворяющая условию (1.2), а последовательность $r_j$ обладает свойством (2.5). Тогда множество $S$ конечно и для некоторой подпоследовательности чисел $j$ выполняется (2.6), причем*

$$w = \sum_{a \in S} u_a \in W_n.$$

Из сравнения (2.23) и (2.11) следует, что $2\lambda = n \in N$. Поскольку возможные порядки $\lambda$ пиков Пойа заполняют отрезок $[\rho_*, \rho^*]$, то этот отрезок должен вырождаться в точку, т. е. $\rho_* = \rho^* = \rho = n/2$. Из определения чисел $\rho_*$ и $\rho^*$, (2.3), (2.4), получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $r_0 > 1$ и $t_0 > 1$, что

$$T(tr) \leqslant t^{\rho+\varepsilon} T(r), \ t > t_0, \ r > r_0; \tag{2.24}$$

$$T(tr) \leqslant t^{\rho-\varepsilon} T(r), \ t < t_0^{-1}, \ tr > r_0. \tag{2.25}$$

Этих свойств вполне достаточно, чтобы заменить (2.5) в доказательстве предложения 1.

**Предложение 2.** *Пусть $f$ — мероморфная функция, удовлетворяющая условиям (1.2), (2.24) и (2.25). Для любой последовательности $r_j \to \infty$ определим операторы $A_j$, как в начале доказательства. Тогда справедливо $A_j[\log|f-a|^{-1}] \to u_a$, где $w = \sum u_a \in W_n$.*

Это предложение 2 доказывается так же, как предложение 1 со следующими изменениями. Применимость теоремы Андерсона — Бернстейна для доказательства (2.6), (2.7) обеспечивается условиями (2.24), (2.25) вместо (2.5). Вместо (2.11) из (2.24), (2.25) получаем

$$\int_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta})\,d\theta \leqslant \begin{cases} r^{\rho+\varepsilon}, & r > t_0; \\ r^{\rho-\varepsilon}, & r < t_0^{-1}. \end{cases} \tag{2.26}$$

Рассуждение, доказывающее (2.16) и (2.18), подвергается очевидным изменениям. Например, роль соотношения (2.17) теперь играет неравенство

$$n(r, \mu) \leqslant \begin{cases} 2e^{\rho-\varepsilon} r^{\rho-\varepsilon}, & r < (t_0 e)^{-1}; \\ 2e^{\rho+\varepsilon} r^{\rho+\varepsilon}, & r > t_0. \end{cases}$$

Наконец, при применении леммы 1 пользуемся (2.26) вместо (2.11).

Из предложения 2 с учетом (2.13) вытекает, что

$$T(cr)/T(r) \sim N(cr, f)/N(r, f) \to c^{\rho}$$

при $r \to \infty$ равномерно относительно $c \in [1, 2]$. Полагая $T(r) = r^{\rho} l_1(r)$, получим $l_1(cr) \sim l_1(r)$, что доказывает утверждение 4 теоремы 1. Утверждение 1 доказано выше. Докажем утверждение 5, из которого следуют утверждения 2, 3.

Заметим, что $L^1_{\mathrm{loc}}$ — метризуемое пространство. Обозначим через dist какую-нибудь метрику в нем. Множество $W_n$ — компакт в $L^1_{\mathrm{loc}}$. Положим

$$v_t(z) = \frac{1}{t^{\rho} l_1(t)} \sum_{a \in S} \log \frac{1}{|(f-a)(tz)|}$$

и покажем, что

$$\operatorname{dist}(v_t,\ W_n) \to 0,\ t \to \infty. \tag{2.27}$$

Пусть (2.27) не выполняется. Тогда существует последовательность $t_j \to \infty$ такая, что $\operatorname{dist}(v_{t_j},\ W_n) \geqslant \varepsilon > 0$. Взяв эту последовательность в качестве $r_j$, применим предложение 2. Получим, что для некоторой подпоследовательности $v_{t_j} \to w$, где $w \in W_n$ — противоречие. Соотношение (2.27) доказано.

Пусть $w^t \in W_n$ — ближайший элемент к $v_t$. Покажем, что

$$\operatorname{dist}(w^t,\ w^{ct}) \to 0,\ t \to \infty, \tag{2.28}$$

равномерно относительно $c \in [1,\ 2]$. Пусть это не так. Тогда

$$\operatorname{dist}(w^{t_j},\ w^{c_j t_j}) \geqslant \varepsilon > 0 \tag{2.29}$$

для некоторых последовательностей $t_j \to \infty$ и $c_j \in [1,\ 2]$ Имеем

$$w^{c_j t_j}(z) = v_{c_j t_j}(z) + o(1) = c_j^{-\rho} v_{t_j}(c_j z) + o(1) =$$
$$= c_j^{-\rho} w^{t_j}(c_j z) + o(1) = w^{t_j}(z) + o(1),$$

так как $c^{-\rho} w(cz) = w(z)$ для любых $w \in W_n$ и $c > 0$. Получено противоречие с (2.29), которое доказывает (2.28).

Если $w^t = w(.\,,\ \varphi_0(t))$, то из (2.28) следует, что

$$|\exp(i\varphi_0(ct)) - \exp(i\varphi_0(t))| \to 0,\ t \to \infty,$$

равномерно относительно $c \in [1,\ 2]$. Учитывая (2.27), можно выбрать непрерывную функцию $\theta_0(t)$ так, чтобы выполнялось

$$v_t = w(.\,,\ \theta_0(t)) + o(1),\ \theta_0(ct) = \theta_0(t) + o(1),\ t \to \infty.$$

Отсюда с помощью теоремы В. С. Азарина о сходимости субгармонических функций по 1-мере [10] получаем утверждение 5).

3. Доказательство теоремы 2. Идея этого доказательства проста. Условие (1.3) означает, что функции $u_k$ имеют непересекающиеся носители, т. е. в каждой точке не более, чем одна из этих функций отлична от нуля. Отсюда мы выведем, что заряды $\mu_k$ имеют борелевские носители, которые пересекаются не более, чем по два, что немедленно влечет (1.4).

Реализация этой идеи сталкивается с некоторыми техническими трудностями, связанными с возможной разрывностью функций $u_k$ и сложным устройством множеств $\{z : u_k(z) > 0\}$.

Заметим, что теорему 2 достаточно доказать для конечного $\omega$. В самом деле из (1.3) следует такое же свойство для любого конечного набора индексов $k$. Если же доказано (1.4) для любого конечного набора индексов, то соотношение (1.4) в общем случае получается предельным переходом с учетом того, что $\mu_k \leqslant \mu$. Далее считаем, что $q = \omega < \infty$.

Приведем эквивалентную форму теоремы 2, представляющую самостоятельный интерес.

**Теорема 2′.** *Пусть $w_1, \ldots, w_q$ — субгармонические функции, $q \geqslant 2$, $w$ — их верхняя огибающая. Предположим, что для любых $i \neq j$ справедливо*

$$w = w_i \bigvee w_j. \tag{3.1}$$

*Тогда функция*

$$h = w + \bigwedge_{k=1}^{q} w_k = \sum_{k=1}^{q} w_k - (q-2)\, w \tag{3.2}$$

*субгармоническая.*

Чтобы вывести теорему 2′ из теоремы 2, положим $u_k = w - w_k$ и обозначим через $\mu$ риссовскую меру функции $w$. Поскольку функции $w_k$ субгармонические, имеем $\mu \geqslant \mu_k$, а в силу (1.4) $\Sigma\, \mu_k \leqslant 2\mu$, т. е. функция $2w - \sum u_k = (q-2)\, w - \sum w_k = h$ субгармоническая.

Теперь выведем теорему 2 из теоремы 2′. Положим $\mu = \bigvee \mu_k$, $\nu_k = \mu - \mu_k \geqslant 0$. Пусть $w$ есть $\delta$-субгармоническая функция с риссовским зарядом $\mu$. Положим $w_k = w - u_k$. Функции $w_k$ субгармонические, так как их риссовские заряды суть $\nu_k$. Из (1.3) следует (3.1). В частности, $w$ — субгармоническая функция как верхняя огибающая субгармонических. Наконец, из (3.2) вытекает

$$0 \leqslant \sum \nu_k - (q-2)\, \mu = \sum (\mu - \mu_k) - (q-2)\, \mu = 2\mu - \sum \mu_k,$$

то есть не что иное, как (1.4).

Формулировка теоремы 2′ имеет важное преимущество. Она позволяет свести дело к случаю непрерывных функций.

Для любой субгармонической функции $v$ положим $v^{\varepsilon}(z) = \max \times \{v(\zeta) : |\zeta - z| \leqslant \varepsilon\}$. Легко видеть, что функция $v^{\varepsilon}$ всегда непрерывна и субгармонична. Кроме того, операция $v \to v^{\varepsilon}$ коммутирует с взятием верхней огибающей. Предположим, что теорема 2′ доказана для непрерывных субгармонических функций. Пусть $w_1, \ldots, w_q$ — произвольные субгармонические функции со свойством (3.1). Тогда $w^{\varepsilon} = w_i^{\varepsilon} \bigvee w_j^{\varepsilon}$ для всех $i \neq j$, и мы получаем, что функция $h_{\varepsilon} = w^{\varepsilon} + \bigwedge_{k=1}^{q} w_k^{\varepsilon}$ субгармонична. Если $\varepsilon \to 0$, то $h_{\varepsilon} \to h$, монотонно убывая. Поэтому $h$ — субгармоническая функция. Этот способ сглаживания авторам указал В. С. Азарин. Таким образом, теорему 2 достаточно доказать для непрерывных функций.

Введем некоторые обозначения. Пусть $D$ — ограниченное открытое множество. Точка $z_0 \in \boldsymbol{C} \setminus D$ называется достижимой из $D$, если существует кривая $\gamma(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1$ такая, что $\gamma(t) \in D$, $0 < t < 1$ и $\gamma(1) = z_0$. Множество недостижимых из $D$ точек борелевское [11]. Определим функцию $G_D(z, \zeta)$ следующим образом: если $z$ и $\zeta$ содержатся в одной связной компоненте множества $D$, то $G_D(z, \zeta)$ — функция Грина этой компоненты с полюсом в точке $\zeta$; в противном случае $G_D(z, \zeta) = 0$. Так определенная функция $z \to G_D(z, \zeta)$ субгармонична в $\boldsymbol{C} \setminus \{\zeta\}$. Ее риссовская мера $\omega_D(\zeta, .)$ называется гармонической мерой относительно $D$ в точке $\zeta$.

**Лемма 2.** *Пусть $E^*$ — множество недостижимых из $D$ точек. Тогда $\omega_D(\zeta, E^*) = 0$, $\zeta \in D$.*

Этот результат известен (см., например, [12]). Самое наглядное доказательство получается с помощью вероятностной интерпретации гармонической меры: $\omega_D(\zeta, E)$ — это вероятность того, что броуновская частица, выходящая из точки $\zeta$, впервые покинет $D$ через множество $E$.

**Лемма 3.** *Пусть $v$ — непрерывная $\delta$-субгармоническая функция, $D = \{z : v(z) \neq 0\}$, $E^*$ — множество точек, недостижимых из $D$. Если $\nu$ — риссовский заряд функции $v$, то его сужение на множество $E^*$ равно нулю: $\nu|_{E^*} = 0$.*

Доказательство. Достаточно доказать лемму для финитной функции $v$, потому что для любого $R > 0$ и любой $\delta$-субгармонической функции $v$ существует финитная $\delta$-субгармоническая функция $v_R$ такая, что $v(z) = v_R(z)$, $|z| < R$.

Далее, можно считать, что $D$ — область. В самом деле, если $\{D_j\}$ — все связные компоненты множества $D$, то положим

$$v_j(z) = \begin{cases} v(z), & z \in D_j \\ 0, & z \notin D_j. \end{cases}$$

Доказав лемму для функций $v_j$, мы докажем ее и в общем случае.

Итак, пусть $v$ — финитная непрерывная $\delta$-субгармоническая функция и $D = \{z : v(z) \neq 0\}$ — область. Тогда $v$ — потенциал Грина,

$$v(z) = -\int_D G_D(z, \zeta)\, d\nu_\zeta, \quad z \in \mathbf{C}. \tag{3.3}$$

(Представление (3.3) справедливо всюду в $\mathbf{C}$ в силу нашего соглашения о функции Грина). Далее,

$$G_D(z, \zeta) = \int_{\mathbf{C}} \log|z - t|\, \omega_D(\zeta, dt) - \log|z - \zeta|.$$

Подставляя это выражение в (3.3) и применяя теорему Фубини, получаем

$$v(z) = \int_D \log|z - \zeta|\, d\nu_\zeta - \int_{\mathbf{C}} \log|z - \zeta|\, d\alpha_\zeta, \tag{3.4}$$

где заряд $\alpha$ определен так:

$$\alpha(E) = \int_D \omega_D(\zeta, E)\, d\nu_\zeta, \quad E \subset \mathbf{C}.$$

В частности, $\alpha(E) = 0$ для любого $E \subset E^*$ в силу леммы 2. Теперь из представления (3.4) видим, что сужение риссовского заряда функции $v$ на $E^*$ равно нулю. Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Пусть $\{D_j\}_{j=1}^q$ — попарно непересекающиеся открытые* *ножества в* $\boldsymbol{C}$. *Тогда множество точек, достижимых одновре-енно из трех различных* $D_j$, *не более, чем счетно.*

Доказательство. Достаточно показать следующее: если $B_1$, $B_2$, $B_3$ — попарно непересекающиеся области, то множество точек, остижимых одновременно из всех трех областей $B_j$, состоит не олее, чем из двух точек. Пусть это не так. Тогда существуют ри различные точки $z_1$, $z_2$, $z_3$, достижимые из $B_1$, $B_2$, $B_3$. Выберем о точке $w_i \in B_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Каждую точку $w_i$ можно соединить ремя попарно непересекающимися кривыми, лежащими в $B_i$, с точами $z_1$, $z_2$, $z_3$. Объединение всех этих кривых и точек $w_i$, $z_i$ образует граф $K_{3,3}$, вложенный в плоскость, что, как известно, невозможно. ротиворечие доказывает лемму.

Теперь закончим доказательство теоремы 2. Пусть $D_k = \{z : u_k(z) > 0\}$, $D_k^*$ — объединение $D_k$ с множеством всех точек, достижимых в $D_k$. Тогда по лемме 3 заряд $\mu_k$ сосредоточен на $D_k^*$, т. е. $\mu_k(E) = 0$ ля любого $E \subset \boldsymbol{C} \setminus D_k^*$. По лемме 4 множество $X$ точек, содержащихся в трех и более $D_k^*$, не более, чем счетно. Поскольку $u_k$ епрерывны, $\mu_k(E) = 0$ для всех $E \subset X$. Таким образом, заряды имеют борелевские носители $D_k^* \setminus X$, пересекающиеся не более, м по два. Отсюда с помощью неравенства $\nu_1 + \nu_2 \leqslant 2(\nu_1 \vee \nu_2)$, раведливого для любых зарядов, вытекает (1.4). Теорема доказа.

**сок литературы:** 1. *Drasin D.* Proof of a conjecture of F. Nevanlinna concerng function which have deficiency sum two//Acta Math. 1987. **158**, № 1, 2. P. –94. 2. *Еременко А. Э.* Новое доказательство теоремы Дрейсина о мероморфных нкциях конечного порядка с максимальной суммой дефектов//Теория функций, нкцион. анализ и их прил. 1989. Ч. I. Вып. 51. С. 107—116; ч. II. Вып. 52, 69—78. 3. *Osgood Ch.* Sometimes effective Thue—Siegel—Roth—Schmidt's—vanlinna bounds, or better//J. Number Theory. 1985. **21**. P. 347—389. 4. *Steintz N.* Eine Verallgemeinerung des zweiten Nevanlinnaschen Hauptsatzes J. Reine und Angew. Math. 1986. **B. 368**. S. 134—141. 5. *Qingzhong Li, Yasng Ye.* Sum of deficiency of deficient function and F. Nevanlinna's conjecture// ontemporary Math. 1985. **48**. P. 21—63. 6. *Еременко А. Э., Содин М. Л.* орая основная теорема теории распределения значений мероморфных кривых ля нелинейных дивизоров//Докл. АН СССР. 1990 Т. С.23. 7. *Drasin D., Shea D.* lya peaks and oscillation of positive functions//Proc. Amer. Math. Soc. 1972. . P. 403—411. 8. *Anderson J. M., Baernstein. A* The size of the set on which meromorphic function is large //Proc. London Math. Soc. 1978. **36**. P. 518—539. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. М., 1980. 304 с. 10. *зарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций//Мат. орник. 1979. **108**, № 2. С. 147—167. 11. *Mazurkiewicz S.* Uber erreichbare unkte//Fund. Math. 1936. B 26. S. 150—155. 12. *Brelot M., Choquet G.* Espaces lignes de Green//Ann. Inst. Fourier. 1952. 3. P. 199—263.

*Поступила в редколлегию 10.07.89*