ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ СВЯЗИ

ВЪ СЛУЧАѢ ОДНОЙ МАТЕРІАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

И. В. Мещерскаго.

---

§ 1. Связи вообще.

Всякое данное уравненіе, конечное или дифференціальное, относительно координатъ матеріальной точки представляетъ, вообще говоря, аналитическую связь, ибо оно выражаетъ условіе, въ силу котораго точка совершаетъ не то движеніе, какое ей стремятся сообщить приложенныя силы.

Всѣ аналитическія связи могутъ быть раздѣлены на двѣ группы: связи конечныя, уравненія которыхъ содержатъ только координаты и время, и связи дифференціальныя, въ уравненія которыхъ входятъ производныя координатъ.

Среди конечныхъ связей обыкновенно различаютъ тѣ, въ уравненія которыхъ время явно не входитъ, и другія, уравненія которыхъ явно содержатъ время. Связи дифференціальныя можно различать по порядку наивысшей производной, которая въ уравненіи связи встрѣчается.

Въ аналитической механикѣ могутъ быть разсматриваемы движенія матеріальной точки при существованіи не только конечныхъ связей, но и связей дифференціальныхъ какого угодно порядка.

Конечныя связи легко осуществляются въ формѣ поверхностей и представляютъ наиболѣе простой случай аналитическихъ связей. Благодаря этому механика до послѣдняго времени занималась исключительно конечными связями, а между тѣмъ дифференціальныя связи, по крайней мѣрѣ 1-го порядка, какъ увидимъ ниже, могутъ быть реализованы въ такой формѣ, которая въ механикѣ разсматривается.

§ 2. Дифференціальныя связи 1-го порядка.

Общій видъ уравненія дифференціальной связи 1-го порядка для одной матеріальной точки будетъ:

$$F(x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z',\ t)=0. \qquad (1)^*$$

Будемъ предполагать, что лѣвая часть этого уравненія не представляетъ полной производной, ибо въ противномъ случаѣ дифференціальная связь преобразуется въ связь конечную.

Если считать, что свободная матеріальная точка имѣетъ три степени свободы, то дифференціальная связь (1), подобно конечной связи, уничтожаетъ одну степень свободы.

Мы убѣдимся въ этомъ, присоединяя къ дифференціальной связи (1) двѣ конечныя связи:

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ t)=0$$
$$\psi(x,\ y,\ z,\ t)=0,$$

тогда кинематическое состояніе точки въ каждый моментъ будетъ вполнѣ опредѣлено, независимо отъ приложенныхъ къ ней силъ.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненій:

$$\varphi=0, \qquad \psi=0$$

* Ради краткости обозначаемъ вездѣ $\frac{dx}{dt}$ чрезъ x', $\frac{d^2x}{dt^2}$ чрезъ x'', $\frac{dy}{dt}$ чрезъ y' и т. д.

выразимъ x и y чрезъ z и t, а затѣмъ x' и y' чрезъ z, z', t, найденныя выраженія подставимъ въ уравненіе (1), тогда уравненіе это обратится въ дифференціальное уравненіе 1-го порядка относительно z; интегрируя его, получимъ z какъ опредѣленную функцію t. Подставивши эту функцію вмѣсто z въ выраженія x и y, получимъ x и y также какъ нѣкоторыя опредѣленныя функціи t*.

Дифференціальная связь можетъ быть осуществлена въ видѣ нѣкоторой среды, воздѣйствующей на матеріальную точку, въ ней находящуюся.

Эта среда должна обладать такими свойствами, что точка, подверженная ея вліянію и дѣйствію силъ задаваемыхъ, совершаетъ движеніе, удовлетворяющее данному уравненію дифференціальной связи.

Уравненіе дифференціальной связи 1-го порядка (1) можно разсматривать, какъ условіе, ограничивающее скорость точки; слѣдовательно, вліяніе среды выражается въ томъ, что она измѣняетъ скорость, которую стремятся сообщить точкѣ задаваемыя силы.

Причина, измѣняющая скорость, называется силой, слѣдовательно, вліяніе среды эквивалентно нѣкоторой силѣ, приложенной къ точкѣ.

Эта сила есть результатъ существованія дифференціальной связи (1). Мы можемъ назвать ее реакціей дифференціальной связи (1).

Обозначимъ проекціи на координатныхъ осяхъ реакціи связи (1) чрезъ L, M, N, а проекціи равнодѣйствующей силъ задаваемыхъ, приложенныхъ къ точкѣ, чрезъ X, Y, Z; пусть m будетъ масса точки, тогда уравненія движенія будутъ:

* То же разсужденіе, очевидно, примѣнимо къ случаю дифференціальной связи n-го порядка, и мы приходимъ къ заключенію, что связь какого угодно порядка уничтожаетъ одну степень свободы матеріальной точки.

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= X + L \\ my'' &= Y + M \\ mz'' &= Z + N \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Присоединяя сюда уравненіе (1), мы получимъ всего 4 уравненія, въ которыхъ 6 неизвѣстныхъ величинъ: x, y, z, L, M, N; поэтому изъ трехъ величинъ, опредѣляющихъ реакцію, двѣ можемъ считать произвольными. Мы сдѣлаемъ предположеніе, которое представляется наиболѣе естественнымъ, именно, что реакція связи направлена по линіи скорости точки. Величину реакціи обозначимъ чрезъ λ; тогда будемъ имѣть только 4 неизвѣстныхъ: x, y, z, λ, связанныхъ 4 уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= X + \lambda \frac{x'}{v} \\ my'' &= Y + \lambda \frac{y'}{v} \\ mz'' &= Z + \lambda \frac{z'}{v} \end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

$$F(x, y, z, x', y', z', t) = 0. \qquad (1)$$

Знакъ той величины, которая получится для λ изъ уравненій (3)* и (1), покажетъ, направлена ли реакція въ ту же сторону, какъ и скорость точки (когда $\lambda > 0$), или въ сторону противоположную (когда $\lambda < 0$).

Въ послѣднемъ случаѣ дифференціальная связь осуществляется въ видѣ сопротивляющейся среды; сопротивленіе среды представляетъ реакцію связи.

Для того, чтобы опредѣлить движеніе точки, исключимъ изъ уравненія (3) $\frac{\lambda}{v}$; получимъ:

---

* v обозначаетъ скорость точки.

$$m(x'y''-y'x'')=x'Y-y'X,$$
$$m(y'z''-z'y'')=y'Z-z'Y.$$

Проинтегрировавъ эти уравненія вмѣстѣ съ ур. (1), найдемъ x, y, z какъ функціи t; постоянныя интегрированія опредѣляются начальнымъ положеніемъ и начальною скоростью точки.

Составимъ затѣмъ выраженіе для v въ функціи t; тогда реакція связи λ опредѣлится изъ уравненія:

$$\lambda=m\frac{dv}{dt}-F\cos(Fv),$$

гдѣ F равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ, а (Fv) уголъ, который она образуетъ съ направленіемъ скорости.

Матеріальная точка можетъ быть одновременно подвержена двумъ связямъ, конечной и дифференціальной:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(x,\ y,\ z,\ t)=0\\&F(x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z',\ t)=0\end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

Въ этомъ случаѣ дифференціальную связь можно осуществить не только посредствомъ среды, но также въ видѣ шероховатости той поверхности, которая соотвѣтствуетъ конечной связи; треніе представляетъ тогда реакцію дифференціальной связи.

Обозначая реакцію конечной связи чрезъ μ, будемъ имѣть слѣдующія уравненія движенія:

$$\left.\begin{aligned}mx''&=X+\lambda\frac{x'}{v}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\my''&=Y+\lambda\frac{y'}{v}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial y}\\mz''&=Z+\lambda\frac{z'}{v}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{aligned}\right\}. \qquad (5)$$

Проинтегрировавши вмѣстѣ съ ур. (4) то уравненіе, которое останется послѣ исключенія λ и μ изъ ур. (5), найдемъ реакціи λ и μ изъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \lambda - \frac{\mu}{v}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= m\frac{dv}{dt} - F\cos(Fv) \\ \frac{\lambda}{v}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mu.\Delta^2\varphi &= mK + F\cos(Fn) \end{aligned}\right\}, \quad (6)$$

гдѣ
$$\Delta^2\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2,$$
$$K = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}x'' + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y'' + \frac{\partial\varphi}{\partial z}z''\right),$$

и гдѣ n обозначаетъ направленіе внѣшней нормали къ поверхности $\varphi = 0$.

При рѣшеніи частныхъ вопросовъ указанный общій пріемъ не всегда приводитъ къ цѣли вслѣдствіе частныхъ затрудненій; мы должны избрать тогда иной путь, болѣе соотвѣтствующій характеру вопроса.

Аналитическая механика владѣетъ многими важными преобразованіями и предложеніями для случая конечныхъ связей, въ уравненія которыхъ время явно не входитъ; только весьма немногія изъ этихъ преобразованій и предложеній имѣютъ мѣсто и тогда, когда уравненія конечныхъ связей явно содержатъ время. При существованіи дифференціальной связи, какъ не трудно убѣдиться, они теряютъ свое значеніе; въ этомъ случаѣ нельзя ввести независимыхъ координатныхъ параметровъ; въ уравненія, соотвѣтствующія законамъ сохраненія живой силы и площадей, началамъ Д'Аламбера и Гамильтона, входитъ вмѣстѣ съ задаваемыми силами и реакція дифференціальной связи; принципъ послѣдняго множителя, вообще говоря, не имѣетъ мѣста.

§ 3. Примѣры.

Мы разсмотримъ только два примѣра, въ которыхъ движеніе матеріальной точки подчинено дифференціальной связи 1-го порядка.

Эти примѣры покажутъ намъ, что дифференціальная связь 1-го порядка можетъ осуществляться въ видѣ такой среды или такой шероховатости поверхности, которыя встрѣчаются въ извѣстныхъ задачахъ аналитической механики. Кромѣ того мы увидимъ, что рѣшеніе нѣкоторыхъ вопросовъ о движеніи точки и при существованіи дифференціальной связи можетъ быть доведено до конца.

Примѣръ I. Точка притягивается къ неподвижному центру силою прямо пропорціональною кубу разстоянія: $F = k^2 m r^3$; требуется опредѣлить движеніе этой точки при томъ условіи, чтобъ скорость ея была прямо пропорціональна квадрату разстоянія, именно: $v = kr^2$ (7).

Движеніе будетъ происходить, очевидно, въ плоскости, проходящей чрезъ притягивающій центръ и начальное направленіе скорости.

Примемъ центръ за начало координатъ, тогда условное уравненіе представится въ видѣ:

$$x'^2 + y'^2 = k^2 (x^2 + y^2)^2. \qquad (7')$$

Это есть уравненіе дифференціальной связи 1-го порядка и притомъ такой, которую нельзя преобразовать въ связь конечную. Уравненія движенія будутъ:

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= -k^2 m r^2 x + \lambda \frac{x'}{v} \\ my'' &= -k^2 m r^2 y + \lambda \frac{y'}{v} \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

Умножаемъ первое изъ уравненій (8) на x', второе на y' и складываемъ:

$$m(x'x''+y'y'')=-k^2mr^2(xx'+yy')+\lambda v.$$

Отсюда $$m\frac{dv}{dt}=-k^2m\frac{r^3}{v}\frac{dr}{dt}+\lambda;$$

замѣняя v чрезъ kr^2, находимъ:

$$\lambda=3kmr\frac{dr}{dt}\cdot \tag{9}$$

Умножаемъ затѣмъ первое изъ ур. (8) на x, второе на y и складываемъ:

$$m(xx''+yy'')=-k^2mr^4+\lambda\frac{xx'+yy'}{v}, \tag{10}$$

и такъ какъ имѣемъ:

$$xx''+yy''=r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-v^2,$$

$$k^2mr^4=mv^2,$$

$$\frac{\lambda}{v}\left(xx'+yy'\right)=3m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

то послѣ подстановки въ ур. (10) получимъ:

$$r\frac{d^2r}{dt^2}=2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

Уравненіе это интегрируется. Положимъ

$$r=\frac{1}{z};$$

тогда оно обратится въ слѣдующее:

$$\frac{1}{z^3}\ \frac{d^2z}{dt^2}=0$$

и по выполненіи интеграціи находимъ:

$$z = at + b,$$

слѣдовательно,

$$r = \frac{1}{at + b}, \tag{11}$$

гдѣ a и b постоянныя.

И такъ
$$v = \frac{k}{(at+b)^2}.$$

Изъ формулы (11):

$$\frac{dr}{dt} = -ar^2;$$

подставляя это въ формулу (9), получимъ:

$$\lambda = -3kamr^3$$

или
$$\lambda = -\frac{3am}{kr}v^2. \tag{12}$$

Остается опредѣлить уголъ θ, который радіусъ-векторъ точки образуетъ съ осью x-овъ.

Изъ ур. (8) слѣдуетъ:

$$m(xy'' - yx'') = \frac{\lambda}{v}(xy' - yx').$$

Принимая во вниманіе формулы (7) и (9), интегрируемъ и находимъ:

$$xy' - yx' = 2cr^3,$$

гдѣ c постоянная.

Отсюда
$$\frac{d\theta}{dt} = cr$$

или
$$d\theta = \frac{c\,dt}{at+b};$$

слѣдовательно, $\qquad \theta - \alpha = \frac{c}{a}\lg(at+b), \qquad (13)$

гдѣ α постоянная.

Траекторія точки будетъ логариѳмическая спираль. Уравненіе ея получаемъ, исключая t изъ формулъ (11) и (13):

$$r = e^{-\frac{a}{c}(\theta-\alpha)}.$$

Постоянныя a, b, c, α опредѣляются начальными значеніями r, θ и угла φ, составляемаго скоростью съ радіусомъ-векторомъ:

$$a = k\cos\varphi_0, \qquad c = k\sin\varphi_0,$$

$$b = \frac{1}{r_0}, \qquad \alpha = \theta_0 - \operatorname{tg}\varphi_0 \lg\frac{1}{r_0}.$$

При $\varphi_0 < 90^\circ$ имѣемъ $\lambda < 0$. Слѣдовательно, реакція дифференціальной связи направлена противоположно скорости точки; величина этой реакціи:

$$-\lambda = \frac{3m\cos\varphi_0}{r}v^2.$$

Мы имѣемъ, слѣдовательно, въ настоящемъ примѣрѣ тотъ случай движенія въ сопротивляющейся средѣ, который въ механикѣ разсматривается, именно, когда сопротивленіе $= \frac{3m\cos\varphi_0}{r}v^2$.

Примѣръ II. Опредѣлить движеніе тяжелой точки по наклонной плоскости, которое должно удовлетворять условію:

$$a^2x'^{1-k} - x'^{1+k} - 2ay' = 0. \qquad (14)$$

Уравненіе это составлено въ томъ предположеніи, что наклонная плоскость принята за плоскость xy-овъ, ось x-овъ горизонтальна, а ось y-овъ направлена внизъ по линіи наибольшаго ската.

Дифференціальная связь 1-го порядка (14) не можетъ быть замѣнена конечною связью.

Пусть α есть уголъ наклоненія плоскости къ горизонту, тогда уравненія движенія будутъ:

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= \lambda \frac{x'}{v} \\ my'' &= mg\sin\alpha + \lambda \frac{y'}{v} \\ mz'' &= -mg\cos\alpha + \mu = 0 \end{aligned}\right\} . \qquad (15)$$

Изъ третьяго ур. (15) получается реакція плоскости

$$\mu = mg\cos\alpha.$$

Опредѣлимъ реакцію λ дифференціальной связи.

Исключая λ изъ ур. (15), получимъ:

$$x'y'' - y'x'' = g\sin\alpha . x'$$

или

$$x' . \frac{d}{dt} \cdot \frac{y'}{x'} = g\sin\alpha,$$

но изъ ур. (14):

$$\frac{y'}{x'} = \frac{a^2 x'^{-k} - x'^k}{2a},$$

слѣдовательно,

$$\frac{x'}{2a} \frac{d}{dt}\left(a^2 x'^{-k} - x'^k\right) = g\sin\alpha$$

или

$$\frac{k}{2a} x''\left(a^2 x'^{-k} + x'^k\right) = -g\sin\alpha. \qquad (16)$$

Изъ ур. (14) слѣдуетъ:

$$v = ax'^{1-k} - y' = \frac{x'}{2a}\left(a^2 x'^{-k} + x'^k\right),$$

откуда

$$\frac{a^2 x'^{-k} + x'^k}{2a} = \frac{v}{x'}.$$

Подставляя это выраженіе въ формулу (16), получимъ:

$$k\frac{x''}{x'}v = -g\sin\alpha.$$

Но въ силу перваго изъ ур. (15):

$$\lambda = m\frac{x''}{x'}v,$$

слѣдовательно:

$$\lambda = -\frac{1}{k}mg\sin\alpha. \qquad (17)$$

Мы получили $\lambda < 0$. Это значитъ, что реакція дифференціальной связи (14) направлена противоположно скорости точки; величина реакціи $\frac{1}{k}mg\sin\alpha$.

Точно также выражается величина тренія при движеніи тяжелой точки по наклонной плоскости, составляющей уголъ α съ горизонтомъ, если коеффиціентъ тренія будетъ $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{k}$.

Такимъ образомъ, въ примѣрѣ II мы имѣемъ извѣстный случай движенія тяжелой точки по негладкой наклонной плоскости; формулы для этого случая можно найти во многихъ курсахъ аналитической механики.